Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 28, № 143, 2023

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) (категория К1)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS 215

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

А.А. Базулкина	Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для вероятностных моделей динамики популяций	217
Н.С. Борзов, З.Т. Жуковская	О существовании допустимых процессов для управляемых систем со смешанными ограничениями	227
Е.О. Бурлаков, И.Н. Мальков	Математическое моделирование в задаче разработки эффективного метода контроля фузариоза колоса пшеницы	236
М.П. Дьякович, И.А. Финогенко	Динамические суждения о связанном со здоровьем качестве жизни на основе метода анализа иерархий	245
В.П. Максимов	К вероятностному описанию ансамбля траекторий непрерывно-дискретной системы управления с неполной информацией	256
Р. Сенгупта	Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах	268
Д.Л. Ступин	Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения	277
В.И. Сумин, М.И. Сумин	Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимизации линейных систем вольтеррова типа с функциональными ограничениями	298

О.В. Филиппова Оценки фазовых траекторий управляемых систем с многозначными импульсными воздействиями 326

А.Г. Ченцов О топологических свойствах множества притяжения в пространстве ультрафильтров 335

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Редакторы: М.И. Филатова, М.А. Сенина
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Бударин
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28, № 143. 144 с. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143

Подписано в печать 26.09.2023. Дата выхода в свет
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 18,0. Усл. печ. л. 16,7. Тираж 1000 экз. Заказ № 23252. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 28, no. 143, 2023

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialty 1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences) (category K1)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka", Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

A.A. Bazulkina	Estimation of total income with discounting for probabilistic models of population dynamics	217
N.S. Borzov, Z.T. Zhukovskaya	On the existence of admissible processes for control systems with mixed constraints	227
E.O. Burlakov, I.N. Malkov	Mathematical modeling in the problem of developing an effective method for controlling fusarium of wheat ear	236
M.P. Dyakovich, I.A. Finogenko	Dynamic evaluation of criteria of the health-relatad quality of life on the base of the hierarchies analysis method	245
V.P. Maksimov	To probabilistic description of an ensemble of trajectories to a continuous-discrete control system with incomplete information	256
R. Sengupta	Ekeland Variational Principle in quasimetric spaces	268
D.L. Stupin	The coefficient problem for bounded functions and its applications	277
V.I. Sumin, M.I. Sumin	Regularization of classical optimality conditions in optimization problems for linear Volterra-type systems with functional constraints	298

O.V. Filippova	Estimates of the phase trajectories of controlled systems with multi-valued impulses	326
A.G. Chentsov	About topological properties of attraction set in ultrafilter space	335

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences". ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Derzhavin Tambov State University"
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC "Ural-Press" is 83372

Editors: M.I. Filatova, M.A. Senina
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Budarin
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. 2023. Vol. 28, no. 143. 144 p. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143

Signed for printing 26.09.2023. Release date
Format A4 (60×84 1/8). Typeface "Times New Roman". Printed on risograph.
Pr. sheet 18,0. Conv. pr. sheet 16,7. Copies printed 1000. Order no. 23252. Free price

Publisher: FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy" of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-217-226

УДК 517.929

Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для вероятностных моделей динамики популяций

Анастасия Андреевна БАЗУЛКИНА

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

Аннотация. Рассматриваются модели однородных и структурированных популяций, заданные дифференциальными уравнениями, зависящими от случайных параметров. Популяция называется однородной, если она состоит только из одного вида животных или растений, и структурированной, если она содержит $n \geqslant 2$ различных видов или возрастных классов. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации динамика популяции задана системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geqslant 0, \ldots, x^n \geqslant 0 \right\}.$$

В моменты времени $\tau_k = kd,$ где $d > 0,$ $k = 1, 2, \ldots,$ из этой популяции извлекаются случайные доли ресурса $\omega^i_k,$ $i = 1, \ldots, n.$ Если ω^i_k оказывается больше некоторого значения $u^i_k \in [0, 1),$ то сбор ресурса i-го вида в момент τ_k прекращается, и доля извлеченного ресурса получается равной $\ell^i_k = \min(\omega^i_k, u^i_k).$ Пусть $C^i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида, $X^i_k = x^i(kd - 0)$ — количество ресурса i-го вида в момент времени τ_k до сбора; тогда величина дохода в данный момент равна $Z_k \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C^i X^i_k \ell^i_k.$ Исследуются свойства характеристики суммарного дохода, которая определяется как сумма ряда из величин дохода в момент времени τ_k с учетом показателя дисконтирования $\alpha > 0:$

$$H_\alpha(\overline{\ell}, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e^{-\alpha k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^{n} C^i X^i_k \ell^i_k,$$

где $\overline{\ell} \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots),$ x_0 — начальный размер популяции. Значение показателя α указывает на то, что стоимость позднее получаемого дохода снижается. Получены оценки суммарного дохода с учетом дисконтирования, выполненные с вероятностью единица.

Ключевые слова: структурированная популяция, оценка суммарного дохода

Для цитирования: *Базулкина А.А.* Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для вероятностных моделей динамики популяций // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 217–226. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-217-226

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-217-226

Estimation of total income with discounting for probabilistic models of population dynamics

Anastasia A. BAZULKINA
Vladimir State University
87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

Abstract. Models of homogeneous and structured populations given by differential equations depending on random parameters are considered. A population is called homogeneous if it consists of only one animal or plant species, and structured if it contains $n \geqslant 2$ different species or age classes. We assume that in the absence of exploitation, the dynamics of the population is given by the system of differential equations

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geqslant 0, \ldots, x^n \geqslant 0\right\}.$$

At times $\tau_k = kd$, where $d > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, random shares of the resource $\omega_k = (\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n) \in \Omega \subseteq [0,1]^n$ are extracted from this population. If ω_k^i is greater than some value $u_k^i \in [0,1)$, then the collection of the resource of the i-th type stops at the moment τ_k and the share of the extracted resource turns out to be equal to $\ell_k^i \doteq \min(\omega_k^i, u_k^i)$. Let $C^i \geqslant 0$ be the cost of the resource of the i-th type, $i = 1, \ldots, n$, $X_k^i = x^i(kd - 0)$ the quantity of the i-th type of resource at the time τ_k before collection; then the amount of income at the moment equals $Z_k \doteq \sum_{i=1}^{n} C^i X_k^i \ell_k^i$. The properties of the characteristic of the total income, which is defined as the sum of the series of income values at the time τ_k, taking into account the discounting factor $\alpha > 0$ are investigated:

$$H_\alpha(\overline{\ell}, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e^{-\alpha k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^{n} C^i X_k^i \ell_k^i,$$

where $\overline{\ell} \doteq (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)$, x_0 is the initial population size. The value of α indicates that the value of the income received later decreases. Estimates of the total income, taking into account discounting, made with probability one are obtained.

Keywords: structured population, total income estimate

Mathematics Subject Classification: 37H35, 39A50, 49N25, 93C15.

For citation: Bazulkina A.A. Estimation of total income with discounting for probabilistic models of population dynamics. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 217–226. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-217-226 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Начиная с прошлого века многие авторы занимались исследованием вопросов оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными динамическими системами (см., например, [1]). В настоящее время ведутся активные работы по изучению оптимального промысла и его влияния на характер динамики и состав структурированных популяций (см. [2–4]). Существует также множество работ, посвященных задачам периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса и задачам оптимальной эксплуатации популяции с диффузией, исследованию максимальной эффективности сбора ресурса (см. [5, 6]), получению наибольшей выгоды от эксплуатации популяции, заданной разностными уравнениями (см. [7, 8]). Оценки средней временной выгоды для популяций, заданных дифференциальными уравнениями со случайными параметрами, получены в работах [9, 10]. Понятие суммарного дохода с учетом дисконтирования введено в [11]. Отличие данной статьи от публикаций [9, 10] состоит в том, что здесь рассматривается иная характеристика сбора возобновляемого ресурса — суммарный доход с учетом дисконтирования. Кроме того, в работах [10, 11] рассматриваются только однородные популяции, а в настоящей статье — как однородные, так и структурированные, то есть популяции, разделенные на возрастные группы или отдельные виды. Для данных популяций доказаны теоремы об оценках суммарного дохода с учетом дисконтирования, которые выполнены с вероятностью единица.

1. Основные понятия

Рассмотрим популяцию, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \doteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : x^1 \geqslant 0, \dots, x^n \geqslant 0\right\}; \tag{1.1}$$

здесь $g(x)$ — вектор-столбец, координатами которого являются непрерывно дифференцируемые функции $g^1(x), \dots, g^n(x)$. При $n = 1$ популяция однородная, то есть состоит только из одного вида животных или растений. Если $n \geqslant 2$, то популяцию назовем структурированной, в этом случае она содержит n различных видов или возрастных классов.

Предполагаем, что в моменты времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \dots$ из популяции извлекаются некоторые случайные доли ресурса $\omega_k = (\omega_k^1, \dots, \omega_k^n) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n$. Если доля добываемого ресурса ω_k^i оказывается больше некоторого значения $u_k^i \in [0, 1)$, то сбор ресурса i-го вида в момент τ_k останавливается; поэтому доля ресурса данного вида, извлекаемого из популяции в момент времени τ_k, равна

$$\ell_k^i \doteq \min(\omega_k^i, u_k^i), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Пусть $\ell_k \doteq (\ell_k^1, \dots, \ell_k^n)$, $x^i(kd - 0)$ и $x^i(kd)$ — количество ресурса i-го вида в момент $\tau_k = kd$ до и после сбора соответственно, $(1 - \ell_k)x(kd - 0)$ — вектор с координатами $(1 - \ell_k^1)x^1(kd - 0), \dots, (1 - \ell_k^n)x^n(kd - 0)$. Тогда динамику эксплуатируемой популяции можно описать управляемой системой с импульсным воздействием

$$\dot{x} = g(x), \quad t \neq kd, \tag{1.2}$$

$$x(kd) = (1 - \ell_k)x(kd - 0), \quad k = 1, 2, \dots. \tag{1.3}$$

Полагаем, что решения системы $\dot{x} = g(x)$ неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях, для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $g^1(x), \dots, g^n(x)$ удовлетворяли условию квазиположительности (см. [12, с. 28]).

Пусть $C^i \geqslant 0$ — стоимость ресурса i-го вида, $i = 1,\ldots,n$, $X_k^i = x^i(kd-0)$ — количество ресурса i-го вида в момент времени τ_k до сбора; тогда величина дохода в данный момент равна $Z_k \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C^i X_k^i \ell_k^i$, $k = 1,2,\ldots$.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [11]). *Суммарным доходом с учетом дисконтирования* называется функция

$$H_\alpha\big(\overline{\ell},x_0\big) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e^{-\alpha k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^{n} C^i X_k^i \ell_k^i,$$

где $\overline{\ell} \doteq (\ell_1,\ldots,\ell_k,\ldots)$, x_0 — начальный размер популяции, $\alpha > 0$ — показатель дисконтирования. Значение показателя α указывает на то, что стоимость позднее получаемого дохода снижается.

З а м е ч а н и е 1.1. В данной статье применяем вероятностную модель $(\Sigma,\mathfrak{A},\mu)$, описанную в работах [9, 10]. Приведем краткое описание данной модели. Пусть задано вероятностное пространство $\big(\Omega,\widetilde{\mathfrak{A}},\widetilde{\mu}\big)$, где $\Omega \subseteq [0,1]^n$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств, на которой задана вероятностная мера $\widetilde{\mu}$. Определим множество последовательностей $\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega_1,\ldots,\omega_k,\ldots)\}$, где $\omega_k \in \Omega$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \sigma = (\omega_1 \in A_1,\ldots,\omega_k \in A_k)\}, \quad \text{где} \quad A_j \in \widetilde{\mathfrak{A}},\ j = 1,2,\ldots,k,$$

и определим меру $\tilde{\mu}(E_k) = \widetilde{\mu}(A_1)\cdot\ldots\cdot\widetilde{\mu}(A_k)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова [13, с. 43] на измеримом пространстве $(\Sigma,\mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

2. Оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования для модели однородной популяции

Рассмотрим однородную популяцию, которая при отсутствии эксплуатации задана дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in [0,+\infty),$$

и обозначим через $\varphi(t,x)$ решение данного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,x) = x$. Если $u_k = u \in [0,1]$ для всех $k = 1,2,\ldots$, то $X_k = x(kd-0)$ — количество ресурса до сбора, удовлетворяет следующему разностному уравнению:

$$X_{k+1} = \varphi\big(d,(1-u)X_k\big), \quad k = 1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

где $X_1 = \varphi(d,x_0)$. Отметим, что при $n = 1$ можем предположить, что стоимость ресурса $C_1 = 1$, поэтому суммарный доходом с учетом дисконтирования равен

$$H_\alpha\big(\overline{\ell},x_0\big) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \ell_k e^{-\alpha k}, \quad \text{где} \quad \alpha > 0.$$

У с л о в и е 2.1. Предположим, что уравнение (1.1) имеет решения $\varphi(t,A) \equiv A > 0$ и $\varphi(t,0) \equiv 0$.

Напомним, что $X(u)$ называется *неподвижной точкой* уравнения (2.1), если имеет место соотношение $X(u)=\varphi\big(d,(1-u)X(u)\big)$. В статье [14] доказаны следующие условия существования положительной неподвижной точки уравнения (2.1):

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие 2.1 и неравенство*

$$(1-u)\,\varphi'_x\,(d,0)>1. \tag{2.2}$$

Тогда уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$ такую, что $0<X(u)\leqslant A$.

Если уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)>0$, то определим $x(u)\doteq(1-u)X(u)$. Обозначим $U\doteq\{\overline{u}:\overline{u}=(u_1,\ldots,u_k,\ldots)\}$, где $u_k\in[0,1]$, $k=1,2,\ldots$.

Лемма 2.2. *Предположим, что выполнено условие 2.1 и неравенство (2.2). Тогда для любого $x_0\in[x(u),A]$ существует управление $\overline{u}\in U$ такое, что для всех $\sigma\in\Sigma$ имеет место неравенство*

$$X(u)\sum_{k=1}^{\infty}\ell_k e^{-\alpha k}\leqslant H_\alpha(\overline{\ell},x_0)\leqslant A\sum_{k=1}^{\infty}\ell_k e^{-\alpha k}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 2.1 следует, что при выполнении неравенства (2.2) существует неподвижная точка $X(u)$ уравнения (2.1) и $0<X(u)\leqslant A$. Тогда $0<x(u)\leqslant X(u)\leqslant A$. Выберем управления $u_k=1-\dfrac{x(u)}{X(u)}$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Поскольку функция $\varphi(d,x)$ возрастает (см. [14]), то для $x_0\in[x(u),A]$ имеем

$$X(u)=\varphi(d,x(u))\leqslant\varphi(d,x_0)=X_1\leqslant\varphi(d,A)=A.$$

Таким образом, если $u_1=1-\dfrac{x(u)}{X(u)}$, то $X(u)\leqslant X_1\leqslant A$. Поэтому, так как $\ell_1=\min(\omega_1,u)\leqslant u$, имеем

$$x(u)=X(u)(1-u)\leqslant X_1(1-\ell_1)=x_1\leqslant A,$$

то есть $x_1\in[x(u),A]$. Аналогично получаем, что при $u_k=1-\dfrac{x(u)}{X(u)}$, $k=1,2,\ldots$, выполнены неравенства

$$X(u)\leqslant X_k\leqslant A,\quad k=1,2,\ldots. \tag{2.4}$$

Из предыдущего неравенства и определения суммарного дохода следует, что для всех $\sigma\in\Sigma$ выполнено (2.3). □

Предположим, что в разных опытах появились различные случайные последовательности $\sigma^{(p)}\doteq\{\omega_1^{(p)},\ldots,\omega_k^{(p)},\ldots\}$, также определим $\overline{\ell}^{(p)}\doteq\big(\ell_1^{(p)},\ldots,\ell_k^{(p)},\ldots\big)$, где $p=1,2,\ldots$. Для каждой последовательности $\overline{\ell}^{(p)}$ реализуется свое значение суммарного дохода, которое равно

$$H_\alpha\big(\overline{\ell}^{(p)},x_0\big)\doteq\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(p)}\ell_k^{(p)}e^{-\alpha k},\quad p=1,2,\ldots.$$

Обозначим через $M\ell(u)$ математическое ожидание случайных величин $\ell_k=\min\{\omega_k,u_k\}$, где $u_k=1-\dfrac{x(u)}{X(u)}$, $k=1,2,\ldots$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие 2.1. Тогда для любого* $x_0 \in [x(u), A]$ *существует управление* $\overline{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедливо неравенство*

$$\frac{X(u)M\ell(u)}{e^\alpha - 1} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} H_\alpha\big(\overline{\ell}^{(p)}, x_0\big) \leqslant \frac{AM\ell(u)}{e^\alpha - 1}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Так как случайные величины ω_k^p, $p = 1, 2, \ldots,$ независимы и одинаково распределены, то и случайные величины $\ell_k^{(p)} = \ell(\omega_k^p, u)$, $p = 1, 2, \ldots,$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ также независимы и имеют одинаковое распределение. Поэтому из усиленного закона больших чисел Колмогорова [12, с. 418] следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено следующее равенство

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \ell_k^{(p)} = M\ell(u), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

из которого получаем, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(p)} e^{-\alpha k} = \frac{M\ell(u)}{e^\alpha - 1}. \tag{2.6}$$

Из неравенства (2.4) следует, что

$$X(u) \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(p)} e^{-\alpha k} \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} H_\alpha\big(\overline{\ell}^{(p)}, x_0\big) \leqslant A \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(p)} e^{-\alpha k}. \tag{2.7}$$

Таким образом, из (2.6) и (2.7) получаем, что неравенство (2.5) выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$. □

Пример 2.1. Рассмотрим задачу нахождения максимальной оценки снизу для суммарного дохода с учетом дисконтирования. Предположим, что развитие популяции задано логистическим уравнением

$$\dot{x} = (a - bx)x, \tag{2.8}$$

где $a > 0$, $b > 0$ являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно.

Найдем решение (2.8), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x_0) = x_0:$

$$\varphi(t, x_0) = \frac{ax_0e^{at}}{a + bx_0(e^{at} - 1)},$$

и выпишем разностное уравнение (2.1) для логистического уравнения (2.8):

$$X_{k+1} = \frac{a(1-u)X_ke^{ad}}{a + b(1-u)X_k(e^{ad} - 1)}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, что одной из неподвижных точек данного уравнения является $X(u) = 0$, второй неподвижной точкой является

$$X(u) = \frac{a(1-u)e^{ad} - a}{b(1-u)(e^{ad} - 1)}.$$

Отметим, что $X(u) > 0$, если $(1-u)e^{ad} > 1$.

Найдем математическое ожидание $M\ell(\omega, u)$, где ω_1, $\omega_2, \ldots$ — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на $[0,1]$, а $\ell(\omega,u) = \min(\omega,u)$. Тогда $M\ell(\omega,u)$ можно найти как интеграл Лебега, то есть

$$M(\omega,u) = \int_0^1 \ell(\omega,u)\,d\omega = \int_0^u \omega\,d\omega + \int_u^1 u\,d\omega = \frac{u^2}{2} + u(1-u) = u - \frac{u^2}{2}.$$

Подставим полученные результаты в неравенство (2.5), тогда

$$\frac{a\big((1-u)e^{ad}-1\big)(2u-u^2)}{2b(1-u)(e^{ad}-1)(e^{\alpha}-1)} \leqslant \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} H_\alpha\big(\overline{\ell}^{(p)}, x_0\big) \leqslant \frac{a(2u-u^2)}{2b(e^{\alpha}-1)}. \tag{2.9}$$

Пусть $a=1$, $b=1$, $d=\ln 25$, $\alpha=\ln 2$, тогда (2.9) принимает следующий вид:

$$\frac{(24-25u)(2u-u^2)}{48(1-u)} \leqslant \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} H_\alpha\big(\overline{\ell}^{(p)}, x_0\big) \leqslant \frac{2u-u^2}{2}. \tag{2.10}$$

При помощи стандартных вычислений можно показать, что в последнем неравенстве оценка снизу максимальная при $u=u^*\approx 0{,}722$. Подставляя данное значение u^* в (2.10), получим приближенную оценку снизу и сверху, которая выполнена с вероятностью единица:

$$0{,}411 \leqslant \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} H_\alpha\big(\overline{\ell}^{(p)}, x_0\big) \leqslant 0{,}461. \tag{2.11}$$

Таким образом, для уравнения (2.8) оценка суммарного дохода с учетом дисконтирования удовлетворяет (2.11).

3. Теорема об оценке суммарного дохода с учетом дисконтирования для моделей структурированных популяций

Рассмотрим структурированную популяцию, особи которой разделены на $n \geqslant 2$ возрастных групп или отдельных видов. Пусть количество особей i-го вида равно x^i, $i=1,\ldots,n$. Обозначим через $X(u) = (X^1(u),\ldots,X^n(u))$ неподвижную точку системы (2.1) (если она существует), пусть

$$x(u) = (x^1(u),\ldots,x^n(u)), \quad \text{где} \quad x^i(u) \doteq (1-u)X^i(u),\ i=1,\ldots,n. \tag{3.1}$$

Для $x_0 = (x_0^1,\ldots,x_0^n)$ включение $x_0\in[a,b]$ будем понимать следующим образом: $x_0^i \in [a^i,b^i]$, $i=1,\ldots,n$.

В данном разделе будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 3.1. Если $x_0^i \geqslant x^i$ для всех $i=1,\ldots,n$, то $\varphi^i(d,x(0)) \geqslant \varphi^i(d,x)$, $i=1,\ldots,n$.

Отметим, что условие 3.1 можно записать в сокращенным виде: если $x(0)\geqslant x$, то $\varphi(d,x(0)) \geqslant \varphi(d,x)$. Обозначим через $M\ell_k^i$ математическое ожидание случайных величин ℓ_k^i, $i=1,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots$.

Лемма 3.1. *Пусть система* (1.2), (1.3) *имеет стационарную точку* $A>0$, *и существует неподвижная точка* $X(u)$ *системы* (2.1) *такая, что* $X(u)\in(0,A]$. *Тогда для любого* $x_0\in[x(u),A]$ *найдется управление* $\overline{u}\in U$, *при котором для всех* $\sigma\in\Sigma$ *выполнены неравенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k}\sum_{i=1}^{n}C^iX^i(u)\ell_k^i\leqslant H_\alpha(\overline{\ell},x_0)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k}\sum_{i=1}^{n}C^iA^i\ell_k^i. \tag{3.2}$$

Доказательство. Поскольку $x_0\in[x(u),A]$, то из условия (3.1) следует, что

$$X^i(u)=\varphi^i(d,x(u))\leqslant\varphi(d,x_0)=X_1^i\leqslant\varphi^i(d,A)=A^i,\quad i=1,\dots,n.$$

Выберем управления $u_k=\Big(1-\dfrac{x^1(u)}{X^1(u)},\dots,1-\dfrac{x^n(u)}{X^n(u)}\Big)$ для всех $k=1,2,\dots$ и отметим, что $\ell_k=\min\{\omega_k,u_k\}\leqslant u_k$, тогда

$$x_1^i=(1-\ell_1^i)X_1^i\geqslant(1-u_k)X_k^i=\frac{x^i(u)X_1^i}{X_1^i}=x^i(u).$$

Аналогично при выбранных управлениях получаем

$$X^i(u)\leqslant X_k^i\leqslant A^i,\quad k=1,2,\dots,\quad i=1,\dots,n. \tag{3.3}$$

Из (3.3) и определения суммарного дохода следует, что для всех $\sigma\in\Sigma$ выполнены неравенства (3.2). □

Для каждой последовательности $\overline{\ell}^{(p)}$ выпишем значение суммарного дохода

$$H_\alpha\big(\overline{\ell}^{(p)},x_0\big)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}C^iX_k^{i(p)}\ell_k^{i(p)}e^{-\alpha k},\quad\text{где}\quad\alpha>0,\ p=1,2,\dots.$$

Теорема 3.1. *Пусть система* (1.2), (1.3) *имеет стационарную точку* $A>0$, *и существует неподвижная точка* $X(u)$ *системы* (2.1) *такая, что* $X(u)\in(0,A]$. *Тогда для любого* $x_0\in[x(u),A]$ *найдется управление* $\bar{u}\in U$, *при котором для почти всех* $\sigma\in\Sigma$ *выполнены неравенства*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}C^iX^i(u)M\ell^i(u)}{e^\alpha-1}\leqslant\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m}H_\alpha(\overline{\ell}^{(p)},x_0)\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}C^iA^iM\ell^i(u)}{e^\alpha-1}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Случайные величины $\ell_1^{i(p)},\ell_2^{i(p)},\dots$ удовлетворяют условиям усиленного закона больших чисел Колмогорова, поэтому для почти всех $\sigma\in\Sigma$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}C^iX^i(u)\ell_k^{i(p)}e^{-\alpha k}=\sum_{i=1}^{n}C^iX^i(u)M\ell^i(u)e^{-\alpha k}. \tag{3.5}$$

Из (3.3) и (3.5) следует, что для каждого $k=1,2,\dots$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{n}C^iX^i(u)M\ell^i(u)e^{-\alpha k}\leqslant\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}C^iX_k^{i(p)}\ell_k^{i(p)}e^{-\alpha k}. \tag{3.6}$$

Суммируя (3.6) по всем $k=1,2,\dots,$ получаем левую часть (3.4). Аналогично доказывается неравенство в правой части (3.4). □

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых Л. И. Родиной за внимание к работе и руководство ее выполнением.

References

[1] D. D. Bainov, “Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population”, *Applied Mathematics and Computation*, **39**:1 (1990), 37–48.

[2] Г. П. Неверова, О. Л. Жданова, Е. Я. Фрисман, “Динамические режимы структурированного сообщества хищник-жертва и их изменение в результате антропогенного изъятия особей”, *Математическая биология и биоинформатика*, **15**:1 (2020), 73–92. [G. P. Neverova, O. L. Zhdanova, E. Ya. Frisman, “Dynamics of predator-prey community with age structures and its changing due to harvesting”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **15**:1 (2020), 73–92 (In Russian)].

[3] А. И. Абакумов, Ю. Г. Израильский, “Эффекты промыслового воздействия на рыбную популяцию”, *Математическая биология и биоинформатика*, **11**:2 (2016), 191–204. [A. I. Abakumov, Yu. G. Izrailsky, “The harvesting effect on a fish population”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11**:2 (2016), 191–204 (In Russian)].

[4] Г. П. Неверова, А. И. Абакумов, Е. Я. Фрисман, “Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования”, *Математическая биология и биоинформатика*, **11**:1 (2016), 1–13. [G. P. Neverova, A. I. Abakumov, E. Ya. Frisman, “Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study”, *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11**:1 (2016), 1–13 (In Russian)].

[5] А. О. Беляков, А. А. Давыдов, “Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса”, Труды Института математики и механики УрО РАН, **22**, 2016, 38–46; англ. пер.:A. O. Belyakov, A. A. Davydov, “Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **299**:suppl. 1 (2017), 14–21.

[6] А. А. Давыдов, “Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией”, *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Валерия Васильевича Козлова, Труды МИАН, **310**, МИАН, М., 2020, 135–142; англ. пер.:A. A. Davydov, “Existence of Optimal Stationary States of Exploited Populations with Diffusion”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **310** (2020), 124–130.

[7] А. В. Егорова, Л. И. Родина, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, “On optimal harvesting of renewable resource from the structured population”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].

[8] А. В. Егорова, “Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 15–25. [A. V. Egorova, “Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 15–25 (In Russian)].

[9] Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина, “Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции”, *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **56** (2020), 41–49. [Yu. V. Masterkov, L. I. Rodina, “Estimation of average time profit for stochastic structured population”, *Izv. IMI UdGU*, **56** (2020), 41–49 (In Russian)].

[10] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].

[11] L. I. Rodina, A. H. Hammadi, “Optimization problems for models of harvesting a renewable resourse”, *Journal of Mathematical Sciences*, **25**:1 (2020), 113–122.

[12] О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора*, Издательство ННГУ, Н. Новгород, 2007, 324 с. [O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, *Mathematical Modelling of Selection Processes*, Nizhny Novgorod University Press, Nizhnii Novgorod, 2007 (In Russian), 324 pp.]

[13] А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, Наука, М., 1989, 580 с. [A. N. Shiryaev, *Probability-1*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 580 pp.]

[14] М. С. Волдеаб, “Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:141 (2023), 26–38. [M. S. Woldeab, “Properties of the averadge time benefit for probabilistic models of exploited populations”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:141 (2023), 26–38 (In Russian)].

