Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 28, № 144, 2023

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) (категория К1)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Редакторы: М.И. Филатова, М.А. Сенина
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Бударин
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28, № 144. 112 с. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144

Подписано в печать 01.12.2023. Дата выхода в свет
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 14,0. Усл. печ. л. 13,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 23299. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 28, no. 144, 2023

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialty 1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences) (category K1)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka", Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences". ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Derzhavin Tambov State University"
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC "Ural-Press" is 83372

Editors: M.I. Filatova, M.A. Senina
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Budarin
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. 2023. Vol. 28, no. 144. 112 p. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144

Signed for printing 01.12.2023. Release date
Format A4 (60×84 1/8). Typeface "Times New Roman". Printed on risograph.
Pr. sheet 14,0. Conv. pr. sheet 13,0. Copies printed 1000. Order no. 23299. Free price

Publisher: FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy" of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-361-370

УДК 517.988.5

Конусное обобщение теоремы Банаха и накрывание вдоль кривых

Арам Владимирович АРУТЮНОВ, Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию свойства накрывания линейных и нелинейных отображений банаховых пространств. Рассмотрен линейный непрерывный оператор, действующий из одного банахового пространства в другое. Показано, что для любой точки y_0 из относительной внутренности образа заданного выпуклого замкнутого конуса существует коническая окрестность этой точки, относительно которой заданный оператор обладает свойством накрывания в нуле с константой накрывания, зависящей от точки y_0. Приведен пример, показывающий, что линейный непрерывный оператор может не обладать свойством накрывания относительно образа заданного конуса в нуле, т. е. для сужений линейных непрерывных операторов на замкнутые выпуклые конусы утверждение теоремы Банаха об открытом отображении может не выполняться. Приведено следствие полученной теоремы для случая, когда пространство, в которое действует заданный оператор, конечномерно. Рассмотрены нелинейные дважды дифференцируемые отображения банаховых пространств. Для них приведены условия локального накрывания вдоль некоторой кривой относительно заданного конуса. Соответствующие достаточные условия сформулированы в терминах 2-регулярных направлений. Они остаются содержательными и в случае вырождения первой производной рассматриваемого отображения в заданной точке.

Ключевые слова: теорема Банаха об открытом отображении, выпуклый конус, анормальная точка, 2-регулярность, накрывание вдоль кривой

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/).

Для цитирования: *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Конусное обобщение теоремы Банаха и накрывание вдоль кривых // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 361–370. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-361-370

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-361-370

Generalization of Banach's theorem for cones and covering along curves

Aram V. ARUTYUNOV, Sergey E. ZHUKOVSKIY
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. This work is devoted to the study of the covering property of linear and nonlinear mappings of Banach spaces. We consider linear continuous operators acting from one Banach space to another. For a given operator, it is shown that for any point y_0 from the relative interior of the image of a given convex closed cone there exists a conical neighborhood of y_0, with respect to which the given operator has the covering property at zero with a covering constant depending on the point y_0. We provide an example showing that for a linear continuous operator the covering property with respect to the image of a given cone at zero may fail, i. e. the statement of Banach's theorem on an open mapping may not hold for restrictions of linear continuous operators to closed convex cones. We obtain a corollary of the obtained theorem for the case when the target space is finite-dimensional. Moreover, nonlinear twice differentiable mappings of Banach spaces are considered. For them, conditions for local covering along a certain curve with respect to a given cone are presented. The corresponding sufficient conditions are formulated in terms of 2-regular directions. They remain meaningful even in the case of degeneracy of the first derivative of the mapping under consideration at a given point.

Keywords: Banach's open mapping theorem, convex cone, abnormal point, 2-regularity, covering along a curve

Acknowledgements: The research was supported by a grant of the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/20-11-20131/).

Mathematics Subject Classification: 47J07.

For citation: Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Generalization of Banach's theorem for cones and covering along curves. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 361–370. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-361-370 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть X и Y — это банаховы пространства, $F : X \to Y$ — это гладкое отображение. При исследовании уравнений вида $F(x) = y$ с неизвестным $x \in X$ и параметром $y \in Y$ важную роль играет теорема Банаха об открытом отображении. В настоящей работе мы рассмотрим систему, состоящую из уравнения $F(x) = y$ и включения $x \in K$, где $K \subset X$ — это замкнутый выпуклый конус. Для исследования этой системы мы получим аналог теоремы Банаха об открытом отображении для сужений линейного непрерывного оператора на конус K. Мы приведем достаточные условия разрешимости рассматриваемой системы при значениях параметра y близких к некоторой кривой в терминах 2-регулярных направлений.

1. Основные результаты

Пусть заданы банаховы пространства X и Y, а также выпуклый замкнутый конус K из X. Пусть $A : X \to Y$ — это линейный ограниченный оператор. Через $B_\delta(y)$ обозначим замкнутую δ-окрестность точки $y \in Y$.

Положим $C = A(K)$. Очевидно, что C — это выпуклый конус, правда необязательно замкнутый. Будем предполагать, что подпространство $\mathrm{Lin}C$ — линейная оболочка конуса C, замкнуто и относительная внутренность $\mathrm{ri}C$ непуста. Эти предположения автоматически выполняются, если пространство Y конечномерно.

Спрашивается, верно ли, что существует такая константа $a > 0$, что имеет место

$$\forall\, y \in C \quad \exists\, x \in K : \quad Ax = y, \quad \|x\| \le a\|y\|? \tag{1.1}$$

Иными словами, справедливо ли конусное обобщение теоремы Банаха об открытом отображении?

Если не предполагать замкнутость конуса C, то соответствующий контрпример строится несложно. Поэтому предположим, что конус C замкнут. Если, кроме того, конус C конечнопорожденный, т. е. является выпуклой оболочкой конечного числа лучей, то существование искомого a очевидно. В общем же случае даже в предположении замкнутости и конечномерности C ответ на поставленный вопрос отрицателен, что показывает следующий

Пример 1.1. Пусть $X = l_2$, $K = \{(x^1, x^2, \dots) \in l_2 : x^i \ge 0\ \forall\, i\}$, т. е. K — это неотрицательный ортант в l_2 и $Y = \mathbb{R}^3$. Выберем в $\mathbb{R}^3$ последовательность векторов d_i следующим образом. Пусть $d_i = (q_i, 1)$, где q_i — двумерный единичный вектор из $\mathbb{R}^2$, составляющий с осью абсцисс угол $2\pi(1 - (i+1)^{-1})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда $|d_i| = \sqrt{2}$ для всех i и $d_i \to d_0 = (1, 0, 1)$ при $i \to \infty$.

Определим линейный непрерывный оператор A на ортах $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ по формуле $Ae_i = i^{-1}d_i$, т. е. $Ax = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i^{-1}x^i d_i$. Через C обозначим выпуклую коническую оболочку векторов d_i, $i = 0, 1, \dots$.

Непосредственно проверяется, что $A(K) = C$, конус C замкнут и в каждый вектор d_i оператором A переводится единственный вектор из K — это вектор ie_i. Следовательно, (1.1) не выполняется.

Отметим, что этот пример можно модифицировать так, что (1.1) нарушается уже при $X = \mathbb{R}^4$.

Сначала докажем утверждение, которое является модификацией леммы из [1, с. 260].

Лемма 1.1. *Пусть* B *— это замкнутый шар положительного радиуса, лежащий во внутренности* $\mathrm{int}C$ *множества* C *и* $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{\alpha\in(0,1]} \alpha B$ *— это объединение множеств* αB *по всем* $\alpha \in (0,1]$. *Пусть множество* D *всюду плотно в* $\mathcal{B}$.

Тогда произвольный $y \in \mathrm{int}B$, $y \neq 0$ *можно разложить в ряд так, что имеет место*

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i, \quad y_i \in D, \quad \|y_i\| \le 3\|y\|2^{-i}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Вначале покажем, что для любого $\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$, $\eta \neq 0$ выполняется

$$\exists \xi \in D: \quad 0 \neq \eta - \xi \in \mathrm{int}\mathcal{B}, \quad \|\eta - \xi\| \le \frac{1}{2}\|\eta\|. \tag{1.3}$$

Действительно, $\eta - 3/4\eta = 1/4\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$. Поэтому в D найдется такой достаточно близкий к вектору $3/4\eta$ вектор $\xi \in D$, что $0 \neq \eta - \xi \in \mathrm{int}\mathcal{B}$, $\|3/4\eta - \xi\| \le 1/4\|\eta\|$. Очевидно, имеет место

$$\|\eta - \xi\| \le 1/4\|\eta\| + \|3/4\eta - \xi\| \le 1/4\|\eta\| + 1/4\|\eta\| = 1/2\|\eta\|$$

и, значит, для ξ выполняется (1.3).

Возьмем произвольный вектор $y \in \mathrm{int}B$, $y \neq 0$ и для него построим искомое разложение. Вначале положим $\eta = y$. Тогда $\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$ и $\eta \neq 0$. Поэтому в силу (1.3) существует такой $y_1 = \xi \in D$, что

$$0 \neq y - y_1 \in \mathrm{int}\mathcal{B}, \quad \|y - y_1\| \le 2^{-1}\|y\|.$$

Далее, возьмем $\eta = y - y_1$. Тогда $\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$, $\eta \neq 0$. Поэтому в силу (1.3) и предыдущего неравенства существует такой вектор $y_2 = \xi \in D$, что имеет место

$$0 \neq y - y_1 - y_2 \in \mathrm{int}\mathcal{B}, \quad \|y - y_1 - y_2\| \le 2^{-1}\|y - y_1\| \le 2^{-2}\|y\|.$$

И вообще, построив $y_1, \dots, y_{i-1}$, положим $\eta = y - \sum\limits_{l=1}^{i-1} y_l$. Тогда из построения этих векторов вытекает, что $\eta \in \mathrm{int}\mathcal{B}$, $\eta \neq 0$ и неравенство

$$\left\| y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l \right\| \le \|y\|2^{-i+1}.$$

Поэтому в силу (1.3) и этого неравенства вытекает существование такого вектора $y_i = \xi \in D$, что имеет место

$$0 \neq y - \sum_{l=1}^{i} y_l \in \mathrm{int}\mathcal{B}, \quad \left\| y - \sum_{l=1}^{i} y_l \right\| \le \frac{1}{2}\left\| y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l \right\| \le \frac{1}{2}2^{-i+1}\|y\| = 2^{-i}\|y\|.$$

Процесс построения последовательности $\{y_i\}$ описан.

По построению имеем $\left\| y - \sum\limits_{l=1}^{i} y_l \right\| \to 0$ при $i \to \infty$, т. е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$ сходится. Оценим нормы y_i. Имеем $\|y_1\| \le \|y - y_1\| + \|y\| \le 2^{-1}3\|y\|$. Для каждого номера i выполнено

$$\|y_i\| = \|y_i + \dots + y_1 - y + y - y_1 - \dots - y_{i-1}\|$$

$$\le \left\| \sum_{l=1}^{i} y_l - y \right\| + \left\| y - \sum_{l=1}^{i-1} y_l \right\| \le 2^{-i}\|y\| + 2^{-(i-1)}\|y\| = 3\|y\|2^{-i}.$$

Значит построенное разложение является искомым. □

Из леммы вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Для любого* $y_0 \in \mathrm{ri}C$ *существуют такие, зависящие от* y_0, *числа* $\delta > 0$ *и* $a > 0$, *что*

$$\forall\, y \in \mathrm{cone}B_\delta(y_0) \bigcap C \quad \exists\, x \in K : \quad Ax = y, \quad \|x\| \le a\|y\|. \tag{1.4}$$

Здесь и ниже $\mathrm{cone}B = \bigcup\limits_{\alpha \ge 0} \alpha B$ *— это коническая оболочка множества* B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $y \in C$ рассмотрим задачу

$$\|x\| \to \inf, \quad Ax = y, \quad x \in K,$$

где y — это параметр. Через $p(y)$ обозначим инфимум в ней. По построению $p(y) < \infty$ для любого $y \in C$. Кроме того, функция p, очевидно, выпукла. Докажем, что p ограничена сверху на некотором непустом, открытом относительно $\mathrm{Lin}C$ подмножестве.

Используя наложенное выше условие, что подпространство $\mathrm{Lin}C$ замкнуто, переходя, если надо, к подпространству $\mathrm{Lin}C$, будем считать, что $Y = \mathrm{Lin}C$. Теперь, используя предположение, что относительная внутренность $\mathrm{ri}C$ непуста, получаем, что и его внутренность $\mathrm{int}C$ непуста, т. к. $0 \in C$. Поэтому существует такой непустой открытый шар O, что $O = O \bigcap \mathrm{Lin}C \subset C$.

Возьмем лежащий в $\mathrm{int}C$ замкнутый шар положительного радиуса $\tilde{B}$. Для натуральных i положим

$$C_i = \{y \in Y : y = Ax, \quad x \in K, \quad \|x\| \le i\|y\|\}.$$

Тогда по построению имеем $\bigcup\limits_i C_i = C$, откуда легко вытекает, что $\bigcup\limits_i (C_i \bigcap \widetilde{B}) = \widetilde{B}$.

Применим теорему Бэра о категориях к полному метрическому пространству $\widetilde{B}$. В силу этой теоремы существуют такие замкнутый шар положительного радиуса $B \subset \widetilde{B}$ и натуральное число N, что $C_N \bigcap B$ всюду плотно в B. Ясно, что $B \subset \mathrm{int}C$. Положим $D = \bigcup\limits_{\alpha \in (0,1]} \alpha(C_N \bigcap B)$. Очевидно, что D всюду плотно в $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{\alpha \in (0,1]} \alpha B$.

Возьмем произвольное $y \in \mathrm{ri}B$, $y \ne 0$. По лемме 1.1 существует разложение (1.2). Поэтому имеем

$$y_i \in D \;\Rightarrow\; \exists\, x_i \in K : \quad Ax_i = y_i, \quad \|x_i\| \le N\|y_i\|; \quad \|y_i\| \le 3\|y\|2^{-i} \;\Rightarrow\; \|x_i\| \le 3N\|y\|2^{-i} \quad \forall\, i.$$

Значит, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится к некоторому x, причем $x \in K$ в силу замкнутости K.

Применяя почленно к ряду $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ непрерывный оператор A, получаем $Ax = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i = y$. Кроме того, $\|x\| \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \le 3N\|y\|$. Таким образом,

$$\forall\, y \in \mathrm{ri}B \quad \exists\, x \in K : \quad Ax = y, \quad \|x\| \le 3N\|y\|,$$

и, значит, на шаре $\mathrm{ri}B$ функция p ограничена сверху числом $3N$. Таким образом, p выпукла, конечна во всех точках множества C и ограничена сверху на некотором непустом открытом множестве. Поэтому (см. [2, предложение 2.5]) функция p непрерывна на $\mathrm{ri}C$. Отсюда непосредственно вытекает справедливость неравенства (1.4) для некоторых $a > 0$ и $\delta > 0$. □

Следствие 1.1. (Это обобщение леммы 2.1 из [3]). *Пусть конус C содержит замкнутое подпространство Y_1. Тогда существует $a > 0$ такое, что*

$$\forall\, y \in Y_1 \quad \exists\, x \in K: \quad Ax = y, \quad \|x\| \le a\|y\|.$$

Если $C = Y_1$, то это вытекает из теоремы 1.1 при $y_0 = 0$. Общий случай сводится к указанному переходом от конуса K к конусу $\widetilde{K} = K \bigcap A^{-1}(Y_1)$.

Следствие 1.2. *Пусть $x_0 \in K$, $Ax_0 = y_0 \in \mathrm{ri}C$. Тогда существуют такие, зависящие от x_0, числа $\delta > 0$ и $a > 0$, что*

$$\forall\, \xi \in B_\delta(x_0) \cap K \quad \forall\, y \in B_\delta(y_0) \cap C \quad \exists\, x \in K: \quad Ax = y, \quad \|x - \xi\| \le a\|y - A\xi\|.$$

Доказательство. Возьмем числа $\delta > 0$ и $a > 0$, которые отвечают y_0 в силу теоремы 1.1. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что имеет место $A(B_\varepsilon(x_0)) \subseteq B_\delta(y_0)$. Для произвольных фиксированных $y \in B_\delta(y_0)$, $\xi \in B_\varepsilon(x_0)$ рассмотрим задачу минимизации по x

$$\|x - \xi\| \to \inf, \quad Ax = y, \quad x \in K$$

(ξ, y — параметры). Инфимум в ней обозначим через $p_\xi(y)$.

Каждая из функций p_ξ выпукла, и в силу теоремы 1.1 эти функции p_ξ ограничены равномерно по $\xi \in B_\varepsilon(x_0)$ на некотором относительно открытом множестве $B_\delta(y_0)$. Отсюда, повторяя дословно рассуждения, приведенные в [2, с. 22–23] (см. следствие 2.4 и замечание к нему), получаем, что в некоторой окрестности y_0 все функции p_ξ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой Липшица a. Из очевидных соотношений

$$p_\xi(A\xi) = 0 \implies p_\xi(y) = |p_\xi(y) - p_\xi(A\xi)| \le a\|y - A\xi\|$$

получаем требуемое. При этом мы, выбрав из чисел ε и δ наименьшее, обозначили его символом δ. $\square$

Теорема 1.2. *Пусть пространство Y конечномерно. Тогда для любого замкнутого выпуклого конуса $\widetilde{C}$, для которого $\widetilde{C} \setminus \{0\} \subset \mathrm{ri}C$, существует такое $a > 0$, что имеет место*

$$\forall\, y \in \widetilde{C} \quad \exists\, x \in K: \quad Ax = y, \quad \|x\| \le a\|y\|. \tag{1.5}$$

Это утверждение вытекает из теоремы 1.1 и соображений компактности, применительно к единичной сфере конечномерного пространства.

Следующий пример показывает, что в приведенной теореме предположение о конечномерности Y существенно.

Пример 1.2. Суть конструкции такова. Пусть Y — это бесконечномерное гильбертово пространство, а $\widetilde{C}$ и C — это ненулевые замкнутые выпуклые конусы в нем, причем $B_\delta(\widetilde{C} \bigcap S) \subset C$ для некоторого $\delta > 0$. Здесь S единичная сфера, а $B_\delta(M)$ — это δ-окрестность множества M. При этом имеет место $\widetilde{C} \setminus \{0\} \subset \mathrm{ri}C$.

Предположим, что существует определенная на C конечная неотрицательная положительно-однородная выпуклая функция p, которая непрерывна на $C \setminus \{0\}$, однако неограничена на $\widetilde{C} \bigcap S$. Доопределив функцию p вне C как $+\infty$, в гильбертовом пространстве $X = Y \times \mathbb{R}^1$ рассмотрим ее надграфик $K = \{x = (y, \alpha) : y \in C,\ \alpha \ge p(y)\}$. Очевидно, что K — это выпуклый замкнутый конус. Определим линейный непрерывный оператор проектирования $A : X \to Y$ формулой $Ax = y$, где $x = (y, y^0)$, $y \in Y$, $y^0 \in \mathbb{R}^1$. По построению $A(K) = C$.

В то же время для конуса $\widetilde{C}$ условие (1.5) нарушается. Это вытекает из того, что по построению $|x| \geq p(y)$ для любых $y \in C$ и $x \in K$, для которых $Ax = y$, а по предположению функция p неограничена на $\widetilde{C} \bigcap S$. Нам осталось построить искомые конусы C, $\widetilde{C}$ и функцию p. Сделаем это.

Итак, пусть Y — это гильбертово пространство с ортонормированным базисом $e_0, e_1, \ldots$ Конус C определим так

$$C = \{y = \alpha(e_0 + e) : \alpha \geq 0, \quad e \in Y, \quad \langle e, e_0 \rangle = 0, \quad |e| \leq 1\}.$$

Очевидно, конус C является выпуклым и замкнутым. Выберем число $\beta \in (-1, 0)$ так, что $2\beta^2 > 1$. Определим последовательности векторов $g_n = \beta e_0 + e_n$ и конусов $G_n = \{y \in Y : \langle y, g_n \rangle \geq 0\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Используя определение β непосредственной проверкой получаем, что $C \bigcap G_i \bigcap G_j = \{0\}$ $\forall\, i \neq j$. Для $y \in C$ положим $p(y) = \max\limits_{n \geq 0}(n\langle g_n, y \rangle)$, где $g_0 = 0$. Функция p определена корректно и конечна на C, т. к. в силу сказанного выше для любого $y \in C$ неравенство $\langle g_n, y \rangle > 0$ выполняется не более чем для одного натурального n. Ясно, что функция p положительно-однородна, выпукла и непрерывна на C в каждой точке $y \neq 0$.

Выберем число $\gamma < 1$ так, что $\beta + \gamma > 0$ и определим конус $\widetilde{C}$ по формуле

$$\widetilde{C} = \{y = \alpha(e_0 + e) : \alpha \geq 0, \quad e \in Y, \quad \langle e, e_0 \rangle = 0, \quad |e| \leq \gamma\}.$$

Легко видеть, что $B_\delta(\widetilde{C} \bigcap S) \subset C$ для $\delta = \frac{1}{2}(1 - \gamma)(1 + \gamma^2)^{-1/2}$. В то же время при $y_n = (1 + \gamma^2)^{-1/2}(e_0 + \gamma e_n)$ имеем $y_n \in \widetilde{C} \bigcap S$ $p(y_n) = n(1 + \gamma^2)^{-1/2}(\beta + \gamma) \to \infty$ при $n \to \infty$. Искомые $C, \widetilde{C}, p$ построены.

Из теоремы 1.1 вытекает следующая теорема о $\Gamma-$ накрывании в точке по кривой относительно конуса K. Итак, пусть x_0 — это заданная точка в X, $y_0 = F(x_0)$ и задано отображение $F : X \to Y$. Это отображение F предполагается дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше в некоторой окрестности точки x_0, а его вторая производная предполагается липшицевой в этой окрестности. Пусть также задана непрерывная кривая $\phi : [0, r_0] \to Y$, которая начинается в точке y_0, т. е. $\phi(0) = y_0$. Здесь r_0 — это некоторое положительное число.

Пусть в Y задано семейство подмножеств $\Gamma(r)$, зависящее от скалярного параметра $r \geq 0$, которое удовлетворяет следующим свойствам: это семейство возрастает по включению, т. е. имеет место

$$\Gamma(r_1) \subset \Gamma(r_2) \quad \forall\, r_1 < r_2,$$

и $\Gamma(0) = \{0\}$.

Определение 1.1. Скажем, что отображение F является $\Gamma-$ накрывающим в точке x_0 по кривой ϕ относительно конуса K, если имеет место

$$F(B_r(x_0) \bigcap (x_0 + K)) \supseteq \phi(r) + \Gamma(r) \quad \forall\, r \in [0, r_0].$$

Если $\phi(r) \equiv y_0$, то говорят о $\Gamma-$ накрывании в точке x_0 относительно конуса K. Если $\phi(r) \equiv y_0$ и $\Gamma(r) \equiv B_{br^2}$, то накрывание называется квадратичным.

Далее будем считать, что $A = F'(x_0)$. Тогда $C = A(K) = F'(x_0)(K)$. Относительно выпуклого конуса C будем далее предполагать, что подпространство $Y_1 = \mathrm{Lin} C$ замкнуто, топологически дополняемо и его относительная внутренность $\mathrm{ri} C$ непуста. Эти предположения автоматически выполняются, если пространство Y конечномерно.

Определение 1.2. Пусть $h \in K$. Скажем, что отображение F является 2-регулярным в точке x_0 относительно конуса K по направлению h, если имеет место

$$Y_1 + F''(x_0)[h, \mathrm{Ker} F'(x_0) \bigcap K] = Y.$$

Отметим, что если для заданного отображения F в точке x_0 имеет место $Y_1 = Y$, то всегда можно взять $h = 0$. В общем же случае это неверно.

Теорема 1.3. *Предположим, что отображение F является 2-регулярным в точке x_0 относительно конуса K по направлению $h \in K$, причем $\|h\| < 1$.*

Тогда для любых векторов $l, m \in \mathrm{ri} C$ найдутся такие числа $\delta > 0$ и $b > 0$, что отображение F является Γ-накрывающим в точке x_0 по кривой ϕ относительно конуса K. Здесь

$$\phi(r) = y_0 + rF'(x_0)h + r^2\left(\frac{1}{2}F''(x_0)[h, h] + m\right),$$

а семейство Γ определяется по формуле

$$\Gamma(r) = \left(B_{br} \bigcap \mathrm{cone} B_\delta(l) \bigcap Y_1\right) + B_{br^2}.$$

Здесь B_r — это шар в Y с центром в нуле и радиуса r.

Мы не приводим доказательство теоремы 1.3, а лишь обсудим ее. Обозначим через π_1 и π_2 непрерывные операторы проектирования Y на Y_1 и на некоторое замкнутое подпространство Y_2, дополняющее Y_1, соответственно. Если при этом конус $C = F'(x_0)(K)$ является подпространством, то следует брать

$$m = -\frac{1}{2}\pi_1 F''(x_0)[h, h].$$

Тогда, очевидно, кривая ϕ примет вид

$$\phi(r) = y_0 + rF'(x_0)h + \frac{1}{2}r^2\pi_2 F''(x_0)[h, h].$$

Частный, но наиболее употребительный случай теоремы 1.3 — это когда вектор $h \in K$ удовлетворяет условиям

$$F'(x_0)h = 0, \quad (-F''(x_0)[h, h]) \in \mathrm{ri} C.$$

Тогда берем $m = -\frac{1}{2}F''(x_0)[h, h]$, откуда $\phi(r) \equiv y_0$, и мы получаем $\Gamma-$накрывание в точке x_0 относительно конуса K.

Пусть теперь $K = X$. Если при этом условие Люстерника $F'(x_0)(X) = Y$, которое хорошо известно (см., например [4,5]), нарушается, то точка x_0 называется анормальной. В этом случае в [6] доказано следующее утверждение.

Пусть отображение F дважды непрерывно дифференцируемо по Фреше в окрестности точки x_0, а образ первой производной $\mathrm{Im}F'(x_0)$ является замкнутым топологически дополняемым подпространством и существует такой вектор $h \in X$, что

$$F'(x_0)h = 0, \quad F''(x_0)[h,h] \in \mathrm{Im}F'(x_0), \quad \mathrm{Im}F'(x_0) + F^{''}(x_0)[h, \mathrm{Ker}F'(x_0)] = Y.$$

Тогда существуют такие $b > 0$ и $r_0 > 0$, что отображение F является $\Gamma-$ накрывающим в точке x_0 относительно конуса $K = X$. Здесь семейство Γ_r определяется по формуле

$$\Gamma(r) = \left(B_{br} \bigcap \mathrm{Im}F'(x_0) \right) + B_{br^2}.$$

References

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 2007; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, **I, II**, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[2] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979, 399 с.; англ. пер.:I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, SIAM, Philadelphia, 1976, 402 pp.

[3] А. В. Дмитрук, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, “Теорема Люстерника и теория экстремума”, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 11–46; англ. пер.:A. V. Dmitruk, A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii, “Lyusternik’s theorem and the theory of extrema”, *Russian Math. Surveys*, **35**:6 (1980), 11–51.

[4] Л. А. Люстерник, “Об условных экстремумах функционалов”, *Матем. сборник*, **41**:3 (1934), 390–401. [L. Lusternik, “Sur les extrémés relatifs des fonctionnelles”, *Mat. Sb.*, **41**:3 (1934), 390–401 (In Russian)].

[5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974. [A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, Science Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[6] Е. Р. Аваков, “Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения”, *Матем. заметки*, **47**:5 (1990), 3–13; англ. пер.:E. R. Avakov, “Theorems on estimates in the neighborhood of a singular point of a mapping”, *Math. Notes*, **47**:5 (1990), 425–432.

Информация об авторах

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории 45, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7326-7492

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории 45, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Information about the authors

Aram V. Arutyunov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of Laboratory 45, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7326-7492

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher of Laboratory 45, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation.
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Жуковский Сергей Евгеньевич
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Corresponding author:
Sergey E. Zhukovskiy
E-mail: s-e-zhuk@yadex.ru

Поступила в редакцию 18.08.2023 г.
Поступила после рецензирования 07.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Received 18.08.2023
Reviewed 07.11.2023
Accepted for press 23.11.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-371-382

УДК 517.938

О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве

Сергей Михайлович ДЗЮБА

ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»

170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению свойств рекуррентных движений динамической системы g^t, заданной в отделимом полуметрическом пространстве Γ.

На основании определений минимального множества и рекуррентного движения, введенных Дж. Биркгофом в начале прошлого века, получено новое достаточное условие рекуррентности движений системы g^t в Γ. Это условие устанавливает новое свойство движений, которое жестко связывает произвольные и рекуррентные движения. На основании данного свойства показано, что если в пространстве Γ положительная (отрицательная) полутраектория некоторого движения относительно секвенциально компактна, то ω-предельное (α-предельное) множеством этого движения является секвенциально компактным минимальным множеством.

В качестве одного из приложений полученных результатов изучено поведение движений динамической системы g^t, заданной на топологическом многообразии V. Это изучение позволило существенно упростить классическое представление о взаимоотношении движений на V, фактически изложенное Дж. Биркгофом в 1922 г. и с тех пор не менявшееся.

Ключевые слова: динамические системы, полуметрическое пространство, рекуррентные движения, топологическое многообразие, взаимоотношение движений

Для цитирования: *Дзюба С.М.* О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 371–382. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-371-382

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-371-382

On recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space

Sergei M. DZYUBA
Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. The present paper is devoted to studying the properties of recurrent motions of a dynamical system g^t defined in a Hausdorff semi-metric space Γ.

Based on the definitions of a minimal set and recurrent motion introduced by G. Birkhoff at the beginning of the last century, a new sufficient condition for the recurrence of motions of the system g^t in Γ is obtained. This condition establishes a new property of motions, which rigidly connects arbitrary and recurrent motions. Based on this property, it is shown that if in the space Γ positively (negatively) semi-trajectory of some motion is relatively sequentially compact, then the ω-limit (α-limit) set of this motion is a sequentially compact minimal set.

As one of the applications of the results obtained, the behavior of motions of the dynamical system g^t given on a topological manifold V is studied. This study made it possible to significantly simplify the classical concept of interrelation of motions on V which was actually stated by G. Birkhoff in 1922 and has not changed since then.

Keywords: dynamical systems, semi-metric space, recurrent motions, topological manifold, interrelation of motions

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Dzyuba S.M. On recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 371–382. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-371-382
(In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f \colon \mathbb{R} \times \Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t, p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;

(b) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

(c) для всех $t, \tau \in \mathbb{R}$

$$g^{t+\tau} = g^t g^\tau.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \to f(t, p)$ — *движение* (см. [1, с. 347]).

Конечной целью общей теории динамических систем является «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» (см. [2, с. 194]).

Важнейшим движением является рекуррентное, так как в полном пространстве Σ замыкание траектории рекуррентного движения представляет собой компактное минимальное множество (см. [1, с. 404]), а каждое движение $f(t, p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентно (см. [1, с. 402]); кроме того, любое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см. [1, с. 401]).

Еще до недавнего времени считалось, что в связном пространстве Σ существуют компактные инвариантные множества

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots,$$

каждое из которых не является объединением компактных минимальных множеств (см. [1, гл. V]). Однако в работе [3] было доказано, что если $M_1 \neq \Sigma$, то в связном компактном пространстве Σ

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_k = \ldots = \varnothing.$$

Это позволило в работах [4, 5] установить полное взаимоотношение движений в Σ и на топологическом компактном многообразии. Здесь необходимо отметить, что в [1, с. 365, с. 375] приведены два типовых примера построения множеств типа M_k на торе и на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$. К сожалению, данные примеры оказались некорректными, что было показано в работе [6].

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов работ [3–5], заключающееся в изучении свойств рекуррентных движений динамических систем в полуметрическом пространстве.

1. Основные свойства динамических систем

Пусть Γ — топологическое пространство и пусть на Γ задана полная однопараметрическая группа преобразований g^t, которая по определению представляет собой динамическую систему, поскольку g^t удовлетворяет аксиомам (a)–(c) (см., например, [7, с. 150, 152]).

Как обычно, множество $A \subset \Gamma$ будем называть *инвариантным*, если для всех $t \in \mathbb{R}$

$$g^t A = A$$

(см. [1, с. 349]).

Для системы g^t в пространстве Γ мы можем принять основные определения общей теории динамических систем, изначально введенные Дж. Биркгофом на замкнутом дифференцируемом многообразии (см. [2, гл. VII]). Именно:

(d) если $p \in \Gamma$, то ω*-предельным* множеством $\Omega(p)$ движения $f(t,p)$ называется множество

$$\Omega(p) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} f(s,p)};$$

(e) если $p \in \Gamma$, то α*-предельным* множеством $\mathrm{A}(p)$ движения $f(t,p)$ называется множество

$$\mathrm{A}(p) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{s \leq t} f(s,p)};$$

(f) множество $M \subset \Gamma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами;

(g) любое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, называется *рекуррентным*.

В дальнейшем при исследовании рекуррентных движений системы g^t мы будем считать Γ полуметрическим пространством с отделимой структурой. Здесь необходимо отметить, что введение отделимой структуры в Γ является естественным, поскольку определение Биркгофа (f) фактически ее требует.

Напомним, что топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если в нем определено направленное семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [8, с. 456]).

Напомним также, что функция $d_\gamma \colon \Gamma \times \Gamma \to [0, +\infty)$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(A) для всех $(p,q) \in \Gamma \times \Gamma$

$$d_\gamma(p,q) = d_\gamma(q,p);$$

(B) для всех $p \in \Gamma$

$$d_\gamma(p,p) = 0,$$

а случай

$$d_\gamma(p,q) = 0$$

не исключается при $q \neq p$;

(C) для всех $p \in \Gamma$, $q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p,q) \leq d_\gamma(p,r) + d_\gamma(r,q).$$

И, наконец, напомним, что семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I}$ называется *направленным*, если для любой конечной части $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \geq d_j$ для всех $j \in J$. Если же для каждой пары $p \neq q$ найдется такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(p,q) > 0,$$

то будем говорить, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* (см. [8, с. 456]).

З а м е ч а н и е 1.1. Простейшим примером полуметризуемого пространства с отделимой структурой может служить хаусдорфово компактное пространство Γ (см. [8, с. 458]). В таком пространстве полуметрики мы можем определить так, как это будет сделано ниже в п. 4. на топологическом многообразии.

Определение Биркгофа (g) не содержит никакой конструктивной информации о структуре рекуррентного движения. Поэтому, возвращаясь к изучению рекуррентных движений, заметим, что в пространстве Γ справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть траектория*

$$K(p) = \{f(t,p):\ t \in \mathbb{R}\}$$

движения $f(t,p)$ системы g^t относительно компактна. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$d_i(f(t,p), f(t+N_\varepsilon,p)) < \varepsilon, \quad i \in I. \tag{1.1}$$

Тогда $f(t,p)$ — рекуррентное движение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, заметим, что силу неравенства (1.1) найдется такая последовательность натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} d_i(f(t,p), f(t+N_k,p)) = 0, \quad i \in I. \tag{1.2}$$

Для всех $N = 0, 1, \ldots$ обозначим через P_N — множество функций

$$t \to f(t+N+m,p), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$, а через $\bar{P}_N$ — замыкание множества P_N. Далее, заметим, что в силу относительной компактности траектории $K(p)$ все множества P_N равностепенно непрерывны на $[0,1]$, т. е. что для каждого $\eta > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $m = 0, 1, \ldots$ равномерно относительно N

$$d_i(f(t_1+N+m,p)), f(t_2+N+m,p)) < \eta, \quad i \in I,$$

всякий раз, когда $|t_1 - t_2| < \delta$ (см. [5]). Значит, согласно третьей теореме Асколи, все множества $\bar{P}_N$ компактны в топологии равномерной сходимости (см. [8, с. 489]).

Очевидно, что по определению

$$P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_N \supset \ldots.$$

Кроме того, в силу равенства (1.2) каждое множество $\bar{P}_N$ инвариантно. Следовательно,

$$\bar{P}_0 = \bar{P}_1 = \ldots = \bar{P}_N = \ldots. \tag{1.3}$$

Заметим теперь, что согласно равенству (1.2)

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} d_i(f(t,p), f(t-N_k,p)) = 0, \quad i \in I.$$

Для всех $N = 0, 1, \ldots$ обозначим через P'_N — множество функций

$$t \to f(t - N - m, p), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\bar{P}'_N$ — замыкание множества P'_N. Тогда, действуя как и выше, несложно показать, что все множества $\bar{P}'_N$ компактны в топологии равномерной сходимости, инвариантны и удовлетворяют условию

$$\bar{P}'_0 = \bar{P}'_1 = \ldots = \bar{P}'_N = \ldots = \bar{P}_0. \tag{1.4}$$

В силу компактности и инвариантности множеств $\bar{P}_N$ и $\bar{P}'_N$, отделимости пространства Γ и равенств (1.3) и (1.4) несложно заметить, что $\bar{K}(p)$ — компактное минимальное множество. Поэтому согласно определению (g) Биркгофа $f(t, p)$ — рекуррентное движение. □

З а м е ч а н и е 1.2. Вообще говоря, при одном естественном дополнительном предположении условие (1.1) выполняется с необходимостью (см. следствие 2.1).