Информация об авторе

Базулкина Анастасия Андреевна, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: hirasawa33rus@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-5283-5295

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 29.08.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Anastasia A. Bazulkina, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation.
E-mail: hirasawa33rus@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0007-5283-5295

Received 15.05.2023
Reviewed 29.08.2023
Accepted for press 12.09.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-227-235

УДК 517.977.1

О существовании допустимых процессов для управляемых систем со смешанными ограничениями

Никита Сергеевич БОРЗОВ[1] **, Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»

392036, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Рассматривается управляемая система со смешанными ограничениями типа равенств и концевыми ограничениями. Для нее в терминах обобщенного якобиана (производной Кларка) по переменной управления отображения, определяющего ограничения, получены достаточные условия существования непрерывных допустимых позиционных управлений. Доказательство соответствующей теоремы основано на сведении рассматриваемой управляемой системы к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения за счет применения нелокальной теоремы о неявной функции. Затем эта задача сводится к задаче о нахождении неподвижной точки непрерывной функции, определенной на конечномерном замкнутом шаре с последующим применением аналога теоремы Брауэра о неподвижной точке. Кроме того, исследована управляемая система со смешанными ограничениями типа неравенств и концевыми ограничениями. Для нее в терминах первых производных по переменной управления функций, определяющих ограничения, тоже получены достаточные условия существования непрерывных допустимых позиционных управлений. Доказательство соответствующей теоремы проводится за счет перехода от системы гладких ограничений типа неравенств к одному локально липшицевому ограничению типа равенства.

Ключевые слова: управляемые системы, смешанные ограничения, позиционные управления, производная Кларка, неявная функция

Благодарности: Предложение 1.1, предложение 2.1 и замечание 2.1 получены первым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/). Теоремы 1.1 и 2.1 получены вторым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/).

Для цитирования: *Борзов Н.С., Жуковская З.Т.* О существовании допустимых процессов для управляемых систем со смешанными ограничениями // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 227–235. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-227-235

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-227-235

On the existence of admissible processes for control systems with mixed constraints

Nikita S. BORZOV[1] **, Zukhra T. ZHUKOVSKAYA**[2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. A control system with mixed equality-type constraints and end-point constraints is considered. In terms of the generalized Jacobian (Clarke's derivative) with respect to the control variable of the mapping defining the constraints, sufficient conditions for the existence of continuous admissible positional controls are obtained. The proof of the corresponding theorem is based on reducing the control system to a boundary value problem for an ordinary differential equation via a nonlocal implicit function theorem. This problem is then reduced to the problem of finding a fixed point of a continuous mapping defined on a finite-dimensional closed ball and to applying an analogue of Brouwer's fixed point theorem. In addition, a control system with mixed inequality-type constraints and end-point constraints is studied. In terms of the first derivatives with respect to the control variable of the functions that define the constraints, sufficient conditions for the existence of continuous admissible positional controls are also obtained. The proof of the corresponding theorem is carried out by passing from a system of smooth inequality-type constraints to one locally Lipschitz equality-type constraint.

Keywords: control systems, mixed constraints, positional controls, Clarke's derivative, implicit function

Acknowledgements: Proposition 1.1, Proposition 2.1 and Remark 2.1 were obtained by the first author who was supported by a grant of the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/). Theorems 1.1 and 2.1 were obtained by the second author who was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00042, https://rscf.ru/en/project/22-11-00042/).

Mathematics Subject Classification: 34H05.

For citation: Borzov N.S., Zhukovskaya Z.T. On the existence of admissible processes for control systems with mixed constraints. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 227–235. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-227-235 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается управляемая система

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = g(t,x,u), \quad t \in [0,\tau],\\
&\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)),\\
&f(t,x,u) = 0, \quad h(t,x,u) \le 0.
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Здесь $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\Psi,\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ — это заданные непрерывные отображения и функции, а $\tau > 0$ — это заданное число. Пусть, кроме того, задана точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Непрерывную функцию $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, определенную в некоторой окрестности $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ точки $(0, x_0)$, называют *допустимым позиционным управлением*, если

$$f(t,x,u(t,x)) = 0, \quad h(t,x,u(t,x)) \le 0 \quad \forall\,(t,x) \in \Omega$$

(здесь и далее неравенства для векторов из $\mathbb{R}^s$ понимается покоординатно), и существует непрерывно дифференцируемое решение $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального уравнения $\dot{x} = g(t,x,u(t,x))$, для которого имеет место равенство $\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau))$.

Непрерывную функцию $u : [0,\tau] \to \mathbb{R}^m$ называют *допустимым программным управлением*, если имеют место соотношения

$$f(t,x,u(t)) = 0, \quad h(t,x,u(t)) \le 0 \quad \forall\, t \in [0,\tau],$$

в которых неравенство выполняется покоординатно, и существует непрерывно дифференцируемое решение $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального уравнения $\dot{x} = g(t,x,u(t))$, для которого имеет место равенство $\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau))$. Отметим, что если существует допустимое позиционное управление, то существует и программное управление. Действительно, пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ — это допустимое позиционное управление, а $x : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ — это решение соответствующей краевой задачи. Тогда функция $t \mapsto u(t,x(t))$, $t \in [0,\tau]$ является допустимым программным управлением.

В настоящей работе рассматриваются различные частные случаи (0.1). Для них получены достаточные условия существования допустимых позиционных управлений.

1. Управляемая система с ограничениями типа равенств

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = g(t,x,u), \quad t \in [0,\tau],\\
&\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)),\\
&f(t,x,u) = 0.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Пусть заданы числа $R > 0$, $\tau > 0$, $a > 0$ и точка $u_0 \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ — это заданное открытое множество такое, что для точек (t,x) таких, что $t \in [0,\tau]$ и $|x - x_0| \le R$, имеет место включение $(t,x) \in \Omega$.

Обозначим через $B(\xi, r)$ замкнутый шар с центром в точке $\xi \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r \ge 0$ в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\alpha := \max_{|x-x_0|\le R} |\Psi(x) - x|, \quad \beta := \max_{|x-x_0|\le R} |\Phi(x) + x - 2x_0|,$$

$$R_0 := a^{-1}\max\{|f(t,x,u_0)| : t \in [0,\tau],\ |x - x_0| \le R\},$$

$$\gamma := \max\{|g(t,x,u)| : t \in [0,\tau],\ |x - x_0| \le R,\ |u - u_0| \le R_0\}.$$

Предположим, что

(H1) отображение $f(t,x,\cdot)$ локально липшицево для любого $(t,x)\in\Omega$.

Обозначим через $\partial_u f(t,x,u)$ производную Кларка отображения $f(t,x,\cdot)$ в точке u (см. [1, § 2.6]). Предположим, что

(H2) многозначное отображение $(t,x,u)\mapsto\partial_u f(t,x,u)$, $(t,x)\in\Omega$, $u\in\mathbb{R}^m$ полунепрерывно сверху.

Приведем условия регулярности, позволяющие в задаче (0.1) снять ограничения типа равенств.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть выполняются предположения* **(H1)**, **(H2)** *и*

(H3) $$\inf_{(t,x)\in\Omega,\ u\in\mathbb{R}^m}\Big(\max\{\kappa\geq 0:\ A\in\partial_u f(t,x,u),\ \ B^n(0,\kappa)\subset AB^m(0,1)\}\Big)>a.$$

Тогда существует непрерывное отображение $u:\Omega\to\mathbb{R}^m$ *такое, что*

$$f(t,x,u(t,x))=0,\quad |u(t,x)-u_0|\leq a^{-1}|f(t,x,u_0)|\quad\forall\,(t,x)\in\Omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим теорему 1.7 о неявной функции из [2]. Полагая $\Sigma:=\Omega$, $\sigma:=(t,x)$, получаем, что выполняются условия **(L1)** – **(L3)** этой теоремы и $\kappa_0\geq a$. Поэтому существует искомая неявная функция $u:\Omega\to\mathbb{R}^m$. □

Теорема 1.1. *Пусть выполняются предположения* **(H1)** – **(H3)** *и*

$$\alpha+\beta<2R,\quad \tau\gamma\leq 2R-\alpha-\beta.$$

Тогда для задачи (1.1) *существует допустимое позиционное управление, которое определено на множестве* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть далее $u(\cdot)$ — это функция, отвечающая утверждению предложения 1.1. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что существует отвечающее управлению $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируемое решение $x(\cdot)$ краевой задачи

$$\dot{x}=G(t,x),\quad t\in[0,\tau],\quad (t,x)\in\Omega,\quad \Psi(x(0))=\Phi(x(\tau)). \tag{1.2}$$

Здесь

$$G(t,x):=g(t,x,u(t,x)),\quad (t,x)\in\Omega.$$

Для доказательства разрешимости краевой задачи мы воспользуемся методом, предложенным в [3] для доказательства разрешимости краевых задач для автономных дифференциальных включений. Дальнейшие рассуждения подобны доказательству теоремы 1 из [3] и приводятся для полноты изложения.

Положим

$$\mathcal{M}:=[0,\tau]\times B(x_0,R).$$

В силу неравенства в предложении 1.1 имеем

$$|G(t,x)|\leq\gamma\quad\forall\,(t,x)\in\mathcal{M}.$$

Поэтому по теореме Вейерштрасса существует последовательность непрерывно дифференцируемых отображений $g_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которая сходится равномерно к G на множестве $\mathcal{M}$ и такая, что $|g_j(t,x)| \leq \gamma$ для всех $(t,x) \in \mathcal{M}$ и для всех номеров j.

Покажем, что для каждого $j \in \mathbb{N}$ краевая задача

$$\dot{x} = g_j(t,x), \quad \Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)), \quad x(t) \in B(x_0,R), \quad t \in [0,\tau] \tag{1.3}$$

имеет непрерывно дифференцируемое решение $x_j : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$.

Зафиксируем произвольное натуральное число $j \in \mathbb{N}$. Из гладкости отображения g_j и того, что $|g_j(t,x)| \leq \gamma$ в силу теорем о существовании и единственности решения (см., например, [4, теоремы II.4.1, II.4.5]) следует, что для любого $z \in B(x_0,R)$ существует единственное решение $\xi(\cdot,z) : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши

$$\dot{x} = g_j(t,x), \quad x(0) = z, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,\tau]. \tag{1.4}$$

Из [5, следствие 1.10.2] вытекает непрерывность отображения $\xi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|\xi(\tau,z) - z| = \left|\int\limits_0^\tau g_j(t,\xi(t,z))\,dt\right| \leq \int\limits_0^\tau |g_j(t,\xi(t,z))|\,dt \leq \tau\gamma \quad \forall\,(t,z) \in \mathcal{M}. \tag{1.5}$$

Непрерывные отображения $x \mapsto \Psi(x) - x$ и $x \mapsto \Phi(x) + x - 2x_0$, $x \in B(x_0,R)$, ограничены константами α и β, т. е. $|\Psi(x) - x| \leq \alpha$ и $|\Phi(x) + x - 2x_0| \leq \beta$ для всех $x \in B(x_0,R)$. Поэтому по теореме Титце о продолжении существуют непрерывные отображения $\widetilde{\Psi}, \widetilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\begin{cases} |\widetilde{\Psi}(x) - x| \leq \alpha, \quad |\widetilde{\Phi}(x) + x - 2x_0| \leq \beta \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^n; \\ \Psi(x) = \widetilde{\Psi}(x), \quad \Phi(x) = \widetilde{\Phi}(x) \quad \forall\,x \in B(x_0,R). \end{cases} \tag{1.6}$$

Покажем теперь, что существует решение уравнения

$$\widetilde{\Psi}(z) = \widetilde{\Phi}(\xi(\tau,z)), \quad z \in B(x_0,R) \tag{1.7}$$

с неизвестным z. Сделаем замену $b = z - x_0$ и положим

$$\Upsilon(b) := b - \widetilde{\Psi}(b + x_0) + \widetilde{\Phi}(\xi(\tau, b + x_0)), \quad b \in B(0,R).$$

Тогда уравнение (1.7) принимает вид

$$b = \Upsilon(b), \quad b \in B(0,R). \tag{1.8}$$

Для каждого $b \in \mathbb{R}^n$, для которого $|b| = R$ справедливо неравенство

$$\langle b, \Upsilon(b)\rangle \leq R^2. \tag{1.9}$$

Действительно, для $b \in \mathbb{R}^n$, для которых $|b| = R$, имеем

$$\begin{aligned} \langle b, \Upsilon(b)\rangle &= \langle b, b + x_0 - \widetilde{\Psi}(b + x_0)\rangle \\ &\quad + \langle b, \widetilde{\Phi}(\xi(b + x_0, \tau)) + \xi(\tau, b + x_0) - 2x_0\rangle + \langle b, b + x_0 - \xi(\tau, b + x_0)\rangle - \langle b, b\rangle \\ &\quad \leq \alpha R + \beta R + R\tau\gamma - R^2 \leq 2R^2 - R^2 = R^2. \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство вытекает из первой строки в (1.6), из соотношения (1.5) и из того, что $|b| = R;$ а последнее неравенство вытекает из предположения $\tau\gamma \le 2R - \alpha - \beta$.

Заметим, что

$$b \ne \lambda\Upsilon(b) \quad \forall\, \lambda \in (0,1), \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^n: \quad |b| = R. \tag{1.10}$$

Действительно, в противном случае, если $b = \lambda\Upsilon(b)$ для некоторых b и $\lambda,$ для которых $|b| = R$ и $\lambda \in (0,1),$ то

$$\langle b, \Upsilon(b)\rangle = \langle b, \lambda^{-1}b\rangle = \lambda^{-1}R^2 > R^2,$$

что противоречит (1.9).

Из (1.10) и непрерывности отображения Υ на $B(0,R)$ по теореме Боля о неподвижной точке (см., например, [6, § 5, теорема 7.2]) следует, что существует решение $\bar b \in B(0,R)$ уравнения (1.8). Значит, точка $\bar z := x_0 + \bar b$ является решением уравнения (1.7).

По определению функции $\xi(\cdot)$ функция $x_j(\cdot) := \xi(\cdot, \bar z)$ является решением задачи Коши (1.4). Кроме того, поскольку $\bar z = x_j(0),$ $\xi(\tau, \bar z) = x_j(\tau)$ и $\bar z$ является решением уравнения (1.7), то $\widetilde\Psi(x_j(0)) = \widetilde\Phi(x_j(\tau)).$ Таким образом,

$$\dot x(t) = g_j(t, x(t)) \quad \forall\, t \in [0,\tau], \quad \widetilde\Psi(x(0)) = \widetilde\Phi(x(\tau)), \quad x_j(0) = \bar z \in B(x_0, R). \tag{1.11}$$

Покажем, функция $x_j(\cdot)$ является решением задачи (1.3).

Из первого равенства в (1.11) и того, что $|g_j(t,x)| \le \gamma,$ следует, что

$$|x_j(t) - x_j(0)| \le t\gamma, \quad |x_j(\tau) - x_j(t)| \le (\tau - t)\gamma \quad \forall\, t \in [0,\tau] \tag{1.12}$$

(доказательство этих неравенств аналогично рассуждениям в (1.5)).

Для $t \in [0,\tau]$ имеем

$$\begin{aligned} &2|x_j(t) - x_0| \\ &\quad \le \Big|x_j(t) - x(0)\Big| + \Big|x_j(0) - \widetilde\Psi(x_j(0))\Big| + \Big|\widetilde\Phi(x_j(\tau)) + x_j(\tau) - 2x_0\Big| + \Big|x_j(t) - x_j(\tau)\Big| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le t\gamma + \alpha + \beta + (\tau - t)\gamma \le 2R. \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство вытекает из неравенства треугольника и того, что $\widetilde\Psi(x_j(0)) = \widetilde\Phi(x_j(\tau))$ в силу (1.11); второе неравенство вытекает из первой строки в (1.6) и из (1.12); а последнее неравенство вытекает из предположения $\tau\gamma \le 2R - \alpha - \beta$.

Из доказанного неравенства следует, что $x_j(t) \in B(x_0, R)$ для любого $t \in [0,\tau].$ Поэтому

$$\Psi(x_j(0)) = \widetilde\Psi(x_j(0)) = \widetilde\Phi(x_j(\tau)) = \Phi(x_j(\tau)).$$

Здесь первое и последнее равенства вытекают из второй строки в (1.6), а второе — из второго равенства в (1.11). Из полученного равенства, из тождества в (1.11) следует, что функция $x_j(\cdot)$ является решением краевой задачи (1.3).

Построенная при каждом j последовательность непрерывно дифференцируемых функций $x_j : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Это вытекает из того, что $x_j(\cdot)$ является решением краевой задачи (1.3) и из того, что $|g_j(t,x)| \le \gamma$. Поэтому, по теореме Арцела, существует равномерно сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_j(\cdot)\}.$ Переходя к подпоследовательности, не ограничивая общности будем считать, что $\{x_j(\cdot)\}$ сходится равномерно к некоторой функции $\bar x : [0,\tau] \to \mathbb{R}^n.$

По построению $\bar{x}(t) \in B(x_0, R) \subset \Omega$ для любого $t \in [0, \tau]$. Кроме того, из того, что g_j сходятся равномерно к G на $\mathcal{M}$, а функции x_j являются решениями задачи (1.3) следует, что $\bar{x}$ является решением краевой задачи (1.2). Таким образом, существующая в силу предложения 1.1 функция $u(\cdot)$ является искомым управлением. □

2. Управляемая система с ограничениями типа неравенств

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = g(t, x, u), \quad t \in [0, \tau] \\ &\Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)), \\ &h(t, x, u) \le 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $h = (h_1, ..., h_s)$, $h_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, s}$ — это заданные непрерывные функции.

Управляемая система (2.1) может быть сведена к управляемой системе (1.1) за счет следующего построения. Положим

$$f(t, x, u) = \max_{j=\overline{1,s}} h_j(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{2.2}$$

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть функция $u(\cdot)$ является допустимым позиционным управлением для управляемой системы (1.1), в которой f определено по формуле (2.2) (т. е. $k = 1$ и система содержит одно ограничение типа равенства). Тогда эта же функция $u(\cdot)$ является допустимым позиционным управлением для управляемой системы (2.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(\cdot)$ — это соответствующая управлению $u(\cdot)$ фазовая траектория, т. е.

$$\dot{x}(t) \equiv g(t, x(t), u(t, x(t))), \quad f(t, x(t), u(t, h(t))) \equiv 0, \quad t \in [0, \tau], \quad \Psi(x(0)) = \Phi(x(\tau)).$$

Тогда, из определения функции f следует, что

$$\max_{j=\overline{1,s}} h_j(t, x(t), u(t, x(t))) \equiv 0, \quad t \in [0, \tau].$$

Значит,

$$h_j(t, x(t), u(t, x(t))) \le 0 \quad \forall\, t \in [0, \tau].$$

Следовательно, $u(\cdot)$ является допустимым позиционным управлением для управляемой системы (2.1). □

Используя это утверждение из теоремы 1.1 выведем достаточные условия существования допустимого управления для системы (2.1).

Теорема 2.1. *Предположим, что отображение $h(t, x, \cdot)$ дифференцируемо для любого $(t, x) \in \Omega$ и его частная производная $\frac{\partial h}{\partial u}(\cdot)$ непрерывна в каждой точке $(t, x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. Пусть*

$$\inf\left\{ |A| : A \in \operatorname{conv}\left\{ \frac{\partial h_j}{\partial u}(t, x, u) : j = \overline{1, s} \right\}, \ (t, x) \in \Omega, \ u \in \mathbb{R}^m \right\} > a, \tag{2.3}$$

$$\alpha + \beta < 2R, \quad \tau\bar{\gamma} \le 2R - \alpha - \beta.$$

Здесь conv *— это выпуклая оболочка множества,*

$$\bar{\gamma} := \max\{|g(t,x,u)| : t \in [0,\tau], \ |x-x_0| \le R, \ |u-u_0| \le \bar{R}_0\},$$

$$\bar{R}_0 := a^{-1} \max\{|f(t,x,u_0)| : t \in [0,\tau], \ |x-x_0| \le R\}.$$

Тогда для задачи (2.1) *существует допустимое позиционное управление, которое определено на множестве* Ω.

Доказательство. Зададим функцию f по формуле (2.2). Покажем, что для функции f выполняются предположения теоремы 1.1.

Предположение **(H1)** выполняется в силу гладкости h по u. Предположение **(H2)** вытекает из гладкости h по u, из очевидного тождества $\partial_u h_j(t,x,u) \equiv \{\frac{\partial h_j}{\partial u}(t,x,u)\}$, и из того, что зависимость множества активных индексов (т. е. номеров j таких, что $h_j(t,x,u) = f(t,x,u)$) от (t,x,u) является полунепрерывной сверху. Предположение **(H3)** вытекает из (2.3). Кроме того, имеем $\alpha + \beta < 2R$ и $\tau\gamma < 2R - \alpha - \beta$, поскольку $\gamma = \bar{\gamma}$ и $R_0 = \bar{R}_0$ по построению.

Таким образом, для функции f выполняются предположения теоремы 1.1. Следовательно, существует функция $u(\cdot)$, которая является допустимым позиционным управлением для системы (2.1). В силу предложения 2.1 эта функция является допустимым позиционным управлением для системы (1.1). □

Замечание 2.1. Если функции h_j не являются гладкими по u, а всего лишь локально липшицевы, и многозначные отображения $\partial_u h^j : \Omega \times \mathbb{R}^m$ полунепрерывны сверху, то для функции f, определенной по формуле (2.2) предположение **(H2)** может нарушаться. Действительно, пусть $n = m = 2$, $s = 2$, $\Omega = \mathbb{R}^2$, $h_1(t,x,u) \equiv u$, $h_2(t,x,u) \equiv t^2 - |u + t^2|$. Тогда $\partial_u f(0,0,0) = \{1\}$ и $\partial_u f(t,0,0) = [-1,1]$ при $t \neq 0$. Значит, предположение **(H2)** нарушается.

References

[1] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, N.Y., 1983.

[2] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, "Smoothing procedure for lipschitzian equations and continuity of solutions", *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2023.

[3] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуовский, "О нелинейных краевых задачах для дифференциальных включений", *Дифференциальные уравнения*, 2023; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, "On nonlinear boundary value problems for differential inclusions", *Differential Equaitions*, 2023.

[4] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, N.Y., 1972.

[5] H. Cartan, *Differential Calculus*, Kershaw Publ. Company, London, 1971.

[6] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Verlag, New York, 2003.

Информация об авторах

Борзов Никита Сергеевич, аспирант, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: borzov-nikita@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7439-0405

Information about the authors

Nikita S. Borzov, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: borzov-nikita@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7439-0405

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Зухра Тагировна
E-mail: zyxra2@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 07.09.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Zukhra T. Zhukovskaya
E-mail: zyxra2@yadex.ru

Received 01.06.2023
Reviewed 07.09.2023
Accepted for press 12.09.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-236-244

УДК 51-76, 519.62

Математическое моделирование в задаче разработки эффективного метода контроля фузариоза колоса пшеницы

Евгений Олегович БУРЛАКОВ[1,2] **, Иван Николаевич МАЛЬКОВ**[1,3]

[1] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»

625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

[3] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В данной работе построена математическая модель на основе непрерывной динамической системы, формализующая взаимодействие фузариевых грибов, растений пшеницы и почвенных микроорганизмов (микофагов и сапрофагов). В работе проведен статистический анализ имеющихся экспериментальных данных, полученных в лабораторных условиях, на основании которого решена задача о восстановлении биологически интерпретируемых параметров построенной модели рассматриваемой экологической системы. В работе также рассмотрена задача импульсного управления в рамках построенной модели, отвечающего направленному воздействию на пищевые цепочки в изучаемой системе, с целью стимуляции роста популяций естественных антагонистов вызывающего патологию пшеницы фузариевого гриба путем внесения в почву специальных смесей органических удобрений. Получены условия, гарантирующие управляемость в рамках рассматриваемой математической модели, а также обеспечивающие непрерывную зависимость решений моделирующих уравнений от управляющих воздействий.

Ключевые слова: математические модели в экологии, идентификация параметров математических моделей, задачи импульсного управления

Благодарности: Работа выполнена в рамках реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030». Результаты разделов 1, 2 получены вторым автором в Тамбовском государственном университете им. Г. Р. Державина при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/). Результаты раздела 3 получены первым автором в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/).

Для цитирования: *Бурлаков Е.О., Мальков И.Н.* Математическое моделирование в задаче разработки эффективного метода контроля фузариоза колоса пшеницы // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 236–244.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-236-244

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-236-244

Mathematical modeling in the problem of developing an effective method for controlling fusarium of wheat ear

Evgenii O. BURLAKOV[1,2], **Ivan N. MALKOV**[1,3]
[1] Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
[3] Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation

Abstract. In this paper we constructed a mathematical model based on a continuous dynamic system, which is formalizing the interaction of fusarium fungi, wheat plants and soil microorganisms (mycophages and saprophages). The paper presents a statistical analysis of the available experimental data obtained under laboratory conditions, on the basis of which we solved the problem of restoring biologically interpreted parameters of the constructed model of the considered ecological system. The paper also considers the problem of impulse control within the constructed mathematical framework, which corresponds to a correction on the food webs in the system in order to stimulate the growth of the populations of natural antagonists of the fusarium fungus causing wheat pathology by applying special mixtures of organic fertilizers to the soil. We obtained conditions that guarantee controllability within the framework of the constructed mathematical model, as well as providing continuous dependence of solutions of the modeling equations on control.

Keywords: mathematical models in ecology, parameter identification, impulse control problems

Acknowledgements: The work is conducted in the framework of the academic leadership program Priority 2030. The results of sections 1-2 were obtained by the second author at Derzhavin Tambov State University with the support of the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/). The results of section 3 were obtained by the first author at V. A. Trapeznikov Institute of Control Problems RAS with the support of the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/20-11-20131/).

Mathematics Subject Classification: 37N25, 34H05.

For citation: Burlakov E.O., Malkov I.N. Mathematical modeling in the problem of developing an effective method for controlling fusarium of wheat ear. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 236–244.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-236-244 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В течение последних десятилетий наблюдается рост потерь урожая пшеницы, вызванный различными почвенными фитопатогенами, в том числе фузариевыми грибами. В большинстве регионов России зерно заражено грибами рода *Fusarium*, причем в некоторых из них доля заражения превышает 50%. Из-за высокой изменчивости и специфической этиологии фузариевых грибов существующие методы их контроля (обработка зерна перед посевом, правильное хранение зерна, а также выращивание устойчивых к фузарию сортов пшеницы) не являются достаточно эффективными.

Есть все основания полагать, что манипулируя структурой детритных пищевых сетей, можно воздействовать на почвенную фазу фузариевых грибов, во время которой эти грибы ведут себя подобно сапротрофной микрофлоре и имеют пониженную конкурентную способность [1, 2], а также низкую устойчивость к выеданию почвенной фауной [3–5].

В данной работе ставится задача построения математической модели, позволяющей оценить взаимное влияние фузариевых грибов, микофагов и сапрофагов друг на друга и на биомассу пшеницы на основании экспериментальных данных. Также в работе предложена формализация воздействий на детритные пищевые цепи в исследуемой системе путем внесения специальной смеси органических удобрений (мульчирующей смеси), являющейся питательным субстратом для естественных антагонистов фузария, в терминах задачи импульсного управления для рассматриваемой модели.

1. Анализ экспериментальных данных

В ходе эксперимента использовались четыре независимых друг от друга экспериментальных площадки, заполненных почвой с посевных полей. На эти площадки были высажены всходы пшеницы. На условные 0-й, 21-й, 48-й и 95-й дни эксперимента на всех четырех площадках в верхнем слое почвы собирались данные: биомасса фузариевых грибов (копии генов / м^2), численность микофагов и сапрофагов (особи / м^2), а также средняя масса растения пшеницы (граммы). На рисунке 1 представлены данные эксперимента.

Для решения задачи построения математической модели по экспериментальным данным необходимо оценить вероятностный закон, по которому они распределены. С помощью критерия согласия Лиллиефорса [6] при проверке ряда гипотез о типе распределения данных установлено, что используемые экспериментальные данные распределены лог-нормально.

Так как предположения о взаимодействии компонент системы основаны на данных по динамике численности в течение нескольких недель, необходимо выяснить, соответствуют ли данным сделанные предположения. Для оценки существенности отличий между данными в разные дни эксперимента, была проверена статистическая значимость различий между средними у рассматриваемых групп (группы сформированы по дням) с использованием критерия Бартлетта [7]. В таблице 1 приведены вычисленные значения распределения χ^2 на уровне значимости $\alpha = 0.05$ с тремя степенями свободы для данных по фузарию ($\chi^2_{3,0.05}(F)$), микофагам ($\chi^2_{3,0.05}(M)$), сапрофагам ($\chi^2_{3,0.05}(S)$) и пшенице ($\chi^2_{3,0.05}(B)$), а также критические значения ($\chi^2_{3,0.05}(Cr)$) данного распределения. Из значений в таблице 1 можно сделать вывод, что средние для всех групп статистически значимо различаются.

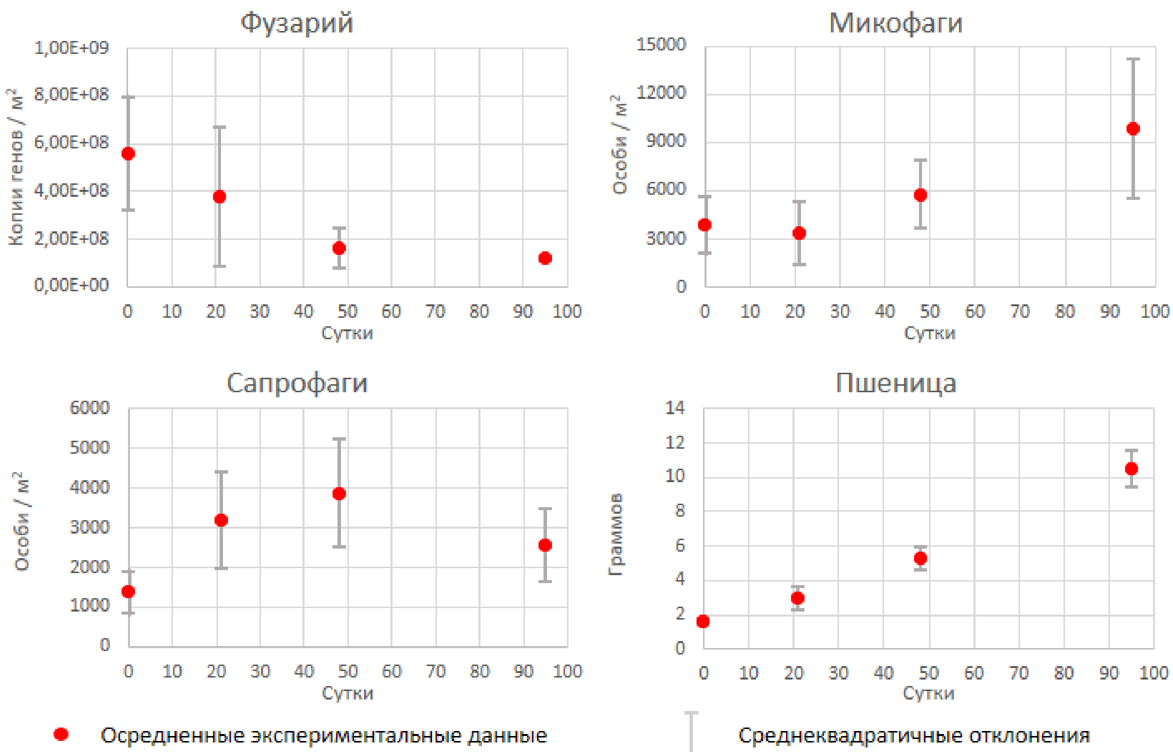

Рис. 1. Экспериментальные данные

Таблица 1

Результаты проверки критерия Бартлетта для экспериментальных данных

$\chi^2_{3,0.05}(Cr)$	$\chi^2_{3,0.05}(F)$	$\chi^2_{3,0.05}(M)$	$\chi^2_{3,0.05}(S)$	$\chi^2_{3,0.05}(B)$
7,81	85,25	15,93	11,12	27,76

2. Математическая модель

В описываемой системе предполагаются взаимодействия типа «хищник-жертва», где в роли хищников выступают грибоядные микофаги и сапрофаги, а в роли жертв — грибы рода *Fusarium*. Более того, фузариевые грибы могут размножаться вне зависимости от условий и наличия пищи, а на количество микофагов и сапрофагов наличие пищи влияет существенно, то есть их прирост зависит от количества фузариевых грибов в почве. Также предполагается негативное влияние фузариевых грибов на биомассу пшеницы, так как патогенный гриб поражает корни и лишает растение возможности получать необходимые вещества и минералы. Схема описанной модели приведена на рисунке 2 (остроугольными и прямоугольными стрелками обозначены взаимодействия, характеризуемые положительным и отрицательным, соответственно, вкладами в динамику указанных компонент).

Система дифференциальных уравнений, формализующих взаимодействие почвенных микроорганизмов (фузарий, микофаги, сапрофаги) и растений пшеницы в соответствии с представленной схемой, имеет следующий вид:

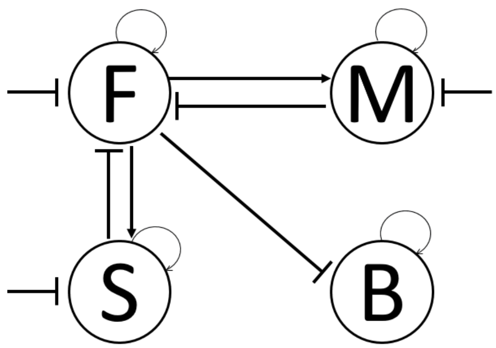

Рис. 2. Схема взаимодействия организмов в рассматриваемой экологической системе

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}F(t) = \beta_F F(t)(1 - \frac{F(t)}{\theta_F}) - \gamma_{FM}F(t)M(t) - \gamma_{FS}F(t)S(t),\\
&\frac{d}{dt}M(t) = \beta_M M(t) - \beta_{FM}F(t)M(t) - \mu_M M(t),\\
&\frac{d}{dt}S(t) = \beta_S S(t) - \beta_{FS}F(t)S(t) - \mu_S S(t),\\
&\frac{d}{dt}B(t) = \frac{\beta_B B(t)(C_B - B(t))}{\theta_B + \gamma_{FB}F(t)},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $F(t), M(t), S(t)$ — значения плотности популяции фузария, микофагов, сапрофагов, соответственно, а $B(t)$ — среднее значение сухой массы растения пшеницы; в таблице 2 представлено описание параметров модели.

Для решения задачи идентификации параметров системы (2.1), в сокращенной форме имеющей вид

$$\dot{\overline{X}}(t) = G(\overline{X}),$$

где $\overline{X} = (F(t), M(t), S(t), B(t))^T_,$ $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ — локально липшицева функция, соответствующая правой части (2.1), применим метод максимального правдоподобия. С учетом лог-нормального распределения данных введем функционал $\mathcal{F}$, определяющий соответствие значений решения модели экспериментальным данным:

$$\mathcal{F}(\overline{X}) = \sum_{t_i \in \{0,21,48,95\}} \sum_{j=1}^{4} (\ln x_j(t_i, \overline{p}) - \ln \widetilde{x}_{ij})^2.$$

Здесь t_i — i-й день ($t_i \in \{0, 21, 48, 95\}, i = 1, 2, 3, 4$), переменная суммирования j отвечает за определенную компоненту модели, $\widetilde{x}_{ij}$ — экспериментальные данные j-й компоненты $\overline{X}$ на день t_i, $\overline{p}$ — вектор параметров модели (см. таблицу 2), $x_j(t_i, \overline{p})$ – значение j-й компоненты $\overline{X}$ в момент времени t_i при значениях параметров $\overline{p}$, полученное при решении системы (2.1). Для идентификации параметров модели необходимо решить задачу минимизации функционала $\mathcal{F}$ относительно переменной $\overline{p}$, предварительно оценив области определения ее компонент, например, методом профилирования функции правдоподобия [8]. Результаты применения данного метода представлены в таблице 3.

Для решения задачи поиска значений $\overline{p}$, минимизирующих функционал $\mathcal{F}$, используем метод Нелдера–Мида [9]. Динамика компонент системы (2.1) при найденном значении $\overline{p}$ представлена на рисунке 3.

Таблица 2

Описание параметров модели (2.1)

Параметр	Описание	Параметр	Описание
β_F	Скорость прироста численности фузария	β_S	Скорость размножения сапрофагов
θ_F	Максимальное возможное количества фузария	β_{FS}	Скорость воспроизводства сапрофагов при питании фузарием
γ_{FM}	Скорость истребления фузария питающимися ими микофагами	μ_S	Скорость естественной гибели сапрофагов
γ_{FS}	Скорость истребления фузария питающимися ими сапрофагами	β_B	Скорость увеличения биомассы пшеницы
β_M	Скорость размножения микофагов	C_B	Максимальная возможная биомасса пшеницы
β_{FM}	Скорость воспроизводства микофагов при питании фазурием	θ_B	Порог полуингибирования биомассы пшеницы под действием фузария
μ_M	Скорость естественной гибели микофагов	γ_{FB}	Степень влияния фузария на скорость увеличения биомассы пшеницы

Таблица 3

Результат оценки областей определения параметров модели (2.1)

Параметр	Левая граница	Правая граница
β_F	0,00	18802,44
θ_F	368,87	∞
γ_{FM}	0,00	2,74E-05
γ_{FS}	0,00	2,17E-05
β_M	0,00	22288,40
β_{FM}	0,00	5,90E-05
μ_M	0,00	22286,41
β_S	0,00	51995,12
β_{FS}	0,00	3,21E-04
μ_S	0,00	51993,13
β_B	3,20E-02	4,08E-02
C_B	0,00	1,36E+07
θ_B	28,15	35,89
γ_{FB}	0,00	3,46E-08

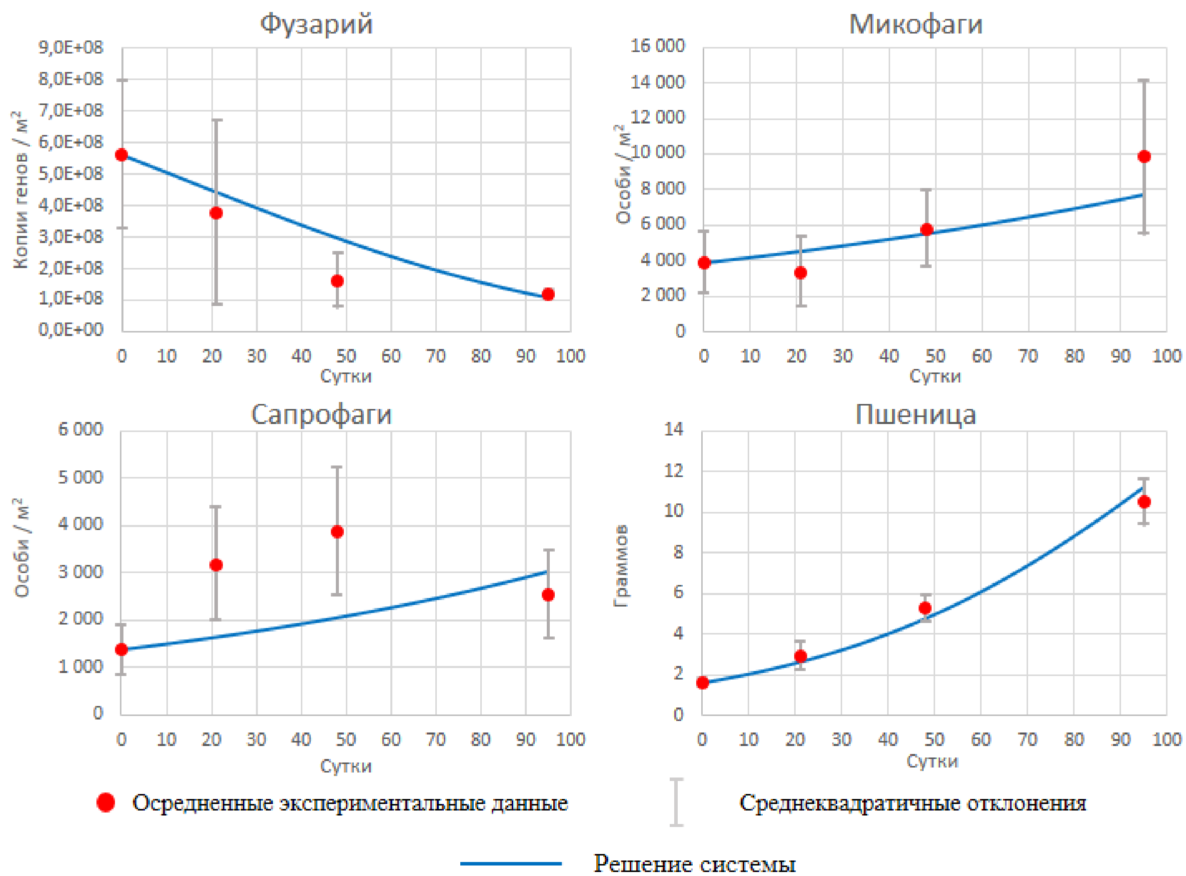

Рис. 3. Динамика компонент системы (2.1)
при идентифицированных значениях параметров

3. Задача импульсного управления для модели (2.1)

Результаты моделирования демонстрируют возможность применения модели (2.1) для дальнейших исследований, направленных на разработку методов контроля фузариевых грибов в агроценозах путем внесения мульчирующих смесей, стимулирующих рост популяций естественных антагонистов фузария. Данные методы естественно формализуются, например, в рамках задачи импульсного управления для изучаемой системы, дополненной компонентой V, соответствующей массе мульчирующей смеси:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}F(t) = \beta_F F(t)(1-\frac{F(t)}{\theta_F}) - \gamma_{FM}F(t)M(t) - \gamma_{FS}F(t)S(t),\\
&\frac{d}{dt}M(t) = \beta_M M(t) - \beta_{FM}F(t)M(t) - \mu_M M(t) + \nu_M V(t),\\
&\frac{d}{dt}S(t) = \beta_S S(t) - \beta_{FS}F(t)S(t) - \mu_S S(t) + \nu_S V(t),\\
&\frac{d}{dt}B(t) = \frac{\beta_B B(t)(C_B - B(t))}{\theta_B + \gamma_{FB}F(t)} + \nu_B V(t),\\
&\frac{d}{dt}V(t) = -V(t)(c_M M(t) + c_S S(t) + c_B B(t)),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где параметры ν_M, ν_S, ν_B отвечают за влияние смеси на популяции микофагов и сапрофагов и биомассу пшеницы, соответственно; параметры c_M, c_S, c_B определяют скорости потребления мульчирующей смеси микофагами и сапрофагами и растениями пшеницы.

Будем рассматривать систему (3.1) с начальным условием $\overline{X}(a) = \overline{X}_0 \in \mathbb{R}^5$ на временном отрезке $[a, b]$, соответствующем сезонному циклу системы. С учетом обозначения

$$\overline{X}(t) = (F(t), M(t), S(t), B(t), V(t))^T, \quad \overline{X}(t) \in \mathbb{R}^5,$$

систему (3.1) можно переписать в виде

$$\dot{\overline{X}}(t) = \overline{X}_0 + \int_a^t G(\overline{X}(s))ds. \tag{3.2}$$

Рассмотрим следующую задачу импульсного управления для (3.2):

$$\dot{\overline{X}}(t) = \overline{X}_0 + \int_a^t G(\overline{X}(s))ds + \overline{U}(t), \tag{3.3}$$

где $\overline{U}$ — управляющая функция вида $(0, 0, 0, 0, \sum_{\forall\, k} \chi_{[t_k, b]}(t)V_k)^T$, χ_A — характеристическая функция множества $A \subset [a, b]$, $\{t_k\} \subset [a, b]$, $0 \leqslant k \leqslant K \in \mathbb{N}$. Таким образом, различные управления $\overline{U}$ могут состоять из разного количества импульсных воздействий, общее количество которых для каждого управления не превосходит $K \in \mathbb{N}$.

Определим множество $\mathcal{Y}$ функций вида $\overline{Y} = \overline{X} + \overline{U}$, где $\overline{X}$ — функция из класса непрерывных вектор-функций с пятью компонентами. Множество $\mathcal{Y}$ образует полное метрическое пространство относительно метрики

$$\rho_{\mathcal{Y}}(\overline{Y}_1, \overline{Y}_2) = \|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\|_C + \int_a^b \Big| \sum_{k: t_k^1 \in [a,b]} \chi_{[t_k^1, b]}(t)V_k^1 - \sum_{k: t_k^2 \in [a,b]} \chi_{[t_k^2, b]}(t)V_k^2 \Big| dt,$$

где символом $\|\cdot\|_C$ обозначена норма в соответствующем пространстве непрерывных функций. Подобная метрика была определена в работе [10] при исследовании задач импульсного управления нейронными системами.

Решением задачи управления (3.3) будем считать функцию $\overline{Y} \in \mathcal{Y}$, удовлетворяющую уравнению (3.3).

Утверждение 3.1. *При любом управлении $\overline{U}$ задача (3.3) имеет единственное решение. Кроме того, если некоторая последовательность управлений $\overline{U}^i$ сходится к управлению $\overline{U}^0$ в смысле сходимости $\int_a^b \Big| \sum_{k: t_k^i \in [a,b]} \chi_{[t_k^i, b]}(t)V_k^i dt - \sum_{k: t_k^0 \in [a,b]} \chi_{[t_k^0, b]}(t)V_k^0 \Big| dt \to 0$ при $i \to \infty$, то последовательность решений $\overline{Y}^i$ системы (3.3), соответствующих управлениям $\overline{U}^i$, сходится к решению $\overline{Y}^0$, соответствующему управлению $\overline{U}^0$, в метрике пространства $\mathcal{Y}$.*

Справедливость данного утверждения следует из основного результата работы [10].

References

[1] G. S. Abawi, J. W. Lorbeer, “Several aspects of the ecology and pathology of Fusarium oxysporum f. sp. cepae”, *Phytopathology*, **62** (1972), 870–876.

[2] J. J. Marois, D. J. Mitchell, “Effects of fungal communities on the pathogenic and saprophytic activities of Fusarium oxysporum f. sp. radicis-lycopersici”, *Phytopathology*, **71** (1981), 1251–1256.

[3] S. N. Smith, “An overview of ecological and habitat aspects in the genus Fusarium with special emphasis on the soil-borne pathogenic forms”, *Plant Pathology Bulletin*, **16** (2007), 97–120.

[4] G. Innocenti, M. A. Sabatini, "Collembola and plant pathogenic, antagonistic and arbuscular mycorrhizal fungi: a review", *Bulletin of Insectology*, **71**:1 (2018), 71–76.

[5] F. Meyer-Wolfarth, S. Schrader, E. Oldenburg, J. Weinert, F. Brunotte, "Collembolans and soil nematodes as biological regulators of the plant pathogen Fusarium culmorum", *Journal of Plant Diseases and Protection*, **124** (2007), 493–498.

[6] H. W. Lilliefors, "On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown", *Journal of the American Statistical Association*, **62**:318 (1967), 399–402.

[7] M. S. Bartlett, "Properties of sufficiency and statistical tests", *Proceedings of the Royal Statistical Society*, **160**:901 (1937), 268–282.

[8] Н. Н. Амосова, Б. А. Куклин, С. Б. Макарова, Ю. Д. Максимов, Н. М. Митрофанова, В. И. Полищук, Г. Л. Шевляков, *Вероятностные разделы математики*, Иван Федоров, СПб., 2001. [N. N. Amosova, B. A. Kuklin, S. B. Makarova, Yu. D. Maksimov, N. M. Mitrofanova, V. I. Polisthshyuk, G. L. Shevlyakov, *Veroyatnostnye Razdely Matematiki*, Ivan Fedorov Publ., SPb., 2001 (In Russian)].

[9] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, P. E. Wright, "Convergence properties of the Nelder–Mead simplex method in low dimensions", *SIAM Journal on Optimization*, **9**:1 (1998), 112–147.

[10] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskii, "On well-posedness of generalized neural field equations with impulsive control", *Russian Mathematics (Iz VUZ)*, **60** (2016), 66-69.

Информация об авторах

Бурлаков Евгений Олегович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник института X-BIO, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Мальков Иван Николаевич, аспирант, институт математики и компьютерных наук, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 25.08.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the authors

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Insitute X-BIO, Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Ivan N. Malkov, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Computer Science, Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Received 05.06.2023
Reviewed 25.08.2023
Accepted for press 12.09.2023

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-245-255
УДК 519.816, 614, 316.728

Динамические суждения о связанном со здоровьем качестве жизни на основе метода анализа иерархий

Марина Пинхасовна ДЬЯКОВИЧ[1,2] **, Иван Анатольевич ФИНОГЕНКО**[3]
[1] ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет»
665835, Российская Федерация, г. Ангарск, ул. Чайковского, 60
[2] ФГБНУ «Восточно-Сибирский институт медико-экологических исследований СО РАН»
665826, Российская Федерация, г. Ангарск, 12а микрорайон, 3
[3] ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН»
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134

Аннотация. Разрабатывается метод исследования динамики основных критериев, связанных со здоровьем качества жизни (СЗКЖ), основанный на методе анализа иерархий (МАИ) Т. Саати. Предполагается, что по существующим специфическим и неспецифическим опросникам с течением времени меняются оценки шкал (критериев) СЗКЖ, что приводит и к изменению степени их влияния друг на друга. Это, в свою очередь, меняет интегральные показатели СЗКЖ. Возникает необходимость рассматривать таблицы динамических суждений на основе МАИ с использованием различных классов функций времени, исходя из специфики задачи и критериев СЗКЖ. В работе предлагается новая методика оценок СЗКЖ с учетом динамики основных характеристик МАИ.

Ключевые слова: связанное со здоровьем качество жизни, метод анализа иерархий, динамические суждения, матрица парных сравнений, векторная функция приоритетов

Для цитирования: *Дьякович М.П., Финогенко И.А.* Динамические суждения о связанном со здоровьем качестве жизни на основе метода анализа иерархий // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 245–255.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-245-255

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-245-255

Dynamic evaluation of criteria of the health-relatad quality of life on the base of the hierarchies analysis method

Marina P. DYAKOVICH[1,2] **, Ivan A. FINOGENKO**[3]
[1] Angarsk State Technical University
60 Tchaikovsky St., Angarsk 665835, Russian Federation
[2] East-Siberian Institute of Medical and Ecological Research SB RAS
3, 12a microdistrict, Angarsk 665826, Russian Federation
[3] V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS
134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Abstract. A method for studying the dynamics of the main criteria of the health-related quality of life (HRQoL), based on the hierarchies analysis method (HAM) of T. Saaty is being developed. It is assumed that the assessments of HRQoL scales (criteria) according to existing specific and non-specific questionnaires change over time, which also leads to a change in the degree of their influence on each other. This, in turn, changes the integral indicators of HRQoL. There is a need to work with tables of dynamic judgments based on HAM using different classes of time functions, considering the specifics of the task and HRQoL criteria. The paper proposes a new methodology for estimating HRQoL, taking into account the dynamics of the main characteristics of HAM.

Keywords: health-related quality of life, hierarchies analysis method, dynamic judgments, pairwise comparison matrix, vector function of priorities

Mathematics Subject Classification: 93-10

For citation: Dyakovich M.P., Finogenko I.A. Dynamic evaluation of criteria of the health-relatad quality of life on the base of the hierarchies analysis method. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 245–255. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-245-255 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Проблема изучения динамики связанного со здоровьем качества жизни

В Стратегии национальной безопасности Российской Федерации, которая определяет цели и задачи государственной политики в области обеспечения национальной безопасности и устойчивого развития страны на долгосрочную перспективу, достойное качество жизни является одним из ее важнейших компонентов [1]. В этой связи изучение качества жизни населения и вопросы его измерения являются одними из наиболее актуальных. Качество жизни представляет собой набор разнородных и многомерных критериев, которые определяются зачастую эмоциональным состоянием человека, и главным здесь является здоровье человека.

Проблеме анализа связанного со здоровьем качества жизни (СЗКЖ) посвящено большое количество работ, существует и множество методик его определения. Наиболее информативным является исследование СЗКЖ в комплексе объективных и субъективных параметров, изменяющихся во времени, поскольку установки определенного субъекта не являются постоянными: они меняются со временем и опытом, связаны с адаптаций, совладанием, оптимизмом, самоконтролем и самооценкой [2]. Оценка СЗКЖ предусматривает сравнение значений параметров во временном (преимущественно ретроспективном) или в пространственном (межтерриториальном или межгрупповом) аспекте. Интегральный индекс качества жизни характеризует статическое состояние определенных субъектов в определенный момент времени и отражает динамику измерения СЗКЖ. Это обусловливает необходимость создания адекватных математических алгоритмов и программных средств, которые позволят по ряду критериев оценивать динамику СЗКЖ, а не только рассчитывать отдельные статистические показатели.

Исследование динамики СЗКЖ человека по существующим специфическим и неспецифическим опросникам включает то, как с течением времени меняются различные настроения, симптомы и другие сферы СЗКЖ, как они влияют друг на друга. Этим вопросам посвящено много работ специалистов медицинского профиля, рассматривающих динамику СЗКЖ у пациентов как сравнение параметров шкал СЗКЖ в двух временных точках «до» и «после лечения/реабилитации» в терминах «выше» и «ниже». При этом используются в лучшем случае t-критерий Стьюдента для определения достоверности различий между средними значениями для двух связанных/несвязанных выборок или непараметрический критерий сравнения Уилкоксона–Манна–Уитни [3–5].

Нами выявлено лишь незначительное количество работ в интересующей нас области, использующих современный аппарат математической статистики. Так, в работе [6] проведен анализ изменений СЗКЖ у пациентов до операции, через 3 мес. и 12 мес. после нее с использованием обобщенных уравнений оценки (GEE). Этот метод позволил получить скорректированные средние показатели СЗКЖ по отдельным шкалам опросника SF-36 с учетом возможного влияния пола, возраста и исходного СЗКЖ на динамику показателей.

Для определения согласованности и ситуационной изменчивости индивидуальных различий параметров СЗКЖ во времени в [7] была использована модель латентных признаков состояния (LST) с четырьмя доменами СЗКЖ, измеряющими латентный признак неоднократно в течение шести месяцев с задержкой по трем переменным латентного состояния. Эта модель может фиксировать длительные и систематические изменения в конкретной переменной в течение длительного периода времени.

Подобный многофакторный подход к моделированию LST обеспечивает надежные оценки изменений с течением времени [8]. СЗКЖ представляется как сеть причинно-взаимодействующих переменных, поэтому, оценивая сетевые модели по данным, полученным методом выборки опыта (ESM), можно выявить потенциальные динамические взаимосвязи между наблюдаемыми переменными [9].

Доступные нам работы касаются особенностей многолетней динамики СЗКЖ у пациентов, либо сравнения параметров СЗКЖ в зависимости от времени на популяционном уровне с использованием интегральных показателей [10]. Использование метода анализа иерархий (МАИ) для интеграции показателей СЗКЖ и структурное моделирование позволило авторам выявить и явные, и латентные взаимосвязи между различными блоками СЗКЖ [11, 12].

Ученые из Нидерландов [13] предложили определять траектории СЗКЖ от двух месяцев до одного года после инсульта с использованием моделирования смеси скрытых переменных (Latent class growth mixture modeling) и определять факторы, связанные с принадлежностью к траектории полиномиального регрессионного анализа.

Для определения однородных субпопуляций, отличающихся временными траекториями СЗКЖ, по мнению [14], уместно рассматривать параметры СЗКЖ не как непрерывные, а как порядковые переменные для применения смеси кумулятивных моделей со случайным эффектом.

Можно заметить, что суждения о качестве любого объекта субъективны и могут меняться в соответствии с различными ситуациями, которые в свою очередь зависят от времени. В системно-динамических моделях общая картина СЗКЖ должна рассматриваться во времени, что может помочь управлению компонентами СЗКЖ на основе применения сценарного подхода к моделированию.

Несмотря на значительное количество исследований по СЗКЖ пациентов, а также на попытки оценить СЗКЖ отдельных популяций населения, в настоящее время недостаточно разработан такой важный аспект, как анализ динамических характеристик показателей, формирующих его интегральную оценку. Наша цель — разработать методику и дать обоснование построения динамических оценок для сравнения шкал (критериев) СЗКЖ с использованием основных вычислительных процедур МАИ.