2. Произвольные и рекуррентные движения

Основное значение теоремы 1.1 состоит в том, что из нее вытекает новое свойство произвольных и рекуррентных движений системы g^t. Это свойство устанавливает следующая

Теорема 2.1. *Пусть положительная полутраектория*

$$K^+(p) = \{f(t, p) \colon \ t \geq 0\}$$

движения $f(t, p)$ относительно секвенциально компактна. Тогда из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t, q)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) *для всех $t \geq 0$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t + N_{k_l}, p), f(t, q)) = 0, \quad i \in I; \tag{2.1}$$

(ii) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t + N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, q), f(t, q)) = 0, \quad i \in I. \tag{2.2}$$

Аналогичным образом, если отрицательная полутраектория

$$K^-(p) = \{f(t, p) \colon \ t \leq 0\}$$

движения $f(t, p)$ относительно секвенциально компактна, то из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t, r)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(iii) *для всех $t \leq 0$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t - N_{k_l}, p), f(t, r)) = 0, \quad i \in I; \tag{2.3}$$

(iv) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t - N_{k_{l+1}} + N_{k_l}, r), f(t, r)) = 0, \quad i \in I. \tag{2.4}$$

Доказательство. Очевидно, что для доказательства теоремы 2.1 достаточно установить существование рекуррентного движения $f(t,q)$, удовлетворяющего условиям (i) и (ii). Проделаем это.

Для всех $N=1,2,\dots$ положим

$$p_N = f(N,p). \tag{2.5}$$

Тогда, как несложно заметить,

$$p_{N+m} = f(m,p_N), \quad N=1,2,\dots, \quad m=0,1,\dots. \tag{2.6}$$

Пусть $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ — произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствие с $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ из $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$ выберем последовательность $(p_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$. В силу относительной секвенциальной компактности полутраектории $K^+(p)$ из $(p_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ можно такую ее подпоследовательность $(p_{N_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, что для некоторой точки $q\in\bar{K}^+(p)$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(p_{N_{k_l}},q)=0, \quad i\in I,$$

где $\bar{K}^+(p)$ — замыкание множества $K^+(p)$.

Так как по условию множество $\bar{K}^+(p)$ секвенциально компактно, то, действуя стандартным образом, несложно показать, что ω-предельное множество $\Omega(p)\subset\bar{K}^+(p)$ движения $f(t,p)$ непусто, секвенциально компактно и инвариантно (см. [1, гл. V]). Отсюда, в частности, следует, что движение $f(t,q)$ расположено в $\Omega(p)$.

Поскольку отображение $(t,x)\to g^t x$ непрерывно и множество $\bar{K}^+(p)$ компактно, то множество P функций

$$t\to f(t,p_N), \quad N=1,2,\dots,$$

определенных при $t\ge 0$, равностепенно непрерывно на произвольном отрезке $[0,T]$ (см. [5]). Значит, равномерно на каждом отрезке $[0,T]$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t,p_{N_{k_l}}),f(t,q))=0, \quad i\in I. \tag{2.7}$$

Аналогичным образом, множество Q функций

$$t\to f(t\pm m,q), \quad m=0,1,\dots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$, равностепенно непрерывно на $[0,1]$. Следовательно, его замыкание $\bar{Q}$ компактно в топологии равномерной сходимости.

Для всех $l=1,2,\dots$ обозначим через $P_{N_{k_l}}$ — множество функций

$$t\to f(t+m,p_{N_{k_l}}), \quad m=0,1,\dots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$, а через $Q_0\subset Q$ — множество функций

$$t\to f(t+m,q), \quad m=0,1,\dots,$$

также определенных на $[0,1]$. Тогда в силу равенств (2.5) и (2.7)

$$\bar{Q}_0\subset\bigcap_{l\ge1}\bar{P}_{N_{k_l}}, \tag{2.8}$$

где $\bar{P}_{N_{k_l}}$ и $\bar{Q}_0$ — замыкания множеств $P_{N_{k_l}}$ и Q_0 соответственно.

Пусть

$$\Delta_{N_{k_l}} = N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Принимая во внимание равенство (2.6), заметим, что

$$p_{N_{k_{l+1}}} = f(\Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}).$$

Следовательно, согласно равенству (2.7)

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}), q) = 0, \quad i \in I. \tag{2.9}$$

Более того, так как множество $\Omega(p)$ секвенциально компактно, то без какой-либо потери общности можем считать, что найдется такая точка $q^* \in \Sigma$, что существует предел

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\Delta_{N_{k_l}}, q), q^*) = 0, \quad i \in I. \tag{2.10}$$

Заметим теперь, что в пространстве Γ введена отделимая полуметрическая структура. Поэтому, если $q \neq q^*$, то существует такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(q, q^*) > 0.$$

Тогда в силу равенств (2.9) и (2.10) найдется такое положительное число $\varepsilon > 0$, что при всех $l = 1, 2, \ldots$

$$d_\gamma(f(\Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}), f(\Delta_{N_{k_l}}, q)) \geq \varepsilon. \tag{2.11}$$

В этом случае движение $f(t, q)$ не является периодическим движением с натуральным периодом. Значит,

$$\sup_{l\geq 1} \Delta_{N_{k_l}} = +\infty \tag{2.12}$$

и

$$\sup_{l\geq 1} (\Delta_{N_{k_{l+1}}} - \Delta_{N_{k_l}}) = +\infty. \tag{2.13}$$

Для простоты обозначений положим

$$t_{k_l} = \Delta_{N_{k_l}} + 1, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Тогда согласно неравенству (2.11) для всех $l = 1, 2, \ldots$

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} d_\gamma(f(t, p_{N_{k_l}}), f(t, q)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому в силу равенства (2.7) без какой-либо потери общности можем считать, что существует такая последовательность положительных чисел $(\varepsilon_l)_{l\in\mathbb{N}} \downarrow 0$, что

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} d_\gamma(f(t, p_{N_{k_l}}), f(t, q)) \geq \varepsilon \tag{2.14}$$

и

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} d_\gamma(f(t, p_{N_{k_{l+1}}}), f(t, q)) < \varepsilon_l. \tag{2.15}$$

Согласно (2.12) объединение

$$\bigcup_{l\geq 1}[0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0, t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $[0, +\infty)$, а на каждом отрезке $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (2.14) и (2.15). Последнее, однако, в силу равенства (2.13) и включения (2.8) невозможно.

Полученное противоречие означает, что вне зависимости от периодичности движения $f(t, q)$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(\Delta_{N_{k_l}}, q), q) = 0, \quad i \in I.$$

Следовательно, равномерно на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(t, q)) = 0, \quad i \in I. \tag{2.16}$$

Более того, поскольку множество $\bar{Q}$ компактно, то в силу равенства (2.16)

$$\bar{Q} = \bigcap_{l\geq 1} g^{\Delta_{N_{k_l}}}\bar{Q} \tag{2.17}$$

(см. доказательство теоремы 1.1).

Предположим, что сходимость в (2.16) не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и $j \in I$, что для всех $l = 1, 2, \ldots$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d_j(f(t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(t, q)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому найдутся такие последовательности $(\varepsilon_l)_{l\in\mathbb{N}} \uparrow \varepsilon$ положительных и $(m_l)_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что

$$\delta_l = \max_{-m_l\leq t\leq m_l} d_j(f(t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(t, q)) \geq \varepsilon_l.$$

Следовательно,

$$\lim_{l\to+\infty} \sup\, \delta_l \geq \varepsilon.$$

Последнее, однако, противоречит равенству (2.17). Значит, сходимость в равенстве (2.16) равномерна на всей оси $\mathbb{R}$.

Таким образом, в силу теоремы 1.1 и равномерной сходимости в (2.16) на всей оси $\mathbb{R}$ видим, что $f(t, q)$ — рекуррентное движение. □

Следствие 2.1. *Если траектория $K(p)$ движения $f(t, p)$ относительно секвенциально компактна, то условие рекуррентности (1.1) выполняется с необходимостью.*

З а м е ч а н и е 2.1. По построению несложно заметить, что множество $\bar{Q}_0$ представляет собой компактное в топологии равномерной сходимости минимальное множество M.

3. Основное свойство предельных множеств

Из теоремы 2.1 вытекает новое свойство предельных множеств системы g^t, которое можно считать основным. Это свойство устанавливает следующая

Теорема 3.1. *Если положительная полутраектория $K^+(p)$ движения $f(t,p)$ относительно секвенциально компактна, то ω-предельное множество $\Omega(p)$ данного движения — секвенциально компактное минимальное множество. Если же отрицательная полутраектория $K^-(p)$ движения $f(t,p)$ относительно секвенциально компактна, то α-предельное множество $\mathrm{A}(p)$ данного движения — секвенциально компактное минимальное множество.*

Доказательство. Для всех $N = 1, 2, \ldots$ обозначим через P_N — множество функций

$$t \to f(t+N+m, p), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0,1]$. Пусть $\bar{P}_N$ — замыкание множества P_N. При этом положим

$$M = \bigcap_{N \geq 1} \bar{P}_N. \tag{3.1}$$

Очевидно, что

$$\bar{P}_1 \supset \bar{P}_2 \supset \ldots \supset \bar{P}_N \supset \ldots.$$

Поэтому для каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$

$$M = \bigcap_{k \geq 1} \bar{P}_{N_k}. \tag{3.2}$$

Поскольку полутраектория $K^+(p)$ относительно секвенциально компактна, то любое множество P_N равностепенно непрерывно, т. е. множество M непусто, компактно в топологии равномерной сходимости и инвариантно (см. [5]). Более того, в силу включения (2.8) и равенств (3.1), (3.2) несложно заметить, что M — компактное в топологии равномерной сходимости минимальное множество (см. замечание 2.1). Отсюда следует, что $\Omega(p)$ — секвенциально компактное минимальное множество.

Заметим теперь, что доказательство второй части теоремы 3.1 фактически ничем не отличается от приведенного выше. □

4. Динамические системы на многообразиях

Пусть V — топологическое многообразие размерности n и пусть на V задана полная однопараметрическая группа преобразований g^t, т. е. g^t представляет собой динамическую систему, для которой установлены все базовые понятия общей теории динамических систем, приведенные ранее в п. 1.

Зафиксируем произвольный атлас $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$ многообразия V, где Φ_s — некоторая открытая часть пространства $\mathbb{R}^n$ и φ_s — гомеоморфизм Φ_s на $V_s \subset V$. Для всех $s \in S$ любое компактное множество $E \subset \Phi_s$ имеет компактный образ $\varphi_s(E)$ в V. Значит, многообразие V полуметризуемо как топологическое локально компактное пространство (см. [8, с. 458]). Полуметрики на V мы определим следующим образом.

Зафиксируем некоторое непустое открытое множество $V_0 \subset V$ и зададим непрерывное отображение $\gamma\colon V \to [0,+\infty)$, такое, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in V_0$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда, очевидно, равенство

$$d_\gamma(p,q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

дает полуметрику d_γ на V (см. [8, с. 457]).

Изменяя функцию γ, мы можем получать различные полуметрики d_γ. Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I_0}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ нашлась полуметрика d_γ, для которой $d_\gamma(p,q) > 0$. Проделав эту процедуру на всех непустых открытых множествах $V_0 \subset V$, мы превратим V в полуметрическое пространство с отделимой структурой, где топология вводится семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$.

Поскольку каждое бесконечное компактное множество $E_0 \subset \Phi_s$ секвенциально компактно, его образ $\varphi_s(E_0)$ также секвенциально компактен. Поэтому в силу результатов п.п. 1.–3. на многообразии V справедливы следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Если траектория $K(p)$ движения $f(t,p)$ системы g^t относительно компактна, то необходимое и достаточное условие рекуррентности $f(t,p)$ состоит в том, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство* (1.1).

Теорема 4.2. *Если положительная полутраектория $K^+(p)$ движения $f(t,p)$ относительно компактна, то из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t,q)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i$'$) *для всех $t \geq 0$ выполнено равенство* (2.1);

(ii$'$) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$ выполнено равенство* (2.2).

Если же отрицательная полутраектория $K^-(p)$ движения $f(t,p)$ относительно компактна, то из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t,r)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(iii$'$) *для всех $t \leq 0$ выполнено равенство* (2.3);

(iv$'$) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$ выполнено равенство* (2.4).

Теорема 4.3. *Если положительная полутраектория $K^+(p)$ движения $f(t,p)$ относительно компактна, то ω-предельное множество $\Omega(p)$ данного движения — компактное минимальное множество. Если же отрицательная полутраектория $K^-(p)$ движения $f(t,p)$ относительно компактна, то α-предельное множество $\mathrm{A}(p)$ данного движения — компактное минимальное множество.*

Остается добавить, что в силу теоремы 4.3 теорема 4.2 существенно упрощает классическое представление о взаимоотношении движений на V, фактически изложенное в [2, гл. VII] и с тех пор не менявшееся. Что же касается теоремы 4.1, то в дополнение к определению Биркгофа (g) она дает достаточно полное представление о структуре рекуррентного движения как функции времени.

References

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[2] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[3] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, "О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, "About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:13 (2021), 5–14 (In Russian)].

[4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, "О взаимоотношении движений динамических систем", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 136–142. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, "On the interrelation of motions of dynamical systems", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 136–142 (In Russian)].

[5] S. M. Dzyuba, "On the interrelation of motions of dynamical systems on compact manifolds", *Lobachevskii J. Math.*, **44**:7 (2023), 2630–2637.

[6] A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, "The interrelation of motions of dynamical systems in a metric space", *Lobachevskii J. Math.*, **43**:12 (2022), 3414–3419.

[7] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, УРСС, М., 2009. [L. S. Pontryagin, *Topological Groups*, URSS Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].

[8] Л. Шварц, *Анализ*. Т. II, Мир, Moscow, 1972. [L. Schwartz, *Analisys*. V. II, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

Информация об авторе

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Поступила в редакцию 22.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 31.10.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Received 22.06.2023
Reviewed 31.10.2023
Accepted for press 23.11.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-383-394

УДК 517.911, 517.988, 512.562, 51-7

О краевой задаче для системы дифференциальных уравнений, моделирующей электрическую активность головного мозга

Анастасия Сергеевна ПАТРИНА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Исследуется модель типа Хопфилда динамики электрической активности головного мозга, представляющая собой систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{v}_i(t) = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big(v_j(t-\tau_{ji})\big) + I_i(t), \quad i=\overline{1,n}, \quad t \geq 0.$$

Параметры модели считаются заданными: $\alpha > 0$, $\tau_{ii} = 0$, $w_{ii} = 0$, $\tau_{ji} \geq 0$ и $w_{ji} > 0$ при $i \neq j$, $I_i(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Функция активации f_δ (δ — время перехода нейрона в состояние активности) рассмотрена двух типов:

$$\delta = 0 \ \Rightarrow \ f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta; \end{cases} \qquad \delta > 0 \ \Rightarrow \ f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \leq \theta+\delta, \\ 1, & v > \theta+\delta. \end{cases}$$

Для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений исследуется краевая задача с условиями $v_i(0) - v_i(T) = \gamma_i$, $i=\overline{1,n}$. В обоих случаях $\delta = 0$ (функция f_0 разрывная) и $\delta > 0$ (функция f_0 непрерывная) решение существует, а если

$$\delta > \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}}{1-e^{-\alpha T}}, \quad \text{где} \quad W = (w_{ij})_{n \times n},$$

то рассматриваемая задача имеет единственное решение. В работе также получены оценки решения и его производной. Используются теоремы о неподвижных точках непрерывных отображений метрических и нормированных пространств и о неподвижных точках монотонных отображений частично упорядоченных пространств. Полученные результаты применены к исследованию периодических решений рассматриваемой дифференциальной системы.

Ключевые слова: нейронная сеть, дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, краевая задача, функция Грина, существование решения, отображения частично упорядоченных пространств, периодическое решение

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).

Для цитирования: *Патрина А.С.* О краевой задаче для системы дифференциальных уравнений, моделирующей электрическую активность головного мозга // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 383–394.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-383-394

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-383-394

On a boundary value problem for a system of differential equations modeling the electrical activity of the brain

Anastasia S. PATRINA
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The Hopfield-type model of the dynamics of the electrical activity of the brain which is a system of differential equations of the form

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq 0,$$

is under discussion. The model parameters are assumed to be given: $\alpha > 0$, $\tau_{ii} = 0$, $w_{ii} = 0$, $\tau_{ji} \geq 0$ and $w_{ji} > 0$ at $i \neq j$, $I_i(t) \geq 0$ at $t \geq 0$. Activation function f_δ (δ — the time of the transition of a neuron to the state of activity) is considered of two types:

$$\delta = 0 \ \Rightarrow \ f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta; \end{cases} \qquad \delta > 0 \ \Rightarrow \ f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \leq \theta + \delta, \\ 1, & v > \theta + \delta. \end{cases}$$

For the system of differential equations under consideration, a boundary value problem with the conditions $v_i(0) - v_i(T) = \gamma_i$, $i = \overline{1,n}$, is studied. In both cases $\delta = 0$ (discontinuous function f_0) and $\delta > 0$ (f_0 continuous function), a solution exists, and if

$$\delta > \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}}{1 - e^{-\alpha T}}, \quad \text{where} \quad W = (w_{ij})_{n \times n},$$

the problem has a unique solution. The work also provides estimates for the solution and its derivative. Theorems on fixed points of continuous mappings of metric and normed spaces and on fixed points of monotonic mappings of partially ordered spaces are used. The results obtained are applied to the study of periodic solutions of the differential system under consideration.

Keywords: neural network, differential equation with a discontinuous right-hand side, boundary value problem, Green's function, existence of a solution, mappings of partially ordered spaces, periodic solution

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/).

Mathematics Subject Classification: 34B60, 34A36, 47J99, 92B20.

For citation: Patrina A.S. On a boundary value problem for a system of differential equations modeling the electrical activity of the brain. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 383–394.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-383-394 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В последние десятилетия существенно возрос интерес к математическим моделям работы мозга, описывающим динамику его активности. Это связано с востребованностью таких моделей и в экспериментальной, и в клинической медицине, и для создания современных диагностических систем выявления патологий головного мозга. Для описания динамики электрической активности мозга наибольшее распространение получили модели на основе нейронных полей и нейронных сетей, как адекватно отражающие соответствующие процессы. Кратко опишем базовую сетевую модель Дж. Дж. Хопфилда (J. J. Hopfield, 1982, [1]), идеи построения которой используются во многих современных более сложных и, соответственно, более точных моделях.

Модель рассматривает мозг как конечную совокупность электрически возбудимых клеток — нейронов. Нейрон состоит из сомы, дендритов и аксона. Функция дендритов состоит в приеме и передаче к телу нейрона электрических импульсов. Сома служит для хранения, формирования и распространения электрического потенциала, а по аксону электрический импульс передается другим нейронам (подробнее см., например, [2, с. 222–224]). Такую модель называют нейронной сетью.

Пусть n — количество нейронов в сети, $v_i(t)$ — значение электрического потенциала i-го нейрона в момент времени $t \in [0,\infty)$, $I_i(t)$ — электрический потенциал внешнего воздействия на i-й нейрон в момент времени t, w_{ji} — коэффициент воздействия j-го нейрона на скорость изменения потенциала i-го нейрона. Предполагается, что выполнены следующие соотношения: $v_i(t) \geq 0$ и $I_i(t) \geq 0$ на $[0,\infty)$, $w_{ii}=0$ и $w_{ji}>0$ при всех $i,j=\overline{1,n}$, $i \neq j$. В некоторых моделях дополнительно считается, что $w_{ji}=w_{ij}$; полученные здесь результаты это предположение не используют. Предположим, что для каждого нейрона скорость изменения электрического потенциала в любой момент времени t пропорциональна его значению в тот же момент времени с некоторым отрицательным коэффициентом $-\alpha$, $\alpha>0$. Нейрон переходит из состояния покоя в состояние активности за время $\delta \geq 0$ начиная с некоторого порогового значения $\theta>0$. Связь активации нейрона с уровнем его электрической активности определяет «функция активации» $f_\delta : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, задаваемая в модели Хопфилда при $\delta>0$ формулой

$$f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \leq \theta+\delta, \\ 1, & v > \theta+\delta, \end{cases}$$

а при $\delta=0$ — формулой

$$f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta. \end{cases}$$

В перечисленных предположениях электрическая активность головного мозга описывается следующей системой дифференциальных уравнений (см. [1,3])

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j) + I_i(t), \quad i=\overline{1,n}, \quad t \geq 0. \tag{0.1}$$

В ряде исследований (см., например, [4]) в нейронной системе учитывается запаздывание $\tau_{ji}>0$ прохождения электрического импульса от j-го нейрона к i-му нейрону, $i \neq j$.

В этом случае модель принимает вид

$$\dot{v}_i(t) = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big((S_{ji}v_j)(t)\big) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq 0, \tag{0.2}$$

$$(S_{ji}v_j)(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau_{ji}, \\ v_j(t-\tau_{ji}), & t \geq \tau_{ji}. \end{cases}$$

В дальнейшем будем рассматривать систему (0.2), полагая в ней $\tau_{ji} \geq 0$, таким образом, система (0.1) становится ее частным случаем. Формулируемые ниже утверждения о решениях системы (0.2) справедливы и для системы (0.1).

Функции $I_i(\cdot)$ будем предполагать измеримыми и суммируемыми на каждом конечном отрезке из $[0,\infty)$. Решением системы (0.2) на произвольном конечном отрезке $[0,T]$ будем считать абсолютно непрерывную на этом отрезке вектор-функцию $v = (v_1,\ldots,v_n)$, удовлетворяющую этому уравнению при п. в. $t \in [0,T]$.

В современных исследованиях моделей динамики нейронных систем рассматривается задача Коши для модельных систем дифференциальных уравнений (см. [4] и библиографию этой работы). Здесь предлагается рассмотреть краевую задачу для системы (0.2). Предлагаемое исследование мотивировано возможным применением краевых задач к исследованию режимов и ритмов электрической активности. Различные режимы и ритмы электрической активности характеризуют основные виды мозговой деятельности, а также наличие патологий. Соответствующие таким режимам и ритмам решения модельной дифференциальной системы (0.2) удовлетворяют некоторым краевым условиям. В частности, важной характеристикой электрической активности является частота периодических колебаний, то есть величина T^{-1}, где T период соответствующего решения $v(t)$. Такое решение удовлетворяет на $[0,T]$ краевому условию $v(T)-v(0)=0$. А краевая задача с условием $v(T)-\lambda v(0)=0$ позволяет при $\lambda>1$ описывать процесс усиления ритма частоты T^{-1}, а при $0<\lambda<1$ — его ослабление. Отметим, что в известной автору литературе для нейронных систем краевые задачи не рассматривались.

В статье рассматривается краевая задача для системы (0.2) с периодическим условием

$$v_i(0) - v_i(T) = \gamma_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{0.3}$$

Основное содержание статьи составляют три пункта. В первом краевая задача (0.2), (0.3) (в общем случае $\delta \geq 0$) приводится к эквивалентному интегральному уравнению в пространстве непрерывных функций относительно функции v. Для полученного уравнения найдены априорные оценки решений и условия априорной неотрицательности решений. Во втором пункте рассматривается задача (0.2), (0.3) с непрерывной «функцией активации» f_δ, т. е. в случае $\delta>0$. С использованием принципов неподвижной точки непрерывных отображений метрических пространств доказана разрешимость полученного уравнения, а следовательно, и рассматриваемой краевой задачи, получены оценки решений и сформулированы условия единственности решения. Во втором пункте исследуется случай разрывной «функцией активации» f_0, т. е. при $\delta=0$. Здесь краевая задача (0.2), (0.3) сводится к эквивалентному интегральному уравнению в пространстве суммируемых функций относительно производной $\dot{v}$ искомой функции. Для установления существования решения и получения его оценки к уравнению (1.1) применяются результаты о неподвижных точках монотонных отображений частично упорядоченных пространств. Отметим, что близкие подходы к исследованию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью использовались в [5, с. 16,17], а в недавних работах [6–8] такие подходы были распространены на неявные дифференциальные и интегральные уравнения. Также в статье установлено, что если оказываемое на нейроны внешнее воздействие $I(t)$, $t \in [0,\infty)$, периодично с некоторым периодом $T>0$, то в множестве решений системы (0.2) существует определенное на $[0,\infty)$ периодическое решение с таким же периодом.

1. Априорные оценки решений краевой задачи (0.2), (0.3)

Запишем краевую задачу (0.2), (0.3) в виде эквивалентной системы интегральных уравнений

$$v_i(t) = \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s)\Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta\big((S_{ji}v_j)(s)\big) + I_i(s)\Big)ds, \quad i=\overline{1,n}, \tag{1.1}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина периодической краевой задачи для линейного скалярного уравнения

$$\dot{\nu} + \alpha\nu = y(t), \quad \nu(0)-\nu(T)=0.$$

Эта функция, определяемая формулой

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha(t-s)}}{1-e^{-\alpha T}}, & 0 \le s < t \le T, \\ \dfrac{e^{-\alpha(T-s+t)}}{1-e^{-\alpha T}}, & 0 \le t < s \le T. \end{cases} \tag{1.2}$$

Очевидно, что любое абсолютно непрерывное решение задачи (0.2), (0.3) является решением уравнения (1.1), и обратно, любое абсолютно непрерывное решение уравнения (1.1) является решением задачи (0.2), (0.3). Интегральный оператор, порождаемый уравнением (1.1), действует в пространстве $C^n = C([0,T],\mathbb{R}^n)$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$). При этом непрерывное решение этого уравнения, очевидно, является абсолютно непрерывной функцией. Таким образом, уравнение (1.1) относительно непрерывной функции v равносильно задаче (0.2), (0.3) относительно абсолютно непрерывной функции v.

Используя представление задачи (0.2), (0.3) в виде уравнения (1.1), получаем следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Если существует решение v задачи* (0.2), (0.3), *то его компоненты v_i при любом $i=\overline{1,n}$ удовлетворяют неравенствам*

$$v_i(t) \ge \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s) I_i(s)ds \ge \frac{e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}}\Big(\gamma_i + \int_0^T I_i(s)ds\Big),$$

$$v_i(t) \le \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s)\big(\sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(s)\big)ds \le \frac{1}{1-e^{-\alpha T}}\Big(\gamma_i + T\sum_{j=1}^n w_{ji} + \int_0^T I_i(s)ds\Big).$$

Это утверждение прямо следует из того, что для функции f_δ очевидно выполнено $0 \le f_\delta(v_j) \le 1$ $\forall v_j$, а функция Грина (1.2) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}} < G(t,s) \le \frac{1}{1-e^{-\alpha T}}. \tag{1.3}$$

Следствие 1.1. *Пусть*

$$\gamma_i \geq -e^{\alpha t}(1 - e^{-\alpha T}) \int_0^T G(t,s) I_i(s) ds, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда любое решение v *задачи* (0.2), (0.3) *(если оно существует) является неотрицательной функцией.*

2. Разрешимость краевой задачи (0.2), (0.3) в случае $\delta > 0$

Рассмотрим краевую задачу с условием (0.3) для уравнения (0.2) — модели электрической активности головного мозга в случае непрерывной функции f_δ, т. е. при $\delta > 0$.

Для применения к эквивалентному рассматриваемой задаче уравнению (1.1) принципов неподвижной точки нормированных и метрических пространств полагаем, что в пространстве C^n задана «стандартная» норма $\|x\|_{C^n} = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|_{\mathbb{R}^n}$ элемента $x \in C^n$, а также соответствующее расстояние $\rho_{C^n}(x,u) = \|x-u\|_{C^n}$, $x, u \in C^n$.

Теорема 2.1. *В случае* $\delta > 0$ *краевая задача* (0.2), (0.3) *имеет решение в классе абсолютно непрерывных на отрезке* $[0,T]$ *функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим оператор $\Phi : C^n \to C^n$, $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, сопоставляющий произвольной функции $v = (v_1, \ldots, v_n) \in C^n$ функцию Φv с компонентами

$$\Phi_i v(t) = \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s)\Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta((S_{ji}v_j)(s)) + I_i(s)\Big) ds, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Уравнение (1.1), эквивалентное рассматриваемой краевой задаче, запишем в виде

$$v = \Phi v$$

и проверим для него выполнимость условий теоремы Шаудера о неподвижной точке (см. например, [9, гл. XVI, § 3]).

Обозначим

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w_{12} & 0 & \ldots & w_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{I} = \max_i \int_0^T I_i(s) ds, \quad \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

В силу второго неравенства в (1.3) для любого $v \in C^n$ имеем

$$\|\Phi v\|_C \leq r := \frac{1}{1 - e^{-\alpha T}}(|\gamma|_{\mathbb{R}^n} + \|W\|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n} T + \widehat{I}). \tag{2.2}$$

Из этого неравенства прямо следует, что $\Phi(B) \subset B$, где $B := \big\{x \in C^n : \|x\|_{C^n} \leq r\big\}$.

Покажем, что множество $\Phi(B)$ относительно компактно в пространстве C^n. Проверим условия теоремы Арцела–Асколи (см., например, [9, гл. I, § 5, теорема 4]). Из неравенства (2.2) следует, что $\Phi(B)$ равномерно ограничено. Проверим равностепенную непрерывность этого множества. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим

$$\sigma = \frac{1 - e^{-\alpha T}}{2\alpha(|\gamma|_{\mathbb{R}^n} + T + 2)\big(|W|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n} + \widehat{I}\,\big)}\varepsilon.$$

Тогда для произвольных $t_1, t_2 \in [0,T]$ таких, что $0 < t_1 - t_2 < \sigma$, имеем

$$\big|(\Phi v)(t_1) - (\Phi v)(t_2)\big|_{R_n} \le \frac{|\gamma|_{\mathbb{R}^n}|e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_1}|}{1-e^{-\alpha T}} + \int_0^T \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big|\big(|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} + |I(s)|_{R_n}\big)ds$$
$$\le \frac{|\gamma|_{\mathbb{R}^n}\alpha(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}} + \big(|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} + \widehat{I}\,\big)\int_0^T \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big|ds.$$

Воспользуемся очевидными оценками (использующими теорему Лагранжа о среднем)

$$\int_0^{t_1} \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big|ds = \int_0^{t_1} \frac{|e^{-\alpha(t_1-s)} - e^{-\alpha(t_2-s)}|}{1-e^{-\alpha T}}ds \le \frac{\alpha t_1(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}},$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big|ds \le \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{1-e^{-\alpha T}}ds = \frac{2(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}},$$
$$\int_{t_2}^{T} \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big|ds = \int_{t_2}^{T} \frac{|e^{-\alpha(T-s+t_1)} - e^{-\alpha(T-s+t_2)}|}{1-e^{-\alpha T}}ds \le \frac{\alpha(T-t_2)(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}},$$

из которых получим

$$\int_0^T \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big|ds \le \frac{\alpha(T+2)(t_2-t_1)}{1-e^{-\alpha T}},$$

$$\big|(\Phi v)(t_1) - (\Phi v)(t_2)\big|_{R_n} \le \big(|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} + \widehat{I}\,\big)\frac{\alpha(|\gamma|_{\mathbb{R}^n} + T + 2)\sigma}{1-e^{-\alpha T}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Итак, равностепенная непрерывность, а следовательно, и относительная компактность в C^n множества $\Phi(B)$ доказана.

По теореме Шаудера отображение Φ имеет неподвижную точку. Следовательно, уравнение (1.1) и, соответственно, задача (0.2), (0.3) разрешимы. □

Теорема 2.1 не гарантирует единственность решения задачи (0.2), (0.3), утверждается лишь существование решения. Приведем пример нейронной системы, для которой периодическая краевая задача имеет более одного решения.

Пример 2.1. Рассмотрим «минимальную» сеть, содержащую $n = 2$ нейрона в случае и непрерывной, и разрывной функции активации, т. е. при $\delta \ge 0$. Пусть $\theta > 0$, $\theta + \delta < 1$, $\alpha = 1$, $w_{12} = w_{21} = 1$, $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$, $I_1(t) = I_2(t) = 0$ при $t \in [0,1]$, $T = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Краевая задача (0.2), (0.3) при таких значениях параметров имеет вид

$$\begin{cases} \dot v_1 + v_1 = f_\delta(v_2), \\ \dot v_2 + v_2 = f_\delta(v_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1(0) - v_1(1) = 0, \\ v_2(0) - v_2(1) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Непосредственной проверкой легко показать, что решениями этой задачи являются пары постоянных функций $v_1(t) \equiv 0$, $v_2(t) \equiv 0$ и $v_1(t) \equiv 1$, $v_2(t) \equiv 1$. Таким образом, решение этой задачи не единственно.

Приведем достаточные условия единственности решения краевой задачи (0.2), (0.3).

Теорема 2.2. *Если выполнено неравенство*

$$\delta > \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{1-e^{-\alpha T}}, \tag{2.4}$$

то краевая задача (0.2), (0.3) *имеет единственное решение в классе абсолютно непрерывных на отрезке* $[0,T]$ *функций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при выполнении условия (2.4) оператор $\Phi : C^n \to C^n$, заданный формулой (2.1), является сжатием с коэффициентом

$$q := \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{\delta(1-e^{-\alpha T})}\|v-u\|_{C^n}$$

(здесь $q<1$ в силу предположения (2.4)).

Функция f_δ является липшицевой с коэффициентом δ^{-1}. Поэтому для любых $v,u\in C^n$ выполнено

$$\begin{aligned}\|\Phi v-\Phi u\|_{C^n} &\le \max_{t\in[0,T]}\left|\Big(\int_0^T G(t,s)\sum_{j=1}^n w_{ji}\big(f_\delta(v_j(s)-f_\delta(u_j(s))ds\Big)_{i=\overline{1,n}}\right|_{\mathbb{R}^n}\\ &\le \frac{T|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{\delta(1-e^{-\alpha T})}\|v-u\|_{C^n}=q\|v-u\|_{C^n},\end{aligned}$$

т. е. отображение Φ, действительно, является сжимающим.

Согласно теореме Банаха о сжимающем отображении (см., например, [10, с. 74]) отображение Φ имеет единственную неподвижную точку. Поэтому уравнение (1.1) и, соответственно, задача (0.2), (0.3) однозначно разрешимы. □

В примере 2.1 решение краевой задачи (2.3) не единственно, поэтому условие (2.4) не может быть выполнено. Убедимся в этом непосредственной проверкой.

В этом примере $\delta<1$, $W=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $|W|_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2}=1$ (при любой норме $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$ в $\mathbb{R}^2$ такой, что $|(x_1,x_2)|_{\mathbb{R}^2}=|(x_2,x_1)|_{\mathbb{R}^2}$), $\alpha=1$. Функция $\frac{T}{1-e^{-\alpha T}}$ аргумента $T\in(0,\infty)$ возрастает и $\lim_{T\to0+}\frac{T}{1-e^{-\alpha T}}=\frac{1}{\alpha}$, следовательно,

$$\frac{T|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{1-e^{-\alpha T}}>\frac{|W|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}{\alpha}=1>\delta.$$

Таким образом, предположение (2.4), действительно, не выполнено.

3. Разрешимость краевой задачи (0.2), (0.3) в случае $\delta=0$

Здесь рассматривается краевая задача с условием (0.3) для уравнения (0.2) — модели электрической активности головного мозга в случае разрывной функции f_δ, т. е. при $\delta=0$. Используются известные результаты о неподвижной точке отображений частично упорядоченных пространств. Вначале приведем эти известные результаты и необходимые сведения о частично упорядоченных пространствах (подробнее см., например, [10, гл. I, § 4] и [11, § 1]).

Пусть на множестве $X\neq\emptyset$ задано отношение нестрогого порядка $\le$ (т. е. рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение). Эту алгебраическую систему называют *частично упорядоченным пространством* и обозначают $(X,\le)$. Вместо $x\le u$ можем использовать обозначение $u\ge x$. Если $x\le u$ и $x\neq u$, будем писать $x<u$ или $u>x$. Для любых $\underline{x},\overline{x}\in X$ таких, что $\overline{x}\le\underline{x}$, определим *отрезок* — множество $[\underline{x},\overline{x}]_X=\big\{x\in X:\ \underline{x}\le x\le\overline{x}\big\}$.

Пусть $U\subset X$. Элемент $u_0\in U$ называют минимальным в этом множестве, если для любого $u\in U$ выполнено $u\not< u_0$. Элемент $v\in X$ называют нижней границей множества U, если для любого $u\in U$ выполнено $u\ge v$. Точной нижней границей (инфимумом) множества U называют такую нижнюю границу $v_0 \in X$, что для любой нижней границы v выполнено $v < v_0$. Инфимум обозначают $v_0 = \inf U$.

Подмножество $S \subset X$ называют *цепью* (или линейно упорядоченным), если для любых его двух элементов $x, u \in S$ выполнено $x \leq u$ или $u \leq x$. Пространство $(X, \leq)$ называем *s-полным* (*снизу*), если любая цепь, принадлежащая этому пространству, имеет точную нижнюю границу. Если точная нижняя граница есть у произвольного множества из X, то пространство называют *полным* (*снизу*).

Пусть задан оператор $\Psi : X \to X$. Сформулируем условия существования у этого оператора *неподвижной точки* — элемента $x \in X$, удовлетворяющего уравнению

$$x = \Psi(x).$$

Напомним, что оператор Ψ называется *монотонным* (*изотонным*), если для любых элементов $x, u \in X$ таких, что $x \leq u$, выполнено отношение $\Psi(x) \leq \Psi(u)$.

Следующее утверждение (обычно формулируемое при несколько более обременительном предположении полноты пространства X, называют *теоремой Биркгофа–Тарского* (см. [12, с. 266]).