1. Общие проблемы исследования СЗКЖ и построения интегральных показателей

Проблемы исследования СЗКЖ связаны с многомерностью составляющих его шкал и их разнородностью. Часто исследователи сталкиваются с задачей сравнения СЗКЖ у одного индивида с течением времени или у различных групп индивидов в один и тот же момент времени. Использование векторных критериев оценки СЗКЖ неизбежно приводит к появлению несравнимых состояний. Поэтому для оценки и сравнения СЗКЖ первым шагом является перевод информации о СЗКЖ из качественной в количественную, а затем дальнейший анализ и использование численных показателей СЗКЖ. Метод анализа иерархий Т. Саати [15] позволяет это делать и получать набор оценок каждого критерия числами, которые образуют вектор приоритетов шкал СЗКЖ.

В наших исследованиях мы опираемся на структурную модель СЗКЖ, на основе информации, собранной по неспецифическому опроснику SF-36 (The Short Form-36). Модель, описанная в [12], была построена с помощью МАИ.

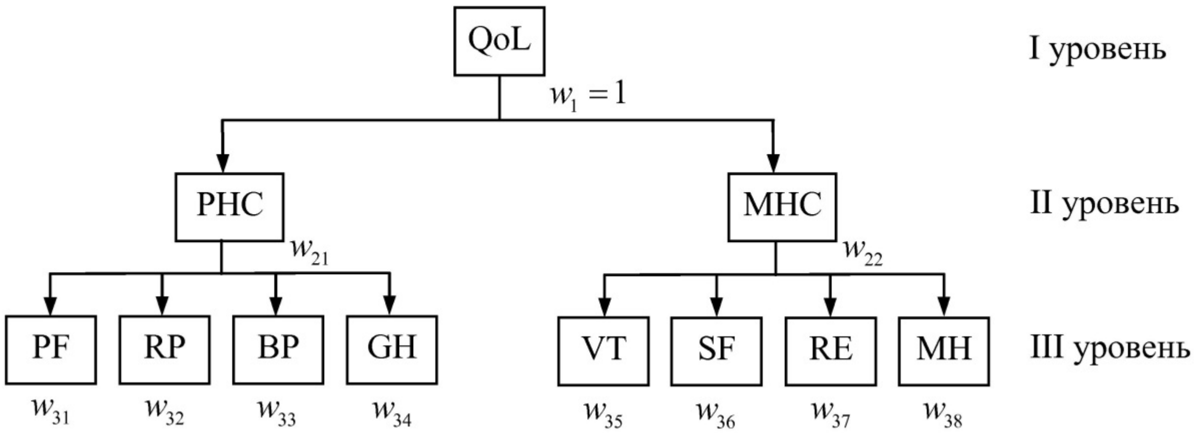

Рис. 1. Иерархическая модель СЗКЖ

Здесь приняты следующие обозначения: PHC — физический компонент здоровья, PF — физическое функционирование; RP — ролевое функционирование, обусловленное физическим состоянием; BP — интенсивность боли; GH — общее состояние здоровья; MHC — психологический компонент здоровья; MH — психическое здоровье; RE — ролевое функционирование, обусловленное эмоциональным состоянием; SF — социальное функционирование; VT — жизненная активность; QoL — СЗКЖ.

Скаляризация векторных критериев решает проблему несравнимости. Интегральный показатель получаем, как некоторую усредненную характеристику состояния объекта, которым является СЗКЖ. Вначале строится линейная свертка

$$J(w,x) = w_{21}\sum_{i=1}^{4} w_{3i}x_{3i} + w_{22}\sum_{i=5}^{8} w_{3i}x_{3i}, \tag{1.1}$$

где $x = (x_{31},\ldots,x_{38})$ — вектор нижнего уровня иерархии СЗКЖ из рис. 1, представляющий результаты анкетирования (показатели) в баллах от 0 до 100 для шкал опросника на третьем уровне иерархии. Векторы приоритетов $w_2 = (w_{21}, w_{28})$, $w_3 = (w_{31},\ldots,w_{38})$, построенные с использованием МАИ, рассматриваются, как векторы весовых коэффициентов вложенной линейной свертки (1.1). После нормирования получаем интегральный показатель

$$I(w,x) = J(w,x)/100. \tag{1.2}$$

Очевидно, что $0 \leqslant I(w,x) \leqslant 1$ и $I(w,x)$ тем ближе к 1, чем выше значения x_{3i}. Максимум, равный 1, достигается при $x_{3i} = 100$ для всех $i = 1,\ldots,8$.

Интегральный показатель может также служить механизмом обратной связи между субъектами, принимающими решения для улучшения показателя СЗКЖ, и самим объектом управления. Интересна динамика этого показателя. Если $I(w,x)$ рассматривать как целевую функцию, оптимальный путь достижения максимума представляется как быстрейшее достижение интегральным показателем своего наибольшего значения из определенного начального состояния. Процедура оптимального улучшения показателя СЗКЖ до максимального, при котором все показатели 3-го уровня иерархии принимают значения в баллах, равные 100, следующая. Любая функция векторного аргумента в направлении градиента растет быстрее всего. Поэтому из текущего состояния вектора показателей следует двигаться в направлении градиента функции $J(w,x)$, который представляет собой вектор весовых коэффициентов. Таким образом, для наибыстрейшего улучшения СЗКЖ для каждого человека показатели восьми составляющих шкал опросника SF-36 должны изменяться пропорционально своим весовым коэффициентам.

Проблему выбора весовых коэффициентов решает МАИ. Для случая динамических суждений о критериях СЗКЖ они становятся функциями времени. Тогда интегральный показатель также становится функцией времени, и вопрос его оптимизации становится отдельной задачей, которую мы в данной статье не рассматриваем.

2. Динамические суждения МАИ

С математической точки зрения структурная модель (рис. 1) — это граф-дерево, в котором элементы СЗКЖ, как системы, распределены по уровням. Качественные суждения экспертов, полученные на основе парных сравнений критериев СЗКЖ, преобразуются в количественные. Для достижения этой цели на каждом уровне составляются квадратные матрицы парных сравнений. На втором уровне это будет 2×2 матрица, и на третьем уровне — две матрицы 4×4. Вектор весовых коэффициентов (вектор приоритетов) является решением линейного уравнения

$$Aw = \lambda_{max} w, \tag{2.1}$$

где λ_{max} — наибольшее собственное значение матрицы парных сравнений A, которое для обратно симметричных матриц не превышает ее размерности. Поэтому отклонение λ_{max} от размерности матрицы служит мерой ее согласованности. Собственное число λ_{max} и собственный вектор матрицы (решение уравнения (2.1)) находятся методами линейной алгебры.

Мы исходим из того, что суждения могут меняться в соответствии с различными ситуациями с течением времени и, тем самым, формировать зависящую от времени матрицу парных сравнений. Но тогда будут меняться и собственное число λ_{max} этой матрицы, и вектор приоритетов. Таким образом, мы приходим к необходимости решения уравнения

$$A(t)w(t) = \lambda_{max}(t)w(t). \tag{2.2}$$

Но прежде, чем перейти к уравнению (2.2), необходимо внести изменения в шкалу сравнения критериев СЗКЖ, т. е. нужно иметь возможность в матрицу парных сравнений записывать функции времени, сохраняя для них диапазон границ от 1 до 9. Этот диапазон обусловлен возможным количеством сравниваемых критериев, которое не должно превосходить 7 ± 2 элементов. Использовать этот предел, исходя из психологических возможностей эксперта, рекомендует автор МАИ [15]. В то же время разработан математический аппарат, позволяющий определять количественные значения критерия размерности множеств альтернатив в экспертных оценках, проводимых методом парных сравнений, в разных ситуациях [16].

Итак, необходимо вводить в рассмотрение функции времени, которые должны отражать представления экспертов о динамике исследуемого объекта, основанные на каких либо статистических данных, интуиции, аналогиях и т. п. В этой ситуации представляется разумным выделять классы функций, описывающие динамику процессов. Они могут классифицироваться как постоянные, возрастающие, убывающие, колебательные и т. д. Некоторые классы функций и связанный с ними характер изменения динамических суждений об исследуемом объекте представлены в таблице [15, с. 90]. Отметим, что эта таблица не может исчерпывать всех возможных вариантов изменения значений шкал СЗКЖ.

Функции, описывающие эти изменения, всякий раз подлежат определению, а формулы динамики в МАИ могут быть записаны, вообще говоря, для любой функции, зависящей от переменной t.

Следующее наше замечание связано с тем, что в уравнении (2.2) желательно получить зависимость максимального собственного значения $\lambda_{max}(t)$ и собственного вектора $w(t)$ матрицы $A(t)$ в явной аналитической форме. Только это позволит проследить динамику развития вектора приоритетов СЗКЖ во взаимосвязи с изменениями матрицы парных сравнения. Здесь можно отметить, что собственные значения любой матрицы размерности $n \times n$ являются решения алгебраического уравнения n-го порядка. Известно, что в квадратурах такое уравнение можно решить только для $n \leqslant 4$, а для более высоких порядков следует применять приближенные методы решения. Поэтому в общей ситуации переход к динамическим суждениям в МАИ создает дополнительные трудности исследований СЗКЖ. Но имеется возможность построения графиков для компонент вектора приоритетов, что делает сравнительный анализ критериев СЗКЖ наглядным.

Здесь мы запишем формулы МАИ [15, раздел 5.4] для матрицы 2×2, которые будут использованы дальше в иллюстративном примере динамики шкал «физический компонент» и «психологический компонент» СЗКЖ на втором уровне иерархии (рис. 1). Мы должны построить матрицу парных сравнений 2-го порядка, и сравнению между собой подлежат критерии РНС и МНС.

Пусть для описания динамики суждений выбрана некоторая функция $a(t)$. Для этого случая $\lambda_{max}(t) \equiv 2$ и, учитывая обратную симметричность матрицы парных сравнений, уравнение (1.2) записывается в виде

$$\begin{aligned} &w_1(t) + a(t)w_2(t) = 2w_1(t), \\ &w_1(t)/a(t) + w_2(t) = 2w_2(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда из первого уравнения получаем $w_1(t) = a(t)w_2(t)$. Полагая, например, $w_2(t) = 1$, получаем $w_1(t) = a(t)$. Вектором приоритетов будет вектор $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$, определенный из уравнения (2.3) после нормализации. Нормализация применяется для наглядности, т. к. степень важности (весовые коэффициенты) критериев удобно рассматривать в диапазоне от 0 до 1. Для уравнений (2.3) вектор приоритетов запишется в виде $w(t)/(a(t)+1)$. Выбор функции зависит от конкретной задачи.

Весь период жизни человека разобьем на периоды. Эта операция, по-видимому, должна быть характерной для любой динамической задачи, что приведет к последовательности матриц парных сравнений, хотя формально задача записывается одной матрицей парных сравнений с функцией $a(t)$, устроенной по-разному на каждом отрезке времени.

Мы выделяем следующие временные периоды жизненного пути человека:

1. $t \leqslant 20$ — юность (учеба, выбор профессии);
2. $20 \leqslant t \leqslant 40$ — молодость (работа, карьера, семья);
3. $40 \leqslant t \leqslant 60$ — первый период зрелости (работа, семья, итоги);
4. $60 \leqslant t \leqslant 80$ — второй период зрелости (пенсия, работа, семья);
5. $80 \leqslant t$ — старость (пенсия, семья).

Примем следующие соглашения. В первом периоде физическая и психическая компоненты СЗКЖ равнозначны. Во втором доминирует физическая компонента. Предполагаем, что максимум доминирования в два раза приходится на 40 лет. После этого доминирование физической компоненты уменьшается, и в 60 лет физическая и психическая компоненты СЗКЖ снова равнозначны. Далее начинается доминирование психической компоненты, которое нарастает до 80 лет и становится в четыре раза значимее физической. Далее это соотношение сохраняется.

Отметим, что наши рассуждения весьма условны и предназначены лишь для иллюстрации динамических суждений о СЗКЖ. Выбор возрастных периодов может быть изменен без каких-либо методических и вычислительных проблем. Для удобства описание функции в таблице динамических суждений будет сделано так, чтобы она была непрерывной. Разрывы функции из матрицы парных сравнений будут означать катастрофические изменения физического или психического здоровья человека. С теоретической точки зрения проблемы не возникнут, но на практике определить точки таких катастроф, вообще говоря, невозможно. Здесь могут оказаться полезными методы интервального анализа [17]. Мы ставим задачу определения численных соотношений значимости физической и психической компонент СЗКЖ, исходя из, вообще говоря, качественных его характеристик и соглашений.

Решение задачи:

Функция $a(t)$ для матрицы парных сравнений для описанных выше соглашений имеет вид.

- $t \leqslant 20$ — функция $a(t) = 1$ постоянна;
- $20 \leqslant t \leqslant 60$ — функция $a(t) = -(t-40)^2/400 + 2$ перевернутая и сдвинутая вправо парабола, достигает максимума, равного 2, при $t = 40$;
- $60 \leqslant t \leqslant 80$ — сдвинутая вправо парабола, достигает минимума, равного $1/2$, при $t = 80$;
- $80 \leqslant t$ — функция $a(t) = 1/2$ постоянна.

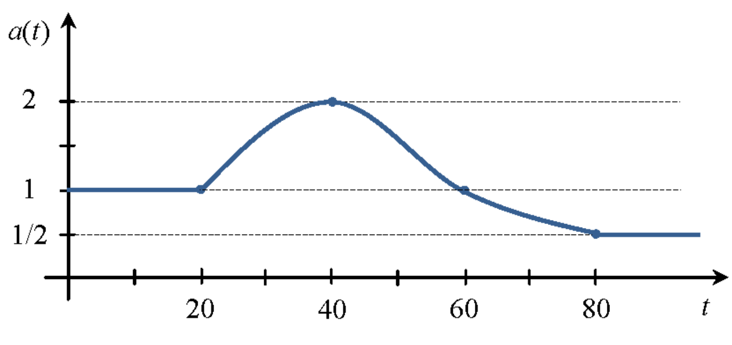

Рис. 2. Функция динамических суждений

График функции $a(t)$ на рис. 2 отражает динамику шкал СЗКЖ в соответствии с принятыми соглашениями, которая, что вообще говоря, может быть выражена другой функцией, отражающей эту динамику. Матрица парных сравнений и формулы для вычисления вектора приоритетов (весовых коэффициентов) представлены в таблице 1.

Таблица 1

Вычислительные процедуры МАИ

Связанное со здоровьем качество жизни	Физический компонент	Психический компонент	Весовой коэффициент
Физический компонент	1	$a(t)$	$w_1 = a/(1+a)$
Психический компонент	$1/a(t)$	1	$w_2 = 1/(1+a)$

Собственные значения матрицы являются решениями уравнения $(1-\lambda)^2 - 1 = 0$. Их, очевидно, два и $\lambda_{max(t)} = 2$. Поэтому матрица парных сравнений всегда полностью согласована. Вектор приоритетов (нормированное решение уравнения (2.2)) определяется равенствами

1. $w_1(t) = w(t) = 1/2, \quad t \leqslant 20;$
2. $w_1(t) = 1 + 400/((t-40)^2 - 1200), \quad w_2(t) = -400/((t-40)^2 - 1200), \quad 20 \leqslant t \leqslant 60;$
3. $w_1(t) = 1 - 800/((t-80)^2 + 1200), \quad w_2(t) = 800/((t-80)^2 + 1200), \quad 60 \leqslant t \leqslant 80;$
4. $w_1 = (t) = 1/4, \quad w_2 - (t) = 3/4 \;\; 80 \leqslant t.$

Графики функций $w_1(t), w_2(t)$ представлены на рис. 3 и делают анализ соотношений шкал физического и психического здоровья достаточно наглядным.

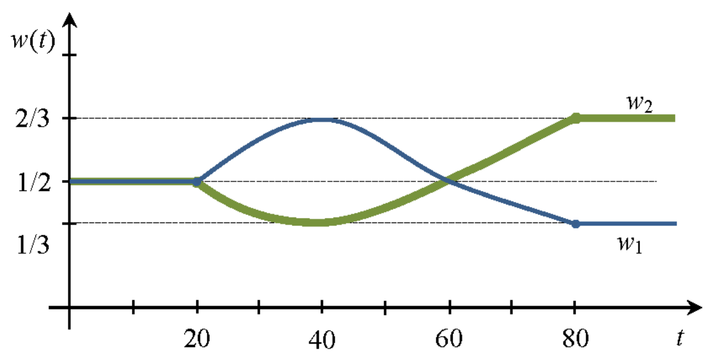

Рис. 3. Динамика вектора приоритетов

3. Заключение

В соответствии с иерархией СЗКЖ, принятой в работе, для построения вектора приоритетов всей системы нужно сформировать и исследовать две матрицы 4-го порядка на третьем уровне иерархии СЗКЖ.

Вектор приоритетов определяет значимость каждой шкалы в структуре СЗКЖ и поэтому может быть использован в качестве весовых коэффициентов для построения интегральных показателей. Это будет скалярная функция (свертка) многих переменные. Такие исследования для стационарного случая проводились в работе [12]. В нашем случая динамических суждений о критериях СЗКЖ интегральный показатель будет еще и функцией времени. Исследование такой функции в качестве целевой является самостоятельной задачей теории оптимизации. Результаты, полученные в ходе исследования, могут быть использованы для интегральной оценки СЗКЖ индивида как объекта управления в здравоохранении и социальной политики, и для выработки управляющих решений по его улучшению.

References

[1] *Указ Президента Российской Федерации «О Стратегии национальной безопасности Российской Федерации»*, Москва, Кремль, 02.07.2021 № 400, http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107030001.

[2] P. J. Allison, D. Locker, J. S. Feine, “Quality of life: A dynamic construct”, *Social Science & Medicine*, **45**:2 (1997), 221–230.

[3] Н. Л. Перельман, В. П. Колосов, “Многолетняя динамика качества жизни, связанного со здоровьем, у больных бронхиальной астмой”, *Пульмонология*, **28**:6 (2018), 708–714.

[N. L. Perel'man, V. P. Kolosov, "Long-term change in health-related quality of life in patients with asthma", *Pulmonologiya*, **28**:6 (2018), 708–714 (In Russian)].

[4] Т. А. Рябкова, Е. В. Бахтерева, Н. Л. Терехов, "Эффективность реабилитационных мероприятий у пациентов с посттравматическими осложнениями на основании анкетирования SF-36", *Профилактическая медицина*, **25**:10 (2022), 79–83. [T. A. Ryabkova, E. V. Bakhtereva, N. L. Terekhov, "Effectiveness of rehabilitation measures in patients with posttraumatic complications based on the SF-36 questionnaire", *Profilakticheskaya Meditsina*, **25**:10 (2022), 79–83 (In Russian)].

[5] К. Леджьери, Л. Децца, Б. Олтолини, Р. Лембо, Б. Ното, С. М. Вилла, А. Беллетти, Г. Ломбарди, А. Баттаини, Э. Педрини, К. Ф. Дзуккато, А. Дзангрилло, "Долгосрочное качество жизни после лечения в отделении реанимации и интенсивной терапии (одноцентровое обсервационное исследование)", *Общая реаниматология*, **17**:2 (2021), 72–87; англ. пер.:C. Leggieri, L. Dezza, B. Oltolini, R. Lembo, B. Noto, S. M. Villa, A. Belletti, G. Lombardi, A. Battaini, E. Pedrini, C. F. Zuccato, A. Zangrillo, "Long-term quality of life after intensive care unit admission (a single-center observational study)", *Obshchaya Reanimatologiya = General Reanimatology*, **17**:2 (2021), 72–87.

[6] Т. П. Никитина, И. Н. Гладкова, В. Ф. Русаков, Р. А. Черников, Ю. В. Карелина, С. М. Ефремов, Т. И. Ионова, "Качество жизни пациентов с первичным гиперпаратиреозом после хирургического лечения", *Проблемы Эндокринологии*, **68**:1 (2022), 27–39. [T. P. Nikitina, I. N. Gladkova, V. F. Rusakov, R. A. Chernikov, Yu. V. Karelina, S. M. Efremov, T. I. Ionova, "Quality of life in patients with primary hyperparathyroidism after surgery", *Problems of Endocrinology*, **68**:1 (2022), 27–39 (In Russian)].

[7] M. Rzeszutek, E. Gruszczyńska, "Consistency of health-related quality of life among people living with HIV: Latent state-trait analysis", *Health Qual Life Outcomes*, **16**:101 (2018), 101(2018).

[8] D. Grazulyte, I. Norkiene, E. Kazlauskas, I. Truskauskaite–Kuneviciene, S. Kolevinskaite, D. Ringaitiene, J. Sipylaite, "Predictors of long-term HRQOL following cardiac surgery: a 5-year follow-up study", *Health Qual Life Outcomes*, **19(1)**:197 (2021).

[9] T. H. Oreel, D. Borsboom, S. Epskamp, I. D. Hartog, J. E. Netjes, P. T. Nieuwkerk, J. P. S. Henriques, M. Scherer-Rath, H. W. M. van Laarhoven, M. A. G. Sprangers, "The dynamics in health-related quality of life of patients with stable coronary artery disease were revealed: a network analysis", *Journal of Clinical Epidemiology*, **107** (2019), 116–123.

[10] Ю. В. Фаронова, А. Р. Ахунов, Т. П. Тельнова, "Пространственно-временная динамика качества жизни населения субъектов РФ", *Успехи современного естествознания*, 2020, № 4, 163–168. [Yu. V. Faronova, A. R. Akhunov, T. P. Telnova, "Space-time dynamics of quality of life of the population of subjects of the Russian Federation", *Advances in Current Natural Sciences*, 2020, № 4, 163–168 (In Russian)].

[11] А. В. Мухачёва, А. О. Акулов, Н. Л. Грязнова, Г. А. Подзорова, "Математическое моделирование качества жизни населения: методологические и методические аспекты", *Известия Дальневосточного федерального университета. Экономика и управление*, 2021, № 1(97), 117–129. [A. V. Mukhacheva, A. O. Akulov, N. L. Gryaznova, G. A. Podzorova, "Mathematical modeling of the quality of life of the population: methodological and methodological aspects", *The Bulletin of the Far Eastern Federal University. Economics and Management*, 2021, № 1(97), 117–129 (In Russian)].

[12] И. А. Финогенко, М. П. Дьякович, "Метод анализа иерархий и построение интегральных показателей сложных систем", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6 (2017), 1335–1340. [I. A. Finogenko, M. P. Dyakovich, "Method of analysis of hierarchies and construction integrated parameters for multiple systems", *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1335–1340 (In Russian)].

[13] M. van Mierlo, C. van Heugten, M. W. M. Post, T. Hoekstra, A. Visser–Meily, "Trajectories of health-related quality of life after stroke: results from a one-year prospective cohort study", *Disability and Rehabilitation*, **40**:9 (2018), 997–1006.

[14] A. Barbieri, F. Cousson-Gélie, L. Baussard, S. Gourgou, C. Lavergne, C. Mollevi, "The importance of using ordinal scores for patient classification based on health-related quality of life trajectories", *Pharmaceutical Statistics*, **21**:5 (2022), 919–931.

[15] Т. Саати, *Принятие решений. Метод анализа иерархий*, Радио и связь, М., 1993, 278 с. [T. Saati, *Decision Making. Hierarchy Analysis Method*, Radio and Communications Publ., Moscow, 1993 (In Russian), 278 pp.]

[16] С. И. Севастьянов, “Критерий размерности множеств альтернатив в экспертных оценках, проводимых методом парных сравнений”, *Техника средств связи*, 2020, № 3(151), 80–90. [S. I. Sevastyanov, “Criteria for the dimension of sets of alternatives in expert assessments carried out by the method of paired comparisons”, *Communication Technology*, 2020, № 3(151), 80–90 (In Russian)].

[17] G. Alefeld, G. Mayer, “Interval analysis: theory and applications”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **121** (2000), 421–464.

Информация об авторах

Дьякович Марина Пинхасовна, доктор биологических наук, заведующая кафедрой экономики, маркетинга и психологии управления, Ангарский государственный технический университет; ведущий научный сотрудник, Восточно-Сибирский институт медико-экологических исследований СО РАН, г. Ангарск, Российская Федерация. E-mail: marik914@rambler.ru
ORCID: https:/orcid.org/0000-0002-5970-5326

Финогенко Иван Анатольевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: fin@icc.ru
ORCID: https:/orcid.org/0000-0001-6821-3385

Поступила в редакцию 11.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 30.08.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the authors

Marina P. Dyakovich, Doctor of Biological Sciences, Head of Economics, Marketing and Management Psychology Department, Angarsk State Technical University; Leading Researcher, East-Siberian Institute of Medical and Ecological Research SB RAS, Angarsk, Russian Federation. E-mail: marik914@rambler.ru
ORCID: https:/orcid.org/0000-0002-5970-5326

Ivan A. Finogenko, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Chief Researcher, V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: fin@icc.ru
ORCID: https:/orcid.org/0000-0001-6821-3385

Received 11.05.2023
Reviewed 30.08.2023
Accepted for press 12.09.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267
УДК 517.929

К вероятностному описанию ансамбля траекторий непрерывно-дискретной системы управления с неполной информацией

Владимир Петрович МАКСИМОВ

ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
614068, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Аннотация. Рассматривается линейная система управления с непрерывным и дискретным временем и дискретной памятью. Система содержит неопределенность в описании операторов, реализующих управляющие воздействия. Эта неопределенность является следствием случайных возмущений в предположении об их равномерном распределении на известных интервалах. При каждой реализации случайных возмущений возникает соответствующая траектория, а в совокупности – ансамбль траекторий, для которого дается покомпонентное вероятностное описание в виде семейства плотностей вероятности, параметризованных текущим временем. Для построения этих функций используется полученное ранее представление оператора Коши рассматриваемой системы. Предлагаемое вероятностное описание возмущений для траекторных переменных позволяет находить их стандартные характеристики, включая математическое ожидание и дисперсию, а также весь возможный диапазон значений. Результаты носят конструктивный характер и допускают эффективную компьютерную реализацию. Приводится иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, гибридные системы с последействием, системы с неполной информацией

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00517, https://rscf.ru/project/22-21-00517/.

Для цитирования: *Максимов В.П.* К вероятностному описанию ансамбля траекторий непрерывно-дискретной системы управления с неполной информацией // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 256–267.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267

To probabilistic description of an ensemble of trajectories to a continuous-discrete control system with incomplete information

Vladimir P. MAKSIMOV
Perm State National Research University
15 Bukirev St., Perm 614068, Russian Federation

Abstract. A linear control system with continuous and discrete times and discrete memory is considered. The model includes an uncertainty in the description of operators implementing control actions. This uncertainty is a consequence of random disturbances under the assumption of their uniform distribution over known intervals. With each implementation a corresponding trajectory arises from random perturbations, and in the aggregate - an ensemble of trajectories, for which a component-by-component probabilistic description is given in the form of a set of probability density functions parametrized by the current time. To construct these functions, the previously obtained representation of the Cauchy operator of the system under consideration is used. The proposed probabilistic description of perturbations for trajectory variables allows one to find their standard characteristics, including expectation and variance, as well as the entire possible range of values. The results are constructive in nature and allow for effective computer implementation. An illustrative example is given.

Keywords: functional differential equations, hybrid systems with aftereffect, systems with uncertainty

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00517, https://rscf.ru/en/project/22-21-00517/).

Mathematics Subject Classification: 34F05, 34K06, 34K34, 34K35.

For citation: Maksimov V.P. To probabilistic description of an ensemble of trajectories to a continuous-discrete control system with incomplete information. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 256–267. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-256-267 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Основываясь на результатах общей теории функционально-дифференциальных уравнений [1, 2], мы продолжаем исследования [3, 4] и рассматриваем систему управления с непрерывным и дискретным временем и дискретной памятью, сосредоточенной в заданном наборе точек конечного промежутка. Рассматриваемая система содержит неопределенность в описании операторов, реализующих управляющие воздействия. Эта неопределенность является следствием случайных возмущений в предположении об их равномерном распределении на известных интервалах. При каждой реализации случайных возмущений возникает соответствующая траектория, а в совокупности – ансамбль траекторий, для которого дается покомпонентное вероятностное описание в виде семейства плотностей вероятности, параметризованных текущим временем. В зарубежной литературе такое описание связывают с построением так называемой 1-pdf-функции (*first probability density function*). Подробное обсуждение роли и важности построения такой функции при изучении случайных процессов, а также библиографию по этой тематике можно найти в работе [5], в которой приводятся примеры построения 1-pdf-функции для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. В настоящей работе при построении этих функций для рассматриваемого класса систем с последействием используется полученное ранее в [3] представление оператора Коши, дающего представление решений рассматриваемой системы. Предлагаемое вероятностное описание возмущений для траекторных переменных позволяет находить их стандартные характеристики, включая математическое ожидание и дисперсию, а также весь возможный диапазон значений. Полученные для описания плотностей вероятности соотношения допускают эффективную компьютерную реализацию. В заключение приводится иллюстрирующий пример.

1. Описание системы. Постановка задачи

Следуя обозначениям работы [3], введем банаховы пространства, в которых рассматриваются операторы и уравнения, и дадим описание основной системы. Зафиксируем конечный отрезок $[0,T]\subset\mathbb{R}$. Обозначим через $L^n=L^n[0,T]$ пространство суммируемых функций $v:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|v\|_{L^n}=\int_0^T |v(s)|_n\,ds$, где символ $|\cdot|_n$ обозначает норму в $\mathbb{R}^n$; $L_2^r=L_2^r[0,T]$ — пространство квадратично суммируемых функций $v:[0,T]\to\mathbb{R}^r$ со скалярным произведением $\langle u,v\rangle=\int\limits_0^T u'(s)\cdot v(s)\,ds$ ($(\cdot)'$ — символ транспонирования); $AC^n=AC^n[0,T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{AC^n}=|x(0)|_n+\|\dot x\|_{L^n}$. Далее фиксируем множество $J=\{t_0,t_1,\ldots,t_\mu\}$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_\mu=T$. Обозначим через $FD^\nu(\mu)=FD^\nu\{t_0,t_1,\ldots,t_\mu\}$ пространство функций дискретного аргумента $z:J\to\mathbb{R}^\nu$ с нормой $\|z\|_{FD^\nu(\mu)}=\sum_{i=0}^{\mu}|z(t_i)|_\nu$.

Рассматривается непрерывно-дискретная система управления с дискретной памятью

$$\dot x(t)=\sum_{j:\,t_j<t}A_j(t)x(t_j)+\sum_{j:\,t_j<t}B_j(t)z(t_j)+(Fu)(t),\ t\in[0,T], \tag{1.1}$$

$$z(t_i)=\sum_{j<i}D_{ij}\,x(t_j)+\sum_{j<i}H_{ij}\,z(t_j)\,+\,(Gu)(t_i)\,,\quad i=1,\ldots,\mu. \tag{1.2}$$

Здесь столбцы $(n\times n)$-матриц A_j и $(n\times\nu)$-матриц B_j принадлежат пространству

L^n; D_{ij} и H_{ij} — постоянные матрицы размерности $(\nu \times n)$ и $(\nu \times \nu)$ соответственно; $F : L_2^r \to L^n$, $G : L_2^r \to FD^\nu(\mu)$ — линейные ограниченные вольтерровы [2] операторы. Дискретность памяти всех операторов, действующих на фазовые переменные в правой части системы (1.1)–(1.2), определяется их конструкцией.

Для системы (1.1)–(1.2) с заданным начальным состоянием

$$x(0) = \alpha, \quad z(0) = \delta \tag{1.3}$$

ставится задача управления, в которой цель управления задается равенством

$$\ell(x, z) = \beta \in \mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

где $\ell : AC^n \times FD^\nu(\mu) \to \mathbb{R}^N$ — линейный ограниченный вектор-функционал.

Результаты об условиях разрешимости задачи (1.1)–(1.4) в классе программных управлений для случая отсутствия ограничений на управление и для случая поточечных полиэдральных ограничений представлены в работах [4, 6–8]. Здесь мы исследуем вопрос о влиянии случайных возмущений операторов F и G на компоненты траекторных переменных x и z при известном управлении u. Без ограничения общности всюду ниже будем считать нулевым начальное состояние системы: $\alpha = 0$, $\delta = 0$.

Определим вид возмущений в действии операторов F и G, ограничиваясь распространенным в прикладных задачах случаем, когда случайные возмущения описываются постоянными случайными параметрами:

$$(Fu)(t) = (F_0 u)(t) + \Delta F \cdot u(t), \ \ t \in [0, T],$$

$$(Gu)(t_j) = (G_0 u)(t_j) + \Delta G_j \cdot \int_0^{t_j} u(s)\, ds, \ \ j = 1, \ldots, \mu,$$

где ΔF и ΔG_j — матрицы размерности $n \times r$ и $\nu \times r$, соответственно, элементы ΔF^{ik} и ΔG_j^{ik} которых являются случайными величинами, распределенными равномерно на отрезках $[a^{ik}, b^{ik}]$ и $[a_j^{ik}, b_j^{ik}]$, соответственно. Для сокращения записи это предположение будем записывать в виде $\Delta F^{ik} \sim U^{ik}$ и $\Delta G_j^{ik} \sim U_j^{ik}$. Предполагается, что операторы F_0 и G_0 реализуют управляющие воздействия без искажений.

Система (1.1)–(1.2) является частным случаем общей непрерывно-дискретной системы, детально рассмотренной в [9]. Теорема 1 [9] дает для решения системы (1.1)–(1.2) с нулевыми начальными значениями представление

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} Fu \\ Gu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Fu \\ Gu \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $z = \mathrm{col}(z(t_1), \ldots, z(t_\mu))$, $\mathcal{C}$ — оператор Коши с блочными компонентами $\mathcal{C}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, действующими следующим образом:

$$\mathcal{C}_{11} : L^n \to AC^n; \ \ \mathcal{C}_{12} : \mathbb{R}^{\nu\mu} \to AC^n; \ \ \mathcal{C}_{21} : L^n \to \mathbb{R}^{\nu\mu}; \ \ \mathcal{C}_{22} : \mathbb{R}^{\nu\mu} \to \mathbb{R}^{\nu\mu}.$$

Для рассматриваемого случая явное представление всех компонент $\mathcal{C}_{ij}$ в терминах матричных параметров системы (1.1)–(1.2) получено в [3]. Ниже мы воспользуемся следующими представлениями компонент $\mathcal{C}_{ij}$:

$$(\mathcal{C}_{11} f)(t) = \int_0^t C_{11}(t, s) f(s)\, ds; \ \ (\mathcal{C}_{12} g)(t) = \int_0^t \sum_{j:\, t_j < t} C_{12}(t_j, s)\, g(t_j)\, ds, \ \ t \in [0, T];$$

$$\mathcal{C}_{21}^i f = \int_0^{t_i} \sum_{j<i} C_{21}^i(t_j, s) f(s)\, ds; \quad \mathcal{C}_{22}^i g = \sum_{j\le i} C_{22}^i(j)\, g(t_j), \quad i = 1, \ldots, \mu.$$

Верхний индекс в обозначениях компонент $\mathcal{C}_{22}^i$ и $\mathcal{C}_{22}^i$ соответствует номеру столбца размерности ν в столбце из $\mathbb{R}^{\nu\mu}$.

Наша задача состоит в том, чтобы для каждой компоненты $x_i(t)$, каждой компоненты $z_i(t_j)$ и фиксированного момента времени ($t \in (0, T]$ для x_i и t_j, $j = 1, \ldots, \mu$, для z_i) построить соответствующую функцию плотности вероятности для их случайных возмущений. Каждая компонента содержит детерминированную составляющую $x_i^0(t)$, $z_i^0(t_j)$, соответствующую операторам F_0 и G_0, и случайную составляющую $\xi_i(t)$, $\eta_i(t_j)$, соответствующую матрицам ΔF и ΔG_j :

$$x_i(t) = x_i^0(t) + \xi_i(t); \quad z_i(t_j) = z_i^0(t_j) + \eta_i(t_j).$$

Отметим, что предположение о равномерном распределении возмущений соответствует случаю минимальной информации о частотах, с которой реализуются конкретные значения. В отличие от нормального распределения, равномерное распределение не сохраняет свой вид при линейных преобразованиях. Особо отметим, что решение рассматриваемой задачи позволяет в каждом временном сечении точно указывать диапазон возможных значений для компонент траектории.

2. Вспомогательные построения. Компонента с непрерывным временем

С учетом представления (1.5) для $\xi_i(t)$ имеем

$$\xi_i(t) = \int_0^t \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^r C_{11}^{i\ell}(t,s) u_k(s)\, ds\, \Delta F^{\ell k} + \sum_{j:t_j<t} \sum_{\ell=1}^{\nu} \sum_{k=1}^r \int_0^t C_{12}^{i\ell}(t_j, s)\, ds \int_0^{t_j} u_k(\tau)\, d\tau\, \Delta G_j^{\ell k}. \tag{2.1}$$

Здесь верхние индексы у компонент оператора Коши используются как обычно: первый индекс — номер строки, второй — номер столбца соответствующей матрицы. Для более лаконичной записи этого представления введем обозначения

$$^{11}\theta_{\ell k}^i(t) = \int_0^t C_{11}^{i\ell}(t,s) u_k(s)\, ds; \quad ^{12}\theta_{j\ell k}^i(t) = \int_0^t C_{12}^{i\ell}(t_j, s)\, ds \int_0^{t_j} u_k(\tau)\, d\tau,$$

с использованием которых представление (2.1) принимает вид

$$\xi_i(t) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^r {}^{11}\theta_{\ell k}^i(t)\, \Delta F^{\ell k} + \sum_{j:t_j<t} \sum_{\ell=1}^{\nu} \sum_{k=1}^r {}^{12}\theta_{j\ell k}^i(t)\, \Delta G_j^{\ell k}. \tag{2.2}$$

Занумеруем все слагаемые в этой линейной комбинации случайных величин $\Delta F^{\ell k}$ и $\Delta G_j^{\ell k}$ последовательно с помощью единого индекса q по следующему правилу: 1) сначала в первой двойной сумме начиная с $\ell = 1$ и нумеруя по $k = 1, \ldots, r$, затем для $\ell = 2$, начиная с $r+1, \ldots$ и так далее, заканчивая присвоением номера $q = n \cdot r$; 2) затем во второй тройной сумме — по описанному правилу. При этом сами случайные величины обозначим

d_q, а коэффициенты при них, зависящие от времени, — $\varphi_q^i(t)$. Теперь представление (2.2) записывается в виде

$$\xi_i(t) = \sum_{q=1}^{N} \varphi_q^i(t) \cdot d_q. \tag{2.3}$$

Здесь $N = n \cdot r + \nu \cdot \mu \cdot r$. Указанным выше способом перенумеровываются также параметры и обозначения равномерных распределений случайных величин, таким образом, $d_q \sim U[a_q,\, b_q]$. Представим d_q в виде

$$d_q = (b_q - a_q)c_q + a_q,$$

где $c_q \sim U[0,\, 1]$. Подставляя это выражение в (2.3), получаем для $\xi_i(t)$ представление в виде суммы линейной комбинации случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0,\, 1]$, и детерминированного числа:

$$\xi_i(t) \;=\; \sum_{q=1}^{N} \varphi_q^i(t) \cdot (b_q - a_q) \cdot c_q + \sigma_i(t)\,, \tag{2.4}$$

где

$$\sigma_i(t) \;=\; \sum_{q=1}^{N} \varphi_q^i(t) \cdot a_q. \tag{2.5}$$

В пределах этого раздела мы считали зафиксированными индекс i и момент времени t, сохраняя их во всех определяющих соотношениях. Для случайной величины $\xi_i(t)$ требуется вывести соотношение, определяющее ее плотность вероятности $f_{\xi_i}(y, t)$.

3. Вспомогательные построения. Компонента с дискретным временем

Обратимся теперь к компоненте с дискретным временем. Для $\eta_i(t_j)$ имеем

$$\begin{aligned} \eta_i(t_j) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{\mu} {}^{ij}Q_{21}^{\ell m} \cdot \int_0^{t_\ell} u_k(s)\,ds \cdot \Delta F^{mk} \\ + \sum_{m=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{\mu} {}^{ij}Q_{22}^{\ell m} \cdot \int_0^{t_\ell} u_k(s)\,ds \cdot \Delta G_\ell^{mk}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь мы воспользовались представлением компонент $\mathcal{C}_{21}$ и $\mathcal{C}_{22}^i$ оператора Коши в виде (см. [10])

$$\mathcal{C}_{21}f = Q_{21} \cdot \Big(\int_0^{t_1} f(s)\,ds, \ldots, \int_0^{t_\mu} f(s)\,ds\Big)'; \quad \mathcal{C}_{22}g = Q_{22} \cdot \big(g(t_1), \ldots, g(t_\mu)\big)',$$

где Q_{21} и Q_{22} — постоянные матрицы размерности $(\mu \cdot \nu) \times (\mu \cdot n)$ и $(\mu \cdot \nu) \times (\mu \cdot \nu)$, соответственно. Поясним индексацию элементов в матрице Q_{21}: в обозначении ${}^{ij}Q_{21}^{\ell m}$ i — номер строки в j-й группе ν-мерных строк, ℓ — номер группы n элементов в i-й строке, m — номер элемента в указанной группе. Такая же нумерация используется в обозначении ${}^{ij}Q_{22}^{\ell m}$.

Для более лаконичной записи этого представления введем обозначения

$$ {}^{21}\theta^{ij}_{mk} = {}^{ij}Q^{\ell m}_{21} \cdot \int\limits_0^{t_\ell} u_k(s)\,ds; \quad {}^{22}\theta^{ij}_{\ell mk} = {}^{ij}Q^{\ell m}_{22} \cdot \int\limits_0^{t_\ell} u_k(s)\,ds\,, $$

с использованием которых представление (3.1) принимает вид

$$ \eta_i(t_j) \,=\, \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} {}^{21}\theta^{ij}_{mk}\,\Delta F^{mk} + \sum_{m=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{\mu} {}^{22}\theta^{ij}_{\ell mk}\,\Delta G^{mk}_{\ell}. $$

Применим к этой линейной комбинации случайных величин ΔF^{mk} и ΔG^{mk}_{ℓ} способ нумерации слагаемых, использованный ранее в выражении для компоненты $\xi_i(t)$, с помощью единого индекса q по следующему правилу: 1) сначала в первой двойной сумме начиная с $m = 1$ и нумеруя по $k = 1, \ldots, r$, затем для $m = 2$, начиная с $r + 1, \ldots$ и так далее, заканчивая присвоением номера $q = n \cdot r$; 2) затем во второй тройной сумме — по описанному правилу. При этом сами случайные величины обозначим e_q, а коэффициенты при них, зависящие от дискретного времени, — $\psi^i_q(t_j)$. Теперь последнее представление записывается в виде

$$ \eta_i(t_j) \,=\, \sum_{q=1}^{N} \psi^i_q(t_j) \cdot e_q. \tag{3.2} $$

Здесь, как и в (2.4), $N = n \cdot r + \mu \cdot \nu \cdot r$. Указанным выше способом перенумеровываются также параметры и обозначения равномерных распределений случайных величин, таким образом, $e_q \sim U[a_q,\, b_q]$. Представим e_q в виде

$$ e_q = (b_q - a_q)c_q + a_q, $$

где $c_q \sim U[0,\,1]$. Подставляя полученное выражение в (3.2), получаем для $\eta_i(t_j)$ представление в виде суммы линейной комбинации независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0,\,1]$, и детерминированного числа:

$$ \eta_i(t_j) = \sum_{q=1}^{N} \psi^i_q(t_j) \cdot (b_q - a_q) \cdot c_q + \omega_i(t_j), \tag{3.3} $$

где

$$ \omega_i(t_j) = \sum_{q=1}^{N} \psi^i_q(t_j) \cdot a_q. \tag{3.4} $$

Для случайной величины $\eta_i(t_j)$ требуется вывести соотношение, определяющее ее плотность вероятности $f_{\eta_i}(y, t_j)$.

4. Основной результат

Для формулировки основного результата о плотности вероятности для возмущений ξ и η введем два полиэдральных множества, которые строятся по системам функций φ_q, $q = 1, \ldots, N$ и ψ_q, $q = 1, \ldots, N$, соответственно (см. (2.4), (3.3)).

Для каждого $y_1 \in \mathbb{R}$ определим в $\mathbb{R}^{N-1}$ полиэдральное множество $\mathcal{M}_i(y_1,t)$:

$$\mathcal{M}_i(y_1,t) = \Big\{ (y_2,\ldots,y_N)' \in \mathbb{R}^{N-1} : 0 \le y_q \le 1,\ q=2,\ldots,N;$$
$$\frac{1}{\varphi_1^i(t)\cdot(b_1-a_1)}\cdot y_1 \;-\; 1 \le \sum_{q=2}^{N} \frac{\varphi_q^i(t)\cdot(b_q-a_q)}{\varphi_1^i(t)\cdot(b_1-a_1)}\cdot y_q \;\le \frac{1}{\varphi_1^i(t)\cdot(b_1-a_1)}\cdot y_1\Big\}. \tag{4.1}$$

Аналогичным образом определим полиэдральное множество $\mathcal{N}_i(y_1,t_j)$:

$$\mathcal{N}_i(y_1,t_j) = \Big\{ (y_2,\ldots,y_N)' \in \mathbb{R}^{N-1} :\ 0 \le y_q \le 1,\ q=2,\ldots,N;$$
$$\frac{1}{\psi_1^i(t_j)\cdot(b_1-a_1)}\cdot y_1 \;-\; 1 \le \sum_{q=2}^{N} \frac{\psi_q^i(t_j)\cdot(b_q-a_q)}{\psi_1^i(t_j)\cdot(b_1-a_1)}\cdot y_q \;\le \frac{1}{\psi_1^i(t_j)\cdot(b_1-a_1)}\cdot y_1\Big\}. \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. *При каждом $t \in [0,T]$ таком, что $\varphi_1^i(t) \ne 0$, функция $f_{\xi_i}(y_1,t)$ компоненты ξ_i определяется равенством*

$$f_{\xi_i}(y_1,t) = \frac{\mathbf{V}^{N-1}[\mathcal{M}_i(y_1-\sigma^i(t),t)]}{|\varphi_1^i(t)|\cdot(b_1-a_1)}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{V}^{N-1}[\mathcal{M}]$ — мера Лебега множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{N-1}$, полиэдральное множество $\mathcal{M}_i$ определено равенством (4.1), функции $\varphi_q^i(t)$, $q=1,\ldots,N$ определены равенством (2.4), $\sigma^i(t)$ — равенством (2.5).

При каждом t_j, $j=1,\ldots,\mu$, таком, что что $\psi_1^i(t_j) \ne 0$, функция $f_{\eta_i}(y_1,t_j)$ компоненты η_i определяется равенством

$$f_{\eta_i}(y_1,t_j) = \frac{\mathbf{V}^{N-1}[\mathcal{N}_i(y_1-\omega^i(t_j),t_j)]}{|\psi_1^i(t_j)|\cdot(b_1-a_1)},$$

где полиэдральное множество $\mathcal{N}_i$ определено равенством (4.2), функции $\psi_q^i(t_j)$, $q = 1,\ldots,N$, определены равенством (3.3), $\omega^i(t_j)$ — равенством (3.4).

Доказательство. Доказательство проведем для компоненты ξ_i, для компоненты η_i доказательство проводится аналогично. Определим линейное отображение $\mathbf{F}^i(\cdot,t) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $\mathbf{F}^i(c,t) = \mathrm{col}(\mathbf{F}_1^i(c,t),\ldots,\mathbf{F}_N^i(c,t))$ равенством

$$\mathbf{F}_1^i(c,t) = \sum_{q=1}^{N} \varphi_q^i(t)\cdot(b_q-a_q)\cdot c_q;\quad \mathbf{F}_q^i(c,t) = c_q,\ \ q=2,\ldots,N.$$

При условии $\varphi_1^i(t) \ne 0$ отображение $\mathbf{F}^i(\cdot,t)$ имеет обратное $\mathbf{\Phi}^i(y,t) = (\mathbf{F}^i)^{-1}(y,t) = \mathrm{col}(\mathbf{\Phi}_1^i(y,t),\ \ldots,\mathbf{\Phi}_N^i(y,t))$, $(y = \mathrm{col}(y_1,\ldots,y_N))$,

$$\mathbf{\Phi}_1^i(y,t) = \frac{1}{\varphi_1^i(t)\cdot(b_1-a_1)}\cdot\big(y_1 - \varphi_2^i(t)\cdot(b_2-a_2)y_2 - \ \ldots\ - \varphi_N^i(t)\cdot(b_N-a_N)y_N\big);$$

$$\mathbf{\Phi}_q^i(y,t) = y_q,\ \ q=2,\ldots N.$$

Воспользуемся известным утверждением о виде функции распределения для преобразования системы случайных величин (см., например, представление (6.13), с. 131 в [11]), в силу которого имеем

$$f_{\xi_i}(y_1,\ldots,y_N,t) = \begin{cases} f_c(\mathbf{\Phi}^i(y,t))\cdot\frac{1}{|\varphi_1^i(t)|\cdot(b_1-a_1)}, & y:\ \mathbf{\Phi}^i(y,t)\ \in [0,1]^N,\\ 0, & y:\ \mathbf{\Phi}^i(y,t)\ \notin [0,1]^N. \end{cases}$$

Здесь f_c — плотность вероятности системы N независимых равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$ случайных величин. Переходя к предельной по отношению к $y_2,\dots,y_N$ плотности вероятности, получаем для искомого распределения:

$$f_{\xi_i}(y_1,t)=\int_0^1\dots\int_0^1 f_{\xi^i}(y_1,\dots,y_N,t)\,dy_2\dots dy_N.$$

Отметим, что из определения функции $f_{\xi_i}(y_1,\dots,y_N)$ следует, что при каждом y_1 интеграл в правой части представляет собой интеграл от единицы по полиэдральному множеству $\mathcal{M}_i(y_1,t)$, умноженный на дробь $\frac{1}{|\varphi_1^i(t)|\cdot(b_1-a_1)}$. Таким образом, окончательно получаем равенство (4.3).

Доказательство для компоненты возмущения с дискретным временем повторяет приведенное доказательство с заменой всюду функций $\varphi_q^i(t)$ функциями $\psi_q^i(t_j)$. $\square$

Отметим, что задача нахождения объема полиэдрального множества решается точно (например, средствами системы компьютерной алгебры Maple), если все коэффициенты и правые части линейной системы неравенств, определяющих полиэдральное множество, являются рациональными числами. Это дает возможность находить значения функций $f_{\xi_i}(y_1,t)$ и $f_{\eta_i}(y_1,t_j)$ в рациональных точках с любой степенью точности.

5. Пример

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t)=0.5\,x(0)+0.5\,sin(t)\chi_{(1,4]}(t)x(1)+0.1\,\exp(-0.1t)\chi_{(2,4]}(t)x(2)+0.1t^2\chi_{(3,4]}(t)x(3)$$

$$+0.3tz(0)+0.2\chi_{(1,4]}(t)z(1)+0.1\,t^2\chi_{(2,4]}(t)z(2)+0.15\,\chi_{(3,4]}(t)z(3)+\Delta F\cdot u(t),\quad t\in[0,4],$$

$$z(i)=0.4\,x(0)+0.5\,\chi_{(1,4]}(i)x(1)+0.4\,\chi_{(2,4]}(i)x(2)+0.3\,\chi_{(3,4]}(i)x(3)+0.2\,z(0)+0.2\,\chi_{(1,4]}(i)z(1)$$

$$+0.3\,\chi_{(2,4]}(i)z(2)+0.15\,\chi_{(3,4]}(i)z(3)+\Delta G_i\cdot\int_0^i u(s)ds,\quad i=1,...,4.$$

Для этой системы имеем (см. [3]):

$$(\mathcal{C}_{11}f)(t)=\int_0^t\{\,1\;+\;\int_s^t[\,0.5\,sin(\tau)\,\chi_{(1,4]}(\tau)\;+\;(0.050000000\tau^2$$

$$+\,0.070807342\,\exp(-0.1\tau))\chi_{(2,4]}(\tau)\;+\;(0.139984405+0.162851600\,\tau^2)\,\chi_{(3,4]}(\tau)\,]\,\chi_{[0,1]}(s)\;+$$

$$+\,[\,0.1\,\exp(-0.1\tau)\chi_{(2,4]}(\tau)\;+\;(0.060000000+0.025918178\,\tau^2)\chi_{(3,4]}(\tau)\,]\,\chi_{[0,2]}(s)$$

$$+\,[\,0.1\,\tau^2\,\chi_{(3,4]}(\tau)\,]\,\chi_{[0,3]}(s)\}\,d\tau\;f(s)\,ds\,,$$

$$(\mathcal{C}_{12}\,g)(t)=\int_0^t\{\,[\,0.200000000\chi_{(1,4]}(s)\,+\,(0.040000000\,\exp(-0.1s)\,+\,0.020000000\,s^2)\chi_{(2,4]}(s)\,+$$

$$+\,(0.630000000\;+\;0.088367271\,s^2)\chi_{(3,4]}(s)]\,g(1)\;+\;[\,0.100000000\,s^2\chi_{(2,4]}(s)\;+$$

$$+\,(0.045000000\;+\;0.089999999\,s^2)\chi_{(3,4]}(s)]\,g(2)\;+\;[\,0.150000000\chi_{(3,4]}(s)]\,g(3)\,\}\,ds\,,$$

$$\mathcal{C}_{21}f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.500000000 \displaystyle\int_0^1 f(s)\,ds \\ 0.933229367 \displaystyle\int_0^1 f(s)\,ds + 0.400000000 \int_0^2 f(s)\,ds \\ 1.795075907 \displaystyle\int_0^1 f(s)\,ds + 0.637754534 \int_0^2 f(s)\,ds + 0.300000000 \int_0^3 f(s)\,ds \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}_{22}g = \begin{pmatrix} g(1) \\ 0.200000000\, g(1) \ + \ g(2) \\ 0.420000000\, g(1) + 0.300000000\, g(2) + g(3) \\ 0.853101814\, g(1) + 0.690000000\, g(2) + 0.400000000\, g(3) + g(4) \end{pmatrix}.$$

Здесь числовые значения приведены с точностью до 10^{-9}.

Зафиксируем управление $u(t) = t(4-t)$ и зададим $a_q = -0.1$, $b_q = 0.1$, $q = 1, \ldots, 4$.

В таком случае представление (2.4) для ξ принимает вид

$$\xi(t) = \varphi_1(t) \cdot 0.2 \cdot c_1 + \ldots + \varphi_4(t) \cdot 0.2 \cdot c_4 + \sigma(t),$$

где

$$\varphi_1(t) = 5.110544 \cdot \chi_{(2,4]}(t) + 2 \cdot t^2 - 0.333333 \cdot t^3 - 13.446769 \cdot \chi_{(3,4]}(t)$$

$$+0.450252 \cdot \chi_{(1,4]}(t) - 6.513456 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot \exp(-0.100000 \cdot t)$$

$$-0.833333 \cdot \chi_{(1,4]}(t) \cdot \cos(t) + 0.553307 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t + 0.027778 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot t^3$$

$$+0.436550 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t^3;$$

$$\varphi_2(t) = 0.049093 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t^3 + 1.050000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t - 4.475509 \cdot \chi_{(3,4]}(t)$$

$$+0.011111 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot t^3 - 0.666667 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot \exp(-0.100000 \cdot t)$$

$$+0.456932 \cdot \chi_{(2,4]}(t) + 0.333333 \cdot \chi_{(1,4]}(t) \cdot t - 0.333333 \cdot \chi_{(1,4]}(t);$$

$$\varphi_3(t) = 0.160000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t^3 + 0.240000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t$$

$$-5.040000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) + 0.177778 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot t^3 - 1.422222 \cdot \chi_{(2,4]}(t);$$

$$\varphi_4(t) = 1.350000 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t - 4.050000 \cdot \chi_{(2,4]}(t);$$

$$\sigma(t) = -0.002338 \cdot \chi_{(1,4]}(t) - 0.063866 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t + 0.540245 \cdot \chi_{(3,4]}(t)$$

$$-0.006667 \cdot \chi_{(1,4]}(t) + 0.006667 \cdot t^3 - 0.040000 \cdot t^2 - 0.082905 \cdot \chi_{(2,4]}(t)$$

$$-0.012913 \cdot \chi_{(3,4]}(t) \cdot t^3 - 0.004333 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot t^3$$

$$+0.143602 \cdot \chi_{(2,4]}(t) \cdot \exp(-0.100000 \cdot t) + 0.016667 \cdot \chi_{(1,4]}(t) \cdot \cos(t).$$

Здесь и ниже числовые значения приведены с точностью до 10^{-6}.

Представление о функции плотности вероятности для возмущения ξ компоненты с непрерывным временем дает рис. 1, на котором изображены четыре сечения этой функции.