Теорема 3.1. *Пусть существуют элементы $\underline{z}, \overline{z} \in X$ такие, что*

$$\underline{z} \leq \overline{z}, \quad \underline{z} \leq \Psi(\underline{z}), \quad \overline{z} \geq \Psi(\overline{z}). \tag{3.1}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) *пространство $U = [\underline{z}, \overline{z}]_X$ является s-полным (относительно индуцированного порядка $\leq$);*

2) *сужение оператора Ψ на пространство $(U, \leq)$ является монотонным.*

Тогда во множестве U существует неподвижная точка оператора Ψ.

Доказательство существования неподвижной точки для полного пространства U см. [12, с. 266]. Для s-полного пространства U доказательство существования неподвижной точки приведено в [4]. Оно основано на теореме Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [10, с. 40]), такой подход позволил заменить в условиях теоремы Биркгофа–Тарского требование полноты пространства U менее обременительным условием s-полноты.

З а м е ч а н и е 3.1. На основании теоремы Хаусдорфа несложно показать, что при выполнении условий теоремы 3.1 во множестве принадлежащих U неподвижных точек оператора Ψ существует минимальный элемент, не превосходящий заданную неподвижную точку $x \in U$ оператора Ψ. Действительно, можно определить подпространство $U_0 \subset U$, $U_0 = \{u \in U : u \geq \Psi(u)\}$ и задать в нем максимальную цепь S, содержащую заданную неподвижную точку $x \in U$ (очевидно, $x \in U_0$). Тогда точная нижняя граница ξ этой цепи в пространстве U будет искомым минимальным элементом во множестве неподвижных точек оператора Ψ.

Теперь сформулируем условия разрешимости краевой задачи (0.2), (0.3) в случае $\delta = 0$, т. е. когда функция активации нейронов разрывна. Для эквивалентного краевой задаче интегрального уравнения (1.1) не удается применить теорему Биркгофа–Тарского, так как в пространстве C^n отрезки не обладают свойством s-полноты. Поэтому здесь мы запишем краевую задачу (0.2), (0.3) в виде эквивалентного интегрального уравнения в пространстве L^n суммируемых функций, в котором отрезки обладают свойством s-полноты.

Воспользуемся подстановкой Азбелева (подробнее см. [13, с. 53]), а именно, рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\dot{v}_i + \alpha v_i = z_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

с граничными условиями (0.3). Для любой функции $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$ задача (0.2), (0.3) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $v = (v_1, \ldots, v_n)$, определяемое формулой

$$v_i(t) = \frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s) z_i(s)\, ds, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.3}$$

где функция Грина $G(t,s)$ определяется равенством (1.2).

Используя определенную этой формулой подстановку, запишем задачу (0.2), (0.3) в виде системы интегральных уравнений

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta\Big(\frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s) z_i(s)\, ds\Big) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.4}$$

относительно неизвестной функции $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$. Если эта система разрешима, то по ее решению z формулой (3.3) определяется решение задачи (0.2), (0.3) (в том числе и при $\delta = 0$). Обратно, через решение v задачи (0.2), (0.3) по формуле (3.2) определяется решение системы уравнений (3.4). Таким образом, краевая задача (0.2), (0.3) представлена в виде уравнения неподвижной точки оператора $\Psi : L^n \to L^n$, $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$, определяемого соотношением

$$\forall z \in L^n \quad (\Psi_i z)(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta\Big(\frac{\gamma_i e^{-\alpha t}}{1 - e^{-\alpha T}} + \int_0^T G(t,s) z_i(s)\, ds\Big) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.5}$$

Теорема 3.2. *В случае* $\delta = 0$ *краевая задача* (0.2), (0.3) *имеет решение в классе абсолютно непрерывных на* $[0,T]$ *функций. Компоненты* v_i *любого решения* v *при любом* $i = \overline{1,n}$ *удовлетворяют на* $[0,T]$ *неравенствам*

$$I_i(t) \le \dot{v}_i(t) + \alpha v_i(t) \le \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t). \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение условий теоремы 3.1 для уравнения $z = \Psi(z)$, где оператор $\Psi : L^n \to L^n$ задан соотношением (3.5).

Прежде всего отметим, что любой отрезок в пространстве $(L^n, \le)$ является полным, и тем более s-полным.

Далее, так как значения функции f_δ принадлежат $[0,1]$, для любого $z \in L^n$ при всех $i = \overline{1,n}$ имеем

$$I_i(t) \le \Psi_i(z)(t) \le \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t), \quad t \in [0,T].$$

Поэтому для оператора Ψ выполнено условие (3.1), если определить функции $\underline{z}, \overline{z} \in L^n$ соотношениями

$$\underline{z}(t) = \big(I_i(t)\big)_{i=\overline{1,n}}, \quad \overline{z}(t) = \Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t)\Big)_{i=\overline{1,n}}, \quad t \in [0,T].$$

И в заключение отметим, что оператор $\Psi : L^n \to L^n$, очевидно, монотонный.

Таким образом, все условия теоремы 3.1 выполнены, и согласно этой теореме система интегральных уравнений (3.4) имеет решение $z \in L^n$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{z} \le z \le \overline{z}. \tag{3.7}$$

Следовательно, краевая задача (0.2), (0.3) также разрешима. А из неравенств (3.7) в силу соотношений (3.2), (3.3) следуют требуемые оценки (3.6) ее решения v. □

З а м е ч а н и е 3.2. Определим множество $\Xi \subset L^n$ функций z вида $z = \dot{v} + \alpha v$, где v пробегает множество решений краевой задачи (0.2), (0.3). Согласно доказанной теореме все функции из этого множества удовлетворяют неравенствам (3.6). А согласно замечанию 3.1 к теореме 3.1 для любого $z \in \Xi$ в этом множестве существует минимальный элемент $\zeta \in \Xi$ и для него выполнено $\zeta \le z$.

З а м е ч а н и е 3.3. Утверждение теоремы 3.2 справедливо не только при $\delta = 0$, но и при $\delta > 0$. Но существование решения краевой задачи (0.2), (0.3) при $\delta > 0$ уже установлено в теореме 2.1. Теорема 3.2 в случае $\delta > 0$ представляет иные оценки (3.6) ее решения v. А замечание 3.2 характеризует структуру множества решений.

В заключение рассмотрим вопрос о существовании периодических решений системы уравнений (0.2) (рассматриваемой на полуоси $t \in [0, \infty)$) при любом $\delta \ge 0$. Из доказанных теорем получаем

Следствие 3.1. *Пусть функции $I_i(\cdot)$ являются периодическими с некоторым периодом $T > 0$. Тогда существует T-периодическое решение системы* (0.2).

References

[1] J. J. Hopfield, “Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties”, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **79**:8 (1982), 2554–2558.

[2] В. Л. Быков, *Цитология и общая гистология*, Сотис, Санкт-Петербург, 2018, 237 с. [V. L. Bykov, *Cytology and General Histology*, Sothis Publ., St. Petersburg, 2018 (In Russian), 237 pp.]

[3] P. Van den Driesche, X. Zou, “Global attractivity in delayed Hopfield neural network models”, *SIAM J. Appl. Math.*, **58** (1998), 1878–1890.

[4] А. С. Ланина, Е. А. Плужникова, “О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:139 (2022), 270–283. [A. S. Lanina, E. A. Pluzhnikova, “On the properties of solutions to differential systems modeling the electrical activity of the brain”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:139 (2022), 270–283 (In Russian)].

[5] Е. С. Жуковский, “Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах”, *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 3–18; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, “Volterra inequalities in function spaces”, *Sb. Math.*, **195**:9 (2004), 1235–1251.

[6] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities”, *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[7] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, “On absrtact Volterra equations in partially ordered spaces and their applications”, *CONCORD-90: Mathematical Analysis With Applications*. V. 318, International conference in honor of the 90th Birthday of Constantin Corduneanu (2018, Ekaterinburg, Russia), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, eds. S. Pinelas, A. Kim, V. Vlasov, 2020, 3–11.

[8] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:11 (2020), 1471–1482; англ. пер.:S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Functional and differential inequalities and their applications to control problems”, *Differential Equations*, **56**:11 (2020), 1440–1451.

[9] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984. [L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Mscow, 1984 (In Russian)].

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Физматлит, М., 2019; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, **I, II**, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[11] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[12] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982, 271 с. [L. A. Lyusternik, V. I. Sobolev, *A Short Course in Functional Analysis*, Higher School Publ., Moscow, 1982 (In Russian), 271 pp.]

[13] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations*, Nauka Publ., Mscow, 1991 (In Russian)].

Информация об авторе

Патрина Анастасия Сергеевна, магистр, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: lanina.anastasiia5@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8076-5745

Поступила в редакцию 25.08.2023 г.
Поступила после рецензирования 17.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Anastasia S. Patrina, Master, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: lanina.anastasiia5@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8076-5745

Received 25.08.2023
Reviewed 17.11.2023
Accepted for press 23.11.2023

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405
УДК 517.911.5, 517.922, 517.927.4, 517.988.6

Исследование краевой задачи для дифференциального включения

Ирина Дмитриевна СЕРОВА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392026, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассматривается краевая задача относительно абсолютно непрерывной функции $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ для дифференциального включения

$$F(t,x,\dot{x},\dot{x})\ni 0,\quad t\in[a,b],$$

с условием $\alpha x(a)+\beta x(b)=\widetilde{\gamma},$ при дополнительном ограничении на производную искомой функции $(\mathcal{L}x)(t)\doteq \dot{x}(t)-\lambda x(t)\in B(t),$ $t\in[a,b].$ Предполагается, что краевая задача с теми же условиями для линейного дифференциального уравнения $\mathcal{L}x=y$ однозначно разрешима для любой суммируемой функции $y.$ С использованием функции Грина этой «вспомогательной» линейной краевой задачи исходная задача приведена к эквивалентному интегральному включению относительно суммируемой функции $\dot{x}.$ К полученному включению применяются результаты об операторном включении с упорядоченно накрывающим многозначным отображением.

Используемые в данном исследовании сведения о многозначных отображениях частично упорядоченных пространств приведены в первом разделе работы.

Во втором основном разделе работы получены условия существования и оценки решений исследуемой краевой задачи в виде утверждения типа теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Эти результаты проиллюстрированы примером исследования периодической краевой задачи для неразрешенного относительно производной дифференциального уравнения.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное включение, упорядоченно накрывающее отображение, дифференциальное неравенство типа Чаплыгина

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00772, https://rscf.ru/project/22-21-00772/).

Для цитирования: *Серова И.Д.* Исследование краевой задачи для дифференциального включения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 395–405. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405

Study of the boundary value problem for a differential inclusion

Irina D. SEROVA
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The boundary value problem with respect to an absolutely continuous function $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ for the differential inclusion

$$F(t,x,\dot{x},\dot{x})\ni 0,\quad t\in[a,b],$$

with the condition $\alpha x(a)+\beta x(b)=\widetilde{\gamma}$ and additional restriction on the derivative of the desired function $(\mathcal{L}x)(t)\doteq\dot{x}(t)-\lambda x(t)\in B(t),\ \ t\in[a,b]$ is under discussion. It is assumed that the boundary value problem with the same conditions for the linear differential equation $\mathcal{L}x=y$ is uniquely solvable for any summable function y. Using Green's function of this «auxiliary» linear boundary value problem, the original problem is reduced to an equivalent integral inclusion with respect to the summable function $\dot{x}$. To the inclusion obtained, the results on operator inclusion with an orderly covering multivalued mapping are applied.

In the first section of the work, the information about multivalued mappings of partially ordered spaces used in this study is given.

In the main section of the work, conditions for the existence and estimates of solutions to the boundary value problem under investigation are obtained in the form of a statement similar to Chaplygin's theorem on differential inequality. These results are illustrated by an example of studying a periodic boundary value problem for a differential equation which is not resolved with respect to the derivative.

Keywords: boundary value problem, differential inclusion, ordered covering map, differential inequality of Chaplygin's type

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00772, https://rscf.ru/en/project/22-21-00772/).

Mathematics Subject Classification: 34A60, 34B15, 34A09.

For citation: Serova I.D. Study of the boundary value problem for a differential inclusion. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 395–405. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-395-405 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Неявные (не разрешенные относительно старшей производной) дифференциальные уравнения в течение многих лет привлекают исследователей сложными теоретическими проблемами и уже привели к созданию эффективных методов не только теории таких уравнений, но и других направлений математики (в том числе, ряда методов теории динамических систем, основы которых заложены В. И. Арнольдом [1], и которые развиты благодаря работам А. А. Давыдова [2, 3], Л. Дара [4], А. О. Ремизова [5, 6] и др. авторов). Неявные дифференциальные уравнения продолжают быть источником новых идей и результатов, востребованных в различных разделах математики и ее приложений. Одним из малоизученных вопросов теории таких уравнений является вопрос об условиях разрешимости и оценках решений краевых задач.

В исследовании многих вопросов теории дифференциальных уравнений важны оценки их решений. Но если для разрешенных относительно производной уравнений способы получения таких оценок разработаны и успешно применяются (см., например, [7–9], в частности, такие оценки строятся с использованием дифференциальных неравенств, восходящих к известной теореме Чаплыгина [10]), то для неявных уравнений подобные результаты пока фрагментарны (отметим статьи [11–13]). Полученные в настоящее время в этих направлениях результаты существенно используют теоремы о накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств, доказанные в работах А. В. Арутюнова, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского [14–18]. На основе этих теорем для неявных дифференциальных уравнений были получены оценки решений задачи Коши (см. [19, 20]) и краевых задач (см. [11, 13]).

Изучение краевых задач для неявных дифференциальных уравнений мотивировано, в том числе, описанием некоторых физических процессов (см., например [1, § 3 гл. 1], [21, § 6 гл. 1], [22]). В связи с изучением задач управления такими процессами, а также в связи с необходимостью учитывать погрешности определения их параметров актуальной является проблема исследования краевых задач для неявных дифференциальных включений и, в частности, проблема получения оценок их решений. Данная работа посвящена именно этим проблемам. Исследование использует результаты [23] об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающего многозначного отображения.

1. Операторные включения в частично упорядоченных пространствах

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $(X, \preceq)$, $(Y, \preceq)$. Для элементов $u, v \in X$ и множества $U \subset X$ обозначим

$$[u,v]_X \doteq \{x \in X : v \preceq x \preceq u\}, \quad \mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \preceq u\}, \quad \mathcal{O}_X(U) \doteq \bigcup_{\forall u \in U} \mathcal{O}_X(u).$$

Рассмотрим многозначное отображение $G : X \rightrightarrows Y$, т. е. отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ непустое множество $G(x) \subset Y$.

Напомним определения некоторых используемых в данной работе свойств многозначных отображений.

Определение 1.1. Отображение $G : X \rightrightarrows Y$ называют *изотонным* (*антитонным*) на множестве $U \subset X$, если для любых $x, u \in U$ таких, что $x \preceq u$, и для любого $z \in G(u)$ существует $y \in G(x)$, удовлетворяющий неравенству $y \preceq z$ (соответственно,

$y \succeq z$). Антитонное (*изотонное*) на всем X отображение называют *изотонным* (*антитонным*).

О п р е д е л е н и е 1.2. Отображение $G : X \rightrightarrows Y$ называют *упорядоченно накрывающим множество* $V \subset Y$ (см. [15, 18]), если

$$\forall u \in X \ \ \mathcal{O}_Y\big(G(u)\big) \cap V \subset G\big(\mathcal{O}_X(u)\big). \tag{1.1}$$

Заметим, что если V — одноэлементное множество, т. е. $V = \{\widehat{y}\}$, то соотношение (1.1) равносильно импликации

$$\forall u \in X \ \ \widehat{y} \in \mathcal{O}_Y\big(G(u)\big) \ \Rightarrow \ \widehat{y} \in G\big(\mathcal{O}_X(u)\big).$$

Таким образом, свойство упорядоченного накрывания множества $\{\widehat{y}\}$ означает, что для любого $u \in X$ такого, что во множестве $G(u)$ содержится элемент $v \succeq \widehat{y}$, включение $\widehat{y} \in G(x)$ имеет решение $x \in X$, удовлетворяющее неравенству $x \preceq u$.

Пусть задано отображение $\Upsilon : X \times X \rightrightarrows Y$, которое по одному аргументу упорядоченно накрывает множество $\{\widehat{y}\}$, а по другому является антитонным. Определим отображение $F : X \rightrightarrows Y$ соотношением

$$\forall x \in X \ \ F(x) = \Upsilon(x, x)$$

и рассмотрим включение

$$\widehat{y} \in F(x) \tag{1.2}$$

относительно неизвестного $x \in X$.

Сформулируем условия существования решения включения (1.2).

Пусть $U \subset X$, $\widehat{y} \in Y$. Определим множество $\mathcal{S}(\Upsilon, U, \widehat{y})$ всех цепей $S \subset U$ таких, что имеют место соотношения:

$$\forall x \in S \ \ \exists y \in \Upsilon(x, x) \ \ y \succeq \widehat{y},$$
$$\forall x, u \in S \ \ x \prec u \ \Rightarrow \ \exists \xi \in [x, u] \ \ \widehat{y} \in \Upsilon(\xi, u).$$

Теорема 1.1 (см. [23, теорема 2.1])**.** *Пусть существуют* $u_0 \in X$ *и* $y_0 \in Y$ *такие, что*

$$y_0 \in \Upsilon(u_0, u_0), \quad y_0 \succeq \widehat{y}, \tag{1.3}$$

и выполнены условия:

(1.a) *при любом* $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(\cdot, x) : X \rightrightarrows Y$ *упорядоченно накрывает множество* $\{\widehat{y}\}$;

(1.b) *при любом* $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(x, \cdot) : X \rightrightarrows Y$ *является антитонным на множестве* $[x, u_0]_X$;

(1.c) *любая бесконечная цепь* $S \in \mathcal{S}\big(\Upsilon, \mathcal{O}_X(u_0), \widehat{y}\big)$ *ограничена снизу, и для некоторой ее нижней границы* $\omega \in X$ *существует элемент* $z \in \Upsilon(\omega, \omega)$, *удовлетворяющий неравенству* $z \succeq \widehat{y}$.

Тогда включение (1.2) *имеет решение, во множестве решений существует минимальный элемент и он принадлежит множеству* $\mathcal{O}_X(u_0)$.

2. Краевая задача для неявного дифференциального включения

Обозначим через $\mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{K}(\mathbb{R}^n)$ множества всех непустых замкнутых и, соответственно, непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Полагаем, что в $\mathbb{R}^n$ задан стандартный покомпонентный порядок.

Обозначим через W^n пространство измеримых функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с «обычным» порядком, т. е. для его элементов x, u выполнено неравенство $x \le u$, если $x(t) \le u(t)$ при п. в. $t \in [a,b]$. Пусть задано измеримое многозначное отображение $B : [a,b] \to \mathrm{C}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $L(B)$ — подпространство W^n, содержащее все суммируемые сечения отображения B, $AC(B)$ — множество таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $\dot{x} \in L(B)$. В случае $B(t) \equiv \mathbb{R}^n$ будем обозначать $L^n \doteq L(\mathbb{R}^n)$ и $AC^n \doteq AC(\mathbb{R}^n)$, соответственно.

Напомним, что многозначное отображение $g : \mathbb{R} \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ называется *непрерывным справа (слева) в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$ (см. [23]), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (соответственно для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$) выполнено $h_{\mathbb{R}^m}\big(G(x_0), G(x)\big) < \varepsilon$. Здесь символом $h_{\mathbb{R}^m}$ обозначено расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Множество $U \in W^n$ называют *интегрально ограниченным снизу* (*сверху*), если существует такое число C, что для любой измеримой функции $u \in U$ справедливо неравенство $\int_a^b u(t)dt \ge C$ (соответственно, $\int_a^b u(t)dt \le C$). Множество U называется *интегрально ограниченным*, если оно интегрально ограничено и сверху, и снизу.

Теперь сформулируем основной результат статьи. Пусть заданы: многозначная функция $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, диагональные $n \times n$ матрицы $\alpha := \operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\beta := \operatorname{diag}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, $\lambda := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, вектор $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать краевую задачу для дифференциального включения

$$F(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0, \quad t \in [a,b], \tag{2.1}$$

с условием

$$\alpha x(a) + \beta x(b) = \widetilde{\gamma}, \tag{2.2}$$

при дополнительном ограничении на производную искомой функции

$$(\mathcal{L}x) \doteq \dot{x}(t) - \lambda x(t) \in B(t), \quad t \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Решение этой краевой задачи будем искать в классе абсолютно непрерывных функций, т. е. решением называем функцию $x \in AC^n$, для которой при п. в. $t \in [a,b]$ выполнено (2.1), (2.2), (2.3).

Рассмотрим порождаемое включением (2.1) отображение

$$(t, x, v, w) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto F(t, x, v, w) \in \mathrm{K}(\mathbb{R}^m).$$

Сделаем в нем замену переменных

$$v = z + \lambda x, \quad w = y + \lambda x$$

и, таким образом, по отображению F определим отображение $G^\lambda : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, формулой

$$G^\lambda(t, x, z, y) = F(t, x, z + \lambda x, y + \lambda x). \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что при п. в. $t \in [a,b]$, любых $x, z, y \in \mathbb{R}^n$ многозначное отображение (2.4) как функция каждого аргумента удовлетворяет следующим условиям:

(a) *отображение* $G^{\lambda}(\cdot,x,z,y):[a,b]\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *измеримо,*

(b) *отображение* $G^{\lambda}(t,\cdot,\cdot,y):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *непрерывно справа по каждому скалярному аргументу* $x_1,\dots,x_n$ *и* $z_1,\dots,z_n$*,*

(c) *отображение* $G^{\lambda}(t,x,z,\cdot):\mathbb{R}^n\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *непрерывно.*

Отметим, что для отображения G^{λ} не требуется выполнение условий Каратеодори. Пусть для некоторой функции $\eta\in AC^n$ выполнены соотношения:

$$F_j(t,\eta(t),\dot{\eta}(t),\dot{\eta}(t))\cap\mathbb{R}_+\neq\emptyset,\quad t\in[a,b],\quad j=\overline{1,m}, \tag{2.5}$$

$$\alpha\eta(a)+\beta\eta(b)\geq\widetilde{\gamma}, \tag{2.6}$$

$$(\mathcal{L}\eta)(t)\in B(t),\quad t\in[a,b]. \tag{2.7}$$

Обозначим $\widetilde{B}(t)\doteq B(t)\cap\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}\big((\mathcal{L}\eta)(t)\big)$, $t\in[a,b]$. Очевидно, $\widetilde{B}:[a,b]\to \mathrm{C}(\mathbb{R}^m)$. Определим множество $\Omega\doteq\big\{(t,x,z,y):\ t\in[a,b],\ x\in\mathbb{R}^n,\ z\in\widetilde{B}(t),\ y\in\widetilde{B}(t)\big\}$ и определим сужение $G^{\lambda}_{\Omega}:\Omega\to \mathrm{C}(\mathbb{R}^m)$ многозначного отображения G^{λ} на множество Ω.

Теорема 2.1. *Пусть множество измеримых сечений многозначного отображения* $\widetilde{B}:[a,b]\to \mathrm{C}(\mathbb{R}^m)$ *интегрально ограничено и существует функция* $\eta\in AC^n$*, удовлетворяющая соотношениям* (2.5)*,* (2.6)*,* (2.7) *и неравенствам*

$$\alpha_i>0,\quad \beta_i<0,\quad \lambda_i\neq\ln\Big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\Big),\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.8}$$

Пусть также выполнены следующие условия:

(2.a) *при п. в.* $t\in[a,b]$ *и всех* $x\in\mathbb{R}^n$, $z\in\widetilde{B}(t)$ *отображение* $G^{\lambda}_{\Omega}(t,x,z,\cdot):\widetilde{B}(t)\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *упорядоченно накрывает множество* $\{0\}\subset\mathbb{R}^m$*;*

(2.b) *для п. в.* $t\in[a,b]$*, любых* $z,y\in\mathbb{R}^n$*, при* $i=\overline{1,n}$ *таких, что* $\lambda_i>\ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$*, отображение* $G^{\lambda}(t,x_1,\dots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\dots,z,y):\mathbb{R}\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *изотонно, а при* $i=\overline{1,n}$ *таких, что* $\lambda_i<\ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$*, отображение* $G^{\lambda}(t,x_1,\dots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\dots,z,y):\mathbb{R}\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *антитонно;*

(2.c) *при п. в.* $t\in[a,b]$*, любых* $x,y\in\mathbb{R}^n$ *отображение* $G^{\lambda}(t,x,\cdot,y):\mathbb{R}^n\to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ *антитонно.*

Тогда существует решение $x\in AC^n$ *краевой задачи* (2.1)*,* (2.2)*,* (2.3)*, удовлетворяющее неравенству*

$$\mathcal{L}x\leq\mathcal{L}\eta.$$

Доказательство. Перепишем задачу (2.1), (2.2), (2.3) в виде системы интегральных включений. Для этого рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу

$$\mathcal{L}x=q,\quad q=(q_1,\dots,q_n)\in L^n \tag{2.9}$$

с краевым условием

$$\alpha x(a)+\beta x(b)=\gamma,\quad \gamma\in\mathbb{R}^n.$$

В силу предположения (2.8) эта задача при любых $\gamma\in\mathbb{R}^n$, $q\in L^n$ имеет единственное решение $x=(x_1,\dots,x_n)\in AC^n$, которое определяется формулой

$$x=W(q,\gamma),$$

где отображение $W : L^n \times \mathbb{R}^n \to AC^n$ — это интегральный оператор

$$W(q,\gamma) = (W_1(q_1,\gamma_1),\ldots,W_n(q_n,\gamma_n)),$$

компоненты которого определяются соотношениями

$$(W_i(q_i,\gamma_i))(t) = X_i(t)\gamma_i + \int_0^1 \mathcal{W}_i(t,s)q_i(s)ds,$$

$$X_i(t) = \frac{e^{\lambda_i t}}{\alpha_i + \beta_i e^{\lambda}},$$

$$\mathcal{W}_i(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i e^{\lambda_i(t-s)}}{\alpha_i+\beta_i e^{\lambda_i}}, & 0 \le s \le t \le 1, \\ \dfrac{-\beta_i e^{\lambda_i(t-s+1)}}{\alpha_i+\beta_i e^{\lambda_i}}, & 0 \le t < s \le 1, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}.$$

Легко проверить, что в случае

$$\lambda_i > \ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$$

выполнено $\mathcal{W}_i(t,s) < 0$ при п. в. $(t,s) \in [a,b]\times[a,b]$ и $X_i(t) < 0$ при п. в. $t \in [a,b]$, а в случае

$$\lambda_i < \ln\big(-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\big)$$

выполнено $\mathcal{W}_i(t,s) > 0$ при п. в. $(t,s) \in [a,b]\times[a,b]$ и $X_i(t) > 0$ при п. в. $t \in [a,b]$. Поэтому из условия `(2.b)` получаем, что отображение $G^\lambda_\Omega(t, W(\cdot,\cdot), z, y) : L^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ антитонное (по каждому аргументу).

Используя формулу (2.4) и вспомогательную задачу (2.9), запишем краевую задачу (2.1), (2.2), (2.3) относительно неизвестной функции $q \in L(B)$ в виде следующего эквивалентного включения

$$G^\lambda_\Omega(t,(W(q,\widetilde{\gamma}))(t), q(t), q(t)) \ni 0, \quad t \in [a,b]. \tag{2.10}$$

Покажем, что включение (2.10) представимо в виде операторного включения (1.2), к исследованию которого применима теорема 1.1.

Согласно [23, теорема 3.1], принятые относительно многозначной функции G^λ предположения `(a)`, `(b)`, `(c)` обеспечивают ее суперпозиционную измеримость, что позволяет определить отображение $\Upsilon : L(B) \times L(B) \rightrightarrows W^m$, как множество измеримых сечений измеримой многозначной функции

$$G^\lambda(\cdot,(W(q,\widetilde{\gamma}))(\cdot), q(\cdot), z(\cdot)) : [a,b] \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m),$$

и соответствующее отображение $F : L(B) \rightrightarrows W^m$, $F(q) \doteq \Upsilon(q,q)$, $q \in L(B)$. Проверим для этих отображений условия теоремы 1.1 Будем полагать $\widehat{y} = 0 \in W^m$.

Для функции $q_0 = \mathcal{L}\eta \in L(B)$ выполнено

$$G^\lambda_j\big(t,(W(q_0,\gamma))(t), q_0(t), q_0(t)\big) \cap \mathbb{R}_+ \ne \emptyset, \quad j = \overline{1,m},$$

где $\gamma = \alpha\eta(a) - \beta\eta(b) \geq \widetilde{\gamma}$. А так как отображение $G^{\lambda}_{\Omega}(t, W(\cdot,\cdot), z, y) : L \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ антитонное, получаем, что

$$G^{\lambda}_{j}\big(t, (W(q_0, \widetilde{\gamma}))(t), q_0(t), q_0(t)\big) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset, \quad j = \overline{1, m}.$$

В силу условий (a), (b), (c) отсюда следует, что существует измеримое сечение $y_0 \geq 0$ отображения $G^{\lambda}_{j}(t, (W(q_0, \widetilde{\gamma}))(t), q_0(t), q_0(t))$, $j = \overline{1, m}$, и для отображения Υ выполнено включение $\Upsilon(q_0, q_0) \ni y_0$, т. е. имеют место соотношения (1.3).

Определим многозначную функцию $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ формулой

$$g(t, y) \doteq G^{\lambda}(t, (Wv)(t), v(t), y), \quad t \in [a, b], \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Для любого $v \in L(B)$ отображение $\Upsilon(\cdot, v) : L(B) \rightrightarrows W^m$ — это оператор Немыцкого, порождаемый сужением g_{Δ} на множество $\Delta = \big\{(t, y) : t \in [a, b], \ y \in B(t)\big\}$ функции $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$. Из предположения (2.a) теоремы следует, что при п. в. $t \in [a, b]$ функция $g_{\Delta}(t, \cdot) : B(t) \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \in \mathbb{R}^m$. Поэтому согласно [23, теорема 3.1] при любом $v \in L(B)$ отображение $\Upsilon(\cdot, v) : L(B) \rightrightarrows W^m$ упорядоченно накрывает множество $\{0\} \in W^m$. Таким образом, условие (1.a) теоремы 1.1 выполнено.

В силу антитонности отображения $G^{\lambda}_{\Omega}(t, W(\cdot,\cdot), z, y) : L \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{K}(\mathbb{R}^m)$, при любом $u \in L(B)$ отображение $\Upsilon(u, \cdot) : L(B) \rightrightarrows W^m$ является антитонным, и условие (1.b) теоремы 1.1 также выполнено.

Проверка условия (1.c) теоремы 1.1 производится аналогично рассуждениями, приведенными в доказательстве теоремы 4.1 работы [23] (в цитируемой теореме были получены условия существования о оценка решения дифференциального включения вида (2.1)).

Таким образом, согласно теореме 1.1, существует решение $x \in AC^m$ краевой задачи (2.1), (2.2), (2.3), удовлетворяющее неравенству $\mathcal{L}x \leq \mathcal{L}\eta$. □

Приведем пример, иллюстрирующий применение теоремы 2.1 к исследованию периодической краевой задачи для дифференциального уравнения.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим при $t \in [0, 1]$ краевую задачу

$$(\dot{x}(t) + x(t))^2 + \operatorname{arctg}(\dot{x}(t)) - 2\pi = 0, \tag{2.11}$$

$$x(0) - x(1) = 0, \tag{2.12}$$

$$\dot{x}(t) - x(t) \in [-1; 1]. \tag{2.13}$$

Определим соответствующие рассматриваемой здесь задаче константы $\widetilde{\gamma} \doteq 0$, $\lambda \doteq 1$, $\alpha \doteq 1$, $\beta \doteq -1$ и отображение $B : [0, 1] \to \mathrm{C}(\mathbb{R})$, $B(t) \doteq [-1, 1]$. Для того чтобы к задаче (2.11), (2.12), (2.13) применить теорему 2.1, вначале умножим на -1 уравнение (2.11) и определим соответствующее полученному таким образом уравнению отображение $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(t, x, v, w) = -(w + x)^2 - \operatorname{arctg}(v) + 2\pi, \quad t \in [0, 1], \quad x, v, w \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.11) — это частный случай включения (2.1), в котором отображение F определено соотношениями (2.14).

Применяя (2.4), определим отображение $G^\lambda : [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ формулой

$$G^\lambda(t,x,z,y)\doteq -y^2-\operatorname{arctg}(z+x)+2\pi.$$

Покажем, что выполнены условия теоремы 2.1.

Прежде всего, отображение $B:[0,1]\to \mathrm{C}(\mathbb{R})$, очевидно, интегрально ограниченное. Далее, положим $\eta_0(t)\doteq -t,\ \ t\in[0,1]$. Для такой функции выполнено

$$\dot\eta_0(t)\equiv -1,\quad f(t,\eta_0(t),\dot\eta_0(t),\dot\eta_0(t))\equiv -(-1-t)^2-\operatorname{arctg}(-1)+2\pi\ge 0,$$

$$\eta(0)-\eta(1)=0-(-1)=1\ge 0,$$

$$\dot\eta(t)-\lambda\eta(t)=-1-(-t)=-1+t\in[-1,1]\ \ \forall t\in[0,1].$$

Итак, соотношения (2.5)–(2.7) справедливы.

Рассмотрим свойства отображения G^λ как функции второго, третьего и четвертого аргументов. Отображение $G^\lambda(t,x,v,\cdot):B(t)\to\mathbb{R}$ накрывает множество $\{0\}$ (т. е. выполнено условие (2.a) теоремы 2.1). Действительно, для $y\in[-1,1]$ из неравенства $-y^2-\operatorname{arctg}(z+x)+2\pi\ge 0$ следует существование $\tilde y\in[-1,1]$ такого, что $\tilde y\le y$ и $-\tilde y^2-\operatorname{arctg}(z+x)+2\pi=0$ (например, можно положить $\tilde y=-\sqrt{2\pi-\operatorname{arctg}(z+x)}$). Отображение $G^\lambda(t,\cdot,\cdot,w):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — антитонное по каждому аргументу (в силу убывания функции $-\operatorname{arctg}$), следовательно, условия (2.b) и (2.c) теоремы 2.1 выполнены.

Итак, все условия теоремы 2.1 выполнены и, таким образом, рассматриваемая периодическая краевая задача разрешима, и существует решение x, производная которого удовлетворяет неравенству $\dot x-\lambda x\le 1-t,\ \ t\in[0,1]$.

References

[1] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. [V. I. Arnold, *Additional Chapters of the Theory of Ordinary Differential Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[2] А. А. Давыдов, “Особенности предельных направлений типичных неявных ОДУ высших порядков”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Труды МИАН, **236**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2002, 134–141; англ. пер.:A. A. Davydov, “Singularities of Limiting Directions of Generic Higher Order Implicit ODEs”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 124–131.

[3] А. А. Давыдов, “Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 1–10; англ. пер.:A. A. Davydov, “Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point”, *Funct. Anal. Appl.*, **19**:2 (1985), 81–89.

[4] L. Dara, “Singularites generiques des equations differentielles multiformes”, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **6**:2 (1975), 95–128.

[5] А. О. Ремизов, “Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений”, *Оптимальное управление*, СМФН, **19**, РУДН, М., 2006, 131–170; англ. пер.:A. O. Remizov, “Many-dimensional poincaré construction and singularities of lifted fields for implicit differential equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **151**:6 (2008), 3561–3602.

[6] А. О. Ремизов, “Неявные дифференциальные уравнения и векторные поля с неизолированными особыми точками”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 105–124; англ. пер.:A. O. Remizov, “Implicit differential equations and vector fields with non-isolated singular points”, *Sb. Math.*, **193**:11 (2002), 1671–1690.

[7] W. Walter, "Differential and integral inequalities", *Journal of Fluid Mechanics*, **48**:2 (1970), 710–713.

[8] Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, Мир, М., 1965. [E. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Mir Publ., Moscow, 1965 (In Russian)].

[9] Я. Д. Мамедов, С. Аширов, С. Атдаев, *Теоремы о неравенствах*, Ылым, Ашхабад, 1980. [Ya. D. Mammadov, S. Ashirov, S. Atdaev, *Inequality theorems*, Ylym Publ., Ashkhabad, 1980 (In Russian)].

[10] С. А. Чаплыгин, "Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений", *Собрание сочинений.* Т. I, Гостехиздат, М., 1948, 348–368. [S. A. Chaplygin, "Foundations of a New Method of Approximate Integration of Differential Equations", *Collected works.* V. I, Gostekhizdat, M., 1948, 348–368 (In Russian)].

[11] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах", *Дифференц. уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities", *Differ. Equ.*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[12] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, "Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями", *Автомат. и телемех.*, 2015, № 1, 31–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, "On controlling objects whose motion is defined by implicit nonlinear differential equations", *Autom. Remote Control*, **76**:1 (2015), 24–43.

[13] С. Бенараб, "Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 216–220. [S. Benarab, "Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 216–220 (In Russian)].

[14] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:5 (2013), 475–478; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On coincidence points of mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 710–713.

[15] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:6 (2013), 595–598; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 727–729.

[16] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств", *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On the cardinality of the coincidence set for mappings of metric, normed and partially ordered spaces", *Sb. Math.*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[17] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[18] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **179** (2016), 330–343.

[19] И. Д. Серова, А. А. Репин, "О существовании и оценках решений неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:123 (2018), 566–574. [I. D. Serova, A. A. Repin, "About Existence and Estimates of Solutions of the Implicit Differential Equation With Autoadjustable Deviation Argument", *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:123 (2018), 566–574 (In Russian)].

[20] И. Д. Серова, "Об оценках решения неявного функционально-дифференциального уравнения", *Прикладная математика и вопросы управления*, 2017, № 2, 85–93. [I. D. Serova, "On estimates of the solution of an implicit functional differential equation", *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2017, № 2, 85–93 (In Russian)].

[21] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, 2-е изд., Гос. изд-во физ.-мат. литературы, М., 1959. [A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Hajkin, *Oscillation Theory*, 2nd. ed., Gos. Izd-vo Fiz.-Mat. Literatury Publ., M., 1959 (In Russian)].

[22] А. Д. Пилия, В. И. Федоров, "Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью", *ЖЭТФ*, **60**:1 (1971), 389–399; англ. пер.:A. D. Piliya, V. I. Fedorov, "Singularities of the field of an electromagnetic wave in a cold anisotropic plasma with two-dimensional inhomogeneity", *JETP*, **33**:1 (1971), 210–215.

[23] E. O. Burlakov,E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenko, I. D. Serova, "On order covering set-valued mappings and their applications to the investigation of implicit differential inclusions and dynamic models of economic processes", *Advances in Systems Science and Applications*, **22**:1 (2022), 176–191.

Информация об авторе

Серова Ирина Дмитриевна, аспирант, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 16.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Irina D. Serova, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Received 30.06.2023
Reviewed 16.11.2023
Accepted for press 23.11.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-406-413

On a class of the first kind Volterra equations in a problem of identification of a linear nonstationary dynamic system

Svetlana V. SOLODUSHA

Melentiev Energy Systems Institute
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Abstract. This paper proposes an approach to the identification of a nonstationary linear dynamic system. Its input-output mathematical model is presented as a Volterra equation of the first kind. The problem of nonparametric identification of Volterra kernels is solved on the basis of an active experiment using test piecewise linear signals (that have a rising front). The problem statement is based on the conditions for modeling the dynamics of technical devices in the energy and power industry. The choice of an admissible family of input signals is driven by the complexity of generating piecewise-constant type signals for real energy objects. The original problem is reduced to solving Volterra integral equations of the first kind with two variable integration limits. A formula for the inversion of the integral equations under study is constructed. Sufficient conditions are obtained for the solvability of the corresponding equations with respect to Volterra kernels in the class of continuous functions.

Keywords: Volterra equations of the first kind with two variable limits of integration, identification, dynamic system

Acknowledgements: The study was carried out at the Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences and funded by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00409, https://rscf.ru/en/project/22-21-00409/).

Mathematics Subject Classification: 45D05.

For citation: Solodusha S.V. On a class of the first kind Volterra equations in a problem of identification of a linear nonstationary dynamic system. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 406–413.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-406-413

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-406-413
УДК 519.642.5

О некотором классе уравнений Вольтерра I рода в задаче идентификации линейной нестационарной динамической системы

Светлана Витальевна СОЛОДУША
ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева»
Сибирского отделения Российской академии наук
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130

Аннотация. В статье предложен подход к идентификации нестационарной линейной динамической системы. Ее математическая модель типа «вход-выход» представлена в виде уравнения Вольтерра I рода. Задача непараметрической идентификации ядер Вольтерра решается на основе активного эксперимента с помощью тестовых сигналов кусочно-линейного вида (имеющих фронт нарастания). Постановка задачи исходит из условий моделирования динамики технических устройств тепло- и электроэнергетики. Выбор допустимого семейства входных сигналов обусловлен сложностью формирования сигналов кусочно-постоянного типа для реальных энергетических объектов. Исходная задача сводится к решению интегральных уравнений Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования. Построена формула обращения выделенных интегральных уравнений. Получены достаточные условия разрешимости соответствующих уравнений относительно ядер Вольтерра в классе непрерывных функций.

Ключевые слова: уравнения Вольтерра I рода с двумя переменными пределами интегрирования, идентификация, динамическая система

Благодарности: Работа выполнена в Институте систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН (ИСЭМ СО РАН) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00409, https://rscf.ru/project/22-21-00409/).

Для цитирования: *Солодуша С.В.* О некотором классе уравнений Вольтерра I рода в задаче идентификации линейной нестационарной динамической системы // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 406–413.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-406-413 (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

The traditional approach of the theory of mathematical modeling involves the use of differential equations based on information about the physical nature of a dynamic object. At the same time, in addition to the input and output variables, the models contain system state variables. At the same time, as noted in [1, p. 11], «detection of differential equations of the ... process is not the only form» of mathematical models. Generally speaking, state variables can be excluded in the transition to models that describe the direct dependence of the output $y(t)$ on the input $x(t)$ [2, p. 27]. A fairly common model of the input–output type in the absence of a priori information about the physical structure of a dynamic system is the Volterra integral equation of the first kind [3]

$$\int_0^t \bar{K}(s)x(t-s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.1}$$

where t is time, $x(t)$ is input, $y(t)$ is output, $\bar{K}(s)$ is the Volterra kernel. To build an integral model of the form (0.1) means to solve the problem of restoring the Volterra kernels based on the known data set $x(t)$, $y(t)$. In the theory of automatic control, there is a widespread approach to the identification of $\bar{K}(t)$, based on the use of the Heaviside function $e(t)$. Function $\bar{K}(t) = y'(t)$ (assuming $y'(t) \in C_{[0,T]}$, $y(0) = 0$) is a solution to the equation (0.1) for $x(t) = e(t)$.

A technique based on the applicating the Heaviside functions is developed in the monograph [4] for the case of nonstationary nonlinear dynamic systems, when the transient characteristics (Volterra kernels) change with time t. Following [4], the problem of the identificating $K(t,s)$, $0 \le s \le t \le T$, in the linear equation

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.2}$$

is reduced to the solution of the integral equation with a variable upper limit of integration ω with respect to the function $K(t,s)$ using piecewise constant test signals of the form

$$x_\omega(t) = e(t) - e(t-\omega), \quad 0 \le \omega \le t \le T. \tag{0.3}$$

As shown in [5,6], the using the left-hand side of (0.2) as a linear term in the Volterra polynomial (segment of an integro-power series) [7] makes it possible to improve the accuracy of modeling the response of stationary nonlinear dynamic systems. Applications should take into account the specifics of technical objects of heat and electric power. As a rule, the signals implemented at the input of the system have a rising edge. In particular, in relation to the objects of heat power [8, p. 8] the input action is conditionally considered to be abrupt if the signal increase in duration does not exceed 10% of the time interval T under study. Thus, the development of methods for constructing the (0.2) model, based on the use of test signal families adapted for applied objects, is of undoubted relevance for solving the problem of identifying transient characteristics for both linear and nonlinear dynamic systems. Note the using the Volterra equations of the first kind of the form (0.2) for nonstationary dynamical systems is limited by the complexity of the problem of identifying the integrand [9].

The purpose of this work is to propose a new method for identifying $K(t,s)$ in (0.2) based on test signals from the class of piecewise linear functions. The paper contents can be conditionally divided into two parts: firstly, the section with the problem statement, secondly, the theoretical one. In the first part, we distinguish new Volterra equations of the first kind with two variable limits of integration that arise in the problem of nonparametric identification of a linear nonstationary dynamical system. These equations allow for explicit inversion formulas. In the second part, sufficient conditions are given that ensure the existence of $K(t,s)$ in the class C_Δ, $\Delta = \{(t,s) : 0 \le s \le t \le T\}$. The conclusion contains the main results of the work.

1. Statement of the nonparametric identification problem

Let the input-output model (0.2) describe the dynamics of a linear nonstationary system with a scalar input $x(t)$ and a scalar output $y(t)$, such that $y(0) = 0$. Assume that the function $y(t)$ in (0.2) is smooth enough to perform the necessary calculations. Developing the technique developed in [4], consider a method for recovering $K(t,s)$ in (0.2) using the one-parameter family

$$\xi_v(s) = \begin{cases} 0, & s \le 0, \\ \dfrac{s}{v}, & 0 < s \le v, \\ 1, & v < s, \end{cases} \tag{1.1}$$

where the parameter $v > 0$ corresponds to the rise time of the front of the test signal [10]. The using piecewise linear input signals is based on taking into account the specifics of setting input actions for technical (energy) objects. The applicability of input signals of this kind in the case when the duration of the rise time of the signal v is constant was considered earlier in [11] when solving the identification problem for $\bar{K}$ from (0.1). In this paper, we consider the situation when the parameter v is variable. This makes it possible to obtain the two-dimensional continuum of initial data required for recovering the unknown values of the function $K(t,s)$.

Assuming that the functions $\xi_v(s)$ belong to the feasible family of test signals of the dynamic system under study, we will perform the substitution $x(s) = \xi_v(s)$ into (0.2). Then the original identification problem $K(t,s)$ is reduced to solving the Volterra equation of the first kind with two variable limits of integration

$$\int_0^v K(t,s)\frac{s}{v}ds + \int_v^t K(t,s)ds = f(t,v), \quad 0 \le v \le t \le T, \tag{1.2}$$

where $f(t,v)$ is the response of the dynamical system to the input of the form (1.1). Note that using a signal in the form (1.1), which is different from (0.3), we complicate the identification problem, since now $x(0) = 0$ and only the derivative $x'(t)|_{t=0} \neq 0$, undergoing a discontinuity, allows us to obtain a well-posed problem on the pair $\left(C, C^{(2)}\right)$. To understand the specifics of (1.2), we formulate the following lemma.

Lemma 1.1. *Let in equation (1.2) with respect to a continuous function $K(t,v)$, nonsymmetric on $\Delta = \{(t,v) : 0 \le v \le t \le T\}$, the right-hand side $f(t,v) \in C^{(1)}_\Delta$ and*

$$f(0,0) = 0. \tag{1.3}$$

Under the condition that $f(t,v)$ exists such that

$$f(t,v) + v\left(f(t,v)\right)'_v = p(t,v), \tag{1.4}$$

holds, equation (1.2) *is equivalent to equation*

$$\int\limits_v^t K(t,s)ds = p(t,v). \tag{1.5}$$

P r o o f. Assuming the validity of the conditions of the lemma, we will show that equivalent transformations allow us to pass from the equation (1.2) to the equation (1.5). Differentiate both parts of (1.2) with respect to v (the operation of differentiation in (1.2) is legal due to condition (1.3)):

$$(f(t,v))'_v = -\int\limits_0^v K(t,s)\frac{s}{v^2}ds.$$

Summing up (1.2) with $v\,(f(t,v))'_v$, we get

$$\int\limits_0^v K(t,s)\frac{s}{v}ds + \int\limits_v^t K(t,s)ds - v\int\limits_0^v K(t,s)\frac{s}{v^2}ds = f(t,v) + v\,(f(t,v))'_v \equiv p(t,v),$$

whence, after reducing similar terms, we have the equation (1.5) with the right-hand side $p(t,v)$ of the form (1.4). □

R e m a r k 1.1. Under the conditions of the Lemma 1.1, the function $f(t,v)$ in the equation (1.2) obtained from (1.5) automatically satisfies the condition (1.3). This follows from

$$\int\limits_0^v K(t,s)\frac{s}{v}ds \to 0 \quad \text{for} \quad v \to 0.$$

In the next section, we consider the problem of identifying the Volterra kernel $K(t,v)$ in (1.2) in more detail.

2. Solvability of a linear Volterra integral equation of the first kind of the form (1.2)

Assuming that (1.2) is uniquely solvable in the class of functions continuous on $\Delta = \{(t,v) : 0 \le v \le t \le T\}$, the solution $K(t,v)$ can be found explicitly [10]:

$$K(t,v) = -\left(2\frac{\partial f(t,v)}{\partial v} + v\frac{\partial^2 f(t,v)}{\partial v^2}\right). \tag{2.1}$$

Consider the question of the existence of a unique continuous solution to (1.2).

Theorem 2.1. *The conditions* (1.3) *and*

$$2\,(f(t,v))'_v + v\,(f(t,v))''_{v^2} \in C_\Delta, \quad \Delta = \{(t,v) : 0 \le v \le t \le T\}, \tag{2.2}$$

are necessary and sufficient for the existence of a solution to equation (1.2), $(t,v) \in \Delta$, *in the class of continuous functions on* Δ. *The solution to* (1.2) *is unique in the specified class and is determined by the formula* (2.1).

P r o o f. *Existence.* Necessity. Let the solution to (1.2) in the class of functions continuous on Δ exist (we denote it by $K^*(t,v)$). It means that

$$f(t,v)=\int_0^v K^*(t,s)\frac{s}{v}ds+\int_v^t K^*(t,s)ds.$$

The fulfillment of the (1.3) condition is obvious. Taking into account (1.4), (1.5) we have

$$f(t,v)+v\left(f(t,v)\right)'_v=\int_v^t K^*(t,s)ds,$$

which ensures that the condition (2.2) is satisfied due to the continuity of K^* on Δ. Thus, the necessity of (1.3), (2.2) is proved.

Adequacy. If (2.2) is true, then the function (2.1) is continuous on Δ. Using a direct substitution of (2.1) into (1.2), we verify that (2.1) turns (1.2) into an identity under the conditions of the theorem. Let us introduce

$$I_1=\int_0^v \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2}s^2ds=v^2\left.\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}\right|_{s=v}-2\int_0^v\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}sds,$$

$$I_2=\int_v^t \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2}sds=t\left.\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}\right|_{s=t}-v\left.\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}\right|_{s=v}-f(t,t)+f(t,v).$$

Then substituting $K(t,s)=-\left(2\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}+s\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2}\right)$ into (1.2) gives

$$\begin{aligned}-\int_0^v\left(2\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}+s\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2}\right)\frac{s}{v}ds-\int_v^t\left(2\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}+s\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2}\right)ds&\\ =-\frac{2}{v}\int_0^v\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}sds-\frac{1}{v}I_1-2f(t,t)+2f(t,v)-I_2.&\quad(2.3)\end{aligned}$$

By virtue of (1.2),

$$f(t,t)=\frac{1}{t}\int_0^t K(t,s)sds,\qquad \left.\frac{\partial f(t,v)}{\partial v}\right|_{v=t}=-\frac{1}{t^2}\int_0^t K(t,s)sds,$$

therefore, given the condition (1.3),

$$f(t,t)+t\left.\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}\right|_{s=t}=0$$

for all $t\in[0,T]$. Therefore, the right-hand side of (2.3) becomes $f(t,v)$.

Uniqueness. Let us prove uniqueness by contradiction. Assume that there are two solutions $K^*(t,v)$ and $K^{**}(t,v)\neq K^*(t,v)$ belonging to C_Δ. Then their difference $\varepsilon(t,v)$ satisfies the identity

$$\int_0^v \varepsilon(t,s)\frac{s}{v}ds+\int_v^t\varepsilon(t,s)ds\equiv 0.$$

For $v = 0$, from this equality we obtain

$$\int_0^t \varepsilon(t,s)ds \equiv 0,$$

therefore, $\varepsilon(t,s) = 0$, so $K^*(t,v) = K^{**}(t,v)$. □

E x a m p l e 2.1. Following [4], it is natural to consider the response of the test dynamic system to the input signal (1.1) in the form

$$y(t,\nu) = \frac{1}{6}\nu^2 M - \frac{1}{2}\nu M t - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}Mt^2 + t, \quad M = \text{const} > 0.$$

It is easy to see that all conditions of the theorem are satisfied, so by (2.1)

$$K(t,s) = 1 + M(t-s)$$

is a solution to (1.2).

Conclusions

The paper considered a new type of Volterra integral equations of the first kind with variable lower and upper limits of integration. Conditions were formulated for the equivalence of distinguished linear integral equations of the form (1.2), associated with the identification of Volterra kernels using piecewise linear input signals, to another type of integral equations of the form (1.5) arising when using signals from the class of piecewise costant functions. A theorem on the existence of a unique solution $K(t,v)$ to the equation (1.2) in the class of continuous on $\Delta = \{(t,v) : 0 \le v \le t \le T\}$ functions was formulated and proved. Further development of the work is connected with the application of the proposed approach in the problem of identifying the transient characteristics of nonlinear dynamic objects of thermal power engineering.

References

[1] D. Graupe, *Identification of System*, R. E. Krieger Pub. Co., Huntington–New York, 1976.

[2] V. Boss, *Lectures on Management Theory.* V. I: *Automatic Regulation*, LIBROCOM, Moscow, 2012 (In Russian).

[3] H. Brunner, *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications*, 1st ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[4] A. S. Apartsyn, *Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind*, VSP, Utrecht–Boston, 2003.

[5] A. S. Apartsyn, S. V. Solodusha, "Mathematical simulation of nonlinear dynamic systems by Volterra series", *Engineering Simulation*, **17**:2 (2000), 143–153.

[6] S. V. Solodusha, "Modeling heat exchangers by quadratic Volterra polynomials", *Autom. Remote Control*, **75**:1 (2014), 87–94.

[7] V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*, Dover Publications, New York, 1959.

[8] S. P. Novikov, *Practical Identification of Dynamic Characteristics of Control Objects of Thermal Power Equipment*, NSTU Publishing House, Novosibirsk, 2004 (In Russian).

[9] I. V. Boikov, N. P. Krivulin, "Methods of identification of dynamic systems", *Software systems: Theory and Applications*, **23**:5 (2014), 79–96 (In Russian).

[10] S. V. Solodusha, “New classes of Volterra integral equations of the first kind related to the modeling of the wind turbine dynamics”, *International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference)*, Proceedings of 15th International Conference (Moscow, Russia, 3–5 June 2020), IEEE Conference Publications, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Piscataway–New Jersey–United States, 2020, 35–39.

[11] K. V. Suslov, D. O. Gerasimov, V. A. Vinnikov, S. V. Solodusha, “Modelling and simulation of power generation of smart electricity supply systems”, *CIGRE SESSION 46*, Proceedings of CIGRE Session 46 (Paris, France, 21–26 August 2016), 2016, 135990.

Information about the author

Svetlana V. Solodusha, Doctor of Engineering, Associate Professor, Head of Laboratory, Melentiev Energy Systems Institute, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: solodusha@isem.irk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6162-7542

Информация об авторе

Солодуша Светлана Витальевна, доктор технических наук, доцент, заведующий лабораторией, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: solodusha@isem.irk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6162-7542

Поступила в редакцию 10.04.2023 г.
Поступила после рецензирования 19.09.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Received 10.04.2023
Reviewed 19.09.2023
Accepted for press 23.11.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-414-435
УДК 517.9

О роли множителей Лагранжа и двойственности в некорректных задачах на условный экстремум. К 60-летию метода регуляризации Тихонова

Михаил Иосифович СУМИН
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Обсуждается важная роль множителей Лагранжа и двойственности в теории некорректных задач на условный экстремум. Центральное внимание уделяется задаче устойчивого приближенного нахождения нормального (минимального по норме) решения операторного уравнения первого рода $Az = u$, $z \in \mathcal{D} \subseteq Z$, где $A : Z \to U$ — линейный ограниченный оператор, $u \in U$ — заданный элемент, $\mathcal{D} \subseteq Z$ — выпуклое замкнутое множество, Z, U — гильбертовы пространства, являющейся классической для теории некорректных задач. Рассматриваются две эквивалентные ей задачи (с точки зрения одновременного существования их единственных решений) на условный экстремум, первая из которых — это задача ($CE1$) с функциональным ограничением-неравенством $\|z\|^2 \to \min$, $\|Az-u\|^2 \le 0$, $z \in \mathcal{D}$, а вторая — задача ($CE2$) с операторным ограничением-равенством $\|z\|^2 \to \min$, $Az = u$, $z \in \mathcal{D}$. В работе последовательно: 1) показывается, что метод регуляризации Тихонова может естественным образом трактоваться как метод устойчивой аппроксимации точного решения экстремалями функционала Лагранжа для задачи ($CE1$) с одновременным построением в двойственной к ней задаче максимизирующей последовательности из множителей Лагранжа, при этом множитель Лагранжа является величиной обратной параметру регуляризации в методе Тихонова; другими словами, теореме сходимости метода регуляризации Тихонова придается вид утверждения в форме двойственности относительно задачи ($CE1$); 2) обсуждается роль стабилизации по Тихонову для выпуклых задач общего вида при решении задач на условный экстремум; 3) обсуждается основанный на стабилизации по Тихонову двойственной к ($CE2$) задачи устойчивый метод для решения исходного операторного уравнения, который может рассматриваться как метод регуляризации правила множителей Лагранжа для задачи ($CE2$); 4) обсуждаются особенности каждого из двух указанных выше подходов к регуляризации решения исходного операторного уравнения.

Ключевые слова: некорректная задача, линейное операторное уравнение, регуляризирующий алгоритм, метод регуляризации Тихонова, условный экстремум, правило множителей Лагранжа, двойственность, обобщенная минимизирующая последовательность, двойственная регуляризация, регуляризованный принцип Лагранжа

Благодарности: Результаты, представленные в вводной части и разделах 1, 3, получены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/); результаты, представленные в разделе 2, получены за счет гранта Министерства образования и науки Тамбовской области № 2-ФП-2023.

Для цитирования: *Сумин М.И.* О роли множителей Лагранжа и двойственности в некорректных задачах на условный экстремум. К 60-летию метода регуляризации Тихонова // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 414–435. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-414-435

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-414-435

On the role of Lagrange multipliers and duality in ill-posed problems for constrained extremum. To the 60th anniversary of the Tikhonov regularization method

Mikhail I. SUMIN
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The important role of Lagrange multipliers and duality in the theory of ill-posed problems for a constrained extremum is discussed. The central attention is paid to the problem of stable approximate finding of a normal (minimum in norm) solution of the operator equation of the first kind $Az = u$, $z \in \mathcal{D} \subseteq Z$, where $A : Z \to U$ is a linear bounded operator, $u \in U$ is a given element, $\mathcal{D} \subseteq Z$ is a convex closed set, Z, U are Hilbert spaces. As is known, this problem is classical for the theory of ill-posed problems. We consider two problems equivalent to it (from the point of view of the simultaneous existence of their unique solutions) for a constrained extremum, the first of which is the problem ($CE1$) with a functional inequality constraint $\|z\|^2 \to \min$, $\|Az - u\|^2 \le 0$, $z \in \mathcal{D}$, and the second is the problem ($CE2$) with operator equality constraint $\|z\|^2 \to \min$, $Az = u$, $z \in \mathcal{D}$. First of all, we show that Tikhonov's regularization method can be naturally interpreted as a method of stable approximation of the exact solution by extremals of the Lagrange functional for problem ($CE1$) with simultaneous construction of a maximizing sequence of Lagrange multipliers in its dual problem. In this case, the Lagrange multiplier is the reciprocal of the regularization parameter in the Tikhonov method. In other words, the convergence theorem of the Tikhonov regularization method is given the form of a statement in the form of duality with respect to the problem ($CE1$). Next, we discuss the role of Tikhonov stabilization for general convex problems in solving problems for constrained extremum and a stable method based on Tikhonov stabilization of the problem dual to ($CE2$) for solving the original operator equation, which can be considered as a regularization method for the Lagrange multiplier rule for the problem ($CE2$). The paper discusses the features of each of the two above mentioned approaches to the regularization of solving the original operator equation.

Keywords: ill-posed problem, linear operator equation, regularizing algorithm, Tikhonov regularization method, constrained extremum, Lagrange multiplier rule, duality, generalized minimizing sequence, dual regularization, regularized Lagrange principle

Acknowledgements: The results of Introduction and Sections 1, 3 were obtained within the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/). The results of Section 2 were obtained within the grant of the Ministry of Education and Science of the Tambov region no. 2-ФП-2023.

Mathematics Subject Classification: 47A52 49K27 90C46 90C31.

For citation: Sumin M.I. On the role of Lagrange multipliers and duality in ill-posed problems for constrained extremum. To the 60th anniversary of the Tikhonov regularization method. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 414–435. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-414-435
(In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Как известно, некорректные задачи составляют в совокупности огромный класс математических задач, порожденный, в первую очередь, запросами современных естественнонаучных приложений [1–4]. Среди существующих к настоящему времени подходов к решению некорректных задач [3, 5–9] наибольшую известность получил подход, за которым закрепилось название метода регуляризации Тихонова [1–4, 6, 7]. Предложенный А. Н. Тихоновым [1, 2] в 1963 г. метод регуляризации (стабилизации) вот уже на протяжении шестидесяти лет является основным методом для решения самых разнообразных актуальных некорректных задач [3, 4]. Он применяется как для решения операторных уравнений (см., например, [1–7]), так и для решения задач математического программирования (см., например, [8]). Различным вариантам метода регуляризации Тихонова применительно к указанным классам некорректных задач за прошедшие шесть десятков лет посвящено большое количество публикаций, в том числе, и монографического (см., например, [5, 6]), а также учебного характера (см., например, [3, 7–9]).

Данная статья продолжает линию работ [10, 11], посвященных ответу на вопрос о том, как, опираясь на классическое правило множителей Лагранжа (ПМЛ) и связанные с ним методы, можно решать некорректные задачи. Говоря точнее, она продолжает непосредственно исследования работы [11], посвященной обсуждению того, как регуляризация этого классического правила позволяет естественным образом трансформировать его в устойчивые к ошибкам исходных данных алгоритмы решения задач поиска нормальных решений операторных уравнений первого рода на паре гильбертовых пространств. Такие задачи, как известно [1–9], являются классическими некорректными задачами. В отличие от работы [11], основная направленность данной работы состоит в том, чтобы подчеркнуть роль множителей Лагранжа и теории двойственности в регуляризации некорректных задач и, прежде всего, в регуляризации по Тихонову [1–3, 6, 7] операторных уравнений на паре гильбертовых пространств. Несмотря на то, что различные результаты, связанные с теорией множителей Лагранжа, являются базовыми для теории некорректных задач с самого появления метода регуляризации Тихонова в 1963 г., автору данной статьи не попадались какие-либо публикации, в которых этот метод последовательно трактовался бы с позиции теории множителей Лагранжа и двойственности.

0.1. Метод регуляризации Тихонова для решения линейного операторного уравнения на паре гильбертовых пространств. Напомним кратко, в чем состоит метод регуляризации Тихонова [1–3, 6, 7] применительно к решению операторных уравнений первого рода, ограничившись достаточно содержательным случаем таких уравнений на паре гильбертовых пространств. Этот метод предназначен для устойчивого приближенного нахождения нормального (минимального по норме) решения операторного уравнения первого рода

$$(IP) \qquad Az = u, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $A : Z \to U$ — линейный ограниченный оператор, $u \in U$ — заданный элемент, $\mathcal{D} \subseteq Z$ — выпуклое замкнутое множество, Z, U — гильбертовы пространства. При этом в самых первых работах [1] некорректная задача (IP) рассматривалась для случая $\mathcal{D} = Z$ при условии, что оператор A является интегральным оператором Фредгольма, а в качестве Z, U используются пространства суммируемых с квадратом функций.

Фундаментальным в теории некорректных задач является понятие регуляризирующего алгоритма (оператора) по Тихонову [1–3, 6, 7]. С целью его формулировки введем «приближенную» задачу (IP)

$$(IP^{h,\delta}) \equiv (IP^{\eta}) \qquad A^h z = u^\delta, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z, \quad \eta \equiv (h,\delta),$$

с заданными линейным ограниченным оператором $A^h : Z \to U$ и элементом $u^\delta \in U$ такими, что $\|A^h - A^0\| \le h$, $\|u^\delta - u^0\| \le \delta$, $A \equiv A^0$, $u \equiv u^0$. Здесь $h \in (0, h_0]$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $h_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ — числовые параметры, характеризующие степень отклонения исходных данных приближенной задачи $(IP^{h,\delta})$ от исходных данных точной задачи $(IP) = (IP^{0,0}) \equiv (IP^0)$. Предположим, наконец, что задача $(IP) = (IP^0)$ имеет точное нормальное решение $z^0 \in \mathcal{D}$.

Определение 0.1. Регуляризирующим для задачи (IP^0) называется зависящий от h и δ и действующий во множество $\mathcal{D}$ алгоритм (оператор) $R(A^h, u^\delta, \eta)$, $\eta \equiv (h,\delta)$, ставящий в соответствие любой паре исходных данных $\{A^h, u^\delta\}$, удовлетворяющей оценкам $\|A^h - A^0\| \le h$, $\|u^\delta - u^0\| \le \delta$, элемент $z^{h,\delta} \equiv z^\eta$ такой, что $\|z^\eta - z^0\| \to 0$, $\eta \to 0$.

Метод регуляризации (стабилизации) Тихонова для решения операторного уравнения первого рода (IP) указывает конкретный способ построения регуляризирующего алгоритма, обеспечивающий устойчивое приближенное решение этой некорректной задачи. Он неразрывно связан с задачей минимизации так называемого сглаживающего функционала — функционала Тихонова

$$M^{\eta,\alpha}(z) \equiv \|A^h z - u^\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2 \to \min, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{0.1}$$

единственное решение $z^{\eta,\alpha}$ которой при $\alpha > 0$ всегда существует, при этом величина $\alpha \ge 0$ называется параметром регуляризации. С помощью экстремалей функционала Тихонова, которые, очевидно, являются одновременно решениями вариационного неравенства

$$\langle A^{h*}A^h z + \alpha z - A^{h*}u^\delta, y - z\rangle \ge 0 \quad \forall\, y \in \mathcal{D},$$

происходит аппроксимация точного нормального решения z^0 задачи (IP^0) при условии, что величины h и δ стремятся к нулю согласованно со стремлением к нулю параметра регуляризации $\alpha > 0$. Сформулируем теорему сходимости метода регуляризации Тихонова [6, гл. 1, § 2].

Теорема 0.1. [***Сходимость метода регуляризации Тихонова***] *Пусть задача (IP^0) разрешима и $z^0 \in \mathcal{D}$ — ее нормальное решение. Тогда, если выполняется условие согласования*

$$(h^2 + \delta^2)/\alpha(\eta) \to 0, \quad \alpha(\eta) \to 0, \quad \eta \equiv (h,\delta) \to 0, \tag{0.2}$$

то имеет место и предельное соотношение $\|z^{\eta,\alpha(\eta)} - z^0\| \to 0$, $\eta \to 0$, т. е. оператор $R(A^h, u^\delta, \eta)$, ставящий в соответствие любой паре исходных данных $\{A^h, u^\delta\}$, удовлетворяющей оценкам $\|A^h - A^0\| \le h$, $\|u^\delta - u^0\| \le \delta$, элемент $z^{\eta,\alpha(\eta)}$, является регуляризирующим.

0.2. Эквивалентные операторному уравнению (IP) задачи на условный экстремум. С формальной точки зрения нормальное решение задачи (IP) можно искать посредством решения двух задач на условный экстремум. Одна из них это задача невыпуклой минимизации с одним функциональным ограничением-равенством $\|z\|^2 \to \min$,

$\|Az - u\|^2 = 0$, $z \in \mathcal{D}$ или эквивалентная ей задача квадратичной выпуклой оптимизации с одним функциональным ограничением-неравенством

$$(CE1) \qquad \|z\|^2 \to \min, \quad \|Az - u\|^2 \le 0, \quad z \in \mathcal{D},$$

другая — задача минимизации с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом в случае бесконечномерности U) ограничением-равенством

$$(CE2) \qquad \|z\|^2 \to \min, \quad Az = u, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Все эти три задачи условной оптимизации эквивалентны с той точки зрения, что их решения (единственные) одновременно либо не существуют, либо существуют и совпадают между собой. Возможности решения задачи (IP) на основе регуляризации ПМЛ для задачи ($CE2$) подробно обсуждались в [11].

Задача ($CE1$), будучи эквивалентной в указанном выше смысле задаче ($CE2$), тем не менее, по своим оптимизационным свойствам принципиально от нее отличается. Ниже в статье мы показываем, что связанный с теорией двойственности и ПМЛ аппарат, последовательно примененный к задаче ($CE1$), позволяет взглянуть на классический метод регуляризации с несколько иной, по сравнению с традиционной [1,3,6,7], стороны. Говоря более точным языком, сам описанный выше метод Тихонова и такой его классический вариант как обобщенный принцип невязки представляют собой ничто иное, как разные версии решения двойственной задачи по отношению к «простейшей» задаче квадратичной оптимизации ($CE1$). При этом, подобно [11], аппроксимация точного решения задачи (IP) происходит посредством экстремалей регулярного функционала Лагранжа для задачи ($CE1$), но в отличие от [11] без регуляризации самой двойственной к ($CE1$) задачи. Подчеркнем при этом, что в [11] двойственная задача бралась по отношению к задаче ($CE2$). Другими словами, в следующем разделе теореме сходимости метода регуляризации Тихонова придается вид утверждения в форме двойственности относительно задачи ($CE1$) (подробности ниже в теореме 1.1).

В работе последовательно обсуждаются: 1) особенности метода регуляризации Тихонова как двойственного метода относительно задачи ($CE1$); 2) особенности метода стабилизации Тихонова для выпуклых задач общего вида (без ограничений типа равенства и неравенства) при решении задач на условный экстремум; 3) особенности регуляризации ПМЛ для задачи ($CE2$); 4) сравнение результатов, основанных на двойственности подходов к регуляризации задач ($CE1$) и ($CE2$); 5) возможности и результаты применения методов возмущений и негладкого анализа при регуляризации задачи (IP) на основе двойственного подхода к регуляризации задачи ($CE2$).

1. Метод регуляризации Тихонова в форме двойственности для решения операторного уравнения на паре гильбертовых пространств

1.1. Метод регуляризации Тихонова в форме двойственности. В контексте данной статьи представляется важным заметить сразу, что функционал Тихонова $M^{\eta,\alpha}(z)$, $z \in \mathcal{D}$ (см. (0.1)), по сути дела, совпадает с регулярным функционалом Лагранжа

$$L^{\eta}(z, 1/\alpha) \equiv \|z\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|A^h z - u^\delta\|^2, \quad z \in \mathcal{D}$$

в задаче

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^h z - u^\delta\|^2 \le 0, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{1.1}$$

отличаясь от последнего лишь положительным множителем, при этом экстремали этих двух функционалов совпадают. Множитель $1/\alpha$ играет роль одномерной двойственной переменной в этой задаче, а посредством экстремалей $z^\eta[1/\alpha] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^\eta(z,1/\alpha)$, $z^\eta[1/\alpha] = z^{\eta,\alpha}$, функционала Лагранжа $L^\eta(z,1/\alpha)$, $z\in\mathcal{D}$ при условии согласованного стремления к нулю η и α происходит аппроксимация точного решения задачи (IP^0).

Приведем доказательство сходимости метода регуляризации Тихонова, опираясь на теорию двойственности и ПМЛ. С этой целью, прежде всего, введем двойственную к (1.1) задачу

$$V^\eta(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}}\{\|z\|^2 + \lambda\|A^h z - u^\delta\|^2\} \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L^\eta(z,\lambda) \to \sup, \quad \lambda \geq 0, \tag{1.2}$$
$$z^\eta[\lambda] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^\eta(z,\lambda) \quad h\in[0,h_0], \quad \delta\in[0,\delta_0].$$

При доказательстве соответствующего результата нам потребуется лемма, в которой устанавливается формула для супердифференциала маргинальной вогнутой функции V^η (напомним, что под супердифференциалом вогнутого функционала V понимается субдифференциал с обратным знаком выпуклого функционала $-V$). Для ее формулировки рассмотрим маргинальную функцию

$$V(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L(z,\lambda), \quad \lambda \geq 0, \quad z[\lambda] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L(z,\lambda)$$

для функционала Лагранжа $L(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \lambda\|Az-u\|^2$, $z\in\mathcal{D}$, $\lambda\geq 0$, задачи на условный экстремум ($CE1$). Применяя использованный при доказательстве леммы 2 в [12] метод, с учетом сильной выпуклости по z функционала Лагранжа $L(z,\lambda)$, $z\in\mathcal{D}$, приходим к утверждению о том, что имеет место

Лемма 1.1. *Супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала $V(\lambda)$, $\lambda\geq 0$ при $\lambda>0$ представляет собой одноточечное множество, задается равенством $\partial V(\lambda) = \|Az[\lambda]-u\|^2$ и является производной Фреше этого функционала.*

Переходим к формулировке и доказательству теоремы сходимости метода регуляризации Тихонова в терминах функции Лагранжа L^η и целевой функции V^0 двойственной задачи (1.2) при $h=\delta=0$, которая позволяет трактовать его как двойственный метод решения задачи ($CE1$), эквивалентной исходной некорректной задаче (IP). В соответствии с формулируемой теоремой величина $1/\alpha(\eta)$, обратная вырабатываемому теоремой 0.1 параметру регуляризации $\alpha(\eta)$ и одновременно являющаяся двойственной переменной в точной задаче (1.1) при $h=\delta=0$, доставляет «максимум в пределе при $\eta\to 0$» в точной двойственной задаче $V^0(\lambda)\to\sup$, $\lambda\geq 0$, а соответствующие экстремали $z^\eta[1/\alpha(\eta)]$ функции Лагранжа $L^\eta(z,1/\alpha(\eta))$, $z\in\mathcal{D}$ аппроксимируют при $\eta\to 0$ точное решение z^0 в точной задаче (1.1) при $h=\delta=0$. В силу леммы 1.1 целевая функция V^η в двойственной задаче $V^\eta(\lambda)\to\sup$, $\lambda\geq 0$ является при $\lambda>0$ одномерной непрерывной дифференцируемой монотонно неубывающей вогнутой функцией с неотрицательным градиентом $\|A^h z^\eta[\lambda]-u^\delta\|^2$.