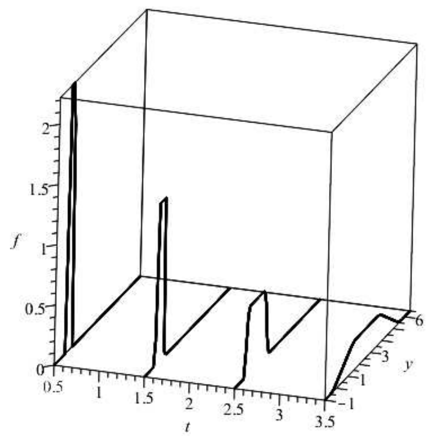

Рис. 1. Сечения $f_\xi(y,1/2)$, $f_\xi(y,3/2)$, $f_\xi(y,5/2)$, $f_\xi(y,7/2)$

Для возмущения η компоненты с дискретным временем ограничимся сечением функции $f_\eta(y,t_j)$ при $t_j=3$. В таком случае представление (3.3) принимает вид

$$\eta(3)=\psi_1(3)\cdot 0.200000\cdot c_1+\ldots+\psi_4(3)\cdot 0.200000\cdot c_4+\omega(3),$$

где

$$\psi_1(3)=0.737743,\;\; \psi_2(3)=0.140000,\;\; \psi_3(3)=0.320000,\;\; \psi_4(3)=1.800000,$$

$$\omega(3)=-1.498872.$$

На рис. 2 плотность вероятности $f_\eta(y,3)$ изображена так, как она выглядит при последовательном вычислении объема полиэдральных множеств $\mathcal{N}\big(y_1-\omega(3),3\big)$ с шагом 0.1 по y_1.

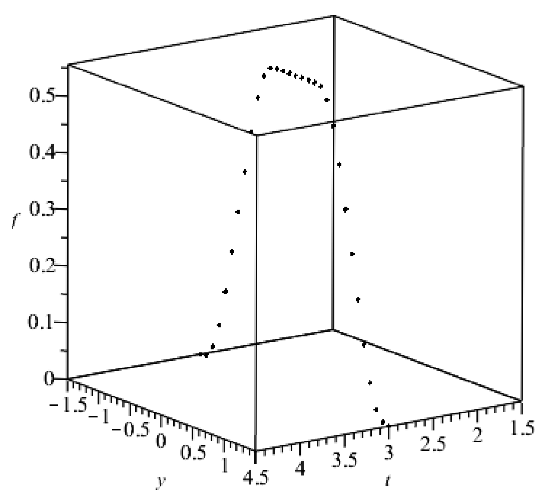

Рис. 2. Сечение $f_\eta(y,3)$

References

[1] N. V. Azbelev, L. F. Rakhmatullina, "Theory of linear abstract functional differential equations and applications", *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **8** (1996), 1–102.

[2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М., 2002. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Elements of the Contemporary Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, Institute of Computer-Assisted Studies Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

[3] V. P. Maksimov, "On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **30**:3 (2020), 385–395. [V. P. Maksimov, "On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **30**:3 (2020), 385–395 (In English)].

[4] В. П. Максимов, "О внутренних оценках множеств достижимости для непрерывно-дискретных систем с дискретной памятью", Труды ИМИ УрО РАН, **27**, 2021, 141–151. [V. P. Maksimov, "On internal estimates of reachable sets for continuous-discrete systems with discrete memory", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **27**, 2021, 141–151 (In Russian)].

[5] J. Calatayud, J.-C. Cortes, M. Jornet, A. Navarro–Quiles, "Solving random ordinary and partial differential equations through the probability density function: theory and computing with applications", *Modern Mathematics and Mechanics. Fundamentals, Problems and Challenges*, Understanding Complex Systems, eds. V. Sadovnichiy, Z. Zgurovsky, Springer, Cham, 2019, 261–282.

[6] В. П. Максимов, "Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики", *Прикладная математика и вопросы управления*, 2019, №4, 124–135. [V. P. Maksimov, "Attainability values of on-target functionals in economic dynamics problems", *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2019, №4, 124–135 (In Russian)].

[7] E. I. Bravyi, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, "Some economic dynamics problems for hybrid models with aftereffect", *Mathematics*, **8**:10 (2020), 1832.

[8] В. П. Максимов, "Непрерывно-дискретные динамические модели", *Уфимский математический журнал*, **13**:3 (2021), 97–106; англ. пер.:V. P. Maksimov, "Continuous-discrete dynamic models", *Ufa Math. J.*, **13**:3 (2021), 95–103.

[9] V. P. Maksimov, "The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:1 (2019), 40–51. [V. P. Maksimov, "The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **29**:1 (2019), 40–51 (In English)].

[10] V. P. Maksimov, "Constructive study of controllability for a class of continuous-discrete systems with an uncertainty", *Functional Differential Equations*, **29**:3-4 (2022), 183–195.

[11] В. Я. Дерр, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Лань, М., 2021. [V. Ya. Derr, *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Lan' Publ., Moscow, 2021 (In Russian)].

Информация об авторе

Максимов Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация. E-mail: maksimov@econ.psu.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0051-3696

Поступила в редакцию 09.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 05.09.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Vladimir P. Maksimov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, Perm State National Research University, Perm, Russian Federation. E-mail: maksimov@econ.psu.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0051-3696

Received 09.06.2023
Reviewed 05.09.2023
Accepted for press 12.09.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-268-276
УДК 517, 515.124.2

Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах

Ричик СЕНГУПТА
АНОО ВО «Сколковский институт науки и технологий»
121205, Российская Федерация, г. Москва, территория инновационного центра «Сколково», Большой бульвар, 30
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В работе исследуются вещественнозначные функции, определенные на квазиметрических пространствах. Для них получено обобщение вариационного принципа Экланда и аналогичного утверждения из статьи [S. Cobzas, "Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle", Topology and its Applications, vol. 158, no. 8, pp. 1073–1084, 2011]. Приведенная здесь модификация вариационного принципа применима, в частности, к широкому классу неограниченных снизу функций. Полученный результат применен к исследованию минимумов функций, определенных на квазиметрических пространствах. Сформулировано условие типа Каристи для сопряженно-полных квазиметрических пространств. Показано, что предложенное условие типа Каристи является достаточным условием существования минимума для полунепрерывных снизу функций, действующих в сопряженно-полных квазиметрических пространствах.

Ключевые слова: вариационный принцип Экланда, квазиметрические пространства, неограниченные снизу функции

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).

Для цитирования: *Сенгупта Р.* Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 268–276. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-268-276

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-268-276

Ekeland variational principle for quasimetric spaces

Richik SENGUPTA
Skolkovo Institute of Science and Technology
30 Bolshoy Boulevard, Territory of the Skolkovo Innovation Center, Moscow 121205, Russian Federation
Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation

Abstract. In this paper, we study real-valued functions defined on quasimetric spaces. A generalization of Ekeland's variational principle and a similar statement from the article [S. Cobzas, "Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle", Topology and its Applications, vol. 158, no. 8, pp. 1073–1084, 2011] is obtained for them. The modification of the variational principle given here is applicable, in particular, to a wide class of functions unbounded from below. The result obtained is applied to the study the minima of functions defined on quasimetric spaces. A Caristi-type condition is formulated for conjugate-complete quasimetric spaces. It is shown that the proposed Caristi-type condition is a sufficient condition for the existence of a minimum for lower semicontinuous functions acting in conjugate-complete quasimetric spaces.

Keywords: Ekeland variational principle, quasimetric spaces, functions unbounded from below

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/).

Mathematics Subject Classification: 58E30, 54A05.

For citation: Sengupta R. Ekeland Variational Principle in quasimetric spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 268–276. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-268-276 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Напомним понятия метрического и квазиметрического пространств. Пусть задано непустое множество X и функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Здесь $\mathbb{R}_+$ — это множество неотрицательных чисел. Как известно, функция ρ называется метрикой, а пара (X,ρ) — метрическим пространством, если имеют место следующие аксиомы:

1. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (аксиома симметрии);
3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (неравенство треугольника).

Функцию ρ называют квазиметрикой, а пару (X,ρ) — квазиметрическим пространством, если для ρ выполняются аксиома тождества и неравенство треугольника (см., например, [1]).

Пусть заданы числа $q_1 \geq 1$ и $q_2 \geq 1$. Рассмотрим еще одну аксиому для функции ρ

3′. $\rho(x,z) \leq q_1\rho(x,y) + q_2\rho(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X.$

Функцию ρ называют (q_1,q_2)-квазиметрикой, а пару (X,ρ) — (q_1,q_2)-квазиметрическим пространством, если для ρ_X выполняются аксиомы 1 и 3′ (см., например, [1, с. 527]). Очевидно, что $(1,1)$-квазиметрика является квазиметрикой, а $(1,1)$-квазиметрическое пространство является квазиметрическим пространством.

Понятия фундаментальности и сходимости последовательностей, а также полноты пространства, хорошо известны для метрических пространств. Поэтому здесь они не приводятся. Определения этих понятий для квазиметрических пространств вводятся в следующем параграфе.

Важную роль в анализе играет вариационный принцип Экланда — утверждение о свойствах функций на метрических пространствах. Напомним его. Пусть (X,ρ) — полное метрическое пространство, $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ собственный функционал, т. е.

$$\{x \in X : U(x) \neq +\infty\} \neq \emptyset.$$

Предположим, что функционал U полунепрерывен снизу и ограничен снизу.

Теорема 0.1. *Для любых $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и для любого $x_0 \in X$ такого, что $U(x_0) \leq \varepsilon + \inf\limits_{x\in X} U(x)$, существует точка $\bar{x} \in X$, удовлетворяющая неравенствам*

$$U(\bar{x}) \leq U(x_0), \quad \rho(\bar{x},x_0) \leq \lambda,$$
$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x,\bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}.$$

Результаты, связанные с поиском минимумов функций и решений уравнений в метрических пространствах, имеют широкий спектр применений в различных областях анализа, включая нелинейный анализ (см., например, [2, гл. II, X] и [3]), оптимизацию (см., например, [4, 5]), оптимальное управление (см., например, [6–8]), теорию дифференциальных включений (см., например, [7]), теорию точек совпадения и накрывающих отображений [5, 9–13]) и математическую экономику (см., например, [14]). Существует множество обобщений и модификаций вариационных принципов, которые позволяют получить вышеупомянутые результаты (см., например, [15–19]).

Приведенная теорема имеет разные обобщения (см., например, [15,17,20]), однако остается еще много интересных и важных пространств и классов функций, для которых аналоги вариационного принципа еще не получены. Настоящая работа посвящена обобщению вариационного принципа Экланда для функций, которые определены на квазиметрическом пространстве, без априорного предположения ограниченности функций снизу. Для метрических пространств аналогичный результат был получен в [19].

1. Предварительные сведения

Пусть (X,ρ) — это заданное квазиметрическое пространство. Напомним ряд определений, связанных с этим понятием. Функция

$$\overline{\rho}(x,y) := \rho(y,x), \quad x,y \in X$$

называется сопряженной квазиметрикой к квазиметрике $\rho(x,y)$.

Определение 1.1. Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \rho_X(x,x_i) < \varepsilon \quad \forall\, i > N.$$

Определение 1.2. Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется фундаментальной, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad \rho_X(x_j,x_i) < \varepsilon \quad \forall\, i > j > N.$$

Определение 1.3. Квазиметрическое простанство (X,ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Определение 1.4. Квазиметрическое простанство (X,ρ) называется сопряженно-полным, если любая фундаментальная относительно квазиметрики $\overline{\rho}$ последовательность сходится относительно метрики ρ.

Понятие сопряженной полноты возникает во многих случаях. Приведем пример квазиметрического пространства, которое является сопряженно-полным, но не является полным.

Пример 1.1. Рассмотрим квазиметрику Зоргенфрея на $X = \mathbb{R}_+$,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x \le y, \\ 1, & x > y. \end{cases}$$

Проверим, что пространство является сопряженно-полным. Пусть x_n сопряженно-фундаментальная последовательность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует N такой, что для любого $n > N$ выполняется $\rho(x_j,x_i) < \varepsilon$ для любых $j > i > N$. По определению квазиметрики Зоргенфрея, это означает, что существует номер N такой, что последовательность $\{x_N, x_{N+1}, ...\}$ является монотонно убывающей и ограниченная снизу. Несложно проверить, что точная нижняя граница этой последовательности является ее пределом (относительно квазиметрики ρ). Следовательно, пространство (X,ρ) является сопряженно-полным.

Рассмотрим теперь последовательность $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Она является фундаментальной относительно квазиметрики ρ, она не является фундаментальной относительно квазиметрики $\overline{\rho}$ и не сходится относительно квазиметрики ρ. Следовательно, пространство (X,ρ) не является полным.

Пусть $x_0 \in X$ и $r \in \mathbb{R}_+$. Определим замкнутый и открытый шары как

$$B(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x_0, x) \le r\}, \quad O(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}.$$

Аналогично определим сопряженные шары:

$$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X : \overline{\rho}(x_0, x) \le r\}, \quad \overline{O}(x_0, r) := \{x \in X : \overline{\rho}(x_0, x) < r\}.$$

Пусть теперь (X, ρ) — сопряженно-полное квазиметрическое пространство. Для любой функции $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ положим

$$\gamma(A) := \inf_{x \in A} U(x), \quad A \subset X, \quad A \neq \emptyset.$$

Будем предполагать, что $\gamma(A)$ может принимать значения $-\infty$ или $+\infty$.

Через $\Omega(X)$ будем обозначать множество всех функций $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ таких, что $\gamma(A) > -\infty$ для любого непустого ограниченного множества $A \subset X$. Для $U \in \Omega(X)$, положим $\mathrm{dom} U := \{x \in X : U(x) < +\infty\}$. Отметим, что любая ограниченная снизу функция U лежит в $\Omega(X)$.

В [20] было получено следующее обобщение вариационного принципа Экланда.

Теорема 1.1. *Пусть пространство* (X, ρ) *сопряженно-полно, а функция* $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *является собственной ограниченной снизу и полунепрерывной снизу. Тогда для любого* $\epsilon > 0$ *и для любого* $x_0 \in X$, *для которых*

$$f(x_0) \le \inf_{x \in X} U(x) + \epsilon,$$

существует точка $\bar{x} \in X$ *такая, что*

$$U(\bar{x}) \le U(x_0), \quad \rho(\bar{x}, x_0) \le \lambda, \tag{1.1}$$

$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \rho(x, \bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}.$$

Замечание 1.1. В статье [20] сопряженную полноту называют правой $\rho - K$-полнотой (right $\rho - K$-completeness). Также подчеркнуто, что топология, порожденная квазиметрикой, удовлетворяет аксиоме отделимости T_1. У нас же аксиома T_1 является прямым следствием определения квазиметрики. Это объясняется тем, что в [20] понятие квазиметрики слабее, чем здесь. А именно, в определении квазиметрики в [20] аксиома 1 заменена более слабым условием:

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0 \implies x = y \quad \forall\, x, y \in X.$$

2. Основной результат

Теорема 1.1 применима только к ограниченным снизу функциям. Результат, который мы сформулируем ниже, применим для более широкого класса функций, включающий в себя многие функции неограниченные снизу.

Пусть (X, ρ) — это заданное квазиметрическое пространство.

Теорема 2.1. *Пусть квазиметрическое пространство* (X, ρ) *сопряженно-полно, функция* ρ *полунепрерывна сверху по первому аргументу, функция* $U : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *полунепрерывна снизу и* $U \in \Omega(X)$. *Тогда для любого* $x_0 \in \mathrm{dom} U$, *для любой функции* $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$ *такой, что*

$$U(x_0) \leq \gamma(\overline{B}(x_0, r)) + \varepsilon(r) \quad \forall\, r > 0, \tag{2.1}$$

и для любого $\lambda > 0$ *существует точка* $\bar{x} \in X$ *такая, что выполняется* (1.1), *т. е.* $U(\bar{x}) \leq U(x_0)$ *и* $\rho(x_0, \bar{x}) \leq \lambda$, *и имеет место*

$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, \bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Возьмем произвольные точку $x_0 \in X$, функцию $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to (0, +\infty)$, удовлетворяющую (2.1), и число $\lambda > 0$. Положим

$$X_\lambda := \left\{ x \in X : \quad U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_0) \leq U(x_0) \right\}, \quad \lambda > 0.$$

Докажем, что множество X_λ замкнуто. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X_\lambda$ и точку $x \in X$ такую, что $x_n \to x$. Поскольку функция U полунепрерывна снизу, для любого $\delta > 0$ существует номер $N(\delta)$ такой, что $U(x) \leq U(x_n) + \delta$ при всех $n > N(\delta)$. Имеем

$$\begin{aligned} U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_0) &\leq U(x_n) + \delta + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_0) \\ &\leq U(x_n) + \delta + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_n) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x_n, x_0) \end{aligned}$$

для любых $\delta > 0$, $n > N(\delta)$. Здесь первое неравенство следует из полунепрерывности снизу функции U, второе следует из неравенства треугольника. Из определения множества X_λ, полунепрерывности сверху функции ρ по первому аргументу, переходя к пределу при $n \to \infty$, а затем переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, x_0) \leq U(x_0).$$

Тем самым установлено, что $x \in X_\lambda$. Следовательно, X_λ замкнуто.

Докажем вложение $X_\lambda \subset \overline{B}(x_0, \lambda)$. Для любого $x \in X_\lambda$ имеем

$$\rho(x, x_0) \leq \lambda \frac{U(x_0) - U(x)}{\varepsilon(\lambda)} \leq \lambda \frac{U(x_0) - \gamma(\overline{B}(x_0, \lambda))}{\varepsilon(\lambda)} \leq \lambda.$$

Здесь первое неравенство следует из определения X_λ, второе неравенство следует из определения γ, третье неравенство следует из (2.1). Следовательно, $X_\lambda \subset \overline{B}(x_0, \lambda)$.

Так как X_λ замкнуто и ограничено, (X_λ, ρ) является сопряженно-полным квазиметрическим пространством. Дополнительно, U ограничено снизу на X_λ числом $\gamma(\overline{B}(x_0, \lambda))$, т. к. из включения $X_\lambda \subset B(x_0, \lambda)$ следует, что $\gamma(B(x_0, \lambda)) \leq \gamma(X_\lambda)$. Применяя вариационный принцип Экланда для квазиметрических пространств для ограничения U на X_λ, мы получим, что существует точка $\bar{x} \in X_\lambda$ такая, что (1.1) выполняется и

$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x, \bar{x}) \quad \forall\, x \in X_\lambda, \quad x \neq \bar{x}. \tag{2.3}$$

Осталось доказать (2.2). Возьмем произвольную точку $x \in X_\lambda$. Для нее неравенство (2.2) следует из неравенства (2.3).

Возьмем теперь точку $x \notin X_\lambda$. Имеем

$$U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x,\bar{x}) \geq U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}(\rho(x,x_0) - \rho(\bar{x},x_0)) > U(x_0) - \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(\bar{x},x_0) \geq U(\bar{x}).$$

Здесь первое неравенство следует из неравенства треугольника; второе неравенство следует из определения X_λ, поскольку $x \notin X_\lambda$; а третье неравенство следует из определения X_λ, т. к. $\bar{x} \in X_\lambda$. Следовательно, для $x \notin X_\lambda$ неравенство (2.2) также справедливо. □

Приведем пример функции, для которой не применима теорема 1.1, но применима теорема 2.1.

П р и м е р 2.1. Пусть $U(x) = -\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Так как функция неограничена снизу, к ней невозможно применить теорему 1.1, но она удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.1. Применим эту теорему в точке $x_0 = 0$. Положим $\varepsilon(r) = \sqrt{r}$. Тогда предположение (2.1) выполняется. Поэтому по теореме 2.1 существует точка $\bar{x}$ такая, что $|\bar{x}| \leq \lambda$ и

$$\sqrt{|\bar{x}|} < \sqrt{|x|} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}|x - \bar{x}| \quad \forall\, x \neq \bar{x}.$$

Обсудим теперь применение теоремы 2.1. Пусть далее функция $U : X \to \mathbb{R}$ ограничена снизу. Положим

$$\gamma := \inf_{x \in X} U(x).$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что функция U удовлетворяет сопряженному условию типа Кариста с константой $k > 0$, если

$$\forall x \in X: \quad U(x) > \gamma \quad \exists\, x' \in X: \quad U(x') + k\bar{\rho}(x,x') \leq U(x).$$

Сформулируем следствие к теореме 2.1, которое является достаточным условием существования минимума для полунепрерывных снизу функций.

Следствие 2.1. *Пусть пространство* (X,ρ) *сопряженно-полно, квазиметрика* ρ *полунепрерывна сверху по первому аргументу, а функция* $U : X \to \mathbb{R} \cap \{+\infty\}$ *полунепрерывна снизу. Если функция* U *удовлетворяет сопряженному условию типа Каристи с константой* k*, то для любого* $x_0 \in \mathrm{dom} U$ *существует* $\bar{x} \in X$ *такой, что*

$$U(\bar{x}) = \gamma, \quad \rho(\bar{x},x_0) \leq \frac{U(x_0) - U(\bar{x})}{k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности предположим, что выполнено $\gamma = 0$ и $U(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon(r) := U(x_0)$, а $\lambda = \frac{U(x_0)}{k}$. Применяя теорему 2.1, получим, что существует $\bar{x} \in X$ такой, что

$$U(\bar{x}) \leq U(x_0), \quad \rho(\bar{x},x_0) \leq \lambda,$$

$$U(\bar{x}) < U(x) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{\lambda}\rho(x,\bar{x}) \quad \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}. \tag{2.4}$$

Покажем, что точка $\bar{x}$ является искомой. Достаточно доказать, что $U(\bar{x}) = 0$.

Предположим противное, пусть $U(\bar{x}) > 0$. Тогда, по сопряженному условию Каристи, существует такой $x' \in X$, $x' \neq \bar{x}$, что

$$U(x') + k\bar{\rho}(\bar{x},x') \leq U(\bar{x}).$$

Получили противоречие со строгим неравенством (2.4). □

References

[1] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН.*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points”, *Dokl. RAS*, **94**:1 (2016), 434–437.

[2] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975. [M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreiko, *Geometric Methods of Nonlinear Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, **I, II**, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[4] J. P. Aubin, I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, J. Wiley & Sons, N.Y., 1984.

[5] A. V. Arutyunov, B. D. Gel'man, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-like condition. Existence of solutions to equations and minima of functions in metric spaces”, *Fixed Point Theory*, **20**:1 (2019), 31–58.

[6] R. Vinter, *Optimal Control*, Birkhauser, Boston, 2000.

[7] A. V. Arutyunov, V. A. de Oliveira, F. L. Pereira, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the solvability of implicit differential inclusions”, *Applicable Analysis*, **94**:1 (2015), 129–143.

[8] A. V. Arutyunov, N. T. Tynyanskii, “The maximum principle in a problem with phase constraints”, *Soviet Journal of Computer and System Sciences*, **23** (1985), 28–35.

[9] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.

[10] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer–Verlag, N.Y., 2003.

[11] M. A. Khamsi, “Remarks on Caristi's fixed point theorem”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **71**:1-2 (2009), 227–231.

[12] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, S. E. Zhukovskiy, “Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points”, *SIAM Journal on Optimization*, **25**:2 (2015), 807–828.

[13] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина”, *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities”, *St. Petersburg Mathematical Journal*, **30**:1 (2019), 73–94.

[14] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, N. G. Pavlova, “Equilibrium price as a coincidence point of two mappings”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:2 (2013), 158–169.

[15] J. M. Borwein, D. Preiss, “A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **303**:2 (1987), 517–527.

[16] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[17] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Variational Principles in Nonlinear Analysis and Their Generalization”, *Mathematical Notes*, **103**:5-6 (2018), 1014–1019.

[18] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-Like Condition and the Existence of Minima of Mappings in Partially Ordered Spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**:1 (2019), 48–61.

[19] R. Sengupta, S. Zhukovskiy, “Ekeland's Variational Principle for Functions Unbounded from below”, *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*, **9**:4 (2020), 553–558.

[20] S. Cobzas, “Completeness in quasi-metric spaces and Ekeland Variational Principle”, *Topology and its Applications*, **158**:8 (2011), 1073–1084.

Информация об авторе

Сенгупта Ричик, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Сколковский институт науки и технологий, г. Москва; научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: r.sengupta@skoltech.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9916-8177

Поступила в редакцию 15.07.2023 г.
Поступила после рецензирования 08.09.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Richik Sengupta, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow; Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: r.sengupta@skoltech.ru.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9916-8177

Received 15.07.2023
Reviewed 08.09.2023
Accepted for press 12.09.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297
УДК 517.53, 517.54

Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения

Денис Леонидович СТУПИН
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»
170100, Российская Федерация, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Аннотация. Проводится обзор восходящего к И. Шуру решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0 ограниченных в единичном круге функций ω с нормировкой $\omega(0) = 0.$ Затем выводятся первые шесть неравенств, описывающие соответственно первые шесть тел коэффициентов на классе Ω_0. Далее излагается метод получения аналогичных неравенств для связанных с классом Ω_0 классов M_F функций, подчиненных голоморфной функции $F,$ и при этом дается решение проблемы коэффициентов для этих классов. Затем анализируются свойства упомянутых неравенств, а также связи между ними. Кроме того показано, что для описания n-го тела коэффициентов на классе $\Omega_0,$ а следовательно, и M_F достаточно только одного n-го неравенства.

Обсуждаются задачи как об оценке модуля каждого начального тейлоровского коэффициента по отдельности, так и об оценке модулей всех тейлоровских коэффициентов сразу.

Задача получения точных оценок модуля тейлоровского коэффициента с номером $n,$ то есть функционала $|\{f\}_n|,$ на классе M_F сначала сведена к задаче об оценке функционала над классом $\Omega_0,$ которая в свою очередь сведена к задаче о поиске максимального по модулю условного экстремума действительнозначной функции $2(n-1)$ действительных аргументов с ограничениями типа неравенств $0 \leqslant x_k \leqslant 1,$ $0 \leqslant \varphi_k < 2\pi,$ что позволяет применять стандартные методы дифференциального исчисления для исследования на экстремумы, так как целевая функция бесконечно гладкая по всем своим аргументам. Для этого используются результаты решения классической проблемы коэффициентов на классе $\Omega_0.$

Ключевые слова: ограниченные функции, проблема коэффициентов, тела коэффициентов, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов, гипотеза Кшижа

Для цитирования: *Ступин Д.Л.* Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 277–297. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297

The coefficient problem for bounded functions and its applications

Denis L. STUPIN
Tver State University
33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russian Federation

Abstract. A review of the solution of the classical coefficient problem on the class Ω_0 of bounded in the unit disc functions ω with normalization $\omega(0)=0,$ going back to I. Schur, is given. Then the first six inequalities, describing respectively the first six coefficient bodies on the class $\Omega_0,$ are derived. Next, a method of obtaining similar inequalities for classes M_F of functions subordinated to the holomorphic function $F,$ giving the solution of the coefficient problem for these classes, is given. Then the properties of the mentioned inequalities as well as the relations between them are analyzed. In addition, it is shown that only one n-th inequality is sufficient to describe the n-th body of coefficients on the class $\Omega_0,$ and hence on M_F.

The problems of estimating both the modulus of each initial Taylor coefficient individually and estimating modules of all Taylor coefficients at once are discussed.

The problem of obtaining the sharp estimates of the modulus of the Taylor coefficient with number $n,$ i.e. the functional $|\{f\}_n|,$ on the class M_F is at first reduced to the problem of estimating the functional over the class $\Omega_0,$ which in turn is reduced to the problem of finding the maximal modulo of conditional extremum of a real-valued function of $2(n-1)$ real arguments with constraints of inequality type $0 \leqslant x_k \leqslant 1,$ $0 \leqslant \varphi_k < 2\pi,$ which allows us to apply standard methods of differential calculus to study for extrema, since the target function is infinitely smooth in all of its arguments. For this purpose, the results of the solution of the classical coefficient problem on the class Ω_0 are used.

Keywords: bounded functions, coefficient problem, coefficient bodies, sharp Taylor coefficient moduli estimates, the Krzyz conjecture

Mathematics Subject Classification: 30C50.

For citation: Stupin D.L. The coefficient problem for bounded functions and its applications. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 277–297. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-277-297 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Ω_0 — класс голоморфных в открытом единичном круге Δ функций ω, таких, что $|\omega(z)| < 1$, $z \in \Delta$, $\omega(0) = 0$. Обозначим через Ω класс голоморфных в Δ функций ω таких, что $|\omega(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$.