Теорема 1.1. [***Сходимость метода регуляризации Тихонова как основанного на двойственности метода***] *Справедливы следующие два утверждения:*

1. *Пусть задача (IP^0) разрешима и $z^0\in\mathcal{D}$ — ее нормальное решение. Пусть также выполняется условие согласования (0.2). Тогда можно утверждать, что элементы*

$z^\eta[1/\alpha(\eta)]$ равномерно по $\eta \ge 0$ ограничены и справедливы предельные соотношения

$$\|z^\eta[1/\alpha(\eta)]\|^2 \le \|z^0\|^2 + \epsilon(\eta), \quad \epsilon(\eta) \ge 0, \quad \epsilon(\eta) \to 0, \tag{1.3}$$

$$(V^\eta)'(1/\alpha(\eta)) = \|A^h z^\eta[1/\alpha(\eta)] - u^\delta\|^2 \to 0, \quad \eta \to 0,$$

которые, в свою очередь, влекут предельное соотношение

$$z^{\eta,\alpha(\eta)} = z^\eta[1/\alpha(\eta)] \to z^0, \quad \eta \to 0, \tag{1.4}$$

в частности, и при $h = \delta = 0$, $\alpha(\eta) = \alpha$

$$\lim_{\alpha\to 0} z^0[1/\alpha] = z^0, \tag{1.5}$$

т. е. оператор $R(A^h, u^\delta, \eta)$, ставящий в соответствие любой паре исходных данных $\{A^h, u^\delta\}$, удовлетворяющей оценкам $\|A^h - A^0\| \le h$, $\|u^\delta - u^0\| \le \delta$, элемент $z^{\eta,\alpha(\eta)} = z^\eta[1/\alpha(\eta)]$, $\alpha(\eta) > 0$, является регуляризирующим.

Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V^0(1/\alpha(\eta)) \to \|z^0\|^2 = \sup_{\gamma>0} V^0(\gamma), \quad \eta \to 0, \tag{1.6}$$

которое означает, что любая последовательность $1/\alpha(\eta_k)$, $k = 1, 2, \dots,$ $\eta_k \to 0$, $k \to \infty$, является максимизирующей в задаче

$$V^0(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} \{\|z\|^2 + \lambda\|A^0 z - u^0\|^2\} \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L^0(z,\lambda) \to \sup, \quad \lambda \ge 0, \tag{1.7}$$

т. е. в задаче, двойственной к исходной точной задаче

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^0 z - u^0\|^2 \le 0, \quad z \in \mathcal{D}. \tag{1.8}$$

***2.** С другой стороны, если имеет место предельное соотношение $(\lambda \ge 0)$*

$$(V^\eta)'(\lambda) = \|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 \to 0, \quad \eta \to 0, \quad \lambda \to \infty, \tag{1.9}$$

а минимали $z^\eta[\lambda]$ равномерно по $\lambda > 0$ и $\eta \equiv (h,\delta) > 0$ ограничены, то при условии согласования $\lambda(h^2 + \delta^2) \to 0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$ справедливо и предельное соотношение $z^\eta[\lambda] \to z^0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$, где z^0 — нормальное решение задачи (IP^0).

З а м е ч а н и е 1.1. Первое утверждение теоремы, как следствие существования нормального решения z^0, можно трактовать как выраженное посредством предельных соотношений необходимое условие обычной оптимальности в форме двойственности относительно задачи (1.8), второе же можно рассматривать как выраженное также посредством предельных соотношений достаточное условие обычной оптимальности в той же задаче. Первая часть первого утверждения теоремы, по сути дела, совпадает с утверждением теоремы 0.1, но выражается в терминах функции Лагранжа и содержит дополнительно предельные соотношения (1.3). Отмеченные обстоятельства позволяют характеризовать теорему с дополнительными утверждениями, как теорему сходимости метода регуляризации Тихонова в форме двойственности.

Доказательство. Используем функционал Лагранжа $L^\eta(z,1/\alpha)$, $z\in\mathcal{D}$ вместо функционала Тихонова, $\eta\equiv(h,\delta)$, $h\in[0,h_0]$, $\delta\in[0,\delta_0]$. Доказываем первую часть первого утверждения теоремы. Можем записать

$$L^\eta(z^\eta[1/\alpha],1/\alpha)\le L^\eta(z^0,1/\alpha)\le\frac{1}{\alpha}(h\|z^0\|+\delta)^2+\|z^0\|^2. \tag{1.10}$$

В силу условия согласования (0.2) существует постоянная $C>0$, не зависящая от η, такая, что $(h\|z^0\|+\delta)^2/\alpha(\eta)\le C$. Тогда, пользуясь оценкой (1.10), можем записать

$$\|z^\eta[1/\alpha(\eta)]\|^2+\frac{1}{\alpha(\eta)}\|A^hz^\eta[1/\alpha(\eta)]-u^\delta\|^2\le(h\|z^0\|+\delta)^2/\alpha(\eta)+\|z^0\|^2\le C+\|z^0\|^2,$$

откуда с учетом условия согласования (0.2) следуют равномерная по $\eta\equiv(h,\delta)>0$ ограниченность норм $\|z^\eta[1/\alpha(\eta)]\|$, первое предельное соотношение (1.3) и, кроме того, с учетом еще и леммы 1.1, второе предельное соотношение (1.3). Эти два последних факта в совокупности со стандартными рассуждениями (см., например, [6, гл. 1, § 2], [9, теорема 2.3.1]), основанными на слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве, приводят к предельному соотношению (1.4). Полагая формально $\eta=0$ в (1.10), получаем после подобных рассуждений и аналогичное (1.4) предельное соотношение (1.5).

Доказываем вторую часть первого утверждения теоремы, т. е. предельное соотношение (1.6). Пользуясь оценкой (1.10) при $h=\delta=0$, можем записать

$$V^0(1/\alpha)=\|z^0[1/\alpha]\|^2+\frac{1}{\alpha}\|A^0z^0[1/\alpha]-u^0\|^2\le\|z^0\|^2,$$

откуда с учетом уже доказанного выше предельного соотношения (1.5) вытекает предельное соотношение

$$\frac{1}{\alpha}\|A^0z^0[1/\alpha]-u^0\|^2\to 0,\quad \alpha\to 0. \tag{1.11}$$

Таким образом, с учетом предельных соотношений (1.5) и (1.11), получаем

$$V^0(1/\alpha)=\|z^0[1/\alpha]\|^2+\frac{1}{\alpha}\|A^0z^0[1/\alpha]-u^0\|^2\to\|z^0\|^2,\quad \alpha\to 0.$$

Отсюда, так как $V^0(1/\alpha)\le\sup\limits_{\gamma>0}V^0(\gamma)\le\|z^0\|^2$, следует предельное соотношение

$$V^0(1/\alpha)\to\|z^0\|^2=\sup_{\gamma>0}V^0(\gamma),\quad \alpha\to 0,$$

которое может быть переписано и в виде (1.6).

Для доказательства второго утверждения заметим, прежде всего, что задача (IP^0) (или (1.8)) разрешима ввиду предельного соотношения (1.9), равномерной по $\lambda>0$, $\eta\equiv(h,\delta)>0$ ограниченности семейства $z^\eta[\lambda]$ и условий на исходные данные задачи (IP^0). Далее, так как элемент $z^\eta[\lambda]$ минимизирует функционал $L^\eta(\cdot,\lambda)$, можем записать

$$\|z^\eta[\lambda]\|^2+\lambda\|A^hz^\eta[\lambda]-u^\delta\|^2\le\|z\|^2+\lambda\|A^hz-u^\delta\|^2\quad\forall\, z\in\mathcal{D},$$

откуда следует, что

$$\|z^\eta[\lambda]\|^2\le\|z\|^2+\lambda\|A^hz-u^\delta\|^2\quad\forall\, z\in\mathcal{D}.$$

Положим здесь $z = z^0$ и используем условие согласования $\lambda(h^2+\delta^2) \to 0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$. Тогда получаем $\|z^\eta[\lambda]\|^2 \le \|z^0\|^2 + \psi(\eta,\lambda)$, $\psi(\eta,\lambda) \to 0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$. Так как одновременно мы имеем соотношение (1.9), а семейство $z^\eta[\lambda]$ по условию равномерно ограничено, то можем утверждать, что $z^\eta[\lambda] \to z^0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$. □

1.2. Выбор параметра регуляризации при фиксированном конечном уровне погрешности в форме обобщенного принципа невязки и его связь с двойственностью. С самого начала развития теории тихоновской регуляризации одной из основных является проблема выбора параметра регуляризации $\alpha = \alpha(\eta) > 0$ при фиксированном конечном уровне погрешности $\eta \equiv (h,\delta) > 0$, т. е. в ситуации, которая является характерной для всех практических некорректных задач [3,6,7]. Решение этой проблемы было предложено в форме так называемого обобщенного принципа невязки (подробности в [6, 7]). Этот принцип представляет собой строгое правило выбора параметра регуляризации α, соответствующего данному фиксированному конечному уровню погрешности $\eta > 0$, т. е. $\alpha = \alpha^*(\eta)$, при котором имеет место предельное соотношение $\|z^{\eta,\alpha^*(\eta)} - z^0\| \to 0$, $\delta \to 0$. При этом величина $\alpha^*(\eta) > 0$ является корнем (при некоторых достаточно общих условиях единственным) нелинейного так называемого уравнения обобщенной невязки (подробности в [6, 7]). Оказывается, что связанные с двойственностью результаты и, в частности, формула дифференцирования маргинальной функции леммы 1.1 играют при этом самую существенную роль [9]. Покажем это, рассмотрев два существенно различных в данной ситуации, с точки зрения применения связанных с двойственностью и ПМЛ результатов, случая. Итак, как и выше, имеем точную задачу поиска нормального (минимального по норме) решения уравнения первого рода (IP^0), в которой будем считать, что $\mathcal{D} \subseteq Z$ — выпуклое замкнутое множество, содержащее нулевой элемент пространства Z. Пусть $z^0 \in \mathcal{D}$ — точное нормальное решение этого уравнения, причем $z^0 \ne 0$. Решение этого уравнения, как уже отмечалось выше, эквивалентно решению задачи минимизации с одним ограничением типа неравенства ($CE1$) с $A = A^0$, $u = u^0$, причем формально двойственной к последней является задача (1.7).

1.2.1. Выбор параметра регуляризации при точно заданном операторе и фиксированном конечном уровне погрешности правой части уравнения, регуляризирующее свойство условия Слейтера. Пусть вместо уравнения (IP^0) имеем возмущенное уравнение

$$A^0 z = u^\delta, \quad z \in \mathcal{D}, \quad u^\delta \in U, \quad \|u^\delta - u^0\| \le \delta. \tag{1.12}$$

Введем величину $\mu_\delta \equiv \inf\limits_{z\in\mathcal{D}} \|A^0 z - u^\delta\|$ — «меру несовместности» уравнения (1.12). Очевидно, $\mu_\delta \to 0$, $\delta \to 0$. Формально решение уравнения (1.12) эквивалентно решению задачи минимизации с одним ограничением типа неравенства

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^0 z - u^\delta\|^2 \le 0, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{1.13}$$

так как задача поиска нормального решения уравнения (1.12) и задача (1.13) одновременно либо разрешимы и их решения совпадают, либо они одновременно не имеют решения. В свою очередь, формально двойственной к задаче (1.13) является задача

$$V^\delta(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}}\{\|z\|^2 + \lambda\|A^0 z - u^\delta\|^2\} \to \sup, \quad \lambda \ge 0. \tag{1.14}$$

Тогда естественно, наряду с (1.13), рассмотреть вспомогательную задачу минимизации

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^0 z - u^\delta\|^2 \le \delta^2 + \mu_\delta^2, \quad z \in \mathcal{D}. \tag{1.15}$$

Для пояснения этого обстоятельства обозначим решение задачи (1.15) через z^δ. Оно существует, так как сильно выпуклый непрерывный функционал на выпуклом замкнутом множестве гильбертова пространства достигает минимума в единственной точке, и при этом выпуклое замкнутое множество допустимых (удовлетворяющих ограничению) элементов в этой задаче не пусто (оно заведомо содержит z^0). Стандартные рассуждения для подобных ситуаций позволяют утверждать, что $z^\delta \to z^0$, $\delta \to 0$. Главная особенность этой выпуклой задачи состоит в ее нормальности из-за «добавка» μ_δ^2, который обеспечивает здесь выполнение условия Слейтера. Действительно, если $\mu_\delta > 0$, то $\|A^0 z^0 - u^\delta\|^2 < \delta^2 + \mu_\delta^2$. Если же $\mu_\delta = 0$, то, в силу определения нижней грани, найдется такой элемент $\bar{z} \in \mathcal{D}$, для которого $\|A^0 \bar{z} - u^\delta\|^2 < \delta^2$. Таким образом, в этой ситуации естественно записать регулярную функцию Лагранжа

$$\tilde{L}^\delta(z,\lambda) \equiv L^\delta(z,\lambda) - \lambda(\delta^2 + \mu_\delta^2) = \|z\|^2 + \lambda(\|A^0 z - u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\delta^2), \quad z \in \mathcal{D},$$

$$L^\delta(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \lambda\|A^0 z - u^\delta\|^2, \quad z^\delta[\lambda] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} \tilde{L}^\delta(z,\lambda) = \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^\delta(z,\lambda),$$

и двойственную задачу

$$\tilde{V}^\delta(\lambda) \equiv V^\delta(\lambda) - \lambda(\delta^2 + \mu_\delta^2) = \min_{z\in\mathcal{D}} L^\delta(z,\lambda) - \lambda(\delta^2 + \mu_\delta^2) \to \max, \quad \lambda \geq 0, \tag{1.16}$$

множество решений $\lambda^*(\delta)$ которой, в соответствии с теоремой Куна–Таккера (см., например, [5, гл. 3, § 5, теорема 1]), непусто, ограничено (так как задача нормальна), причем каждое из таких решений в паре с z^δ составляет седловую точку функции Лагранжа $\tilde{L}^\delta$. Эти решения могут быть найдены путем поиска корней уравнения $(\tilde{V}^\delta)'(\lambda) = 0$, $\lambda \geq 0$, так как функция $\tilde{V}^\delta$ дифференцируема, из-за того, что функция Лагранжа $\tilde{L}^\delta(z,\lambda)$, $z \in \mathcal{D}$ достигает минимума в единственной точке, и в силу леммы 1.1 ее градиент равен

$$(\tilde{V}^\delta)'(\lambda) = \|A^0 z^\delta[\lambda] - u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\delta^2 = (V^\delta)'(\lambda) - \delta^2 - \mu_\delta^2.$$

При этом $(\tilde{V}^\delta)'(\lambda^*(\delta)) = 0$, $V^{\delta\prime}(\lambda^*(\delta)) = \delta^2 + \mu_\delta^2$, $z^\delta[\lambda^*(\delta)] = z^\delta$. Одновременно можно утверждать, что $\lambda^*(\delta) \to +\infty$, $\delta \to 0$ (какое бы решение $\lambda^*(\delta)$ мы ни выбирали), так как элемент $z^\delta[\lambda^*(\delta)]$ доставляет минимальное значение функции Лагранжа $L^\delta(z,\lambda^*(\delta))$, $z \in \mathcal{D}$, т. е. имеет место вариационное неравенство

$$\langle z^\delta[\lambda^*(\delta)] + \lambda^*(\delta)(A^{0*}A^0 z^\delta[\lambda^*(\delta)] - A^{0*}u^\delta), z - z^\delta[\lambda^*(\delta)]\rangle \geq 0 \quad \forall\, z \in \mathcal{D}$$

и $z^\delta \to z^0$, $u^\delta \to u^0$, $\delta \to 0$, но $z^0 \neq 0$ и $\mathcal{D}$ содержит нулевой элемент.

Итак, для приближенного решения исходной задачи (IP^0) можно решать задачу минимизации

$$\tilde{L}^\delta(z,\lambda) = \|z\|^2 + \lambda(\|A^0 z - u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\delta^2) \to \min, \quad z \in \mathcal{D}$$

или, что одно и то же, задачу

$$L^\delta(z,\lambda) = \|z\|^2 + \lambda\|A^0 z - u^\delta\|^2 \to \min, \quad z \in \mathcal{D},$$

или, что одно и то же, задачу минимизации функционала Тихонова ($\alpha = 1/\lambda$ — параметр регуляризации в методе регуляризации Тихонова)

$$M^{\delta,\alpha}(z) \equiv \alpha\|z\|^2 + \|A^0 z - u^\delta\|^2 \to \min, \quad z \in \mathcal{D},$$

а α подбирать из решения уравнения

$$\|A^0 z^{\delta,\alpha} - u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\delta^2 = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad z^{\delta,\alpha} \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} M^{\delta,\alpha}(z) = \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} \{\alpha\|z\|^2 + \|A^0 z - u^\delta\|^2\},$$

т. е. в соответствии с обобщенным принципом невязки [6, 7] в случае точного задания оператора A (связанные с обобщенным принципом невязки подробности см. в [6, §§ 2,3]).

Мы получили хорошо известный в теории регуляризации [6, 7] обобщенный принцип невязки, который представляет собой, по сути дела, способ приближенного решения исходного операторного уравнения (IP^0) путем решения соответствующей двойственной одномерной задачи (1.14) без ее регуляризации, а именно, путем максимизации целевой функции в одномерной задаче выпуклого программирования (см. (1.16) $V^\delta(\lambda) \to \max,\ \lambda \geq 0$, до того уровня, при котором монотонно убывающая производная $(V^\delta)'(\lambda),\ \lambda \geq 0$ принимает значение $\delta^2 + \mu_\delta^2$ (можно показать [6, §§ 2,3], что $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} (V^\delta)'(\lambda) = \mu_\delta^2$) или, что то же самое, путем максимизации целевой функции в одномерной задаче выпуклого программирования $\tilde{V}^\delta(\lambda) \to \max,\ \lambda \geq 0$, до того уровня, при котором монотонно убывающая производная $(\tilde{V}^\delta)'(\lambda),\ \lambda \geq 0$ принимает нулевое значение, т. е. до точки максимума функции $\tilde{V}^\delta(\lambda),\ \lambda \geq 0$. Одновременно выше мы передоказали хорошо известный результат [6, §§ 2,3], состоящий в том, что решение задачи минимизации (1.15), которое составляет суть классического для теории некорректных задач так называемого обобщенного метода невязки, эквивалентно обобщенному принципу невязки (см. подробности в [6, §§ 2,3]).

Важно подчеркнуть, что центральным существенным моментом в проведенных выше рассуждениях было использование факта разрешимости задачи выпуклого программирования (1.15) и выполнимости для нее условия Слейтера, что позволило установить разрешимость и двойственной для нее задачи на основе классической теоремы Куна–Таккера. Во всей этой процедуре существенно использовался факт точного задания оператора A.

1.2.2. Выбор параметра регуляризации при фиксированном конечном уровне погрешности оператора и правой части уравнения. Если же в рассмотренной выше ситуации считать, что и оператор задается с ошибкой, т. е. вместо точного уравнения (IP^0) мы имеем его приближение (IP^η) с линейным ограниченным оператором $A^h\colon Z \to U$, то в этом случае роль задачи минимизации (1.15) для случая $h = 0$ будет играть уже невыпуклая задача минимизации с нелинейным ограничением типа неравенства

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^h z - u^\delta\|^2 \leq (\delta + h\|z\|)^2 + \mu_{h,\delta}^2, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{1.17}$$

где $\mu_{h,\delta}$ — опять же «мера несовместности», но уже уравнения с возмущенным оператором: $\mu_{h,\delta} \equiv \inf\limits_{z \in \mathcal{D}} \|A^h z - u^\delta\|$. Эта задача, так же, как и задача (1.15), разрешима и удовлетворяет условию Слейтера, но установить разрешимость двойственной для нее задачи так, как это было сделано выше (при $h = 0$), уже нельзя из-за отсутствия «подходящего» для данной нелинейной ситуации аналога теоремы Куна–Таккера. Вместе с тем полный аналог доказанного выше результата в случае $h = 0$, в соответствии с которым для приближенного решения операторного уравнения надо до «нужного» уровня решать соответствующую двойственную задачу, сохраняет свою силу и в том случае, когда оператор A задается с ошибкой, т. е. в случае уравнения (IP^η).

А именно, в этом случае оказывается, что для приближенного решения уравнения (IP^0) следует решать соответствующую двойственную одномерную задачу

$$V^\eta(\lambda) \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} \{\|z\|^2 + \lambda \|A^h z - u^\delta\|^2\} \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} L^\eta(z, \lambda) \to \max, \quad \lambda \geq 0, \tag{1.18}$$

$$z^\eta[\lambda] \equiv \operatorname*{argmin}_{z \in \mathcal{D}} L^\eta(z, \lambda), \quad \eta \equiv (h, \delta),$$

без ее регуляризации до того уровня, при котором монотонно убывающая производная $(V^\eta)'(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ принимает значение $(\delta + h\|z^\eta[\lambda]\|)^2 + \mu_{h,\delta}^2$. Такая точка $\lambda > 0$ существует в предположении $\|u^\delta\|^2 > \delta^2 + \mu_{h,\delta}^2$, так как можно показать [6, §§ 2,3], что, во-первых,

$$\lim_{\lambda\to+0}(V^\eta)'(\lambda) = \lim_{\lambda\to+0}\|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 = \|u^\delta\|^2, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}(V^\eta)'(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 = \mu_{h,\delta}^2$$

и непрерывная функция $(V^\eta)'(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ монотонно не возрастает, и, во-вторых,

$$\lim_{\lambda\to+0}\|z^\eta[\lambda]\| = 0, \quad \liminf_{\lambda\to+\infty}\|z^\eta[\lambda]\| \geq 0$$

и непрерывная функция $\|z^\eta[\lambda]\|$, $\lambda \geq 0$ монотонно не убывает.

Итак, мы получили, что процесс решения задачи (IP^η) в соответствии с обобщенным принципом невязки [6, §§ 2,3]), т. е. нахождением корня λ^* нелинейного уравнения обобщенной невязки

$$\|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 - (\delta + h\|z^\eta[\lambda]\|)^2 - \mu_{h,\delta}^2 = 0, \quad \lambda > 0,$$

также представляет собой процесс решения двойственной задачи (1.18), причем этот процесс максимизации следует вести до такой величины $\lambda^* > 0$, для которой величина $(V^\eta)'(\lambda^*) = \|A^h z^\eta[\lambda^*] - u^\delta\|^2$ оказывается равной $(\delta + h\|z^\eta[\lambda^*]\|)^2 + \mu_{h,\delta}^2$. При этом, как показано в [6, § 3]), элемент $z^\eta[\lambda^*]$ есть одновременно и решение нелинейной задачи (1.17).

Описанные выше два процесса приближенного решения операторного уравнения (IP) на основе решения двойственных задач (1.16) и (1.18) соответственно при $h = 0$ и $h \neq 0$ существенно разнятся своими обоснованиями. В первом случае $(h = 0)$ мы существенно использовали тот факт, что к задаче выпуклого программирования (1.15) может быть применена теорема Куна–Таккера. Во втором же случае $(h \neq 0)$ для соответствующего аналога задачи (1.15), а именно, задачи (1.17), ввиду нелинейности последней, применение теоремы Куна–Таккера оказалось невозможным. Такая разница в обоснованиях этих двух аналогичных процессов объясняется тем, что в соответствии с идеологией тихоновской регуляризации [6, §§ 2,3] уравнение $A^h z = u^\delta$ при обосновании того или иного варианта регуляризации «заменяется» равенством нулю невязки $\|A^h z - u^\delta\| = 0$, т. е. скалярным уравнением. С одной стороны, такая замена позволяет работать с одномерными двойственными задачами и обеспечивает равенство параметра регуляризации величине, являющейся обратной по отношению к одномерной двойственной переменной. С другой же стороны, при указанной замене мы неизбежно сталкиваемся с описанным выше эффектом, когда «внутреннее устройство» процедуры регуляризации зависит от характера возмущения регуляризируемого уравнения.

Подытоживая сказанное выше в данном разделе, можно утверждать, что метод регуляризации Тихонова естественно трактовать как метод, регуляризирующее действие которого есть результат совместного применения метода двойственности и ПМЛ в задаче $(CE1)$, эквивалентной исходной задаче решения операторного уравнения. Сформулируем его важные на наш взгляд характеристические особенности.

1. Теореме сходимости метода регуляризации Тихонова может быть придан вид выражаемого в терминах предельных соотношений утверждения в форме двойственности относительно задачи $(CE1)$.

2. В рамках метода регуляризации исходное вообще говоря «бесконечномерное равенство» $Az = u$ подменяется своим одномерным «обедненным аналогом» $\|Az - u\| = 0$.

3. Параметр регуляризации α в методе регуляризации Тихонова и двойственная переменная в задаче минимизации $(CE1)$ (см. также задачу (1.1)) являются одномерными взаимнообратными величинами.

4. В рамках метода регуляризации имеется существенная разница в обосновании обобщенного принципа невязки в случаях точно и неточно заданного оператора A. При возмущении оператора A, из-за замены «бесконечномерного» равенства $Az = u$ одномерным равенством невязки $\|Az - u\|$ нулю, возникает нелинейная задача (1.17) и, как следствие, происходит выход за «пределы» теории выпуклых задач при решении линейного уравнения $Az = u$.

2. Метод стабилизации Тихонова для выпуклой задачи общего вида, его приложение к решению задач на условный экстремум

2.1. Метод стабилизации Тихонова. Конструкция функционала Тихонова (0.1) наводит на мысль, что при решении некорректной задачи (IP) приближение к ее точному решению происходит за счет решения «эквивалентной» задачи минимизации функционала квадрата невязки $\|A^h z - u^\delta\|^2$, $z \in \mathcal{D}$, свойства устойчивости которой «корректируются» за счет стабилизатора $\|\cdot\|^2$ с параметром регуляризации α. Такая конструкция подсказывает, как может быть организовано устойчивое решение и выпуклой задачи минимизации общего вида (без ограничений типа равенства и неравенства)

$$f^0(z) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z, \tag{2.1}$$

в которой множество $\mathcal{D}$ считаем выпуклым и замкнутым множеством гильбертова пространства Z, функцию $f^0 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — непрерывной и выпуклой на $\mathcal{D}$. Метод стабилизации (регуляризации) Тихонова для устойчивого решения задач минимизации общего вида (2.1) был предложен в свое время в работе [13], а затем развит в большом числе различных публикаций (см., например, [3, 8, 9]). Приведем теорему сходимости метода стабилизации Тихонова для выпуклой задачи общего вида (2.1), учитывая важность следующего классического характеристического свойства задач на условный экстремум:

Свойство (CDP). Задачи, двойственные по отношению к задачам на условный экстремум (с ограничениями типа равенства и неравенства), являются с точностью до знака их целевой функции задачами выпуклыми.

С этой целью предположим, что задача (2.1) имеет решение, т. е. множество $\mathcal{D}^* \equiv \{z \in \mathcal{D} : f^0(z) = \inf_{y \in \mathcal{D}} f^0(y)\}$ непусто, и обозначим через z^0 нормальное, т. е. минимальное по норме, решение этой задачи. Пусть вместо точной функции f^0 в задаче (2.1) нам известно ее приближение f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число, причем $|f^\delta(z) - f^0(z)| \le \delta(1 + \|z\|^2)$ $\forall\, z \in \mathcal{D}$. Основной конструкцией метода стабилизации Тихонова для решения задачи (2.1) является сглаживающая функция (функция Тихонова)

$$T_\alpha^\delta(z) \equiv f^\delta(z) + \alpha\|z\|^2, \quad z \in \mathcal{D},$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Слагаемое $\alpha\|z\|^2$, как и выше, носит название стабилизирующего слагаемого. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$T_\alpha^\delta(z) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D} \tag{2.2}$$

и предположим, что в нашем распоряжении имеется точка $z_\alpha^{\delta,\epsilon}$ такая, что

$$T_\alpha^\delta \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} T_\alpha^\delta(z) \le T_\alpha^\delta(z_\alpha^{\delta,\epsilon}) \le T_\alpha^\delta + \epsilon,$$

где величина $\epsilon > 0$ характеризует точность приближенного решения задачи минимизации (2.2). Условие согласованного стремления к нулю указанных величин δ, ϵ, α и одновременно обоснование метода стабилизации дается в следующей теореме (см., например, [8, гл. 9, § 4, теорема 2], [9, теорема 3.2.1]).

Теорема 2.1. [***Сходимость метода стабилизации Тихонова в выпуклой задаче минимизации общего вида***] *Пусть выполняется условие согласования* $(\epsilon+\delta)/\alpha \to 0$, $\epsilon \to 0$, $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$. *Тогда справедливо предельное соотношение* $z_\alpha^{\delta,\epsilon} \to z^0$, $\epsilon \to 0$, $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$.

2.2. Метод стабилизации Тихонова в задачах на условный экстремум. Стабилизация (регуляризация) по Тихонову для выпуклых задач общего вида (2.1), а также для аналогичных задач, но с невыпуклыми f^0 и $\mathcal{D}$ широко применялась для приближенного решения задач на условный экстремум [8, гл. 9, § 5], т. е. задач, принадлежащих важному типичному классу некорректных задач. В [8, гл. 9] можно найти и обширную библиографию по этому вопросу.

Отметим важные специфические особенности такого подхода к устойчивому решению задач на условный экстремум. К ним, в первую очередь, относятся:

1. Необходимость преобразования исходной экстремальной задачи с ограничениями типа равенства и неравенства в задачу оптимизации общего вида (выпуклую или нелинейную задачу вида (2.1) без равенств и неравенств) со своим множеством допустимых элементов $\mathcal{D}$, которое конструируется так или иначе в силу имеющихся в исходной задаче на условный экстремум ограничений. В этой связи можно указать, например, на используемые для решения задач с ограничениями типа равенства и неравенства методы регуляризации неустойчивых задач как первого ([8, гл. 9, § 2]), так и второго (метод стабилизации [8, гл. 9, § 4], метод невязки [8, гл. 9, § 5], метод квазирешений [8, гл. 9, § 6], методы регуляризации с расширением множеств [8, гл. 9, § 7], регуляризованный метод проекции градиента [8, гл. 9, § 8], регуляризованный метод условного градиента [8, гл. 9, § 8]), типа.

2. Необходимость проверки выполнимости в задаче на условный экстремум ряда условий. Среди них можно выделить так называемое условие сильной согласованности постановки задачи условной оптимизации (см., например, задачу (1), (2) и неравенство (9) в [8, гл. 9, § 4], а также [8, определение 5.16.3]) как, по-видимому, наиболее сложное с точки зрения его проверки. Достаточным условием его выполнимости является условие существования седловой точки функции Лагранжа задачи (см. также [8, лемма 5.16.5]).

Отмеченные трудности, связанные с применением метода стабилизации для выпуклых задач общего вида к решению задач на условный экстремум, могут быть в существенной степени преодолены, если мы вспомним указанное выше свойство (CDP). Благодаря свойству (CDP) теоремы «типа» сформулированной выше теоремы 2.1 позволяют в случае задачи условной минимизации применить стабилизацию по Тихонову для устойчивого построения максимизирующей последовательности в двойственной задаче, которую естественно трактовать в данной ситуации как вогнутую задачу общего вида. Как следствие, это приводит к устойчивому решению исходной (прямой) задачи условной минимизации. В этом заключается подход к регуляризации задач на условный экстремум на основе так называемой двойственной регуляризации [12, 14, 15]. Существенное отличие при этом от ситуации теоремы 2.1 состоит в том, что двойственные задачи к задачам на условный экстремум могут и не иметь решений.

3. Метод стабилизации Тихонова и регуляризация ПМЛ в задачах на условный экстремум

3.1. Регуляризация ПМЛ в задаче решения линейного операторного уравнения, предварительные соображения общего характера. Вернемся к задаче решения операторного уравнения (IP). Подход к регуляризации в задачах на условный экстремум, основанный на регуляризации двойственной задачи [12], был предложен в работах [14,15], соответствующие содержательные комментарии и подробности можно найти в [16,17]. В указанных работах было показано, что ПМЛ как нельзя лучше подходит для решения многих некорректных задач на условный экстремум и, в частности, задач отыскания (нормальных) решений абстрактных операторных уравнений первого рода вида (IP). Однако, прежде всего, само это правило должно быть регуляризовано. Главная роль в такой регуляризации принадлежит конструкции классической функции Лагранжа. При этом важным является то, что для задач на условный экстремум выполняется, как уже было отмечено выше, характеристическое свойство (CDP), обеспечивающее возможность стабилизации по Тихонову соответствующих двойственных задач, которые в этом случае следует трактовать как выпуклые задачи (с точностью до знака их целевых функций) общего вида (2.1). Помимо того, здесь следует также отметить появляющуюся, благодаря основанной на двойственности регуляризации, естественную возможность применять для исследования некорректных задач на условный экстремум развитый в последние десятилетия аппарат метода возмущений, в основе которого, в свою очередь, лежат полученные также в последние десятилетия результаты выпуклого и нелинейного (для невыпуклых задач на условный экстремум) анализа.

Будем теперь использовать для его решения задачу ($CE2$) вместо задачи ($CE1$) и опираться при этом на метод двойственной регуляризации (в той или иной версии), использующий характеристическое свойство (CDP) задач на условный экстремум. Такой подход к решению операторного уравнения (IP) с опорой на задачу ($CE2$) был реализован в работе [11]. При этом, основанном на двойственности, подходе для широкого класса задач на условный экстремум происходит регуляризация ПМЛ и оно трансформируется в необходимые и достаточные условия устойчивого построения минимизирующих последовательностей в задачах условной минимизации. Непосредственно регуляризирующее действие при таком подходе, влекущее устойчивое построение минимизирующих последовательностей, обеспечивается за счет стабилизации по Тихонову двойственной задачи по отношению к исходной задаче ($CE2$), которая, благодаря свойству (CDP), является задачей вогнутой оптимизации общего вида. Отметим, что в случае разрешимости последней к ней может быть применена теорема типа теоремы 2.1.

Отметим следующие характерные особенности такого основанного на регуляризации двойственной задачи подхода к устойчивому решению задачи ($CE2$), эквивалентной операторному уравнению (IP):

1. Весь процесс регуляризации подразумевает работу с исходным «бесконечномерным равенством» $Az = u$.

2. Параметр α в регуляризации по Тихонову двойственной задачи есть обычная положительная числовая величина. В то же время, двойственная переменная λ в этом случае принадлежит пространству U.

3. Процесс регуляризации ПМЛ устроен совершенно одинаково как в случае точного, так и неточного задания оператора A. Другими словами, в случае неточного задания

оператора конструкции указанной регуляризации не выводят нас из класса конструкций для выпуклых задач.

Проиллюстрируем сказанное на примере полученных в [11] результатов по регуляризации ПМЛ для задачи ($CE2$), эквивалентной исходному операторному уравнению (IP), сопровождая используемые ниже конструкции и формулируемые утверждения соответствующими комментариями, характеризующими отличия использования задачи ($CE2$) вместо задачи ($CE1$) для устойчивого решения указанного уравнения. Считаем для упрощения изложения, что в оценках для отклонения возмущенных оператора и правой части уравнения от точных используется один и тот же параметр δ, т. е. $h=\delta$.

3.2. Постановка «простейшей» задачи выпуклого программирования, необходимые вспомогательные леммы. Рассматриваем задачу

$$(P^\delta_p) \qquad \|z\|^2 \to \inf, \quad A^\delta z = u^\delta + p, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $A^\delta : Z \to U$ — линейный ограниченный оператор, $u^\delta \in U$ — заданный элемент, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, U — гильбертовы пространства. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P^δ_p) означает, что эти данные являются точными ($\delta = 0$) или возмущенными ($\delta > 0$), т. е. задаются с определяемой оценками

$$\|(A^\delta - A^0)z\| \le C\delta(1+\|z\|) \quad \forall\, z \in Z, \quad \|u^\delta - u^0\| \le C\delta, \tag{3.1}$$

где $C>0$ не зависит от δ, ошибкой, величину которой и характеризует число $\delta \in [0, \delta_0]$. Соответственно, задачу (P^0_p) называем точной, задачу (P^δ_p) при $\delta > 0$ — возмущенной. Как и ранее, обозначим единственное решение задачи (P^0_p), в случае его существования, через z^0_p.

В отличие от задач ($CE1$), (1.1) задача (P^0_p) зависит от параметра $p \in U$, т. е. в данном случае мы имеем дело не с одной (индивидуальной) задачей, а с целым семейством задач, куда наша исходная задача формально включена при $p = 0$. Это означает, что мы находимся в рамках применения метода возмущений (см., например, [18, п. 3.3.2]), использование которого оказывается здесь возможным именно благодаря замене задачи ($CE1$) на задачу ($CE2$).

Обозначим: $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon}_p \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|A^\delta z - u^\delta - p\| \le \epsilon\}$, $\epsilon \ge 0$, $\mathcal{D}^{0,\epsilon}_p \equiv \mathcal{D}^\epsilon_p$. Определим классическую функцию значений задачи (P^0_p) формулой $\beta_0(p) = \inf\limits_{z \in \mathcal{D}^0_p} \|z\|^2 \quad \forall\, p \in U$. Определим также обобщенную функцию значений $\beta : U \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ посредством соотношений $\beta(p) \equiv \beta_{+0}(p) \equiv \lim\limits_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon(p)$, $\beta_\epsilon(p) \equiv \inf\limits_{z \in \mathcal{D}^\epsilon_p} \|z\|^2$, $\beta_\epsilon(p) \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^\epsilon_p = \emptyset$. Так как $\|\cdot\|^2$ — сильно выпуклый функционал, то справедлива (см. леммы 1.1, 1.2, 1.3 в [19])

Лемма 3.1. *Функции значений* $\beta_0, \beta : U \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ *совпадают, являясь полунепрерывными снизу и выпуклыми. При этом* $\beta(p) = \{\|z^0_p\|^2$, *если* z^0_p *существует*; $+\infty$ *в ином случае*$\}$ $\forall p \in U$.

Справедливо также следующее важное, в контексте настоящей статьи, утверждение о плотности субдифференцируемости (см., например, [20, теорема 4.3]).

Лемма 3.2. *Субдифференциал собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции* $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, *где* H *— гильбертово пространство, не пуст в точках плотного в* $\operatorname{dom} f$ *множества.*

Утверждения сформулированных выше лемм 3.1 и 3.2 представляют собой базовые для применения метода возмущений результаты. Утверждаемые в них такие свойства параметрической задачи (P_p^0) в целом как полунепрерывность снизу функции значений β и плотная субдифференцируемость этой функции в совокупности позволяют в ряде случаев устанавливать и «нужные» свойства отдельных (индивидуальных) задач, например, задачи (P_0^0). Именно в этом и состоит смысл применения метода возмущений.

3.3. Обобщенная минимизирующая последовательность. Центральную роль при рассмотрении задач (P_p^0) будет играть понятие обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП) — минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [21]. Напомним его.

Определение 3.1. ОМП в задаче (P_p^0) называется последовательность элементов $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что выполняются соотношения $\|z^k\|^2 \to \beta(p)$, $z^k \in \mathcal{D}_p^{\epsilon^k}$, $k \to \infty$, для некоторой сходящейся к нулю последовательности ϵ^k, $k = 1, 2, \dots$, неотрицательных чисел.

Основной целью далее для нас, как и в [11], будет устойчивое построение ОМП в задаче (P_p^0). Отметим сразу, что конструируемая в рамках метода регуляризации Тихонова в предыдущем разделе последовательность $z^{\eta^k, \alpha(\eta^k)} = z^{\eta^k}[1/\alpha(\eta^k)]$, $k = 1, 2, \dots$, $\eta^k \to 0$, $k \to \infty$ (см. теоремы 0.1, 1.1) есть ничто иное, как ОМП в задаче ($CE1$) при $A = A^0$, $u = u^0$.

В силу дифференцируемости по Фреше функционала $\|\cdot\|^2$ справедлива следующая лемма, доказательство которой проходит по стандартной схеме, основанной на слабой компактности ограниченного замкнутого выпуклого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве.

Лемма 3.3. *Пусть $\beta(p) < +\infty$. Тогда для любой ОМП z^k, $k = 1, 2, \dots$, в разрешимой единственным образом в этом случае задаче (P_p^0) справедливо предельное соотношение $z^k \to z_p^0$, $k \to \infty$.*

3.4. Понятие ОМП-образующего оператора. Определим далее ориентированное на задачи условной оптимизации понятие регуляризирующего оператора [22].

Определение 3.2. Зависящий от параметра $\delta \in (0, \delta_0)$ оператор $R(\cdot, \cdot, \delta)$, ставящий в соответствие каждой паре исходных данных A^δ, u^δ, удовлетворяющих оценкам (3.1), элемент $R(A^\delta, u^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ такой, что $\|z^\delta\|^2 \to \beta(p)$, $\|A^0 z^\delta - u^0 - p\| \to 0$, $\delta \to 0$, называется регуляризирующим в задаче (P_p^0).

Так как основной нашей целью является построение ОМП в задаче (P_p^0), а семейство $\{z^\delta \in \mathcal{D} : \delta \in (0, \delta_0]\}$ из определения 3.2 не является последовательностью, то помимо введенного выше определения регуляризирующего оператора в задаче (P_p^0) введем его «след» — определение ОМП-образующего оператора в задаче (P_p^0).

Определение 3.3. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(A^{\delta^k}, u^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (3.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $z^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется ОМП-образующим в задаче (P_p^0), если последовательность z^{δ^k}, $k = 1, 2, \dots$, есть ОМП в этой задаче.

Итак, мы имеем два определения регуляризирующего алгоритма. Первое из них, т. е. определение 0.1, это классическое определение [2,3,6,7] для задачи решения операторного уравнения (IP^0). Второе, т. е. определение 3.2, сформулировано применительно к задаче (P_0^0). Как показано в [11], применительно к двум простейшим эквивалентным задачам (IP^0) и (P_0^0) эти определения можно считать эквивалентными. При этом в [11] отмечено, что при доказательстве теоремы сходимости метода регуляризации Тихонова (см. теоремы 0.1, 1.1), прежде всего, обеспечивается построение ОМП в задаче условной минимизации (P_0^0), эквивалентной некорректной задаче (IP^0). Та же идея построения ОМП лежит и в основе определения регуляризирующего алгоритма 3.2. Можно утверждать, что регуляризация ПМЛ обеспечивает такое построение при минимальных требованиях к исходным данным задач условной минимизации. Последнее объясняется тем, что такая важная трансформация привычного ПМЛ оказалась возможной благодаря применению в задаче условной оптимизации основанного на двойственности подхода к регуляризации. Опора на теорию двойственности в совокупности с идеей регуляризации двойственной задачи позволяет при построении ОМП обходиться минимумом условий на задачу. Автор придерживается точки зрения, в соответствии с которой задачи условной оптимизации занимают свое особое место в общей теории некорректных задач, и по этой причине для них естественно введение соответствующего специфического понятия регуляризирующего алгоритма.

3.5. Функционал Лагранжа и его экстремали, двойственная задача и двойственная регуляризация. Введем функционал Лагранжа $L_p^\delta(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z - u^\delta - p\rangle$, его экстремаль (минималь) $z^\delta[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L_p^\delta(z,\lambda),\, z \in \mathcal{D}\}$, двойственный функционал $V_p^\delta(\lambda) \equiv \min\limits_{z\in\mathcal{D}} L_p^\delta(z,\lambda)$, а также двойственную к (P_p^0) задачу

$$V_p^0(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L_p^0(z,\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in U,$$

которая является вогнутой задачей общего вида и может быть как разрешимой, так и неразрешимой.

Опишем далее метод двойственной регуляризации [12] устойчивого построения в задаче (P_p^0) ОМП из экстремалей функционала Лагранжа и сформулируем соответствующую теорему сходимости для него, доказательство которой можно найти в [12, 14]. Обозначим через $\lambda_p^{\delta,\alpha}$ единственную в U точку, дающую максимум функционалу Тихонова $R_p^{\delta,\alpha}(\lambda) \equiv V_p^\delta(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2$, $\lambda \in U$. Справедлива следующая

Теорема 3.1. [***Сходимость метода двойственной регуляризации***] *Пусть задача (P_p^0) разрешима. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к (P_p^0) задача, при условии согласования $\delta/\alpha(\delta) \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$ выполняются предельные соотношения*

$$\|z^\delta[\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}]\|^2 \to \|z_p^0\|^2,\ A^0 z^\delta[\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}] - u^0 - p \to 0,\ \langle \lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}, A^\delta z^\delta[\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}] - u^\delta - p\rangle \to 0,\ \delta \to 0,$$

и, как следствие (благодаря дифференцируемости по Фреше функционала $\|\cdot\|^2$), предельное соотношение (см. лемму 3.3)

$$\|z^\delta[\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}] - z_p^0\| \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{3.2}$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная задача, алгоритм двойственной регуляризации является регуляризирующим в смысле определе-

ния 3.2 и, более того, справедливо предельное соотношение (3.2). Одновременно справедливо и предельное соотношение $V_p^0(\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}) \to \sup_{\lambda\in U} V_p^0(\lambda) = \|z_p^0\|^2, \quad \delta \to 0$. *Если же двойственная к* (P_p^0) *задача разрешима, то имеет место сходимость* $\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)} \to \lambda_p^0$ *при* $\delta \to 0$, *где* $\lambda_p^0 \in U$ *есть ее нормальное решение.*

З а м е ч а н и е 3.1. Можно показать, что в качестве регуляризованной возмущенной двойственной задачи в методе двойственной регуляризации может быть взята задача $V_p^\delta(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda - \widetilde{\lambda}\|^2 \to \sup$, $\lambda \in U$, где $\widetilde{\lambda} \in U$ — произвольный фиксированный элемент. Тогда, в соответствии с классической теорией тихоновской стабилизации (см., например, [8, гл. 9, § 4]), в этом случае в качестве предельной точки λ_p^0 предельного соотношения $\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)} \to \lambda_p^0$ при $\delta \to 0$ выступает элемент, доставляющий минимальное значение функционалу $\|\lambda - \widetilde{\lambda}\|^2$, $\lambda \in U$, среди всех решений двойственной к (P_p^0) задачи. При этом все полученные выше результаты, связанные с процедурой двойственной регуляризации, сохраняют силу.

Как следствие применяемого метода возмущений и в отличие от теорем 0.1, 1.1 сходимости метода регуляризации Тихонова, в теореме 3.1 свойства сходимости метода двойственной регуляризации зависят от параметра p. Если задача двойственная к (P_p^0) разрешима, т. е. $\partial\beta(p) \neq \emptyset$, то вырабатываемая методом последовательность двойственной переменной сходится к ее минимальному по норме решению. В противном случае нормы элементов этой последовательности неограниченно возрастают. Заметим, наконец, что для практического нахождения точки $\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}$ можно опираться на формулу [9, лемма 1.5.34], [12, леммы 3, 4] для градиента целевой функции $V_p^\delta(\lambda)$, $\lambda \in U$, двойственной задачи, приводимую в следующей лемме.

Лемма 3.4. *Производная Фреше функционала* $V_p^\delta : U \to \mathbb{R}^1$ *задается формулой* $\partial V_p^\delta(\lambda) = A^\delta z^\delta[\lambda] - u^\delta - p$ *и удовлетворяет условию Липшица.*

3.6. Регуляризованное ПМЛ в «простейшей» задаче выпуклого программирования. Сформулируем в данном разделе регуляризованное ПМЛ для задачи (P_p^0). Его доказательство см. в [11]. Это регуляризованное ПМЛ можно также именовать регуляризованной теоремой Куна–Таккера (используемая функция Лагранжа регулярна) для задачи (P_p^0), так как он имеет вид утверждения о необходимых и достаточных условиях существования ограниченной ОМП в задаче и о возможности аппроксимации решения z_p^0 точками минимума ее регулярной функции Лагранжа. Учитывая лемму 3.3, его можно трактовать одновременно как необходимое и достаточное условия обычной оптимальности в задаче (P_p^0), выраженные, однако, в секвенциальной форме. Одновременно в формулируемой ниже теореме конструктивно предъявляется конкретная ОМП, аппроксимирующая решение z_p^0 и состоящая из указанных точек минимума регулярной функции Лагранжа.

Теорема 3.2. [***Регуляризованное ПМЛ***] *Пусть задана произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел* δ^k, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к* (P_p^0) *задача, для существования ограниченной ОМП в задаче* (P_p^0) *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность* $\lambda^k \in U$, $k = 1, 2, \ldots$, *такая, что выполняются соотношения*

$$\delta^k\|\lambda^k\|^2 \to 0, \quad z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}_p^{\delta^k,\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k] - u^{\delta^k} - p\rangle \to 0, \quad k \to \infty,$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k],\ k=1,2,\ldots$ *была ограничена. Эта последовательность* $z^{\delta^k}[\lambda^k],\ k=1,2,\ldots,$ *является искомой ОМП в задаче* (P_p^0).

Другими словами, зависящий от $\delta^k,\ k=1,2,\ldots,$ *оператор* $R(\cdot,\cdot,\delta^k)$, *ставящий в соответствие каждому набору исходных данных* $(A^{\delta^k},u^{\delta^k})$, *удовлетворяющих оценкам* (3.1) *при* $\delta=\delta^k$, *элемент* $R(A^{\delta^k},u^{\delta^k},\delta^k)=z^{\delta^k}[\lambda^k]\in\mathcal{D}$, *является ОМП-образующим, причем в силу дифференцируемости по Фреше целевого функционала* $\|\cdot\|^2$ *имеет место и сильная сходимость* $z^{\delta^k}[\lambda^k]\to z_p^0,\ k\to\infty$. *Кроме того, выполняется предельное соотношение* $V_p^0(\lambda^k)\to\sup\limits_{\lambda\in U}V_p^0(\lambda)=\|z_p^0\|^2$.

В случае существования ограниченной ОМП и разрешимости двойственной к (P_p^0) *задачи, т. е. в случае* $\partial\beta(p)\neq\varnothing$, *можно без ограничения общности считать, что* $\lambda^k\to\lambda_p^0,\ k\to\infty$, *где* $\lambda_p^0\in U$ *есть любое наперед выбранное и фиксированное решение указанной двойственной задачи (в частности, нормальное).*

В качестве последовательности $\lambda^k\in U,\ k=1,2,\ldots,$ *может быть взята последовательность* $\lambda_p^{\delta^k,\alpha(\delta^k)},\ k=1,2,\ldots,\ \delta^k/\alpha(\delta^k)\to0,\ k\to\infty$, *генерируемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы 3.1 с учетом замечания 3.1, в соответствии с которым:* $\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}\equiv\operatorname{argmax}\{V_p^\delta(\lambda)-\alpha(\delta)\|\lambda-\widetilde{\lambda}\|^2,\lambda\in U\},\ \delta/\alpha(\delta)\to0,\ \alpha(\delta)\to0,\ \delta\to0$, $\widetilde{\lambda}\in U$ *— произвольный фиксированный элемент. В случае разрешимости двойственной к* (P_p^0) *задачи имеет место сходимость* $\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}\to\lambda_p^0,\ \delta\to0$, *где в качестве* $\lambda_p^0\in U$ *может быть взято ее любое наперед выбранное и фиксированное решение (такая сходимость достигается за счет произвола в выборе* $\widetilde{\lambda}\in U$*).*

Следствием применения метода возмущений является то, что все соотношения сформулированного регуляризованного ПМЛ, как и соотношения теоремы 3.1, содержат параметр p. Укажем важные характеристические особенности утверждений теоремы 3.2, которую естественно трактовать как ОМП-образующий (регуляризирующий) в задаче (IP) алгоритм, выраженный в форме максимально близкой к классической форме условий оптимальности для эквивалентной задачи $(CE2)$.

1. Благодаря возможности использования аппарата выпуклого анализа в рамках метода возмущений можно утверждать, что в случае непустоты субдифференциала (в смысле выпуклого анализа) или, что эквивалентно, в случае разрешимости двойственной к (P_p^0) задачи, вырабатываемая теоремой последовательность двойственной переменной сходится к нормальному решению этой двойственной задачи. Если же $\partial\beta(p)=\emptyset$, то нормы элементов этой последовательности неограниченно возрастают с увеличением их номеров.

2. Аппроксимация точного решения z_p^0 элементами $z^{\delta^k}[\lambda^k],\ k=1,2,\ldots$ означает, что каждый такой элемент есть экстремаль (единственная) функции Лагранжа $L_p^{\delta^k}(z,\lambda^k)$, $z\in\mathcal{D}$ в то время как двойственная переменная λ^k выбирается в точном соответствии с методом стабилизации Тихонова применительно к задаче максимизации $V_p^0(\lambda)\to\sup$, $\lambda\in U$, приближенное значение целевой функции которой равно $V_p^{\delta^k}(\lambda)$. Тем самым показывается, что классическая теория условий оптимальности объединенная со стабилизацией по Тихонову двойственной задачи естественным образом порождает ОМП-образующие алгоритмы, которые можно трактовать как новые устойчивые к ошибкам исходных данных алгоритмы, пригодные для решения многих актуальных задач современного естествознания.

3. Более того, как показано в [11], предельный переход при $k\to\infty$ в соотношениях теоремы 3.2 приводит к классическим условиям оптимальности для оптимальных элементов

z_p^0, которым они удовлетворяют в соответствии с параметрическим недифференциальным ПМЛ [11, предложение 1.2] для задачи (P_p^0).

References

[1] А. Н. Тихонов, “О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации”, *Доклады АН СССР*, **151**:3 (1963), 501–504; англ. пер.:A. N. Tikhonov, “Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method”, *Sov. Math., Dokl.*, **4** (1963), 1035–1038.

[2] А. Н. Тихонов, “О регуляризации некорректно поставленных задач”, *Доклады АН СССР*, **153**:1 (1963), 49–52; англ. пер.:A. N. Tikhonov, “Regularization of incorrectly posed problems”, *Sov. Math., Dokl.*, **4** (1963), 1624–1627.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.:A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston; Halsted Press, Washington; New York, 1977.

[4] *Некорректные задачи естествознания*, ред. А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, Изд-во МГУ, М., 1987; англ. пер.: *Il-posed Problems in the Natural Science*, Advances in Science and Technology in the USSR Mathematics and Mechanics, eds. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, Mir Publ., Moscow, 1989.

[5] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, Наука, М., 1978; англ. пер.:V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana, *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications.* V. 36, Inverse and Ill-Posed Problems, Walter de Gruyter, Utrecht, 2002.

[6] А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола, *Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация*, Наука, М., 1983. [A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, V. V. Stepanov, A. G. Yagola, *Regularizing Algorithms And Apriori Information*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (In Russian)].

[7] А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский, *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989. [A. B. Bakushinskii, A. V. Goncharskii, *Incorrect Tasks. Numerical Methods and Applications*, Publishing House Moscow University, Moscow, 1989 (In Russian)].

[8] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: В 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil’ev, *Optimization Methods: in 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].

[9] М. И. Сумин, *Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород., 2009. [M. I. Sumin, *Incorrect Problems and Methods for Solving Them. Materials for Lectures for Students Senior Students*, Publishing House of Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, 2009 (In Russian)].

[10] М. И. Сумин, “Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 151–171. [M. I. Sumin, “Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis of stable solving optimal control and inverse problems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 151–171 (In Russian)].

[11] М. И. Сумин, “О некорректных задачах, экстремалях функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 58–79. [M. I. Sumin, “On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 58–79 (In Russian)].

[12] М. И. Сумин, “Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007), 602–625; англ. пер.:M. I. Sumin, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.

[13] А. Н. Тихонов, “Об устойчивости задачи оптимизации функционалов”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **6**:4 (1966), 631–634; англ. пер.:A. N. Tikhonov, “On the stability of the functional optimization problem”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **6**:4 (1966), 28–33.

[14] М. И. Сумин, “Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ.

пер.:M. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.

[15] М. И. Сумин, “Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:1 (2014), 25–49; англ. пер.:M. I. Sumin, “Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:1 (2014), 22–44.

[16] М. И. Сумин, “Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она дает”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 757–772. [M. I. Sumin, “Why regularization of Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is needed and what it gives”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 757–772 (In Russian)].

[17] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 279–296 (In Russian)].

[18] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.:V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1987.

[19] М. И. Сумин, “Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:131 (2020), 307–330. [M. I. Sumin, “Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:131 (2020), 307–330 (In Russian)].

[20] Ж.-П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988; франц. ориг.:J.-P. Aubin, *L’Analyse non Linéaire et ses Motivations Économiques*, Elsevier Masson, Paris–New York, 1984.

[21] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. ориг.:J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.

[22] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, Тр. ИММ УрО РАН, **26**, 2020, 252–269. [M. I. Sumin, “On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **26**, 2020, 252–269 (In Russian)].

Информация об авторе

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3700-6428

Поступила в редакцию 24.08.2023 г.
Поступила после рецензирования 14.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3700-6428

Received 24.08.2023
Reviewed 14.11.2023
Accepted for press 23.11.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-436-446

УДК 517.928, 517.922

Явление погранслоя в алгебро-дифференциальном уравнении первого порядка

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова»

394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. Рассматривается задача Коши для алгебро-дифференциального уравнения первого порядка

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t,\varepsilon),$$

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon) \in E_1,$$

где A, B, C, D — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 с всюду плотными в E_1 областями определения, u^0 — голоморфная в точке $\varepsilon = 0$ функция, ε — малый параметр, $t \in [t_0; t_{max}]$. Такими уравнениями описываются, в частности, процессы фильтрации и влагопереноса, поперечные колебания пластин, колебания в молекулах ДНК, явления в электромеханических системах и т. д. Оператор A фредгольмов с нулевым индексом. Целью работы является изучение явления погранслоя, вызываемое наличием малого параметра. Приводятся необходимые сведения и утверждения. Получено уравнение ветвления. Рассматриваются два случая: а) функции погранслоя одного вида, б) функций погранслоя двух видов. Для решения уравнения ветвления применяется диаграмма Ньютона. В обоих случаях выявлены условия, при которых возникает явление погранслоя — это условия регулярности вырождения. Случай а) иллюстрируется примером задачи Коши с конкретными операторными коэффициентами, действующими в пространстве $\mathbb{R}^4$.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальное уравнение первого порядка, малый параметр, фредгольмов оператор, явление погранслоя, уравнение ветвления, условия регулярности вырождения

Для цитирования: *Усков В.И.* Явление погранслоя в алгебро-дифференциальном уравнении первого порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 436–446. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-436-446

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-436-446

Boundary layer phenomenon in a first-order algebraic-differential equation

Vladimir I. USKOV
Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. The Cauchy problem for the first-order algebraic differential equation is considered

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t,\varepsilon),$$

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon) \in E_1,$$

where A, B, C, D are closed linear operators acting from a Banach space E_1 to a Banach space E_2 with domains everywhere dense in E_1, u^0 is a holomorphic function at the point $\varepsilon = 0$, ε is a small parameter, $t \in [t_0; t_{max}]$. Such equations describe, in particular, the processes of filtration and moisture transfer, transverse vibrations of plates, vibrations in DNA molecules, phenomena in electromechanical systems, etc. The operator A is the Fredholm operator with zero index. The aim of the work is to study the boundary layer phenomenon caused by the presence of a small parameter. The necessary information and statements are given. A bifurcation equation is obtained. Two cases are considered: a) boundary layer functions of one type, b) boundary layer functions of two types. Newton's diagram is used to solve the bifurcation equation. In both, the conditions under which boundary layer phenomenon arises are obtained — these are the conditions for the regularity of degeneracy. Case a) is illustrated by an example of the Cauchy problem with certain operator coefficients acting in the space $\mathbb{R}^4$.

Keywords: first-order algebraic-differential equation, small parameter, Fredholm operator, boundary layer phenomenon, bifurcation equation, regularity conditions for degeneracy

Mathematics Subject Classification: 34E15.

For citation: Uskov V.I. Boundary layer phenomenon in a first-order algebraic-differential equation. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 436–446. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-436-446 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В статье рассматривается задача Коши

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t,\varepsilon), \tag{0.1}$$

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon) \in E_1, \tag{0.2}$$

где A, B, C, D — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{\mathrm{dom}}\, A = \overline{\mathrm{dom}}\, B = \overline{\mathrm{dom}}\, C = \overline{\mathrm{dom}}\, D = E_1$, оператор A фредгольмов с нулевым индексом (далее, фредгольмов), u^0 — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция, $t \in \mathfrak{T} = [t_0; t_{max}]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$.

Уравнениями вида (0.1) описываются, в частности, процессы фильтрации и влагопереноса, поперечные колебания пластин, колебания в молекулах ДНК, явления в электромеханических системах и т. д. [1], [2].

Цель работы: исследовать задачу (0.1), (0.2) на наличие явления погранслоя, выявить условия, при которых имеет место явление погранслоя.

Работа продолжает исследование [3]. В [3] предполагалось, что оператор A обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом, рассматривался случай двумерного ядра. Результат применялся к исследованию жесткости динамической системы, описываемой системой уравнений в частных производных первого порядка. В настоящей работе оператор A фредгольмов; исследование обобщается случаем ядра оператора A произвольной (конечной) размерности.

Для решения поставленной задачи в пункте 1. приводятся необходимые определения и утверждения, а в пункте 2. выводится уравнение ветвления, позволяющее определить вид функций погранслоя. Исследование явления погранслоя проводится в пункте 3. Здесь рассматриваются два случая погранслоя: а) случай одного вида функций погранслоя и б) случай двух видов функций погранслоя. Случай а) иллюстрируется примером, приведенным в заключающем статью пункте 4.

1. Необходимые определения и утверждения

Приведем сведения по явлению погранслоя.

Определение 1.1. [4] Ограниченная функция $(t,\varepsilon) \in \mathfrak{T} \times (0;\varepsilon_0) \mapsto v(t,\varepsilon) \in E_1$ называется *функцией погранслоя* вблизи точки $t = t_0$, если $v(t,\varepsilon)$ стремится равномерно (по норме в банаховом пространстве E_1) к нулю при $\varepsilon \to 0$ на $[t'; t_{max}]$ для любых $t' \in (t_0; t_{max})$, и не стремится равномерно к нулю на $\mathfrak{T}$.

Введем новую переменную $\tau = \tau(t,\varepsilon)$ и будем рассматривать функции погранслоя, зависящие только от τ.

Определение 1.2. [5, с. 20] В задаче (0.1), (0.2) наблюдается *явление погранслоя*, если решение этой задачи представляется в виде

$$u(t,\varepsilon) = \bar{u}(t) + v(\tau),$$

где v — функция погранслоя, $\bar{u}$ — решение предельной задачи

$$A\frac{d\bar{u}}{dt} = B\bar{u}(t), \quad \bar{u}(t_0) = \bar{u}^0.$$

Далее, нам потребуются сведения о фредгольмовском операторе.

С в о й с т в о 1.1. [6] Фредгольмов оператор $A : E_1 \to E_2$ вполне определяется свойством

$$E_1 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A,$$

где $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A, $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к ядру, $\operatorname{Coker} A$ — дефект, $\operatorname{Im} A$ — образ, причем выполнено $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A (= n) < \infty$ и сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$.

Введем проектор Q на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q) : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$. Разложим элемент $e \in \operatorname{Ker} A$, $e \neq 0$, по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и элемент $\varphi \in \operatorname{Coker} A$ по базису $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$:

$$e = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i. \tag{1.1}$$

В $\operatorname{Coker} A$ введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, что

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.1. [7] *Уравнение* $Av = w$, $v \in E_1$, $w \in E_2$, *равносильно системе*

$$v = A^- w + e,$$
$$\langle Qw, \varphi_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $f_{ij}(x, y)$ — скалярные вещественные функции, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим следующие функции, построенные с помощью определителя:

$$F(x, y) = \det(f_{ij}(x, y))_{n \times n},$$

$$F_n(x, y) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{i_1+j_1} f_{11}(x,y)}{\partial x^{i_1} \partial y^{j_1}} & \dfrac{\partial^{i_1+j_1} f_{12}(x,y)}{\partial x^{i_1} \partial y^{j_1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{i_1+j_1} f_{1n}(x,y)}{\partial x^{i_1} \partial y^{j_1}} \\ \dfrac{\partial^{i_2+j_2} f_{21}(x,y)}{\partial x^{i_2} \partial y^{j_2}} & \dfrac{\partial^{i_2+j_2} f_{22}(x,y)}{\partial x^{i_2} \partial y^{j_2}} & \cdots & \dfrac{\partial^{i_2+j_2} f_{2n}(x,y)}{\partial x^{i_2} \partial y^{j_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^{i_n+j_n} f_{n1}(x,y)}{\partial x^{i_n} \partial y^{j_n}} & \dfrac{\partial^{i_n+j_n} f_{n2}(x,y)}{\partial x^{i_n} \partial y^{j_n}} & \cdots & \dfrac{\partial^{i_n+j_n} f_{nn}(x,y)}{\partial x^{i_n} \partial y^{j_n}} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $P(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ полиномиальный коэффициент.

Имеет место следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть все частные производные функций* $f_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *не зависят от порядка дифференцирования. Тогда справедлива следующая формула частной производной*

$$\frac{\partial^{r+s} F(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_n \geqslant 0,\ i_1+i_2+\ldots+i_n = r \\ j_1, j_2, \ldots, j_n \geqslant 0,\ j_1+j_2+\ldots+j_n = s}} P(i_1, i_2, \ldots, i_n) P(j_1, j_2, \ldots, j_n) F_n(x, y).$$

Пусть K_i, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ — линейные операторы, действующие в одном пространстве. Обозначим через $S^{K_0,K_1,K_2}_{i_1,i_2,i_3}$ сумму по всевозможным перестановкам из i_1 элементов K_0, i_2 элементов K_1, i_3 элементов K_2.

Справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Степень $m \in \mathbb{N}$ от суммы $K_0 + K_1 + K_2$ определяется формулой*

$$(K_0 + K_1 + K_2)^m = \sum_{i_1,i_2,i_3 \geqslant 0,\; i_1+i_2+i_3=m} S^{K_0,K_1,K_2}_{i_1,i_2,i_3}.$$

Теперь рассмотрим операторные пучки

$$\mathcal{K}_1(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1, \quad \mathcal{K}_2(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2, \quad \mathcal{K}_3(\varepsilon) = \mathcal{K}_2^m(\varepsilon),$$

$$\mathcal{K}_4(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i K_i. \tag{1.3}$$

Предполагается, что ряд (1.3) сходится.

Из [8, лемма 3.6] вытекает следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.3. *Для производной от произведения $\mathcal{K}_1(\varepsilon)\mathcal{K}_4(\varepsilon)$ справедлива формула*

$$(\mathcal{K}_1(\varepsilon)\mathcal{K}_4(\varepsilon))' = \mathcal{K}_1'(\varepsilon)\mathcal{K}_4(\varepsilon) + \mathcal{K}_1(\varepsilon)\mathcal{K}_4'(\varepsilon).$$

Предложение 1.2 влечет следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.4. *Производные первого и второго порядка оператора $\mathcal{K}_3(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ определяются по формулам*

$$\mathcal{K}_3'(0) = S^{K_0,K_1,K_2}_{m-1,1,0}, \quad \mathcal{K}_3''(0) = 2(S^{K_0,K_1,K_2}_{m-1,0,1} + S^{K_0,K_1,K_2}_{m-2,2,0}).$$

2. Уравнение ветвления

Для уравнения (0.1) выведем уравнение ветвления. Подстановка

$$u(t,\varepsilon) = \exp(t - t_0/\lambda)v(\varepsilon), \tag{2.1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — достаточно малые по модулю числа, $v(\varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция при $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$, $v(\varepsilon) \neq 0$, в (0.1) приводит к уравнению

$$Av(\varepsilon) = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)v(\varepsilon).$$

Это уравнение в силу леммы 1.1 равносильно системе

$$[I - \lambda A^-(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]v(\varepsilon) = e, \tag{2.2}$$

$$e \neq 0, \tag{2.3}$$

$$\langle Q(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)v(\varepsilon), \varphi_j\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Далее полагаем, что выполнены следующие два условия.

У с л о в и е 2.1. Операторы QB, QC, QD, A^-B, A^-C, A^-D ограничены.

Условие 2.2. Числа $\lambda \in \mathbb{C}$ достаточно малые по модулю и таковы, что

$$0 < \|\lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\| < 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0).$$

Тогда уравнение (2.2) разрешимо:

$$v(\varepsilon) = [I - \lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]^{-1} e. \tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в (2.4), получим

$$\langle Q(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)[I - \lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]^{-1} e, \varphi_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Определим

$$R_{ij}(\lambda, \varepsilon) = \langle Q(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)[I - \lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]^{-1} e_i, \varphi_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Теперь, подставив первое разложение (1.1) в (2.6), получим систему уравнений относительно c_i

$$\sum_{i=1}^{n} c_i R_{ij}(\lambda, \varepsilon) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из этой системы вытекает искомое уравнение ветвления

$$R(\lambda, \varepsilon) = \det(R_{ij}(\lambda, \varepsilon))_{n \times n} = 0, \tag{2.7}$$

так как иное влечет $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что противоречит (2.3).

3. Исследование явления погранслоя в задаче (0.1), (0.2)

Рассмотрим уравнение (2.7) для исследования явления погранслоя. Для этого в выражении $R(\lambda, \varepsilon)$ разложим $[I - \lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]^{-1}$ в ряд Неймана; получившееся выражение разложим в ряд Маклорена по степеням параметров λ, ε, использовав для частных производных предложение 1.1. Затем решим уравнение (2.7) относительно λ, применив диаграмму Ньютона [9, § 38].

Исследуем два случая погранслоя.

Случай одного вида функций погранслоя. Пусть выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial^i R}{\partial \varepsilon^i}(0,0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1, \quad \frac{\partial^p R}{\partial \varepsilon^p}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0) \neq 0. \tag{3.1}$$

Тогда имеет место асимптотическое разложение

$$R(\varepsilon, \lambda) = \lambda \frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0) + \frac{\varepsilon^p}{p!} \frac{\partial^p R}{\partial \varepsilon^p}(0,0) + o(\lambda) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $o(\lambda)$ вмещает в себя нормы ограниченных операторов (условие 2.1).

Этому случаю соответствует следующая диаграмма Ньютона (см. рис. 1).

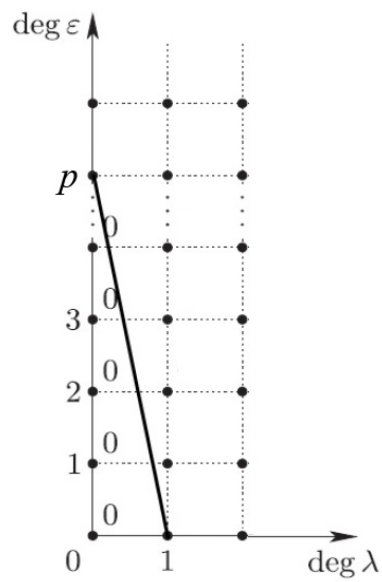

Рис. 1. Диаграмма Ньютона

Применение диаграммы дает решение уравнения (2.7)

$$\lambda = -\frac{\varepsilon^p}{p!} \cdot \frac{\frac{\partial^p R}{\partial \varepsilon^p}(0,0)}{\frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0)}.$$

Подстановка его в (2.1) приводит к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены соотношения* (3.1). *Тогда при выполнении условия*

$$\operatorname{Re} \frac{\frac{\partial^p R}{\partial \varepsilon^p}(0,0)}{\frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0)} > 0 \tag{3.2}$$

в задаче (0.1), (0.2) *возникает явление погранслоя, и функции погранслоя имеют переменную* $\tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon^p}$.

Случай двух видов функций погранслоя. Теперь зададим натуральные числа p_0, p_1, p_2, q_1, q_2 такие, что $p_0 < p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$, и выполнено следующее условие.

Условие 3.1.

$$\frac{p_2 - p_1}{q_1} > \frac{p_1 - p_0}{q_2 - q_1}.$$

Пусть выполнены соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^j R}{\partial \varepsilon^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p_2 - 1, \quad \frac{\partial^{p_2} R}{\partial \varepsilon^{p_2}} \neq 0,\\
&\frac{\partial^{i+j} R}{\partial \lambda^i \varepsilon^j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q_1 - 1, \quad j = 0, 1, \dots, p_2,\\
&\frac{\partial^{q_1+j} R}{\partial \lambda^{q_1} \partial \varepsilon^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p_2 - 1,\\
&\frac{\partial^{i+j} R}{\partial \lambda^i \varepsilon^j} = 0, \quad i = q_1 + 1, \dots, q_2 - 1, \quad j = 0, 1, \dots, p_1,\\
&\frac{\partial^{q_2+j} R}{\partial \lambda^{q_2} \partial \varepsilon^j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p_0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Тогда имеет место асимптотическое разложение

$$R(\varepsilon,\lambda)=\frac{\varepsilon^{p_2}}{p_2!}\frac{\partial^{p_2}R}{\partial\varepsilon^{p_2}}(0,0)+\frac{\lambda^{q_1}\varepsilon^{p_1}}{q_1!p_1!}\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\partial\varepsilon^{p_1}}(0,0)+\frac{\lambda^{q_2}\varepsilon^{p_0}}{q_2!p_0!}\frac{\partial^{q_2+p_0}R}{\partial\lambda^{q_2}\partial\varepsilon^{p_0}}(0,0)+o(\lambda^{q_2}\varepsilon^{p_0})\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Этому случаю соответствует следующая диаграмма Ньютона (см. рис. 2).