Утверждение 0.1. *Формула* $\omega_0(z) = z\omega(z)$, $\omega_0 \in \Omega_0$, $\omega \in \Omega$, *устанавливает взаимно однозначное соответствие между* Ω_0 *и* Ω.

Доказательство. Если $\omega \in \Omega$, то очевидно, что $0 \cdot \omega(0) = 0$ и $|z\omega(z)| \leqslant 1$, $z \in \Delta$, следовательно $\omega_0 \in \Omega_0$.

Обратно, если $\omega_0 \in \Omega_0$, то согласно лемме Шварца [1, с. 29] $\omega_0(z) \leqslant |z|$, $z \in \Delta$, стало быть $|\omega_0(z)/z| \leqslant 1$ и $\omega \in \Omega$. Особенность в начале координат считаем устраненной.

Биективность соответствия становится очевидной, если рассматривать функции ω и ω_0 как степенные ряды. □

Тейлоровские коэффициенты функции ω будем обозначать $\{\omega\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Проблема коэффициентов на классе Ω_0 ставится так: найти необходимые и достаточные условия на комплексные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \ldots$ для того, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \ldots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0. Задача о получении точных оценок модулей этих коэффициентов на классе Ω_0 есть частный случай проблемы коэффициентов.

В 1917 году И. Шур исследовал класс Ω [2]. В частности, он дал алгоритм определения факта принадлежности голоморфной функции классу Ω и показал, что каждая функция класса Ω может быть параметризована некоторой последовательностью комплексных чисел, известных как параметры Шура. Они определяют представление данной функции класса Ω в виде непрерывной дроби.

Работа Шура [2] была опубликована через 10 лет после первой работы К. Каратеодори [3], посвященной проблеме коэффициентов для класса C функций с положительной вещественной частью. Основополагающей работой по проблеме коэффициентов в классе C считается статья Каратеодори [4]. Подробное изложение решения проблемы коэффициентов для классов Ω и C имеется в работе [5]. В упомянутой работе также есть краткий исторический обзор.

Так как проблема коэффициентов для класса Ω была решена, то в настоящее время фокус внимания исследователей сместился в сторону переноса результатов на другие классы, а также на обобщение методов, использовавшихся для решения этой задачи. Из современных работ в этой области отметим [6, 7].

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через ее тейлоровские коэффициенты. Эта теория имеет приложения в гидро- и аэродинамике, на ее основе сформировалась, в частности, теория пространств Тейхмюллера, имеющая перспективные приложения в современной математической и теоретической физике (солитонике, конформной, калибровочной и струнной теориях поля).

Проблема коэффициентов имеет непосредственную связь с теорией подчиненных функций [8] и, в частности, с гипотезой Кшижа [9]. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала (коэффициента ряда Тейлора с номером n), которую можно свести к задаче об экстремуме действительнозначной функции $2n-3$ действительных переменных.

Кроме глубоких и многочисленных приложений в теории функций, излагаемые в следующих параграфах известные и некоторые новые результаты по проблеме коэффициентов имеют приложения в классической проблеме моментов, теории операторов и теории обработки сигналов. Класс Ω_0 тесно связан с классами однолистных функций, в частности, с классами выпуклых и звездных функций. Соответственно, и проблема коэффициентов для Ω_0 связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между проблемой коэффициентов и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибербаха).

1. Обзор результатов по проблеме коэффициентов

Как упоминалось выше, И. Шур решил проблему коэффициентов на классе Ω. В данной работе мы будем использовать результаты по проблеме коэффициентов для подкласса Ω_0 класса Ω. Утверждение 0.1 позволяет легко перенести все результаты с класса Ω на класс Ω_0, чем мы и займемся в этом пункте. Некоторые утверждения будут приведены без доказательств. Все отсутствующие здесь доказательства можно найти в работе [5].

Множество, точками которого являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $c^{(n)} := (c_1, \dots, c_n)$, мы будем называть n-мерным комплексным пространством и обозначать его символом $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Множество, состоящее из точек $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ таких, что числа $\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n$ являются первыми n коэффициентами некоторой функции класса Ω_0, будем обозначать через $\Omega_0^{(n)}$ и называть n-м телом коэффициентов класса Ω_0.

Под ε-окрестностью точки $\omega^{(n)}$, $\varepsilon > 0$, будем понимать множество, состоящее из точек $\omega^{(n),*} := (\{\omega\}_1^*, \dots, \{\omega\}_n^*)$, удовлетворяющих условиям $|\{\omega\}_k^* - \{\omega\}_k| < \varepsilon$, для всех $k = 1, \dots, n$. Будем называть это множество шаром с центром $\omega^{(n)}$ радиуса ε.

Исходя из понятия окрестности, можно определить предельные, внутренние и граничные точки множества, открытые и замкнутые множества. Введенную таким образом в $\mathbb{C}^n$ топологию обозначим τ_n.

Заметим, что по сути мы неявно ввели норму для точки c пространства $\mathbb{C}^n$:

$$\|c\| = \max_{k=1,\dots,n} |c_k|.$$

После чего мы неявно ввели метрику на основе этой нормы, а затем уже построили топологию на основе метрики.

Всюду далее во всех рассуждениях в $\mathbb{C}^n$, даже если это не оговорено явно, будем использовать топологию τ_n, а при рассуждениях о функциях всегда будем использовать топологию локально-равномерной сходимости.

Используя теорему Вейерштрасса [1, с. 17], легко показать, что из локально-равномерной сходимости последовательности функций класса Ω_0 следует сходимость соответствующих последовательностей наборов тейлоровских коэффициентов этих функций в топологии τ_n (обратное утверждение, конечно, не верно, однако в каком-то смысле «обратным» можно считать формулируемое ниже утверждение 1.3). Сформулируем этот результат в явной форме.

Лемма 1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если последовательность функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\omega_k \in \Omega_0$, сходится локально-равномерно, то последовательность точек $\{(\{\omega_k\}_1, \dots, \{\omega_k\}_n)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в топологии τ_n.*

Утверждение 1.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество $\Omega_0^{(n)}$ есть абсолютно выпуклый компакт в пространстве $\mathbb{C}^n$, содержащийся в шаре с центром $c^{(n)} := (0, \ldots, 0)$, радиуса 1 и имеющий $c^{(n)}$ своей внутренней точкой.*

Доказательство. Так как $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_0$ влечет $\alpha\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2 \in \Omega_0$, $0 < \alpha < 1$, то Ω_0 и $\Omega_0^{(n)}$ — выпуклые множества. Поскольку вместе с ω в класс Ω_0 входит и функция $\zeta\omega$, $|\zeta| = 1$, то Ω_0 и $\Omega_0^{(n)}$ — абсолютно выпуклые множества.

Для любого бесконечного множества функций из Ω_0 имеет место принцип компактности Монтеля [1, с. 23], и предельные функции вновь принадлежат Ω_0 (так как все функции класса Ω_0 равномерно ограничены внутри Δ). Следовательно, $\Omega_0^{(n)}$ — замкнутое множество, согласно лемме 1.1. Множество $\Omega_0^{(n)}$ содержится в шаре радиуса 1, так как $|\{\omega\}_k| \leqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$, что вытекает из интегрального представления $\{\omega\}_k$.

Все полиномы $\omega(z) := \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n$ с достаточно малыми коэффициентами $\{\omega\}_k$, $k = 1, \ldots, n$, лежат в классе Ω_0. Действительно, если ω отображает Δ в круг радиуса r, $r > 1$ то $\omega/r \in \Omega_0$. Стало быть точка $(0, \ldots, 0)$ — внутренняя точка $\Omega_0^{(n)}$. □

Утверждение 1.2. *Класс Ω_0 целиком состоит из граничных точек в топологии локально равномерной сходимости.*

Доказательство. Если ω — произвольная функция класса Ω_0, то ее можно аппроксимировать произведениями Бляшке [5, утверждение 1]. Обозначим эти аппроксимации через ω_n и рассмотрим последовательность $\{\omega_n(z) + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как ω_n, $n \in \mathbb{N}$, отображают единичную окружность на себя, то функции $\omega_n(z) + 1/n$, очевидно, лежат вне класса Ω_0. С другой стороны, $\omega_n \in \Omega_0$, $n \in \mathbb{N}$, и эта последовательность сходится локально равномерно к функции $\omega \in \Omega_0$ на Δ. Таким образом ω — граничная точка класса Ω_0. □

Заметим, что функция $\omega(z) = z/2$ согласно утверждению 1.2 является граничной точкой класса Ω_0, но набор ее коэффициентов $(1/2, 0, \ldots, 0)$ не является граничной точкой множества $\Omega_0^{(n)}$.

Чтобы решить проблему коэффициентов на классе Ω, И. Шур использовал специальные последовательности функций. Следующее утверждение — это по сути несколько видоизмененная форма второй теоремы Абеля.

Утверждение 1.3. *Пусть $\omega(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \{\omega\}_k z^k \in \Omega_0$ и $\omega_n(z) := \sum_{k=1}^{n} \{\omega\}_k z^k + o(z^n)$, $n \in \mathbb{N}$, тогда последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится локально равномерно к ω на Δ.*

Доказательство. Заметив, что $\omega(z) - \omega_n(z) = O(z^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$, легко показать, что последовательность $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится локально равномерно к тождественному нулю на Δ, откуда сразу следует, что последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится локально равномерно к ω на Δ. □

Выше уже упоминалось, что в 1917 году в работе [2] появился алгоритм, состоящий в общем случае из счетного количества шагов, предназначенный для определения факта принадлежности голоморфной функции классу Ω. И. Шур показал, что каждой функции ω класса Ω соответствует одна и только одна последовательность комплексных чисел, q_j, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для определения этих параметров И. Шур дал следующую процедуру:

$$\omega_k(z) := \frac{1}{z}\,\frac{\omega_{k-1}(z) - q_{k-1}}{1 - \overline{q}_{k-1}\omega_{k-1}(z)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где $\omega_0 := \omega$, $q_{k-1} := \omega_{k-1}(0)$. Числа q_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots$, и называются параметрами Шура.

Отметим еще, что выполнять эту процедуру можно до тех пор, пока $|q_{k-1}| < 1$, иначе получим деление на ноль ($q_{k-1} := \omega_{k-1}(0) \equiv \omega_{k-1}(z) \equiv e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$).

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Формула (1.1) допускает обращение

$$r_{k-1}(z) = \frac{q_{k-1} + z r_k(z)}{1 + \overline{q}_{k-1} z r_k(z)}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{1.2}$$

Если положить $r_{n-1} = \omega_{n-1}$ в формуле (1.2) и применять формулу (1.2) последовательно $n-1$ раз, тогда мы вернемся туда, откуда начали, то есть к исходной функции ω. Если же положить $r_{n-1}(z) \equiv q_{n-1}$ (при условии, что $\omega_{n-1}(z) \not\equiv q_{n-1}$), то ясно, что $r_k \neq \omega_k$. Более того, используя формулу (1.2) можно доказать по индукции, что каждая функция r_k окажется рациональной дробью общего вида, голоморфной в Δ:

$$r_k(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-k-1} z^{n-k-1}}{\beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{n-k-1} z^{n-k-1}},$$

где $k = 0, \ldots, n-1$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-k-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{n-k-1} \in \mathbb{C}$.

Приведем аналогичные формулы для класса Ω_0. Прямая формула [10]:

$$\omega_{k+1}(z) := \frac{\omega_k(z) - q_k z}{z - \overline{q}_k \omega_k(z)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.3}$$

где $\omega_0 := \omega$, $q_k := \{\omega_k\}_1$. Обратная к (1.3) формула:

$$r_{k-1}(z) = z \frac{q_{k-1} + r_k(z)}{1 + \overline{q}_{k-1} r_k(z)}, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1. \tag{1.4}$$

Заметим, что все функции ω_k и r_k лежат в классе Ω или Ω_0 в зависимости от того, применяем мы формулы (1.1) и (1.2) или формулы (1.3) и (1.4). Дело в том, что имеет место утверждение 0.1, и класс Ω инвариантен относительно дробно-линейного автоморфизма круга Δ.

Более того, справедливо

Утверждение 1.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n + o(z^n) \in \Omega_0$. Тогда существует $m \in \{1, \ldots, n\}$ и рациональная дробь общего вида*

$$Q_m(z, \omega^{(m)}) := z \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{m-1} z^{m-1}}{\beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_{m-1} z^{m-1}}, \quad Q_m \in \Omega_0,$$

имеющая в своем тейлоровском разложении около $z = 0$ n первых коэффициентов, соответственно равных $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$.

Лемма 1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Рациональная дробь*

$$R_n(z) := z \frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}, \tag{1.5}$$

не имеет нулей и полюсов на окружности $|z| = 1$. Более того, $|R_n(z)| = 1$, $|z| = 1$. Голоморфность R_n в круге Δ и выполнение условия $R_n(0) = \overline{\alpha}_{n-1}/\alpha_0 \in \overline{\Delta}$ эквивалентно тому, что $R_n \in \Omega_0$.

Легко показать, что каждому нулю z_k, числителя рациональной дроби R_n отвечает нуль ее знаменателя $1/\overline{z}_k$, симметричный нулю числителя относительно единичной окружности, то есть

$$R_n(z) = \varepsilon z \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z}_k z},$$

где $|\varepsilon| = 1$, $|z_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Если отрезок последовательности параметров Шура не заканчивается числом по модулю равным 1, то к нему всегда можно приписать число с модулем 1, следовательно справедливо

Утверждение 1.5. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\omega \in \Omega_0$ *и*

$$\omega(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_{n-1} z^{n-1} + o(z^{n-1}),$$

тогда существует дробь вида (1.5) *регулярная в* Δ *и имеющая в своем тейлоровском разложении около точки* $z = 0$ *первые* $n-1$ *коэффициентов, соответственно равных* $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_{n-1}$.

То есть множество голоморфных рациональных дробей вида (1.5) всюду плотно в классе Ω_0 в топологии локально равномерной сходимости.

Теорема 1.1 (Шур)**.** *Справедливо включение* $\omega \in \Omega_0$ *если и только если выполнено одно из условий: либо* $|q_k| < 1$, $k \in \mathbb{N}$, *либо найдется номер* n, *такой что* $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, $|q_n| = 1$ *и* $\omega_n(z) \equiv q_n$.

Функция ω *является рациональной дробью вида* (1.5) *тогда и только тогда, когда существует натуральное число* n, *такое что* $|q_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n-1$, *а* $|q_n| = 1$, *то есть* $\omega_n(z) \equiv q_n$.

Теорема 1.2 (Шур)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Точки* $\omega^{(n)}$ *границы* $\Omega_0^{(n)}$ *находятся во взаимнооднозначном соответствии с голоморфными в* Δ *дробями вида* (1.5)

$$R_m(z, \omega^{(m)}) = z \frac{\overline{\alpha}_{m-1} + \overline{\alpha}_{m-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{m-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{m-1} z^{m-1}}, \quad \overline{\alpha}_{m-1}/\alpha_0 \in \overline{\Delta},\ m \in \{1, \ldots, n\}.$$

Существует еще один тип аппроксимации [11] при помощи рациональных дробей вида (1.5).

Теорема 1.3 (Каратеодори, Фейер)**.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Каков бы ни был полином*

$$p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0,$$

существует, и притом единственная, дробь вида

$$R_n(\lambda, z, \omega^{(n)}) := \lambda z \frac{\overline{\alpha}_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-2} z + \ldots + \overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}, \quad \lambda > 0,$$

регулярная в Δ *и имеющая в своем тейлоровском разложении около* $z = 0$ n *первых коэффициентов, соответственно равных* $\{\omega\}_1, \ldots, \{\omega\}_n$.

Среди всех функций $\omega(z) = p(z) + o(z^n)$, *регулярных в* Δ, *эта рациональная дробь и только она дает наименьшее значение для величины* $M_\omega := \max_{z \in \Delta} |\omega(z)|$, *причем* $M_{R_n} = \lambda$.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в соотношении

$$\lambda\frac{\overline{\alpha}_{n-1}+\overline{\alpha}_{n-2}z+\ldots+\overline{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0+\alpha_1 z+\ldots+\alpha_{n-1}z^{n-1}}=\{\omega\}_0+\{\omega\}_1 z+\ldots+\{\omega\}_{n-1}z^{n-1}+\ldots,$$

получаем систему из n уравнений с $2n$ неизвестными $\overline{\alpha}_0,\ldots,\overline{\alpha}_{n-1}$, $\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_0$. Присоединяя к этим уравнениям уравнения, полученные из уже имеющихся уравнений заменой всех членов на сопряженные, будем иметь систему $2n$ линейных однородных уравнений с $2n$ неизвестными $\overline{\alpha}_0,\ldots,\overline{\alpha}_{n-1},\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_0$.

Выпишем определитель этой системы:

$$D_n(\lambda,\omega^{(n)}):=\begin{vmatrix} -\lambda & \cdots & 0 & 0 & \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 & \cdots & \{\omega\}_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \{\omega\}_1 & \cdots & \{\omega\}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \{\omega\}_1 \\ \overline{\{\omega\}}_1 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{\{\omega\}}_{n-1} & \cdots & \overline{\{\omega\}}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{\{\omega\}}_n & \cdots & \overline{\{\omega\}}_2 & \overline{\{\omega\}}_1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}; \tag{1.6}$$

заметим, что в случае когда $\{\omega\}_1,\ldots,\{\omega\}_n$ — действительные числа, система и ее определитель имеют другой вид:

$$d_n(\lambda,\omega^{(n)}):=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & \{\omega\}_1 \\ 0 & -\lambda & \cdots & \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \{\omega\}_1 & \cdots & \{\omega\}_{n-2}-\lambda & \{\omega\}_{n-1} \\ \{\omega\}_1 & \{\omega\}_2 & \cdots & \{\omega\}_{n-1} & \{\omega\}_n-\lambda \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

Теорема 1.4 (Каратеодори, Фейер). *Пусть $n\in\mathbb{N}$. В общем случае, $\lambda=\lambda(\omega^{(n)})$ является наибольшим положительным корнем уравнения $D_n(\lambda,\omega^{(n)})=0$ степени не выше $2n$. Если же все числа $\{\omega\}_0,\{\omega\}_1,\ldots,\{\omega\}_{n-1}$ вещественны, то λ есть наибольший из абсолютных значений корней уравнения $d_n(\lambda,\omega^{(n)})=0$ степени не выше n.*

В заключение приведем примеры. Пусть $\omega(z)=z/2+z^2/2$. Так как $\omega\in\Omega_0$, но при этом не является дробно-рациональной функцией вида (1.5), то по теореме 1.2 ω не соответствует никакой граничной точке $\Omega_0^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$, стало быть, это внутренняя точка для каждого из упомянутых множеств. Если взять $n=4$ и применить прямую формулу алгоритма Шура (1.3), то получим $q_0=1/2$, $q_1=2/3$, $q_2=2/5$, $q_3=2/7$. Применив обратную формулу (1.4), согласно утверждению 1.4 получим

$$r_0(z)=\frac{z}{2}\frac{53+96z+76z^2+56z^3}{53+43z+33z^2+14z^3}=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2+O(z^4).$$

Если теперь к последовательности добавить $q_4=1$ и выполнить те же действия (здесь $n=5$), то согласно утверждению 1.5 получим

$$r_0(z)=z\frac{1+2z+2z^2+2z^3+2z^4}{2+2z+2z^2+2z^3+z^4}=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2+O(z^5).$$

Наконец, согласно теореме 1.3 (здесь возьмем $n = 3$)

$$r_0(z) = \lambda z \frac{1+2\lambda z}{2\lambda + z} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + O(z^3), \quad \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.809.$$

Коэффициент λ мы вычислили, используя теорему 1.4, остальные коэффициенты рациональной дроби мы нашли, решив систему $d_n(\lambda, \omega^{(n)}) = 0$.

Утверждение 1.4, утверждение 1.5 и теорема 1.3 дают три различных способа продолжения полинома $p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$, до дробно-рационального отображения класса Ω_0. Эти три продолжения совпадают если и только если $\lambda = 1$. Таким образом, при $\lambda > 1$ продолжение невозможно, при $\lambda = 1$ продолжение единственно, а при $\lambda < 1$ продолжений бесконечно много, так как мы можем распоряжаться параметрами Шура q_k при $k \geqslant n$ произвольно.

Конструктивный характер теорем, сформулированных выше, дает достаточно удобный способ проверки принадлежности системы n начальных коэффициентов некоторой голоморфной функции n-му телу коэффициентов класса Ω_0.

2. Неравенства, описывающие тела коэффициентов

Пусть $\omega_0(z) := \omega(z) = \{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \ldots + \{\omega\}_6 z^6 + \ldots$, тогда по формуле (1.3)

$$\omega_1(z) := \frac{\omega(z) - \{\omega\}_1 z}{z - \overline{\{\omega\}_1}\omega(z)} = \{\omega_1\}_1 z + \{\omega_1\}_2 z^2 + \{\omega_1\}_3 z^3 + \{\omega_1\}_4 z^4 + \{\omega_1\}_5 z^5 + \ldots$$

Обозначив, для сокращения записи, $a_k := \{\omega\}_k$, $r_2 := 1 - |\{\omega\}_1|^2$, имеем:

$$\begin{aligned}
\{\omega_1\}_1 &= \frac{a_2}{r_2}, \\
\{\omega_1\}_2 &= \frac{a_3}{r_2} + \frac{\overline{a}_1 a_2^2}{r_2^2}, \\
\{\omega_1\}_3 &= \frac{a_4}{r_2} + 2\frac{\overline{a}_1 a_2 a_3}{r_2^2} + \frac{\overline{a}_1^2 a_2^3}{r_2^3}, \\
\{\omega_1\}_4 &= \frac{a_5}{r_2} + 2\frac{\overline{a}_1 a_2 a_4}{r_2^2} + \frac{\overline{a}_1 a_3^2}{r_2^2} + 3\frac{\overline{a}_1^2 a_2^2 a_3}{r_2^3} + \frac{\overline{a}_1^3 a_2^4}{r_2^4}, \\
\{\omega_1\}_5 &= \frac{a_6}{r_2} + 2\frac{\overline{a}_1 a_2 a_5}{r_2^2} + \frac{\overline{a}_1}{r_2^2}\left(3\frac{\overline{a}_1 a_2^2}{r_2} + 2a_3\right) a_4 + 3\frac{\overline{a}_1^2 a_2 a_3^2}{r_2^3} + 4\frac{\overline{a}_1^3 a_2^3 a_3}{r_2^4} + \frac{\overline{a}_1^4 a_2^5}{r_2^5}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Напомним, что ω_1 лежит в классе Ω_0 в силу того, что имеет место утверждение 0.1 и класс Ω инвариантен относительно дробно-линейного автоморфизма круга Δ.

Так как на классе Ω_0, в силу леммы Шварца [1, с. 29], первое неравенство:

$$|m_1| \leqslant r_1, \quad m_1 := \{\omega\}_1, \quad r_1 := 1, \tag{2.2}$$

справедливо и точно без всяких условий, то $|\{\omega_1\}_1| \leqslant 1$ также верно и точно, так как $\omega_1 \in \Omega_0$. Из чего, с учетом формул (2.1), следует, что второе неравенство

$$|m_2| \leqslant r_2, \quad m_2 := \{\omega\}_2, \quad r_2 := \frac{1}{r_1}(r_1^2 - |m_1|^2) \tag{2.3}$$

справедливо и точно на классе Ω_0 также без всяких дополнительных условий.

Применяя второе неравенство (2.3) к коэффициентам функции ω_1 (см. (2.1)), получаем третье неравенство:

$$|m_3| \leqslant r_3, \quad m_3 := \{\omega\}_3 + \frac{\overline{m}_1 m_2^2}{r_2}, \quad r_3 := \frac{1}{r_2}(r_2^2 - |m_2|^2), \tag{2.4}$$

справедливое и точное на классе Ω_0 также без всяких дополнительных условий.

Из (2.4) следует, что

$$\{\omega\}_3 = m_3 - \frac{\overline{m}_1 m_2^2}{r_2}.$$

Записав третье неравенство для ω_1, получаем четвертое неравенство:

$$|m_4| \leqslant r_4, \quad m_4 := \{\omega\}_4 + 2\frac{\overline{m}_1 m_2 m_3}{r_2} + \frac{\overline{m}_2 m_3^2}{r_2 r_3} - \frac{\overline{m}_1^2 m_2^3}{r_2^2}, \quad r_4 := \frac{1}{r_3}(r_3^2 - |m_3|^2). \tag{2.5}$$

Четвертое неравенство справедливо и точно на классе Ω_0 без всяких дополнительных условий.

Из (2.5) следует, что

$$\{\omega\}_4 = m_4 - 2\frac{\overline{m}_1 m_2 m_3}{r_2} - \frac{\overline{m}_2 m_3^2}{r_2 r_3} + \frac{\overline{m}_1^2 m_2^3}{r_2^2}.$$

Записав четвертое неравенство для ω_1, получаем пятое неравенство:

$$\begin{aligned} &|m_5| \leqslant r_5, \quad r_5 := \frac{1}{r_4}(r_4^2 - |m_4|^2), \\ &m_5 := \{\omega\}_5 + 2\left(\overline{m}_1 m_2 + \frac{\overline{m}_2 m_3}{r_3}\right)\frac{m_4}{r_2} + \frac{\overline{m}_3 m_4^2}{r_3 r_4} \\ &\qquad - 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2^2 m_3}{r_2^2} + \overline{m}_1\left(1 - 2\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3}\right)\frac{m_3^2}{r_2} - \frac{\overline{m}_2^2 m_3^3}{r_2^2 r_3^2} + \frac{\overline{m}_1^3 m_2^4}{r_2^3}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Пятое неравенство справедливо и точно на классе Ω_0 без всяких дополнительных условий.

Выразив $\{\omega\}_5$ из (2.6), получаем шестое неравенство:

$$\begin{aligned} &|m_6| \leqslant r_6, \quad r_6 := \frac{1}{r_5}(r_5^2 - |m_5|^2), \\ &m_6 := \{\omega\}_6 + 2\left(\frac{\overline{m}_1 m_2}{r_2} + \frac{\overline{m}_2 m_3}{r_2 r_3} + \frac{\overline{m}_3 m_4}{r_3 r_4}\right) m_5 + \frac{\overline{m}_4}{r_4 r_5} m_5^2 \\ &\qquad + \left(2\overline{m}_1\left(1 - 2\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3}\right)\frac{m_3}{r_2} - 3\frac{\overline{m}_2^2 m_3^2}{r_2^2 r_3^2} - 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2^2}{r_2^2}\right) m_4 \\ &\qquad + \left(\frac{\overline{m}_2}{r_2 r_3} - 2\frac{\overline{m}_1 m_2 \overline{m}_3}{r_2 r_3 r_4} - 2\frac{\overline{m}_2 |m_3|^2}{r_2 r_3^2 r_4}\right) m_4^2 - \frac{\overline{m}_3^2}{r_3^2 r_4^2} m_4^3 \\ &\qquad + 4\frac{\overline{m}_1^3 m_2^3}{r_2^3} m_3 + 3\frac{\overline{m}_1^2 m_2}{r_2^2}\left(\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3} - 1\right) m_3^2 + 2\frac{\overline{m}_1 m_2}{r_2^2 r_3}\left(\frac{|m_2|^2}{r_2 r_3} - 1\right) m_3^3 \\ &\qquad + \frac{\overline{m}_2^3}{r_2^3 r_3^3} m_3^4 - \frac{\overline{m}_1^4}{r_2^4} m_2^5. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Процесс получения неравенств можно продолжать бесконечно, но для наших целей шести неравенств вполне достаточно. Сделаем некоторые примечания.

Неравенства (2.6) и (2.7) получены впервые. Первые четыре неравенства известны (см. [10]). Неравенство (2.2) носит имя Шварца. Дж. Браун в [10] отмечает, что неравенства (2.3) и (2.4) были известны до него, а неравенство (2.5) принадлежит ему.

Получить эти неравенства можно также и другими способами. Во первых, можно не ограничиваться одной итерацией в алгоритме Шура. В этом случае нам всегда будет достаточно первого неравенства. Например шестое неравенство будет выглядеть так: $|\{\omega_5\}_1| \leqslant 1$. Дж. Браун в [10] использовал именно многократные итерации, но почему-то не первое, а второе неравенство. Во вторых, можно выделить полный квадрат в неравенствах $D_n(1, \omega^{(n)}) \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ (см. формулы (1.6) и (1.7)), но этот способ требует весьма громоздких вычислений, поэтому мы его не используем. Подробнее о связи неравенств, содержащих определители, и неравенств, обсуждавшихся выше, см. в пункте 4.