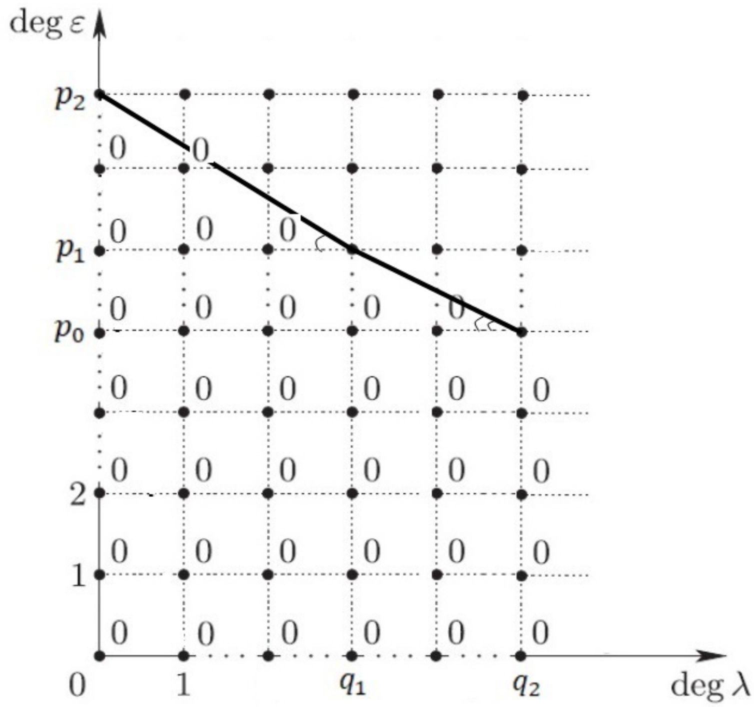

Рис. 2. Диаграмма Ньютона

Применение диаграммы дает решения уравнения (2.7)

$$\lambda_1=-\varepsilon^{\frac{p_2-p_1}{q_1}}\cdot\frac{q_1!p_1!}{p_2!}\cdot\frac{\frac{\partial^{p_2}R}{\partial\varepsilon^{p_2}}(0,0)}{\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\partial\varepsilon^{p_1}}(0,0)},$$

$$\lambda_2=-\varepsilon^{\frac{p_1-p_0}{q_2-q_1}}\cdot\frac{q_2!p_0!}{q_1!p_1!}\cdot\frac{\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\partial\varepsilon^{p_1}}(0,0)}{\frac{\partial^{q_2+p_0}R}{\partial\lambda^{q_2}\partial\varepsilon^{p_0}}(0,0)},$$

отвечающие двум отрезкам ломаной.

Подстановка этих решений в (2.1) приводит к следующему результату.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условие 3.1 и соотношения (3.3). Тогда при выполнении условий*

$$\operatorname{Re}\frac{\frac{\partial^{p_2}R}{\partial\varepsilon^{p_2}}(0,0)}{\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\partial\varepsilon^{p_1}}(0,0)}>0,\qquad\operatorname{Re}\frac{\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\varepsilon^{p_1}}(0,0)}{\frac{\partial^{q_2+p_0}R}{\partial\lambda^{q_2}\partial\varepsilon^{p_0}}(0,0)}>0\tag{3.4}$$

в задаче (0.1), (0.2) возникает явление погранслоя, и функции погранслоя имеют переменные

$$\tau_1=\frac{t-t_0}{\varepsilon^{\frac{p_2-p_1}{q_1}}},\qquad\tau_2=\frac{t-t_0}{\varepsilon^{\frac{p_1-p_0}{q_2-q_1}}}.$$

Неравенства (3.2), (3.4) являются *условиями регулярности вырождения.*

4. Пример исследования явления погранслоя

Рассмотрим задачу Коши

$$
\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dt}+\frac{du_2}{dt}+\frac{du_3}{dt}+\frac{du_4}{dt}=(1+\varepsilon+\varepsilon^2 d_1)u_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^2 d_2 u_4(t,\varepsilon),\\
&\frac{du_1}{dt}+\frac{du_2}{dt}+\frac{du_3}{dt}+\frac{du_4}{dt}=(1+\varepsilon+\varepsilon^2)u_2(t,\varepsilon),\\
&\frac{du_1}{dt}+\frac{du_2}{dt}+\frac{du_3}{dt}+\frac{du_4}{dt}=(1+\varepsilon c+\varepsilon^2)u_3(t,\varepsilon),\\
&b_1u_1(t,\varepsilon)+(b_2+\varepsilon+\varepsilon^2)u_4(t,\varepsilon)=0,\\
&u_i(t_0,\varepsilon)=u_i^0(\varepsilon),\quad i=1,2,3,4,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где b_1,b_2,c,d_1,d_2 — заданные вещественные числа, $u_i^0(\varepsilon)$ — голоморфные в окрестности точки $\varepsilon=0$ функции.

Задача (4.1) — это задача вида (0.1), (0.2) с операторами $A,B,C,D:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$,

$$
A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad
B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\b_1&0&0&b_2\end{pmatrix},\quad
C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad
D=\begin{pmatrix}d_1&0&0&d_2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},
$$

искомой вектор-функцией $u(t,\varepsilon)=\big(u_i(t,\varepsilon)\big)\in\mathbb{R}^4$ и начальной вектор-функцией $u^0(\varepsilon)=\big(u_i^0(\varepsilon)\big)\in\mathbb{R}^4$.

Оператор A, очевидно, фредгольмов. Имеем

$$
\operatorname{Ker}A=\{v_2e_1+v_3e_2+v_4e_3\},\quad e_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},
$$

$$
\operatorname{Coim}A=\begin{pmatrix}v_1+v_2+v_3+v_4\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \operatorname{Im}A=\begin{pmatrix}w_1\\w_1\\w_1\\0\end{pmatrix},
$$

$$
\operatorname{Coker}A=\{(w_2-w_1)\varphi_1+(w_3-w_1)\varphi_2+w_4\varphi_3\},\quad \varphi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \varphi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.
$$

Для элементов φ_i, $i=1,2,3$, выполнено условие (1.2).

Далее, имеем

$$
Q(A)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^-=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
$$

И в результате вычислений, использующих предложения 1.1, 1.3 и 1.4, получаем, что

$$R(0,0) = -b_1 + 3b_2, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0) = -b_1 + 2b_2, \quad \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}(0,0) = (-b_1 + 2b_2)c - b_1 + 4b_2 + 3,$$
$$\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2}(0,0) = (-2b_1 + 4b_2 + 4)c - 4(b_1 d_2 - b_2 d_1) - 4b_1 + 10b_2 + 14.$$

Рассмотрим следующие случаи поведения решения при $\varepsilon \to 0$.

Случай 1. Пусть

$$b_1 \neq 3b_2.$$

Тогда решение допредельной задачи (4.1) равномерно сходится к решению предельной задачи, поскольку диаграмма Ньютона вырождается в точку, расположенную в начале координат.

Случай 2. Теперь пусть

$$b_1 = 3b_2, \quad b_2 \neq 0. \tag{4.2}$$

Имеем

$$\frac{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}(0,0)}{\frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0)} = \frac{-b_2(c-1)+3}{-b_2} = c - 1 - \frac{3}{b_2}.$$

Тогда в силу теоремы 3.1 явление погранслоя возникает при выполнении условия

$$c - \frac{3}{b_2} > 1,$$

и функции погранслоя имеют переменную $\tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon}$.

Случай 3. Пусть выполнены соотношения (4.2) и

$$c - \frac{3}{b_2} = 1.$$

Тогда в силу теоремы 3.1 явление погранслоя возникает при выполнении условия

$$\frac{b_2}{(2b_1 - 4b_2 - 4)c + 4(b_1 d_2 - b_2 d_1) + 4b_1 - 10b_2 - 14} < 0,$$

и функции погранслоя имеют переменную $\tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon^2}$.

References

[1] P. L. Christiansen, P. S. Lomdahl, V. Muto, “On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom”, *Nonlinearity*, **4**:2 (1991), 477–501.

[2] Нгуен Хак Диеп, В. Ф. Чистяков, “О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных”, *Вестник ЮурГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*, **6**:1 (2013), 98–111. [Nguyen Hak Diep, V. F. Chistyakov, “On modeling using partial differential-algebraic equations”, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming and computer software*, **6**:1 (2013), 98–111 (In Russian)].

[3] В. И. Усков, “Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:34 (2021), 172–181. [V. I. Uskov, “Study of rigidity of a first-order algebro-differential system with perturbation in the right-hand side”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:34 (2021), 172–181 (In Russian)].

[4] С. П. Зубова, “О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной”, *Доклады Российской Академии наук*, **454**:4 (2014), 383–386; англ. пер:S. P. Zubova, “The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative”, *Doklady Mathematics*, **89** (2014), 72–75.

[5] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973. [A. B. Vasilyeva, V. F. Butuzov, *Asymptotic Expansions of Solutions to Singularly Perturbed Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russian)].

[6] С. М. Никольский, “Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах”, *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. M. Nikolsky, “Linear equations in normed linear spaces”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **7**:3 (1943), 147–166 (In Russian)].

[7] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай”, *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 393–404; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, “Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case”, *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

[8] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1971. [S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russian)].

[9] Н. Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций*, Либроком, М., 2009. [N. G. Chebotarev, *Theory of Algebraic Functions*, Librokom Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 18.10.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematical Department, Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G.F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 15.05.2023
Reviewed 18.10.2023
Accepted for press 23.11.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-447-468

УДК 515.126.83

О непрерывных и липшицевых селекциях многозначных отображений, заданных системой неравенств

Рафик Агасиевич ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

0025, Армения, г. Ереван, ул. Алек Манукян, 1

Аннотация. Рассматривается многозначное отображение следующего вида

$$a(x) = \{y \in Y \mid f_i(x, y) \leq 0,\ i \in I\}, \quad x \in X,$$

где $X \subset \mathbb{R}^m$ — компакт; $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт; градиенты $f'_{iy}(x, y)$, $i \in I$, функций $f_i(x, y)$ по y удовлетворяют условию Липшица на Y; I — конечное множество индексов. С использованием метода линеаризации доказаны теоремы существования непрерывных и липшицевых селекторов, проходящих через любую точку графика многозначного отображения a. Получены как локальные, так и глобальные теоремы. Приводятся примеры, подтверждающие существенность принятых предположений, а также примеры, иллюстрирующие применение полученных утверждений в оптимизационных задачах.

Ключевые слова: условие Липшица, многозначное отображение, непрерывные и липшицевые селекции, слабо выпуклое множество, проксимально гладкое множество

Для цитирования: *Хачатрян Р. А.* О непрерывных и липшицевых селекциях многозначных отображений, заданных системой неравенств // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 447–468. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-447-468

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-447-468

On continuous and Lipschitz selections of multivalued mappings given by systems of inequalities

Rafik A. KHACHATRYAN
Yerevan State University
1 Alex Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

Abstract. We consider a multivalued mapping of the following form

$$a(x) = \{y \in Y \mid f_i(x,y) \le 0, \ i \in I\}, \quad x \in X,$$

where $X \subset \mathbb{R}^m$ is compact; $Y \subset \mathbb{R}^n$ is convex compact; the gradients $f'_{iy}(x,y), \ i \in I,$ of the functions $f_i(x,y)$ along y satisfy the Lipschitz condition on Y; I is a finite set of indices. Using the linearization method, existence theorems for continuous and Lipschitz selectors passing through any point of the graph of the multivalued mapping a are proved. Both local and global theorems are obtained. Examples are given that confirm the significance of the assumptions made, as well as examples illustrating the application of the obtained statements to optimization problems.

Keywords: Lipschitz condition, multivalued mapping, continuous and Lipschitz selections, weakly convex set, proximally smooth set

Mathematics Subject Classification: 58C06, 49J53.

For citation: Khachatryan R.A. On continuous and Lipschitz selections of multivalued mappings given by systems of inequalities. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 447–468. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-447-468 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение и основные понятия

Пусть заданы непустые множества $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, непустое конечное множество I и определены функции $f_i(x,y) : X \times Y \to \mathbb{R}^1$, $i \in I$. Рассмотрим систему неравенств

$$f_i(x,y) \le 0, \quad i \in I \tag{0.1}$$

с параметром $x \in X$ относительно неизвестного $y \in Y$.

Отображение, сопоставляющее точке $x \in X$ множество решений системы (0.1), обозначим через $a(x)$. Пусть $y_0 \in a(x_0)$. Однозначное отображение $y : X \to Y$ называется *селекцией многозначного отображения* a*, проходящей через точку* (x_0, y_0), если

$$y(x) \in a(x) \ \ \forall x \in X, \quad y(x_0) = y_0. \tag{0.2}$$

Многозначное отображение a называется *полунепрерывным снизу в точке* x_0, если для любой сходящейся последовательности $\{x_k\}$, $x_k \to x_0$, и любого $y_0 \in a(x_0)$ существует последовательность $\{y_k\}$, $y_k \in a(x_k)$, такая, что $y_k \to y_0$. Отображение a называется *непрерывным по Хаусдорфу в точке* x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$a(x) \subseteq a(x_0) + B_\epsilon(0), \quad a(x_0) \subseteq a(x) + B_\epsilon(0), \quad \text{если } \|x - x_0\| < \delta.$$

Здесь и ниже $B_\epsilon(0) = \big\{x \in X \mid \|x\| < \epsilon\big\}$. *Графиком* отображения a называется множество $\operatorname{graf}(a) = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid y \in a(x)\big\}$.

Пусть множество Y выпукло и замкнуто, а функции $f_i(x,y)$, $i \in I$ непрерывны по совокупности переменных и при любом фиксированном x выпуклы по y. Тогда, если для любого $\overline{x} \in X$ существует $\overline{y} \in Y$ такой, что $f_i(\overline{x}, \overline{y}) < 0$, $i \in I$, то отображение a с выпуклыми замкнутыми значениями полунепрерывно снизу (см. [1, с. 156]). Следовательно, по известной теореме Майкла [2] существует непрерывное отображение, удовлетворяющее условию (0.2). Отметим, что в настоящее время теорема Майкла обобщена на разные классы многозначных отображений с невыпуклыми значениями.

Замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *проксимально гладким* (*слабо выпуклым*) с константой R, если функция расстояния $r_M(x) = \inf_{a \in M} \|x - a\|$ непрерывно дифференцируема на множестве $U_M(R) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < r_M(x) < R\big\}$. Это условие эквивалентно единственности метрической проекции $P_M(x) = \big\{a \in M \mid \|x - a\| = r_M(x)\big\}$ для каждой точки $x \in U_M(R)$. Свойства таких множеств рассматривались разными авторами (см. [3–5]).

Замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *почти выпуклым с константой* $\eta \ge 0$, если для любых $\lambda_j \ge 0$, $j \in J$ (J — любое конечное множество индексов), таких, что $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$ и для любых $x_j \in M$, $j \in J$, выполнено

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \in M + \eta \max_{i,j \in J} \|x_i - x_j\|^2 B_1(0).$$

В [6, теорема 3] доказано, что если множество M почти выпукло с константой $\eta > 0$, то оно проксимально гладко с константой $(16\eta)^{-1}$.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *звездным*, если существует точка $a \in M$ такая, что $[a,b] \subset M$ при любом $b \in M$.

Если значения многозначного отображения выпуклы, почти выпуклы или звездны, то исследованию условий существования непрерывных или липшицевых селекций для таких классов отображений посвящена многочисленная литература (в частности, условия существования непрерывных селекций многозначного отображения с звездными и почти выпуклыми значениями получены в [7, теорема 2]).

В [4] доказана следующая общая теорема о существовании непрерывных селекций многозначного отображения с слабо выпуклыми значениями.

Теорема 0.1 ([4, теорема 3.4.5]). *Пусть X — выпуклое подмножество в нормированном пространстве E, H — гильбертово пространство. Пусть задано многозначное отображение $a : X \to 2^H$, равномерно непрерывное в смысле метрики Хаусдорфа и такое, что для любого $x \in X$ множество $a(x)$ замкнуто и слабо выпукло с константой R. Тогда для любого $(x_0, y_0) \in \operatorname{graf}(a)$ существует непрерывный селектор y отображения a, удовлетворяющий условию $y(x_0) = y_0$.*

В [4, пример 3.4.2] демонстрируется существенность в теореме 0.1 условия выпуклости множества X. В этом примере множество X не выпукло, и хотя многозначное отображение a имеет слабо выпуклые замкнутые значения и липшицево, но тем не менее у него не существует непрерывного селектора на X.

В настоящей статье без предположения выпуклости функций f_i по y, но при дополнительном условии гладкости, означающем, что функции f_i имеют липшицев градиент f'_{iy} по y, доказаны теоремы существования непрерывных и липшицевых селекций для многозначного отображения вида (0.1), определенного на компактном множестве X (который может и не быть выпуклым) и имеющего слабо выпуклые значения. Доказательства теорем существования непрерывных селекций выполняются методом линеаризации (см. [8]). Полученные результаты иллюстрируются в примерах с обсуждением существенности условий теорем.

В дальнейшем через (a, b) обозначено скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.

В [9] доказан следующий результат о существовании липшицевых селекций многозначного отображения вида (0.1).

Теорема 0.2 ([9, теорема 3.3]). *Пусть функции $f_i(x, y)$, $i \in I$, строго дифференцируемы по совокупности переменных в точке (x_0, y_0), и существует вектор $\overline{p} \in \mathbb{R}^n$ такой, что*

$$(f'_{iy}(x_0, y_0), \overline{p}) < 0, \quad i \in I. \tag{0.3}$$

Тогда существует определенное в некоторой окрестности $V(x_0)$ точки x_0 липшицево отображение $y(x)$ такое, что

$$f_i(x, y((x)) \leq 0 \ \ \forall x \in V(x_0), \quad i \in I, \quad y(x_0) = y_0.$$

В настоящей статье доказан аналогичный результат без предположения строгой дифференцируемости функций f_i, $i \in I$, по совокупности переменных (x, y). Поскольку условие (0.3) будет существенным в дальнейших теоремах настоящей статьи, заметим, что оно имеет место только тогда, когда (см. [10, гл 4, теорема 1.9]) не существует таких $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, не всех равных нулю, что

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f'_{iy}(x_0, y_0) = 0.$$

.

Полученные в настоящей статье результаты также можно интерпретировать как теоремы о неявной функции для систем неравенств, они могут быть применены в вопросах существования решений дифференциальных включений вида

$$f_i(y, y') \leq 0, \quad y(t) \in Y, \quad i \in I, \quad t \in T,$$

где T — отрезок числовой прямой (см. [11]).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим $\mathrm{bdry}(M)$ — границу, $\mathrm{diam}(M) = \sup_{x,y \in M} \|x - y\|$ — диаметр и $\mathrm{cl}(M)$ — замыкание этого множества.

1. Липщицевые селекции многозначного отображения a

Лемма 1.1. *Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $V(x_0) \times U(y_0)$ точки (x_0, y_0), и ее градиент $f'_y(x, y)$ по y удовлетворяет условию Липшица равномерно относительно параметра $x \in V(x_0)$, т. е. существует число $L > 0$ такое, что*

$$|f'_y(x, y_1) - f'_y(x, y_2)| \leq L\|y_1 - y_2\| \;\; \forall x \in V(x_0) \;\; \forall y_1, y_2 \in U(y_0).$$

Тогда для любых $x \in V(x_0)$, $y_1, y_2 \in U(y_0)$ имеет место неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2) - (f'_y(x, y_2), y_1 - y_2)| \leq \frac{L}{2}\|y_1 - y_2\|^2. \tag{1.1}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству [12, лемма 1.2.3], и поэтому здесь не приводится.

З а м е ч а н и е 1.1. Условие (1.1) выполняется, если функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по y на множестве $V(x_0) \times U(y_0)$.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены предположения леммы 1.1. Тогда для любых $x \in V(x_0)$, $y_1, y_2 \in U(y_0)$ имеет место неравенство:*

$$f(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda f(x, y_1) + (1 - \lambda) f(x, y_2) + \lambda(1 - \lambda)\frac{L}{2}\|y_1 - y_2\|^2. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении предположения леммы 1.1 справедливо неравенство (1.1). Для любых $y_1, y_2 \in U(y_0)$, $\lambda \in [0, 1]$ положим

$$y^* = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in U(y_0).$$

Имеем

$$f(x, y_1) - f(x, y^*) \geq (f'_y(x, y^*), y_1 - y^*) - \frac{L}{2}\|y_1 - y^*\|^2,$$

$$f(x, y_2) - f(x, y^*) \geq (f'_y(x, y^*), y_2 - y^*) - \frac{L}{2}\|y_2 - y^*\|^2.$$

Заметим, что

$$\|y_1 - y^*\| = (1 - \lambda)\|y_1 - y_2\|, \quad \|y_2 - y^*\| = \lambda\|y_1 - y_2\|.$$

Тогда, умножая первое неравенство на λ, второе — на $(1 - \lambda)$ и складывая их, получаем

$$\begin{aligned} \lambda f(x, y_1) + (1 - \lambda) f(x, y_2) - f(x, y^*) &+ \frac{L}{2}\|y_1 - y_2\|^2 \\ &\geq (f'_y(x, y^*), \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 - y^*) = 0, \end{aligned}$$

т. е неравенство (1.2) доказано. $\square$

З а м е ч а н и е 1.2. Функции, удовлетворяющие условию (1.2), в работе [4] называются слабо выпуклыми по y. А согласно [5, теорема 5.2] надграфик функции $f(x,\cdot)$ является проксимально гладким множеством.

Опишем несколько подробнее свойства функции $f(x,\cdot)$, удовлетворяющей условию (1.2). Сначала по индукции покажем, что справедливо следующее неравенство

$$f(x,\sum_{j\in J}\lambda_j y_j)\le \sum_{j\in J}\lambda_j f(x,y_i)+\frac{L}{2}\max_{i,j\in J}\|y_i-y_j\|^2, \tag{1.3}$$

где $y_j\in U(y_0)$, $\lambda_j\ge 0$, $j\in J$, $\sum_{j\in J}\lambda_j=1$, J — произвольное конечное множество индексов, т. е. $J=\{1,2,\dots,k\}$. При $k=2$ неравенство (1.3) непосредственно следует из (1.2). Допустим, что неравенство (1.3) имеет место при $k=p$. Покажем, что оно имеет место и для значения $k=p+1$. Имеем

$$\begin{aligned}
f\Big(x,\sum_{k=1}^{p+1}\lambda_k y_k\Big)&=f\Big(x,\sum_{k=1}^{p}\lambda_k y_k+\lambda_{p+1}y_{p+1}\Big)=f\Big(x,(1-\lambda_{p+1})\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{p+1}}y_k+\lambda_{p+1}y_{p+1}\Big)\\
&\le(1-\lambda_{p+1})f\Big(x,\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{p+1}}y_k\Big)+\lambda_{p+1}f(x,y_{p+1})+\\
&\qquad\lambda_{p+1}(1-\lambda_{p+1})\frac{L}{2}\|\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{p+1}}y_k-y_{p+1}\|^2\\
&\le\sum_{k=1}^{p+1}\lambda_k f(x,y_k)+(1-\lambda_{p+1})\frac{L}{2}\max_{i,j\in[1;p]}\|y_i-y_j\|^2+\lambda_{p+1}(1-\lambda_{p+1})\frac{L}{2}\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{p+1}}\|y_k-y_{p+1}\|^2\\
&\le\sum_{k=1}^{p+1}\lambda_k f(x,y_k)+\frac{L}{2}\max_{i,j\in[1;p+1]}\|y_i-y_j\|^2.
\end{aligned}$$

Теперь пусть непрерывная функция $f(x,\cdot)$ определена на замкнутом выпуклом множестве $M\in\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию (1.3)). Тогда, как показано в [13, лемма 2], надграфик этой функции является почти выпуклым множеством с константой $\frac{L}{2}$ и, следовательно, проксимально гладким с константой $\frac{1}{8L}$ (см. [6, теорема 3]).

Отметим также условие (1.2) слабой выпуклости функции $f(x,\cdot)$ с константой L эквивалентно тому, что функция $f(x,y)+\frac{L}{2}\|y\|^2$ выпукла по y.

Лемма 1.3. *Пусть*

1) Y — выпуклый компакт, $f_i(x_0,y_0)\le 0$, $i\in I$, $y_0\in Y$;

2) градиенты $f'_{iy}(x,y)$, $i\in I$, непрерывны по совокупности переменных (x,y), и существует число $L_1>0$ такое, что при всех $i\in I$

$$\|f'_{iy}(x,y_1)-f'_{iy}(x,y_2)\|\le L_1\|y_1-y_2\|\quad\forall x\in V(x_0)\quad\forall y_1,y_2\in U(y_0);$$

3) найдется вектор $\overline{y}\in Y$ такой, что

$$\big(f'_{iy}(x_0,y_0),\overline{y}-y_0\big)<0,\quad i\in I(x_0,y_0),$$

где $I(x_0,y_0)=\big\{i\in I\mid f_i(x_0,y_0)=0\big\}$;

4) существует число $L_2 > 0$ *такое, что при всех* $i \in I$

$$\left|f_i(x_1, y) - f_i(x_2, y)\right| \le L_2\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in V(x_0) \quad \forall y \in U(y_0).$$

Тогда существует липшицево отображение $y(x)$, *определенное в некоторой окрестности* $\overline{V}(x_0)$ *точки* x_0 *такое, что* $y(x_0) = y_0$ *и при всех* $x \in \overline{V}(x_0)$ *выполнено*

$$f_i(x, y(x)) \le 0, \quad i \in I \quad \text{и} \quad y(x) \in Y \cap U(y_0). \tag{1.4}$$

Доказательство. Положим $\overline{p} = \overline{y} - y_0$. Согласно неравенству (1.1) для достаточно малого положительно $\alpha > 0$ имеем

$$f_i(x_0, y_0 + \alpha\overline{p}) + \alpha^2\frac{L_1}{2}\|\overline{p}\|^2 \le f_i(x_0, y_0) + \big(f'_{iy}(x_0, y_0), \alpha\overline{p}\big) + \alpha^2 L_1\|\overline{p}\|^2, \quad i \in I.$$

Отсюда и из предположений 1) и 3) следует, что существует число $\alpha_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$f_i(x_0, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 < 0, \quad i \in I.$$

Поэтому, так как функции f_i непрерывны по x, существует замкнутая окрестность $V_1(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 < 0 \quad \forall x \in V_1(x_0), \quad i \in I.$$

Значит, существует число $\beta > 0$ такое, что

$$f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 \le -\beta \quad \forall x \in V_1(x_0), \quad i \in I.$$

Отсюда для любых $i \in I$, $x \in V_1(x_0)$, $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned}
f_i\big(x, (1-\lambda)y_0 + \lambda(y_0 + \alpha_0\overline{p})\big) &\le (1-\lambda)f_i(x, y_0) + \lambda f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\lambda(1-\lambda)\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 \\
= (1-\lambda)f_i(x_0, y_0) + (1-\lambda)[f_i(x, y_0 - f_i(x_0, y_0)] &+ \lambda f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\lambda(1-\lambda)\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 \\
\le L_2\|x - x_0\| + \lambda f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) &+ \frac{L_1}{2}\lambda(1-\lambda)\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 \le L_2\|x - x_0\| - \beta\lambda.
\end{aligned}$$

Теперь выберем число λ так, что правая часть заключительного неравенства равняется нулю, т. е. положим

$$\lambda = \frac{L_2}{\beta}\|x - x_0\|. \tag{1.5}$$

Отсюда видно, что если разность $\|x - x_0\|$ достаточно мала, то λ, определяемое формулой (1.5), лежит в промежутке $[0, 1]$, так что приведенные выше выкладки корректны. Положим

$$y(x) = y_0 + \lambda\alpha_0\overline{p}.$$

Очевидно, что при $x = x_0$ имеем $\lambda = 0$ и, следовательно, $y(x_0) = y_0$.

Окончательно получаем, что $y(x_0) = y_0$, и существует окрестность $\overline{V}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех при всех $x \in \overline{V}(x_0)$ выполнено (1.4). □

Теперь приведем пример, показывающий, что условие 3) леммы 1.3 существенно, и если это условие не выполняется, то вывод леммы 1.3 может быть неверным.

П р и м е р 1.1. Пусть $x \in \mathbb{R}^1$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = (\bar{y}_1, 0)$, где $\bar{y}_1 \in [0, \frac{1}{\pi}]$, $Y = \big\{(y_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \in [0, \frac{1}{\pi}]\big\}$. Пусть функция f определена соотношением

$$f(x,y) \equiv f(x, y_1, y_2) = \begin{cases} x y_1^4 sin\frac{1}{y_1} - y_2, & \text{если } y_1 \neq 0, \\ -y_2 & \text{если } y_1 = 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что для этой функции выполнены предположения 1), 2) и 4) леммы 1.3. Проверим третье условие. Имеем $f'_{y_1}(0, y_1, 0) = 0$, $f'_{y_2}(0, y_1, 0) = -1$. Следовательно, для любого $y \in Y$ имеем равенство $(f'_y(0, \bar{y}_1, 0), y - y_0) = 0$, т. е. условие 3) не выполняется. Имеем также

$$a(x) \equiv \big\{y \in Y \mid f(x,y) \leq 0\big\} = \begin{cases} Y, & \text{если } x = 0, \\ Z, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где

$$Z = \Big\{(y_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \in \Big\{0, \frac{1}{\pi}\Big\} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2\pi k}\Big]\Big\}.$$

Следует отметить, что при $x > 0$ множество $a(x)$ не является проксимально гладким.

В случае, когда $(\bar{y}_1, 0) \notin a(x)$ ($x > 0$), легко заметить, что через соответствующую точку $(x_0, y_0) = (0, \bar{y}_1, 0) \in \mathrm{graf}(a)$ не проходят непрерывные селекции отображения a.

В дальнейшем положим

$$I(x,y) \equiv \big\{i \in I \mid f_i(x,y) = 0\big\}, \quad A(x) \equiv \big\{y \in a(x) \mid f_i(x,y) = 0, \quad i \in I(x,y)\big\}. \tag{1.6}$$

Лемма 1.4. *Пусть*

1) $X \subset \mathbb{R}^m$ — компакт, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт;

2) для любых $x \in X$ и $y \in A(x)$ существует вектор $z \in Y$ такой, что

$$\big(f'_{iy}(x,y), z - y\big) < 0, \quad i \in I(x,y).$$

Тогда существует непрерывное отображение $D : \mathrm{graf}(A) \to Y$ такое, что при любых $x \in X$ и $y \in A(x)$ выполнено

$$\big(f'_{iy}(x,y), D(x,y) - y\big) < 0, \quad i \in I(x,y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$u = (x,y) \in \mathrm{graf}(A), \quad \psi(u,z) = \max_{i \in I(x,y)} \big(f'_{iy}(x,y), z - y\big).$$

По предположению для любого $u \in \mathrm{graf}(A)$ существует вектор $z(u) \in Y$ такой, что $\psi(u, z(u)) < 0$. Так как функция ψ полунепрерывна сверху, то для любого $\delta > 0$ существует окрестность $B_{\eta(u)}(u)$ точки u такая, что

$$\psi(v, z(u)) \leq \psi(u, z(u)) + \delta \ \ \forall v \in B_{\eta(u)}(u).$$

Поскольку множество $\mathrm{graf}(A)$ компактно, оно может быть покрыто шарами $B_{\eta(u_j)}(u_j)$, $j \in J$, где J — конечное множество индексов. Пусть g_j ($j \in J$) — непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому разбиению. Определим функцию $D(u)$ по следующему правилу:

$$D(u) = \sum_{j \in J} g_j(u) z(u_j).$$

Так как

$$g_j(u) \geq 0, \quad \sum_{j \in J} g_j(u) = 1$$

и функция $\psi(u, z)$ выпукла по z, имеем

$$\psi(u, D(u)) \leq \sum_{j \in J(u)} g_j(u) \psi(u, z(u_j)),$$

где $J(u) = \{j \in J : g_j(u) > 0\}$.

Известно также, что если $g_j(u) > 0$, то $u \in B_{\eta(u_j)}(u_j)$ и, следовательно, для достаточно малых $\delta > 0$ верно неравенство

$$\psi(u, z(u_j)) \leq \psi(u_j, z(u_j)) + \delta < 0.$$

Значит,

$$\psi(u, D(u)) \leq \sum_{j \in J(u)} g_j(u) \psi(u, z(u_j)) < 0, \quad u \in \mathrm{graf}(A).$$

□

Теорема 1.1 (1-я теорема о липшицевой селекции). *Пусть*

1) *функции $f_i(x, y)$, $i \in I$, заданы на $X \times \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$, где $X \subset \mathbb{R}^1$ — отрезок числовой прямой и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $Y \subset \Omega$ — выпуклый компакт;*

2) *градиенты $f'_{iy}(x, y)$, $i \in I$, непрерывны по совокупности переменных $(x, y) \in X \times \Omega$, и существует число $L_1 > 0$ такое, что*

$$\|f'_{iy}(x, y_1) - f'_{iy}(x, y_2)\| \leq L_1 \|y_1 - y_2\| \ \ \forall x \in X \ \ \forall y_1, y_2 \in Y, \quad i \in I;$$

3) *существует число $L_2 > 0$ такое, что*

$$|f_i(x_1, y) - f_i(x_2, y)| \leq L_2 \|x_1 - x_2\| \ \ \forall x_1, x_2 \in X \ \ \forall y \in Y, \quad i \in I;$$

4) *для любых (x, y) $\big(y \in A(x)\big)$ существует вектор $z \in Y$ такой, что*

$$\big(f'_{iy}(x, y), z - y\big) < 0, \quad i \in I(x, y);$$

5) *$a(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in X$.*

Тогда через любую точку $(x_0, y_0) \in \mathrm{graf}(a)$ проходит липшицева селекция этого отображения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что многозначное отображение a является липшицевым на X.

Если $\operatorname{graf}(A) \neq \emptyset$, то согласно лемме 1.4 существует непрерывное отображение $D : \operatorname{graf}(A) \to Y$ такое, что

$$\psi(u, D(u) - y) < 0 \;\; \forall u = (x, y) \in \operatorname{graf}(A).$$

Отсюда существует число $\gamma > 0$ такое, что

$$\max_{u \in \operatorname{graf}(A)} \psi(u, D(u) - y) \leq -\gamma < 0.$$

Определим непрерывное продолжение $\tilde{D} : \operatorname{graf}(a) \to Y$ отображения D (согласно известной теореме Титце–Дугунжи такое непрерывное продолжение существует). Поскольку функция

$$\varphi(x, y) \equiv \max_{i \in I(x,y)} \big(f'_{iy}(x, y), \tilde{D}(x, y) - y\big)$$

полунепрерывна сверху, существует Δ-окрестность $(\operatorname{graf}(A))_\Delta$ множества $\operatorname{graf}(A)$ такая, что

$$\max_{i \in I(x,y)} \big(f'_{iy}(x, y), \tilde{D}(x, y) - y\big) \leq -\frac{\gamma}{2} \;\; \forall (x, y) \in (\operatorname{graf}(A))_\Delta \cap \operatorname{graf}(a).$$

Положим $F(x, y) \equiv \max_{i \in I} f_i(x, y)$. Теперь согласно неравенству (1.1) существуют числа $\alpha \in (0, 1)$ и $\gamma_1 > 0$ такие, что для всех $(x, y) \in (\operatorname{graf}(A))_\Delta \cap \operatorname{graf}(a)$

$$\begin{aligned} &F\big(x, y + \alpha(\tilde{D}(x, y) - y)\big) + \alpha^2 L_1 \|\tilde{D}(x, y) - y\|^2 \\ &\leq F(x, y) + \alpha\big[\max_{i \in I(x,y)} \big(f'_{iy}(x, y), \tilde{D}(x, y) - y\big) + \alpha^2 \frac{3L_1}{2} \|\tilde{D}(x, y) - y\|^2\big] \\ &\leq F(x, y) + \alpha\big[-\gamma + \alpha \frac{3L_1}{2} \|\tilde{D}(x, y) - y\|^2\big] \leq -\gamma_1 < 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $(x_1, y_1) \in (\operatorname{graf}(A))_{\Delta/2} \cap \operatorname{graf}(a)$. Так как выполнены предположения леммы 1.3, отображение a непрерывно в любой точке $x \in X$. А так как множества $a(x)$ — непустые компакты, отсюда следует, что многозначное отображение a равномерно непрерывно по Хаусдорфу на X. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $x_2 \in X$ таком, что $\|x_1 - x_2\| < \delta$, найдется $y_2 \in a(x_2)$ такое, что $\|y_1 - y_2\| < \epsilon$. Учитывая это, мы можем считать, что $(x_2, y_2) \in \big(\operatorname{graf}(a)\big)_\Delta$.

Теперь, учитывая неравенство (1.7) и условие 3) теоремы, для $\lambda \in [0, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} &F(x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda\big(y_2 + \alpha(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2)\big) \leq (1-\lambda)F(x_2, y_1) \\ &+\lambda F\big(x_2, y_2 + \alpha(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2)\big) + \alpha^2 L_1 \lambda(1-\lambda)\|\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\|^2 + L_1\lambda(1-\lambda)\|y_2 - y_1\|^2 \\ &= (1-\lambda)F(x_1, y_1) + (1-\lambda)[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] + \lambda F\big(x_2, y_2 + \alpha\big(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\big)\big) \\ &+\alpha^2 L_1\lambda(1-\lambda)\|\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\|^2 + L_1\lambda(1-\lambda)\|y_2 - y_1\|^2 \leq L_2\|x_2 - x_1\| \\ &+\lambda F\big(x_2, y_2 + \alpha\big(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\big)\big) + \alpha^2 L_1\lambda(1-\lambda)\|\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\|^2 + L_1\lambda(1-\lambda)\|y_2 - y_1\|^2 \\ &\leq L_2\|x_1 - x_2\| - \lambda\gamma_1 + L_1\lambda(1-\lambda)\|y_2 - y_1\|^2 \leq L_2\|x_1 - x_2\| - \lambda(\gamma_1 - L_1\epsilon^2). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Выберем число $\epsilon > 0$ так, что $\gamma_1 > L_1\epsilon^2$. Затем выберем $\lambda > 0$ так, чтобы правая часть неравенства (1.8) стала равной нулю. Для значения λ получим

$$\lambda = \frac{L_2}{\gamma_2}\|x_1 - x_2\|, \quad \text{где} \quad \gamma_2 = \gamma_1 - L_1\epsilon^2. \tag{1.9}$$

Рассмотрим теперь второй случай, т. е. пусть $(x_1, y_1) \in \mathrm{graf}(a)$ и $(x_1, y_1) \notin (\mathrm{graf}(A))_{\Delta/2}$. Так как для некоторого положительного числа $\tau > 0$ имеет место неравенство

$$F(x, y) \le -\tau \quad \forall (x, y) \in \mathrm{graf}(a), \quad (x, y) \notin (\mathrm{graf}(A))_{\Delta/2},$$

то $F(x_1, y_1) < -\tau$. Проводя для этого случая те же рассуждения, что при выводе неравенства (1.8), получаем

$$\begin{aligned} &F(x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda\big(y_2 + \alpha\big(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\big)\big) \\ &\le L_2\|x_2 - x_1\| + \lambda F\big(x_2, y_2 + \alpha(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2)\big) + \alpha^2 L_1 \lambda(1-\lambda)\|\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\|^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + L_1\lambda(1-\lambda)\|y_2 - y_1\|^2 + (1-\lambda)F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Поскольку число λ определяется по формуле (1.9) и $F(x_1, y_1) < -\tau < 0$, для точки x_2, достаточно близкой к x_1, правая часть полученного неравенства будет отрицательной. Положим

$$\tilde{y_2} = y_1 + \frac{L_2}{\gamma_2}\|x_1 - x_2\|\big(y_2 + \alpha\big(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\big) - y_1\big). \tag{1.10}$$

Таким образом, любой точке $y_1 \in a(x_1)$ можно поставить в соответствие точку $\tilde{y_2} \in a(x_2)$ по формуле (1.10). Для этих точек выполнено

$$\|y_1 - \tilde{y_2}\| \le \frac{2L_2}{\gamma_2}\mathrm{diam}(Y)\|x_1 - x_2\| = L_3\|x_1 - x_2\|, \text{ где } L_3 = \frac{2L_2}{\gamma_2}\mathrm{diam}(Y).$$

Отметим, что если величина $\|x_1 - x_2\|$ достаточно мала, то $\lambda \in [0, 1]$, и поэтому приведенные выше выкладки корректны.

Итак, отображение a локально липшицево на достаточно малых окрестностях всех точек из X с одной и той же константой. Следовательно, оно липшицево на всем компакте X. Поэтому согласно теореме Д.18 из [14, с. 329] через любую точку $y_0 \in a(x_0)$ проходит липшицева селекция многозначного отображения a. □

Следующий пример показывает существенность условия 4) теоремы 1.1.

Пример 1.2. Пусть $X = [-1, 1]$; $Y \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат с вершинами $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$;

$$f(x, y_1, y_2) \equiv x_1 y_2 y_2, \quad x \in X, \quad (y_1, y_2) \in Y;$$

$$a(x) \equiv \big\{y \in Y \mid f(x, y_1, y_2) \le 0\big\}.$$

Очевидно, $a(0) = Y$. А если $x > 0$, то множество $a(x)$ является пересечением второй и четвертой четвертей плоскости с квадратом Y. При $x < 0$ множества $a(x)$ есть пересечение первой и третьей четвертей с квадратом Y. Так как $f'_{y_1}(0, y_1, y_2) = f'_{y_2}(0, y_1, y_2) = 0$, то условие 4) теоремы 1.1 не выполняется в точках $(0, y_1, y_2) \in \mathrm{graf}(a)$.

Заключая рассмотрение этого примера, заметим, что

1) отображение a не является непрерывным в нуле;

2) множества $a(x)$ при $x \ne 0$ не являются проксимально гладкими;

3) через любую точку $(y_1^0, y_2^0) \in a(0)$ (точка (y_1^0, y_2^0) не принадлежит координатным осям) не проходят непрерывные селекции отображения a.

Теорема 1.2 (2-я теорема о липшицевой селекции). *Пусть*

1) X *— отрезок числовой прямой,* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклый компакт;*

2) *для любого фиксированного* $x \in X$ *функция* $F(x, y)$ *является проксимально гладкой по* y *с константой* L_1 *на* Y*;*

3) *для любого* $x \in X$ *существует* $z \in Y$ *такой, что*

$$F(x,z) + \frac{L_1}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2 < 0;$$

4) *существует число* $L_2 > 0$ *такое, что*

$$\|F(x_1,y) - F(x_2,y)\| \le L_2\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall y \in Y.$$

Тогда через любую точку $(x_0, y_0) \in \mathrm{graf}(a) = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid F(x,y) \le 0\big\}$ *проходит липшицева селекция отображения* a.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала отметим, что существует непрерывное отображение $D : X \to Y$ такое, что

$$F(x, D(x)) < -\frac{L_1}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2 \quad \forall x \in X.$$

Это неравенство можно получить, повторив доказательство леммы 1.4 с использованием неравенства (1.3).

Далее, если $y_1 \in a(x_1)$, т. е. $F(x_1, y_1) \le 0$, то при $\lambda \in [0,1]$ получаем

$$\begin{aligned} F\big(x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda D(x_2)\big) &\le (1-\lambda)F(x_2,y_1) + \lambda F(x_2, D(x_2)) + \lambda(1-\lambda)\frac{L_1}{2}\|D(x_2) - y_1\|^2 \\ &= (1-\lambda)F(x_1,y_1) + (1-\lambda)[F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)] \\ &+\lambda\Big[F(x_2, D(x_2)) + (1-\lambda)\frac{L_1}{2}\|D(x_2) - y_1\|^2\Big] \le L_2\|x_1 - x_2\| + \lambda\gamma, \end{aligned}$$

где $\gamma = \max_{x\in X} F(x, D(x)) + \frac{L_1}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2 < 0$. Положим

$$\lambda = -\frac{L_2}{\gamma}\|x_1 - x_2\|$$

и выберем x_2 так, чтобы норма $\|x_1 - x_2\|$ была настолько малой, что $\lambda < 1$. Таким образом, любой точке $y_1 \in a(x_1)$ можно поставить в соответствие точку $y_2 \in a(x_2)$ по следующей формуле

$$y_2 = y_1 + \frac{L_2}{\gamma}\|x_1 - x_2\|\big(D(x_2) - y_1\big).$$

Отсюда, для некоторого L_3 получим

$$\|y_2 - y_1\| \le \frac{L_2}{-\gamma}\|D(x_2) - y_1\|\|x_1 - x_2\| \le L_3\|x_1 - x_2\|.$$

Таким образом, отображение a локально липшицево на достаточно малых окрестностях всех точек из X с одной и той же константой. Следовательно, это отображение липшицево на всем компакте X. Согласно теореме Д.18 из [14, с. 329] через любую точку $y_0 \in a(x_0)$ проходит липшицева селекция отображения a. □

Следствие 1.1. *Пусть*

1) X — отрезок числовой прямой, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт;

2) при любом фиксированном $x \in X$ функция $g(x, y)$ непрерывна и выпукла по y на выпуклом компакте Y;

3) существует число L_2 такое, что

$$\|g(x_1, y) - g(x_2, y)\| \leq L_2 \|x_1 - x_2\| \quad \forall y \in Y \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

При любом $\beta > 0$ определим функцию

$$f(x, y) = g(x, y) - \frac{\beta}{2}\|y\|^2$$

и для произвольного $\epsilon > 0$ зададим множество точек ϵ-минимума функции $f(x, \cdot)$ на Y формулой

$$a_\epsilon(x) = \bigl\{y \in Y \mid f(x, y) \leq \min_{y \in Y} f(x, y) + \epsilon\bigr\}.$$

Тогда для достаточно малых $\beta > 0$ через любую точку графика отображения a_ϵ проходит липшицева селекция этого отображения.

Доказательство. Для любого фиксированного $x \in X$ функция

$$Q(x, y) \equiv f(x, y) - \min_{y \in Y} f(x, y) - \epsilon$$

слабо выпукла с константой β. Очевидно, для любого $x \in X$ существует точка $z \in Y$ такая, что $Q(x, z) \leq -\epsilon$. Поэтому для достаточно малых $\beta > 0$ имеем

$$Q(x, z) < -\frac{\beta}{2}(\operatorname{diam}(Y))^2.$$

Функция $V(x) \equiv \min_{y \in Y} f(x, y)$ липшицева и, следовательно, относительно функции Q выполнены предположения вышеуказанной теоремы Д.18 из [14, с. 329]. Таким образом, утверждение данного следствия непосредственно вытекает из этой теоремы. □

2. Непрерывные селекции многозначного отображения a

Имеет место следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены предположения 1)–3) леммы 1.3. Тогда многозначное отображение a непрерывно в точке x_0.*

Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 1.3.

Теорема 2.1 (1-я теорема о непрерывной селекции)**.** *Пусть*

1) *$X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компакты;*

2) *функции $f_i(x, y)$, $i \in I$, заданы на $X \times \mathbb{R}^n$, и существует компакт $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такой, что при всех $i \in I$ для множества $a_i(x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x, y) \leq 0\}$ выполнено* $\operatorname{bdry}(a_i(x)) \subset \Omega \quad \forall x \in X$;

3) *градиенты* $f'_{iy}(x,y)$, $i \in I$ *непрерывны по совокупности переменных на* $X \times \mathbb{R}^n$ *и удовлетворяют условию Липшица по* y *на множестве* Y *равномерно относительно* $x \in X$, *т. е. существует число* $L_1 > 0$ *такое, что*

$$\|f'_{iy}(x,y_1) - f'_{iy}(x,y_2)\| \leq L_1\|y_1 - y_2\| \quad \forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y, \quad i \in I,$$

причем $f'_{iy}(x,y) \neq 0$, $x \in X$, $y \in \operatorname{bdry}(a_i(x))$;

4) *для любых* $(x,y) \in \operatorname{graf}(A)$, *где отображение* A *определено соотношениями* (1.6), *существует* $z \in Y$ *такой, что*

$$\big(f'_{iy}(x,y), z - y\big) < 0, \quad i \in I(x,y).$$

Тогда при всех $x \in X$ *множества* $a(x)$ *слабо выпуклы с одной и той же константой и через любую точку* $(x_0, y_0) \in \operatorname{graf}(a)$ *проходит непрерывная селекция многозначного отображения* a.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что множества $a_i(x)$, $x \in X$, $i \in I$, являются слабо выпуклыми с одной и той же константой.

Согласно условию 2) доказываемой теоремы множества $a_i(x)$ являются телесными, т. е. $\operatorname{cl}\big(\operatorname{int}(a_i(x)\big) = \operatorname{cl}\big(a_i(x)\big)$. Для доказательства слабой выпуклости множества $a(x)$ достаточно доказать, что существует $L > 0$ такое, что для любых векторов $y_1, y_2 \in \operatorname{bdry}\big(a_i(x)\big)$, $p_1 \in N_{(a_i(x))}(y_1)$, $p_2 \in N_{(a_i(x))}(y_2)$ таких, что $\|p_1\| = \|p_2\| = 1$ выполнено неравенство

$$\|p_1 - p_2\| \leq L\|y_1 - y_2\|. \tag{2.1}$$

(см. [4, теорема 1.10.2, с. 85]). Здесь $N_{(a_i(x))}(y_j)$ ($j = 1,2$) — нормальный конус Булигана к множеству $a_i(x)$ в точке y_j. В нашем случае

$$p_j = \frac{f'_{iy}(x,y_j)}{\|f'_{iy}(x,y_j)\|}, \quad j = 1,2.$$

Проверим выполнение условия (2.1). Имеем

$$\begin{aligned}\|p_1 - p_2\| = \|\frac{f'_{iy}(x,y_1)}{\|f'_{iy}(x,y_1)} - \frac{f'_{iy}(x,y_2)}{\|f'_{iy}(x,y_2)\|}\| = \|\frac{\|f'_{iy}(x,y_2)\|f'_{iy}(x,y_1) - \|f'_{iy}(x,y_1)\|f'_{iy}(x,y_2)}{\|f'_{iy}(x,y_1)\|\|f'_{iy}(x,y_2)\|}\| \\ \leq \frac{1}{m^2}(\|f'_{iy}(x,y_2)\|\|f'_{iy}(x,y_1) - f'_{iy}(x,y_2)\| + \|f'_{iy}(x,y_1)\|\|f'_{iy}(x,y_1) - f'_{iy}(x,y_2)\| \\ \leq \frac{C_1 L_1}{m^2}\|y_1 - y_2\|,\end{aligned}$$

где

$$C_1 = \max_{(x,y)\in X\times\Omega,\, i\in I} \|f'_{iy}(x,y)\|, \quad m = \min_{(x,y)\in X\times\Omega,\, i\in I} \|f'_{iy}(x,y)\| > 0.$$

Следовательно, коэффициент L в условии (2.1) можно принять равным $L = C_1 L_1/m^2$.

Для того, чтобы проверить, что множества $a(x)$, $x \in X$, являются проксимально гладкими с некоторой константой $R > 0$, достаточно показать (см. [15, теорема 2.1]), что для любых $y_1, y_2 \in a(x)$ и для любых $y_1^* \in N_{a(x)}(y_1)$, $y_2^* \in N_{a(x)}(y_2)$, имеет место неравенство

$$\big(y_1^* - y_2^*, y_1 - y_2\big) \geq -\frac{1}{2}\Big(\frac{\|y_1^*\|}{R} + \frac{\|y_2^*\|}{R}\Big)\|y_1 - y_2\|^2. \tag{2.2}$$

В условиях теоремы любой вектор $y^* \in N_{a(x)}(y)$ представим в виде

$$y^* = \sum_{i \in I} \lambda_i f'_{iy}(x,y) + z^*, \quad \lambda_i \geq 0, \quad z^* \in N_Y(y),$$

причем $\lambda_i = 0$, если $i \notin I(x,y)$. Отсюда, если $p(x,y) \in N_{a(x)}(y)$, $\|p(x,y)\| = 1$, то существуют числа $\lambda_i(x,y) \geq 0$, $i \in I$, и вектор $y^*(x,y) \in N_Y(y)$ такие, что

$$p(x,y) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x,y) f'_{iy}(x,y) + y^*(x,y). \tag{2.3}$$

Покажем, что существует число $M > 0$ такое, что

$$h(x,y) \equiv \sum_{i \in I} \lambda_i(x,y) + \|y^*(x,y)\| \leq M \quad \forall (x,y) \in \operatorname{graf}(a).$$

Предположим противное, т. е. существует последовательность $\{(x_k,y_k)\} \subset \operatorname{graf}(a)$ такая, что $h(x_k,y_k) \to +\infty$. Определим

$$\alpha_i(x_k,y_k) = \frac{\lambda_i(x_k,y_k)}{h(x_k,y_k)}, \quad i \in I, \text{ и } e^*(x_k,y_k) = \frac{y_k^*}{\|y_k^*\|}, \quad \big(y_k^* = y^*(x_k,y_k)\big).$$

Из (2.3) получаем

$$\frac{p(x_k,y_k)}{h(x_k,y_k)} = \sum_{i \in I} \alpha_i(x_k,y_k) f'_{iy}(x_k,y_k) + \frac{\|y_k^*\|}{h(x_k,y_k)} e^*(x_k,y_k). \tag{2.4}$$

Так как $\operatorname{graf}(a)$ — компакт и $\sum_{i \in I} \alpha_i(x_k,y_k) + \frac{\|y_k^*\|}{h(x_k,y_k)} = 1$, то можно утверждать, что

$$(x_k,y_k) \to (\overline{x},\overline{y}), \quad \alpha_i(x_k,y_k) \to \overline{\alpha_i} \geq 0, \quad \frac{\|y_k^*\|}{h(x_k,y_k)} \to \beta \geq 0, \quad e^*(x_k,y_k) \to \overline{e}, \quad \sum_{i \in I} \overline{\alpha_i} + \beta = 1.$$

Далее, для достаточно больших k выполнено $I(x_k,y_k) \subset I(\overline{x},\overline{y})$, и поэтому $\overline{\alpha_i} = 0$, если $i \notin I(\overline{x},\overline{y})$. Отсюда, переходя к пределу в соотношении (2.4), получаем

$$\sum_{i \in I(\overline{x},\overline{y})} \overline{\alpha_i} f'_{iy}(\overline{x},\overline{y}) + \beta \overline{e} = 0 \quad \big(\|\overline{e}\| = 1\big),$$

что противоречит предположению 4) теоремы.

Теперь покажем, что множества $a(x)$ являются слабо выпуклыми. Поскольку множества $a_i(x)$, $i \in I$, и Y слабо выпуклы с константой $\frac{1}{L}$, то из (2.2) следует, что для любых $y_1, y_2 \in a_i(x)$, $i \in I$ выполнено

$$\begin{aligned}
&\big(\lambda_i(x,y_1) f'_{iy}(x,y_1) - \lambda_i(x,y_2) f'_{iy}(x,y_2), y_1 - y_2\big) \\
&\geq -\frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_i(x,y_1)\|f'_{iy}(x,y_1)\|}{L} + \frac{\lambda_i(x,y_2)\|f'_{iy}(x,y_2)\|}{L}\Big)\|y_1 - y_2\|^2, \\
&\big(y^*(x,y_1) - y^*(x,y_2), y_1 - y_2\big) \geq -\frac{1}{2}\Big(\frac{\|y^*(x,y_1)\|}{L} + \frac{\|y^*(x,y_2)\|}{L}\Big).
\end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\big(p(x,y_1)-p(x,y_2),y_1-y_2\big) \geq -\frac{1}{2L}\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i(x,y_1)\|f'_{iy}(x,y_1)\|+\|y^*(x,y_1)\|$$

$$+\sum_{i\in I}\lambda_i(x,y_2)\|f'_{iy}(x,y_2)\|+\|y^*(x,y_2)\|\Big)\|y_1-y_2\|^2 \geq -\frac{1}{L}M\tilde{M}\|y_1-y_2\|^2,$$

где

$$\tilde{M}=\max\Big\{\max_{(x,y)\in \operatorname{graf}(a),\ i\in I}\|f'_{iy}(x,y)\|,1\Big\}.$$

Согласно [4, теорема 1.9.2], отсюда следует, что множества $a(x)$ являются слабо выпуклыми с константой $R=L/(M\tilde{M})$.

Далее, согласно лемме 2.1 многозначное отображение a с компактными значениями непрерывно в любой точке $x\in X$. А так как множество X компактно, оно равномерно непрерывно по Хаусдорфу на X. Так что выполнены все предположения теоремы 0.1, согласно которой через любую точку $(x_0,y_0)\in \operatorname{graf}(a)$ проходит непрерывная селекция отображения a. □

Приведем пример многозначного отображения, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1.

Пример 2.1. Пусть $X=[0,1/4]$, $Y\subset\mathbb{R}^2$ — квадрат с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. Рассмотрим функции

$$f_1(x,y_1,y_2)\equiv-(y_1-x)^2-y_2^2+1,\quad f_2(x,y_1,y_2)\equiv-(y_1-x-1)^2-y_2^2+1,\quad x\in X,\quad (y_1,y_2)\in Y.$$

Нетрудно проверить, что для этих функций многозначное отображение

$$a(x)\equiv\big\{y=(y_1,y_2)\in Y \mid f_1(x,y_1,y_2)\leq 0,\ f_2(x,y_1,y_2)\leq 0\big\}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1.

Теорема 2.2 (2-я теорема о непрерывной селекции). *Пусть*

1) $X\subset\mathbb{R}^m$ *— компакт,* $Y\subset\mathbb{R}^n$ *— выпуклый компакт,* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *— открытое множество;*

2) *функции* $f_i(x,y)$, $i\in I$, *заданы на* $X\times\Omega\subset\mathbb{R}^{n+m}$;

3) *градиенты* $f'_{iy}(x,y)$, $i\in I$, *непрерывны по совокупности переменных* $(x,y)\in X\times\Omega$, *и существует число* $L_1>0$ *такое, что*

$$\|f'_{iy}(x,y_1)-f'_{iy}(x,y_2)\|\leq L_1\|y_1-y_2\|\quad\forall x\in X,\quad\forall y_1,y_2\in Y,\quad i\in I;$$

4) *для любого* $x\in X$ *существует* $z\in Y$ *такой, что*

$$f_i(x,z)<-\frac{L_1}{2}(\operatorname{diam}(Y))^2,\quad i\in I. \tag{2.5}$$

Тогда через любую точку $(x_0,y_0)\in\operatorname{graf}(a)$ *проходит непрерывная селекция многозначного отображения* a.

Доказательство. Из (2.5), учитывая неравенство (1.1), получим, что для любых $x \in X$, $y \in Y$ найдется вектор $z \in Y$ такой, что

$$f_i(x,y) + \big(f'_{iy}(x,y), z - y\big) < 0, \quad i \in I. \tag{2.6}$$

Теперь, применяя рассуждения, аналогичные используемым в доказательстве леммы 1.4, установим, что существует непрерывное отображение $G : X \times Y \to Y$ такое, что

$$f_i(x,y) + \big(f'_{iy}(x,y), G(x,y) - y\big) < 0, \quad i \in I.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\max_{x \in X,\, y \in Y} \big\{f_i(x,y) + \big(f'_{iy}(x,y), G(x,y) - y\big)\big\} \equiv -\gamma < 0, \quad i \in I. \tag{2.7}$$

Свяжем с каждой точкой $(x,y) \in X \times Y$ следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min_p \Big\{\frac{1}{2}\|p\|^2 \mid \big(f'_{iy}(x,y), p\big) + f_i(x,y) \le 0, \;\; p \in (Y - y), \;\; i \in I\Big\}. \tag{2.8}$$

Положим

$$A(x,y) = \big\{p \mid \big(f'_{iy}(x,y), p\big) + f_i(x,y) \le 0, \; i \in I\big\}, \quad B(y) = Y - y, \quad C(x,y) = A(x,y) \cap B(y).$$

Во-первых, заметим, что задача (2.8) имеет единственное решение, поскольку множество $C(x,y)$ решений ограничений этой задачи является непустым выпуклым и замкнутым. Обозначим это решение через $p(x,y)$. Во-вторых, многозначные отображения A и B, как уже указано выше, имеют выпуклые замкнутые значения и являются полунепрерывными снизу, и кроме того, согласно условию (2.6),

$$\mathrm{int} A(x,y) \cap B(y) \ne \emptyset.$$

Отсюда, в силу теоремы 1.3.9 из [11, с. 46] (о пересечении двух полунепрерывных снизу многозначных отображений) отображение C также будет полунепрерывным снизу. Из этих двух отмеченных фактов немедленно следует, что однозначное отображение $p(x,y)$ непрерывно по совокупности переменных (x,y).

Пусть $u_i(x,y)$, $i \in I$, множители Лагранжа задачи (2.8). Покажем, что существует число $N > 0$ такое, что

$$\sum_{i \in I} u_i(x,y) \le N \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y. \tag{2.9}$$

Действительно, согласно теории необходимых условий экстремума в задаче (2.8) должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\|p(x,y)\|^2 \le \frac{1}{2}\|p\|^2 + \sum_{i \in I} u_i(x,y)\big[\big(f'_{iy}(x,y), p\big) + f_i(x,y)\big], \quad y + p \in Y. \tag{2.10}$$

Отсюда и из (2.7) для $p = G(x,y) - y$ получаем

$$\sum_{i \in I} u_i(x,y) \le \frac{1}{2\gamma}\|p\|^2 \le \frac{1}{2\gamma}(\mathrm{diam}(Y))^2.$$

В неравенство (2.10) подставим $p=0$ и, учитывая неравенство (2.9), получим

$$\|p(x,y)\|^2 \le 2NF(x,y), \tag{2.11}$$

где

$$F(x,y)=\max_{i\in I}\bigl\{0, f_i(x,y)\bigr\}.$$

Пусть $\epsilon\in(0,1)$. Определим функциональную последовательность $\{y_k(x)\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$y_{k+1}(x)=y_k(x)+\overline{\alpha}p_k(x), \quad y_0(x)\equiv y_0,$$

где

$$p_k(x)\equiv p(x,y_k(x)), \quad \overline{\alpha}=\min\Bigl\{1,\frac{(1-\epsilon)}{2L_1N}\Bigr\}.$$

Нетрудно заметить, что $y_k(x)\in Y$ при всех k. Принимая во внимание неравенство (1.1) и тот факт, что $p_k(x)$ удовлетворяет ограничениям задачи (2.8), для $\alpha\in[0,1]$ получаем

$$f_i\bigl(x,y_k(x)+\alpha p_k(x)\bigr)\le(1-\alpha)f_i\bigl(x,y_k(x)\bigr)+\alpha^2L_1\|p_k(x)\|^2.$$

Отсюда и из (2.6) следует, что

$$F\bigl(x,y_k(x)+\alpha p_k(x)\bigr)\le(1-\alpha)F\bigl(x,y_k(x)\bigr)+\alpha^2\frac{L_1}{2}NF\bigl(x,y_k(x)\bigr)=[1-\alpha+2\alpha^2L_1N]F\bigl(x,y_k(x)\bigr).$$

Поэтому при $\alpha=\overline{\alpha}$ имеет место неравенство

$$F\bigl(x,y_{k+1}(x)\bigr)\le(1-\overline{\alpha}\epsilon)F\bigl(x,y_k(x)\bigr).$$

Следовательно,

$$F(x,y_k(x))\le(1-\overline{\alpha}\epsilon)^kF(x,y_0)\le(1-\overline{\alpha}\epsilon)^kC, \tag{2.12}$$

где $C=\max_{x\in X}F(x,y_0)$. Отсюда и из (2.11) получаем неравенство

$$\|p_k(x)\|^2\le NC(1-\overline{\alpha}\epsilon)^k \quad \forall x\in X.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}p_k(x)$ равномерно сходится. А так как

$$y_k(x)=y_0+\overline{\alpha}\bigl(p_0(x)+p_1(x)+\ldots+p_{k-1}(x)\bigr) \quad (k\ge 2),$$

то последовательность $\{y_k(x)\}$ также равномерно сходится к некоторой функции $y(x)$. Заметим, что все члены $y_k(x)$ этой последовательности непрерывны и $y_k(x_0)=y_0$. Значит, отображение $y(x)$ также непрерывно и $y(x_0)=y_0$.

Таким образом, из (2.12) следует, что $F(x,y(x))=0$, т. е.

$$f_i(x,y(x))\le 0 \ \text{и}\ y(x)\in Y \quad \forall x\in X, \quad i\in I,$$

и отображение $y(x)$ является непрерывной селекцией отображения a. □

Следствие 2.1. *Пусть функции $g_i(x,y)$, $i \in I$, являются выпуклыми по y и удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы 2.2. Допустим также, что для любого $x \in X$, существует $z \in Y$ такой, что*

$$g_i(x,z) < 0, \quad i \in I. \tag{2.13}$$

Пусть

$$f_i(x,y) = g_i(x,y) - \frac{\beta}{2}\|y\|^2, \quad a_\beta(x) = \bigl\{y \in Y \mid f_i(x,y) \le 0,\ i \in I\bigr\}.$$

Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что при $\beta \in [0,\delta)$ многозначное отображение $a_\beta(x)$ имеет непрерывный селектор, проходящий через любою точку его графика.

Доказательство. Как отмечено выше, функции $f_i(x,\cdot)$, $i \in I$, слабо выпуклы с константой β на выпуклом множестве Y. Это означает, что для любых $y_1, y_2 \in Y$, $\lambda \in [0,1]$ выполнено

$$f_i\bigl(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\bigr) \le \lambda f_i(x,y_1) + (1-\lambda)f_i(x,y_2) + \lambda(1-\lambda)\frac{\beta}{2}\|y_1 - y_2\|^2.$$

Преобразуя эту формулу, а затем пользуясь дифференцируемостью f_i по y в точке y_2, получаем

$$\begin{aligned} f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2) + \frac{\beta}{2}\lambda(1-\lambda)\|y_1 - y_2\|^2 &\ge \frac{f_i(x, y_2 + \lambda(y_1 - y_2) - f_i(x,y_2)}{\lambda} \\ &= (f'_{iy}(x,y_2), y_1 - y_2) + \frac{o(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получаем

$$f_i(x,y_2) + \bigl(f'_{iy}(x,y_2), y_1 - y_2\bigr) \le f_i(x,y_1) + \frac{\beta}{2}\|y_1 - y_2\|^2. \tag{2.14}$$

Из (2.13) следует, что существует отображение $D_1 : X \times Y \to Y$ и число $\overline{\gamma} > 0$ такие, что $g_i(x, D_1(x,y)) \le -\overline{\gamma}$, $i \in I$ (см. доказательство леммы 1.4). Отсюда

$$f_i(x, D_1(x,y)) + \frac{\beta}{2}(\operatorname{diam}(Y))^2 = g_i(x, D_1(x,y)) - \frac{\beta}{2}\|D_1(x,y)\|^2 + \frac{\beta}{2}(\operatorname{diam}(Y))^2. \tag{2.15}$$

Так как $g_i(x, D_1(x,y)) \le -\overline{\gamma}$, то выберем число β настолько малым, что правая часть неравенства (2.15) будет меньше нуля. Это означает, что для таких β выполняется условие (2.5) теоремы 2.2. Теперь, повторяя доказательство теоремы 2.2 (с использованием неравенства (2.14)) получаем, что через любую точку $(x_0, y_0) \in \operatorname{graf}(a_\beta)$ проходит непрерывная селекция отображения a. □

Следствие 2.2. *Пусть*

1) *$X \subset \mathbb{R}^m$ — компакт, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт;*

2) *функция $g(x,y)$ непрерывна по совокупности переменных (x,y) и выпукла по y на множестве Y;*

3) градиент $g'_y(x,y)$ *непрерывен по совокупности переменных, и существует число* $L>0$ *такое, что*

$$\|g'_y(x,y_1)-g'_y(x,y_2)\|\le L\|y_1-y_2\|\quad \forall x\in X\quad \forall y_1,y_2\in Y.$$

Для любых $\epsilon>0,\ \ \beta>0$ *положим*

$$f(x,y)=g(x,y)-\frac{\beta}{2}\|y\|^2;\quad a_\epsilon(x)=\bigl\{y\in Y\mid f(x,y)\le\min_{y\in Y}f(x,y)+\epsilon\bigr\}.$$

Тогда для достаточно малых $\beta>0$ *через любую точку графика отображения* a_ϵ *проходит непрерывная селекция этого отображения.*

В [16] подробно рассмотрен вопрос существования непрерывного селектора отображения a_ϵ, когда функция $f(x,y)$ выпукла по y.

Приведем пример многозначного отображения, удовлетворяющего условиям теоремы 2.2.

П р и м е р 2.2. Пусть $X\equiv[0,\frac{3\pi}{2}-1.7]\cup[2\pi,\frac{7\pi}{2}-1.7]$, $Y\subset\mathbb{R}^2$ — прямоугольник с вершинами $(\frac{3\pi}{2}-1.7,0)$, $(\frac{3\pi}{2},0)$, $(\frac{3\pi}{2}-1.7,1)$, $(\frac{3\pi}{2},1)$. Рассмотрим функцию

$$f(x,y)\equiv sin(y_1+x)-y_2,\quad x\in X,\quad y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Очевидно, что градиент $f'_y=\bigl(cos(x+y_1),-1\bigr)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L=1$. Проверим условие 4) теоремы 2.2. Имеем $(\mathrm{diam}(Y))^2=1+(1.7)^2=3.89$. Для любого $x\in X$ выберем точку $z=(z_1,z_2)\in Y$ следующим образом

$$z_1=\frac{3\pi}{2}-x,\quad z_2=1.$$

Очевидно, что $f(x,z)=-2$. Итак,

$$-f(x,z)=2>\frac{L}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2=1.945,$$

т. е. выполнено условие 4) теоремы 2.2.

Заметим, что в этом примере множество X не выпукло, множества $a(x)$ являются проксимально гладкими.

Теперь приведем пример, иллюстрирующий существенность условия (2.5).

П р и м е р 2.3. Пусть $f(x,y)=1+cos(x+y)$. Рассмотрим множество

$$a_\epsilon(x)=\bigl\{y\in Y\mid f(x,y)\le\min_{y\in Y}f(x,y)+\epsilon\bigr\},\quad \epsilon\in(0,1),$$

ϵ-оптимальных точек функции $f(x,\cdot)$ на множестве $Y=[0,2\pi]$.

Пусть $X=[0,\arccos(\epsilon-1)]$. Очевидно, что $\min_{y\in Y}f(x,y)=0$ при любом $x\in X$. Поэтому

$$a_\epsilon(x)=\bigl\{y\in Y\mid\ \cos(x+y)\le\epsilon-1\bigr\}.$$

Следовательно,

$$a_\epsilon(x)=\begin{cases}\bigl[\arccos(\epsilon-1)-x,\,2\pi-\arccos(\epsilon-1)-x\bigr], & \text{если}\quad x\in[0,\arccos(\epsilon-1))\\ \bigl[0,\,2\pi-2arccos(\epsilon-1)\bigr]\cup\{2\pi\}, & \text{если}\quad x=\operatorname{arcccos}(\epsilon-1).\end{cases}$$

Очевидно, что рассматриваемое отображение a_ϵ не имеет непрерывного селектора, проходящего через точку $(arccos(\epsilon-1),2\pi)$.

Так как для любого $x\in X$ функция $cos(x+y)$ слабо выпукла с константой $L=1$ и $\mathrm{diam}(Y)=2\pi$, условие (2.5) явно не имеет места.

Автор благодарен Максиму Викторовичу Балашову за полезные дискуссии о слабо выпуклых множествах.

References

[1] R. T. Rockafellar, J. B. Wets, *Variation Analysis*, Springer, New York, 2009.

[2] E. Michael, “Continous Selection 1”, *Ann. Math.*, 1956, № 63, 361–381.

[3] М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, “Слабо выпуклые и аппксимально гладкие множества в банаховых пространствах”, *Изв. РАН, Матем.*, **73**:3 (2009), 23–66. [M. V. Balashov, G. E. Ivanov, “Weakly convex and proksimally smooth sets in Banach space”, *Izwestiya: Mathematics*, **73**:3 (2009), 23–66 (in Russian)].

[4] Г. Е. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения*, Физматлит, М., 2006. [G. E. Ivanov, *Weakly convex functions and sets: theory and applications*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].

[5] F. H. Clarke, R. J. Stern, P. R. Wolenski, “Proximal smoothness and lowee-C^2 property”, *Convex Anal.*, **2**:1 (1085), 231–259.

[6] В. В. Остапенко, “Об одном условии почти выпуклости”, *Укр. матем. журнал*, **35**:2 (1983), 163–172. [V. V. Ostapenko, “On one condition of almost convexity”, *Ukrainian Math. Journal*, **35**:2 (1983), 163–172 (in Russian)].

[7] Р. А. Хачатрян, “О непрерывных селекциях многозначного отображения с почти выпуклыми значениями”, *Изв. НАН Армении. Математика*, **54**:1 (2019), 60–75. [R. A. Khachatryan, “On continuous selections of a multivalued mapping with almost convex values”, *Izv. NAN Armenia. Mathematics*, **54**:1 (2019), 60–75 (in Russian)].

[8] Б. Н. Пшеничный, *Методы линеаризации*, Наука, М., 1980. [B. N. Pshenichny, *Linearization Method*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (In Russian)].

[9] Р. А. Хачатрян, “О производных по направлению селекций многозначных отображений”, *Изв. НАН Армении. Математика*, **54**:3 (2016), 64–82. [R. A. Khachatryan, “On derivatives with respect to the direction of selections of multivalued mappings”, *Izv. NAN Armenia. Mathematics*, **54**:3 (2016), 64–82 (in Russian)].

[10] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980. [B. N. Pshenichny, *Convex Analysis and Extremal Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[11] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, URSS, М., 2005, 216 с. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Inrodiction to the Theory of Multivalued Mappins and Differential Inclusions*, URSS Publ., Moscow, 2005 (In Russian), 216 pp.]

[12] Ю. Е. Нестеров, *Методы выпуклой оптимизации*, МЦНМО, М., 2010. [Yu. E. Nesterov, *Convex optimization methods*, ICCMMO Publ., Moscow, 2010 (In Russian)].

[13] В. В. Остапенко, Е. В. Остапенко, С. Н. Амиргалиева, “Приближенные методы пешения дифференциальных игр со случайной помехой”, *System Researsh and information Technologies*, 2005, № 4, 65–74. [V. V. Ostapenko, E. V. Ostapenko, S. N. Amigalieva, “Approximate methods for solving differntial gaims with random nois”, *System Researsh and information Technologies*, 2005, № 4, 65–74 (in Russian)].

[14] Б. Ш. Мордухович, *Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления*, Наука, М., 1988. [B. Sh. Mordukhovish, *Approximation Methods in Optimization and Control Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1988].

[15] S. Adly, F. Nacry, L. Thibault, “Discontinous sweeping process with prox-regular sets”, *ESAIM: Contol, Optimization and Calculus of Variations*, **23** (2017), 1293–1329.

[16] Р. А. Хачатрян, “О существовании непрерывных селекций многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:139 (2022), 284–299. [R. A. Khachatryan, “On the existence of continuous selections of a multivalued mapping related to the problem of minimizing a functional”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:139 (2022), 284–299 (in Russian)].

Информация об авторе

Хачатрян Рафик Агасиевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры численного анализа и математического моделирования, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения. E-mail: khrafik@ysu.am
ORCID: https//orcid.org/0000-0002-7908-0562

Поступила в редакцию 22.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 13.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Rafik A. Khachatryan, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Numerical Analysis and Mathematical Modeling Department, Yerevan State University, Yerevan, Armenia. E-mail: khrafik@ysu.am
ORCID: https//orcid.org/0000-0002-7908-0562

Received 22.06.2023
Reviewed 13.11.2023
Accepted for press 23.11.2023