Аналогичные неравенства можно получить и в других связанных с Ω_0 классах. Как пример, можно взять класс Ω или класс C всех голоморфных в Δ функций с положительной действительной частью или класс B всех голоморфных в Δ функций ограниченных и не обращающихся в нуль. Дополнительными примерами могут служить классы однолистных функций, в частности, класс выпуклых функций и класс звездных функций. Дж. Браун в [10] предлагает для этого перенести алгоритм Шура на эти классы, используя формулы связи с Ω_0. Однако, вычисления при этом будут сложнее, чем в Ω_0. Намного проще получить упомянутые неравенства, используя уже имеющиеся у нас неравенства на Ω_0, использовав формулы связи для того, чтобы выразить коэффициенты функции $h \in C$ или $f \in B$ через коэффициенты функции $\omega \in \Omega_0$.

3. Об общем виде неравенств, описывающих тела коэффициентов

Если записать все неравенства из предыдущего пункта в виде

$$|m_n| \leqslant r_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где m_n — подмодульное выражение в левой части n-го неравенства, а r_n — правая часть n-го неравенства, то получая из n-го неравенства $(n+1)$-е способом, описанным в предыдущем пункте, мы увидим следующие закономерности:

$$m_n \mapsto \frac{m_{n+1}}{r_2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r_n \mapsto \frac{r_{n+1}}{r_2}, \quad n > 1, \tag{3.1}$$

где символ «$\mapsto$» обозначает «переходит в» (под действием формулы (1.3)).

Введем обозначение

$$x_n := \frac{|m_n|}{r_n}.$$

Ясно, что $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ и $x_n \mapsto x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Методом математической индукции можно показать что справедливо

Утверждение 3.1. *Если $\omega \in \Omega_0$, то*

$$\begin{aligned} &r_1 := 1, \\ &r_{n+1} = \frac{r_n^2 - |m_n|^2}{r_n} = r_n(1 - x_n^2), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Доказательство. В предыдущем пункте имеется база индукции для первого равенства при $n = \overline{1,6}$. Предположим, что

$$r_n = \frac{r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2}{r_{n-1}}, \text{ тогда (3.1) влечет } r_{n+1}/r_2 = \frac{r_n^2/r_2^2 - |m_n|^2/r_2^2}{r_n/r_2},$$

что и требовалось. Второе равенство очевидно. □

Применяя утверждение 3.1 многократно, получаем

Следствие 3.1. *Если* $\omega \in \Omega_0$, *то*

$$r_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k^2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из следствия 3.1, сразу получаем

Следствие 3.2. *Если* $\omega \in \Omega_0$, *то* $0 \leqslant r_n \leqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Последовательность* $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не возрастает. Более того,* $r_n = 0$ *равносильно существованию номера* $k < n$, *такого что* $x_k = 1$, *а* $r_n = 1$ *равнозначно тому, что* $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функции z^n и $z^n/2 + z^{n+1}/2$ являются примерами функций класса Ω_0, для которых $r_n = 1$.

Из следствия 3.1, получаем

Следствие 3.3. *Если* $\omega \in \Omega_0$, *и* $|m_k| < r_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, $|m_n| = r_n$, *то*

$$|m_n| = \frac{r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2}{r_{n-1}} = r_{n-1}(1 - x_{n-1}^2) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k} = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k^2),$$
$$m_k = r_k = 0, \quad k > n.$$

Итак, мы вывели простую формулу (утверждение 3.1), позволяющую записать r_{n+1} по известным m_n и r_n. Записать m_{n+1} по известным m_n и r_n в виде простой закономерности можно в случае, описанном в следствии 3.3 и отвечающем принадлежности точки $\omega^{(n)}$ границе n-го тела коэффициентов класса Ω_0.

4. Итоговые результаты по проблеме коэффициентов

Применив $n-1$ раз утверждение 3.1, получим

Следствие 4.1. *При* $n \geqslant 2$ *из справедливости одного неравенства* $|m_n| \leqslant r_n$ *следует справедливость всех остальных неравенств* $|m_k| \leqslant r_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. *Более того,* $|m_n| < r_n$ *влечет* $|m_k| < r_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, *а существование наименьшего номера* $s \leqslant n$ *такого, что* $|m_s| = r_s$, *влечет* $r_s > 0$ *и* $|m_k| < r_k$, $k = 1, \ldots, s-1$, *причем* $|m_k| = r_k$, $r_k = 0$, $k = s+1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 2$ и $|m_n| \leqslant r_n$. Неравенство $r_n \geqslant 0$ по утверждению 3.1 эквивалентно $r_{n-1}^2 - |m_{n-1}|^2 \geqslant 0$. Откуда сразу следует, что $|m_{n-1}| \leqslant r_{n-1}$.

Пусть теперь $|m_n| < r_n$. Это значит $r_n > 0$. Из чего, согласно утверждению 3.1, по цепочке следует, что $|m_k| < r_k$ и $r_k > 0$ при $k < n$.

Пусть теперь s — наименьший из номеров, не превосходящих n таких, что $|m_s| = r_s$, тогда по утверждению 3.1 $r_s = \frac{r_{s-1}^2 - |m_{s-1}|^2}{r_{s-1}}$ и $r_s > 0$ в силу определения номера s. Далее, как и в предыдущем абзаце, из утверждения 3.1 последовательно выводим, что $|m_k| < r_k$ и $r_k > 0$ при $k < s$, а из следствия 3.2 — что $r_k = 0$ при $k > m$. □

Таким образом, для описания множества $\Omega_0^{(n)}$ достаточно всего лишь одного неравенства $|m_n| \leqslant r_n$. Переход от неравенства $|m_n| \leqslant r_n$ к предыдущему неравенству $|m_{n-1}| \leqslant r_{n-1}$ есть проецирование $\Omega_0^{(n)}$ из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^{n-1}$, так как результатом этого действия будет $\Omega_0^{(n-1)}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_0$. В общем случае, согласно предыдущему пункту, $|m_n| \leqslant r_n$. Это неравенство можно переписать в виде $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$, где $c_n := \{\omega\}_n - m_n$. Из геометрических соображений видим, что $\omega^{(n)}$ — внутренняя точка n-го тела коэффициентов $\Omega_0^{(n)}$, тогда и только тогда, когда $|m_n| < r_n$.

Таким образом, суммируя все вышеизложенное, решение проблемы коэффициентов на Ω_0 можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество значений системы коэффициентов $\omega^{(n)}$ на классе Ω_0 есть абсолютно выпуклый компакт $\Omega_0^{(n)}$, состоящий из точек пространства $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих либо строгому неравенству $|\{\omega\}_n - c_n| < r_n$, либо равенству $|\{\omega\}_s - c_s| = r_s$, $s \leqslant n$, причем $r_s > 0$, $r_k = 0$, $\{\omega\}_k = c_k$, $s < k \leqslant n$. Первый случай отвечает внутренним точкам $\Omega_0^{(n)}$, второй случай — граничным точкам $\Omega_0^{(n)}$. Каждой граничной точке отвечает одна и только одна функция класса Ω_0, имеющая вид голоморфной в Δ рациональной дроби $R_s(1, z, \omega^{(s)})$.*

Заметим, что теорема 4.1 есть критерий продолжаемости полинома

$$p(z) = \{\omega\}_1 z + \ldots + \{\omega\}_n z^n \not\equiv 0$$

до функции $\omega(z) = p(z) + o(z^n) \in \Omega_0$. Теорема 4.1 есть также критерий принадлежности голоморфной в Δ функции ω с тейлоровскими коэффициентами разложения относительно точки $z = 0$, $\{\omega\}_k$, $k \in \mathbb{N}$, классу Ω_0.

Обобщим теорему 4.1. Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$. Ясно, что $\{f\}_n$ зависит от $\{\omega\}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Если верхний индекс обозначает показатель степени, то

$$\{f\}_n = \{F\}_1\{\omega\}_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n,$$

откуда $\{F\}_1\{\omega\}_n = \{f\}_n - (\{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n)$. Подставив $\{\omega\}_n$ в неравенство $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$, получаем похожее неравенство $|\{f\}_n - c_n^*| \leqslant r_n^*$, где $r_n^* := |\{F\}_1|r_n$, а $c_n^* := \{F\}_1 c_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \ldots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n$.

Теорема 4.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество значений системы коэффициентов $f^{(n)}$ на классе M_F есть компакт $M_F^{(n)}$ (не выпуклый, выпуклый или абсолютно выпуклый, если множество $M_F(\Delta)$ не выпуклое, выпуклое или абсолютно выпуклое), состоящий из точек пространства $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих либо строгому неравенству $|\{f\}_n - c_n^*| < r_n^*$, либо равенству $|\{f\}_s - c_s^*| = r_s^*$, $s \leqslant n$, где $r_s^* > 0$, $r_k^* = 0$, $\{f\}_k = c_k^*$, $s < k \leqslant n$. Первый случай отвечает внутренним точкам $M_F^{(n)}$, второй случай — граничным точкам $M_F^{(n)}$. Каждой граничной точке отвечает одна и только одна функция класса M_F, имеющая вид $F(R_s(1, z, \omega^{(s)}))$.*

Отметим, что теорема 4.2 есть критерий продолжаемости полинома

$$p(z) = \{f\}_0 + \{f\}_1 z + \ldots + \{f\}_n z^n \not\equiv 0$$

до функции $f(z) = p(z) + o(z^n) \in M_F$. Теорема 4.2 есть также критерий принадлежности голоморфной в Δ функции f с тейлоровскими коэффициентами разложения относительно точки $z = 0$, $\{f\}_k$, $k \in \mathbb{N}$, классу M_F.

Заметим, что теорему 4.1 можно сформулировать, используя вместо неравенства с модулем неравенство с определителем (см. формулы (1.6) и (1.7)). Действительно, пусть $\omega \in \Omega_0$. Выделив в неравенствах $D_1(1, \omega^{(1)}) \geqslant 0$ и $D_2(1, \omega^{(2)}) \geqslant 0$ полный квадрат, получим неравенства $|\{\omega\}_1| \leqslant 1$ и $|\{\omega\}_2| \leqslant 1 - |\{\omega\}_1|^2$, то есть неравенства (2.2) и (2.3). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как $\{\omega\}_n$ и $\overline{\{\omega\}_n}$ входит в определитель D_n только по одному разу, то исходя из определения определителя можно заключить, что он зависит от некоторых степеней $\{\omega\}_k$, $\overline{\{\omega\}_k}$, $k = 1, \ldots, n{-}1$, и от первой степени $\{\omega\}_n$, $\overline{\{\omega\}_n}$ и $|\{\omega\}_n|^2$. Выделяя полный квадрат, получаем n-е неравенство.

Здесь мы не используем неравенств с определителями, однако у них есть одно неоспоримое преимущество — мы знаем вид этих неравенств для любого $n \in \mathbb{N}$. Это легко позволяет делать компьютерные вычисления. Например, таким образом можно проверить, что мы не допустили ошибок при получении первых шести неравенств. Классические формулировки с определителями можно найти в работе [5]).

Упомянем еще раз о том, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\Omega_0^{(n)}$ полностью определяется одним неравенством $|m_n| \leqslant r_n$. В этом и состоит основное отличие формулировок, приводимых здесь, от формулировок классических. Приведем, например, такую формулировку из монографии [1, с. 484]: «Для того чтобы $\omega^{(n)}$ была внутренней точкой $\Omega^{(n)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $D_n(1, \omega^{(n)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n$». Здесь конечно нет ошибки, но создается впечатление, что для описания множества $\Omega_0^{(n)}$ необходимо n неравенств, а не одно.

Эти соображения позволяют нам переформулировать следствие 4.1 в терминах определителей.

Следствие 4.2. *При $n \geqslant 2$ из справедливости одного неравенства $D_n(1, \omega^{(n)}) \geqslant 0$ следует справедливость всех неравенств $D_k(1, \omega^{(k)}) \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Более того, $D_n(1, \omega^{(n)}) > 0$, влечет $D_k(1, \omega^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, а существование наименьшего номера $s \leqslant n$ такого, что $D_s(1, \omega^{(s)}) = 0$, влечет $D_k(1, \omega^{(k)}) > 0$, $k = 1, \ldots, s-1$, причем $D_k(1, \omega^{(k)}) = 0$, $k = s+1, \ldots, n$.*

5. Приложения

Этот пункт посвятим применению результатов по проблеме коэффициентов для оценок модулей тейлоровских коэффициентов на классе Ω_0 и связанных классах.

5.1. Оценки модулей тейлоровских коэффициентов

При выводе коэффициентных оценок на классах функций, связанных с классом Ω_0, весьма полезно иметь в виду следующий очевидный, в свете изложенного в пунктах 2. и 4., факт.

Лемма 5.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *а* $\omega \in \Omega_0$. *Если все тейлоровские коэффициенты* $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$, *фиксированы, то* $\{\omega\}_n = c_n + e^{i\varphi}\rho\, r_n$, $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. *То есть* $\{\omega\}_n$ *есть некоторое число из замкнутого круга* $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$ *с радиусом* r_n *и центром* c_n, *зависящими от* $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$.

Обобщим эту лемму, используя обозначения из пункта 3.

Лемма 5.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, *а* $f \in M_F$. *Если тейлоровские коэффициенты* $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$, *фиксированы, то* $\{f\}_n = c_n^* + e^{i\varphi}\rho\, r_n^*$, $\rho \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. *То есть* $\{f\}_n$ *есть некоторое число из замкнутого круга* $|\{f\}_n - c_n^*| \leqslant r_n^*$ *с радиусом* r_n^* *и центром* c_n^*, *зависящими от* $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$.

Заметим, что c_n^* и r_n^* можно выразить через $\{f\}_k$, $k = \overline{0, n-1}$, и соответствующим образом отредактировать формулировку теорем 4.2 и 5.2, а также других утверждений на M_F, но обычно эти выражения получаются более громоздкими.

Из леммы 5.1 вытекает

Утверждение 5.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$. *Справедливы точные неравенства*

$$|c_n| - r_n \leqslant |\{\omega\}_n| \leqslant |c_n| + r_n. \tag{5.1}$$

Равенства в неравенствах (5.1) *достигаются на границе* $\Omega_0^{(n)}$: *в первом неравенстве* (*с оговоркой* $|c_n| \geqslant r_n$) *при* $\{\omega\}_n = c_n - r_n e^{i \arg c_n}$, *а во втором при* $\{\omega\}_n = c_n + r_n e^{i \arg c_n}$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Имеем: $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$, следовательно, так как $|c_n| - |\{\omega\}_n| \leqslant |\{\omega\}_n - c_n|$ и $|\{\omega\}_n| - |c_n| \leqslant |\{\omega\}_n - c_n|$, то $|c_n| - r_n \leqslant |\{\omega\}_n| \leqslant r_n + |c_n|$. Что и требовалось. □

Аналогично, из леммы 5.2 вытекает

Утверждение 5.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $f \in M_F$. *Справедливы точные неравенства*

$$|c_n^*| - r_n^* \leqslant |\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^*, \quad c_n^* := \{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n, \; r_n^* := |\{F\}_1| r_n. \tag{5.2}$$

Равенства в неравенствах (5.2) *достигаются на границе* $\Omega_0^{(n)}$: *в первом неравенстве* (*с оговоркой* $|c_n^*| \geqslant r_n^*$) *при* $\{f\}_n = c_n^* - r_n^* e^{i \arg c_n^*}$, *а во втором при* $\{f\}_n = c_n^* + r_n^* e^{i \arg c_n^*}$.

Утверждение 5.2 говорит о том, что нам достаточно исследовать целевой функционал $|\{f\}_n|$ на максимум только на границе тела коэффициентов $\Omega_0^{(n)}$, которая полностью определяется уравнением $|\{\omega\}_n - c_n| = r_n$.

5.2. Одно свойство граничных точек тел коэффициентов

Утверждение 5.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$. *Точка* $\omega^{(n)}$ *является граничной точкой* n*-го тела коэффициентов класса* Ω_0 *тогда и только тогда, когда* $x_n = 1$.

Доказательство. Согласно теореме 4.1 точка $\omega^{(n)}$ является граничной точкой n-го тела коэффициентов класса Ω_0 тогда и только тогда, когда либо $|\{\omega\}_n - c_n| = r_n$, $r_n > 0$, либо $r_n = 0$, но найдется номер $k < n$ такой, что $|\{\omega\}_k - c_k| = r_k$, $r_k > 0$.

По лемме 5.1 $\{\omega\}_n = c_n + r_n e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Если $r_n > 0$, тогда по определению z_n

$$z_n = \frac{\{\omega\}_n - c_n}{r_n} = \frac{c_n + r_n e^{i\varphi} - c_n}{r_n} = e^{i\varphi}.$$

Если же $r_n = 0$, то мы получаем неопределенность вида $0/0$. Рассмотрим функцию $\omega_\varepsilon(z) := \varepsilon\omega(z)$. Ясно, что точка $\omega_\varepsilon^{(n)}$ есть уже внутренняя точка n-го тела коэффициентов класса Ω_0. Стало быть, для функции ω_ε при $\varepsilon \to 1^-$ будет справедливо следующее $\omega_\varepsilon^{(n)} \to \omega^{(n)}$, $|m_n| \to r_n^-$, $r_n \to 0^+$ и $x \to 1^-$. □

6. Проблема коэффициентов и оценка коэффициентов

В этом пункте обсуждается возможность вывода оценок модулей коэффициентов на классе Ω_0 без использования каких бы-то ни было свойств класса Ω_0 таких, например, как выпуклость или $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\{\omega\}_k|^2 \leqslant 1$ (см. [8]) и прочих. Можно пользоваться только неравенствами.

То есть из неравенства $|m_n| \leqslant r_n$ нужно получить неравенства $|\{\omega\}_k| \leqslant 1$, и показать, что равенство в этих неравенствах достигается тогда и только тогда, когда $\omega(z) = \zeta_k z^k$, $|\zeta_k| = 1$, $k = 1, \ldots, n$. Теоретически (см. теорему 4.1) это возможно, но на практике возникают трудности.

Вероятно, что если это получится сделать на Ω_0, то этот успех можно будет повторить и для классов M_F, по крайней мере для некоторых функций F.

В работе [12] как раз приведены оценки, полученные на основе одних только неравенств

$$|\{\omega\}_1| \leqslant 1, \quad |\{\omega\}_2| \leqslant 1 - |m_1|^2, \quad |\{\omega\}_3| \leqslant 1 - |m_1|^2 - \frac{|m_2|^2}{1 + |m_1|}, \tag{6.1}$$

из которых сразу видно, что $|\{\omega\}_k| \leqslant 1$, и равенство в этих неравенствах достигается если и только если $\omega(z) = \zeta_k z^k$, $|\zeta_k| = 1$, $k = 1, 2, 3$. Из неравенств (6.1) также видно, что $\{\max|\{\omega\}_k|\}_{k=1}^3$ не возрастает.

Фиксируем $\{\omega\}_k$, $k = \overline{1, n-1}$. Пусть $n > 3$. Следствие 3.2 говорит о том, что $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ не возрастает. Следовательно и $\{\max|m_k|\}_{k=n}^\infty$ не возрастает. Скорее всего, $\{\max|c_k|\}_{k=n}^\infty$ также не возрастает. Если это так, то $\{\max|\{\omega\}_k|\}_{k=n}^\infty$ не возрастает, а значит $|\{\omega\}_k|$ никак не может быть больше 1.

6.1. Оценка $|c_n|$

Утверждение 6.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$, тогда $|c_n| + r_n \leqslant 1$. Равенство достигается если и только если $c_n = 0$, $r_n = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Из леммы 5.1 следует, что $\{\omega\}_n = c_n + e^{i\varphi}\rho r_n$. Так как $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$ и $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, то $r_n + |c_n| \leqslant 1$. Далее, $|\{\omega\}_n| = 1$, как известно, равнозначно $\omega(z) = \eta z^n$, $|\eta| = 1$. □

Заметим, что r_n^* пропорционален r_n, но c_n^* выражается через c_n сложнее, что и влечет, в общем случае, отсутствие простой оценки $|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* \leqslant |\{F_1\}|$ в отличие от утверждения 6.1. Однако легко показать, что если $F(\Delta)$ — выпуклое множество, то $|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* \leqslant |\{F_1\}|$.

Из утверждения 6.1 и следствия 3.1 прямо следует

Утверждение 6.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$, *тогда*

$$|c_n| \leqslant 1 - r_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|m_k|^2}{r_k}.$$

Равенство достигается если и только если $c_n = 0$, $r_n = 1$.

Если бы мы получили этот факт, не используя того, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, то могли бы доказать, что из $|\{\omega\}_n - c_n| \leqslant r_n$ следует, что $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$.

У нас даже есть база индукции. При $n = 1, 2$ утверждение 6.2 очевидно справедливо, так как $c_1 = c_2 = 0$. Далее, неравенство $c_3 \leqslant \frac{|m_1|^2}{r_1} + \frac{|m_2|^2}{r_2}$ эквивалентно неравенству $|m_1||m_2|^2 \leqslant r_2|m_1|^2 + |m_2|^2$, которое справедливо в силу того, что $|m_1||m_2|^2 \leqslant |m_2|^2$. Однако, как сделать шаг индукции в настоящее время не ясно.

6.2. Экстремальное свойство функции z^n

Из формул (2.2)–(2.7) очевидно, что имеет место

Лемма 6.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\omega \in \Omega_0$, *тогда* $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, *равносильно* $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Функция z^n обладает следующим экстремальным свойством (сравните со следствием 3.2).

Утверждение 6.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Функционалы* $|m_n|$ *и* r_n *достигают своего максимального значения 1 на* Ω_0 *если и только если* $\omega(z) = \zeta z^n$, $|\zeta| = 1$.

Доказательство. Имеем $|m_n| \leqslant r_n$, а $r_n = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k^2)$ по следствию 3.1. Отсюда ясно, что $r_n = 1$ эквивалентно $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, что согласно лемме 6.1 эквивалентно $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, что равносильно $c_n = 0$.

Если $|m_n| = r_n = 1$, то $c_n = 0$, значит $|\{\omega\}_n| = 1$ и $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Если $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $|\{\omega\}_n| = 1$, то $|m_n| = 1$, так как $c_n = 0$. □

Лемма 6.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\omega \in \Omega_0$, *тогда* $|\{\omega\}_n| = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\omega(z) = \zeta z^n$, $|\zeta| = 1$.

Если $\omega(z) = \zeta z^n$, $|\zeta| = 1$, то очевидно, что n-е неравенство превращается в $|\{\omega\}_n| = 1$. А вот обратное утверждение доказать, пользуясь одними только неравенствами, по-видимому, не просто.

Теорема 6.1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\omega \in \Omega_0$, *тогда* $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$, *причем равенство достигается если и только если* $\omega(z) = \zeta z^n$, $|\zeta| = 1$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_0$. Случай $|\{\omega\}_n| = 1$ описан в лемме 6.2. Дальнейшее доказательство проведем от противного.

Предположим, что $|\{\omega\}_n| > 1$ и $\{\omega\}_k \neq 0$ при некотором натуральном $k < n$, тогда $g(z) := \omega(z)/\{\omega\}_n \in \Omega_0$ и $|\{g\}_n| = 1$, но $\{g\}_k \neq 0$, что противоречит лемме 6.2. Стало быть $|\{\omega\}_n| < 1$.

Предположим, что $|\{\omega\}_n| > 1$ и $\{\omega\}_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, тогда получаем противоречие с утверждением 6.1. Действительно, $m_n = \{\omega\}_n - c_n$, но в нашем случае $c_n = 0$ и значит $|m_n| = |\{\omega\}_n| > 1$, чего не может быть. Стало быть $|\{\omega\}_n| \leqslant 1$. □

Заметим, что неравенства (6.1) вполне могли бы послужить базой индукции в доказательстве теоремы 6.1.

7. От функционала к функции

В пункте 4. было упомянуто, что если $f \in M_F$, то

$$\{f\}_n = \sum_{k=1}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Области значений $\{\omega\}_k$ и $\{\omega\}_{k+1}$, $k = 1, \ldots, n-1$ отличаются, что затрудняет решение задачи. Исправим это. Коэффициент $\{\omega\}_k$ можно выразить через m_j и r_j, $j = 1, \ldots, k$, (см. формулы (2.2)–(2.7)). Введем обозначения $z_k = m_k/r_k$, $k = 1, \ldots, n$. Согласно пункту 3. $x_k = |z_k|$.

Используя эти обозначения мы можем представить функционал $\{f\}_n$ в виде комплекснозначной функции комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$. Область определения этой функции есть полидиск $\overline{\Delta}^n$. Из формул (2.2)–(2.7) следует, что рассматриваемая функция не является голоморфной на $\overline{\Delta}^n$.

Очевидно, что точки максимума функционала $|\{f\}_n|$ и функционала

$$\left| \{\omega\}_n + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \{\omega^k\}_n \right|, \quad \alpha_k = \frac{\{F\}_k}{|\{F\}_1|}, \quad k = 2, \ldots, n,$$

совпадают. Это соображение можно применить, если оно приведет к некоторым упрощениям в расчетах.

Так как функционал $|\{f\}_n|$ достигает своего максимума на границе $\Omega_0^{(n)}$, то согласно лемме 5.1 $\{\omega\}_n = c_n + r_n e^{i\varphi}$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и покажем три способа перехода от функционала к функции. Так как наша задача состоит в получении точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов на классе M_F, то в качестве целевых функционалов будем рассматривать только те, которые не нарушают точность оценки.

7.1. Первый способ

Рассмотрим функционал

$$I_n := \left| r_n + c_n + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \{\omega^k\}_n \right|.$$

Без уменьшения общности можно считать, что $\{\omega\}_1 \geqslant 0$, так как класс Ω_0, а следовательно и класс M_F инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z. Кроме того, можно считать, что множитель $e^{i\varphi}$ при r_n равен 1. Это достигается уже за счет вращений в плоскости переменной w, относительно которых класс M_F возможно уже не инвариантен, но вращения в плоскости переменной w не меняют величин, следовательно, не могут помешать поиску максимума.

Как и выше считаем, что $z_k = m_k/r_k$, $x_k = |z_k|$, $\varphi_k := \arg z_k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Используя эти обозначения мы свели задачу об оценке функционала I_n к исследованию действительнозначной функции (обозначим ее через h_n) от $2n-3$ действительных аргументов x_k и φ_k на максимум при ограничениях $x_k \in [0,1]$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, $k = 2, \ldots, n-1$.

7.2. Второй способ

Согласно утверждению 5.2 для любой функции $f \in M_F$ справедлива точная оценка

$$|\{f\}_n| \leqslant |c_n^*| + r_n^* = |\{F\}_1| r_n + \left| \{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n \right| =: I_n.$$

Без уменьшения общности можно считать, что $\{\omega\}_1 \geqslant 0$, так как класс M_F инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z. Как и выше считаем, что $z_k = m_k/r_k$, $x_k = |z_k|$, $\varphi_k := \arg z_k$, $k = 1, \dots, n-1$. Используя эти обозначения мы свели задачу об оценке функционала I_n к исследованию действительнозначной функции (обозначим ее через h_n) от $2n-3$ действительных аргументов x_k и φ_k на максимум при ограничениях $x_k \in [0,1]$, $k = 1, \dots, n-1$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, $k = 2, \dots, n-1$.

7.3. Третий способ

Без уменьшения общности заменим функционал $|\{f\}_n|$ на функционал

$$I_n := \{F\}_1 r_n + \operatorname{Re} \left(\{F\}_1 c_n + \sum_{k=2}^{n} \{F\}_k \{\omega^k\}_n \right),$$

воспользовавшись тем, что класс M_F инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z.

Как и выше обозначим $z_k = m_k/r_k$, $x_k = |z_k|$, $\varphi_k = \arg z_k$, $k = 1, \dots, n-1$. Используя эти обозначения мы свели задачу об оценке функционала I_n к исследованию действительнозначной функции (обозначим ее h_n) от $2(n-1)$ действительных аргументов x_k и φ_k на экстремумы при ограничениях $x_k \in [0,1]$, $\varphi_k \in [0, 2\pi)$.

7.4. Замечания

В пункте 7.3. мы выполнили некоторые действия для того, чтобы избавиться от модуля в выражении, определяющем функцию h_n, так как возможность использовать методы дифференциального исчисления очень полезна при исследовании функций на экстремумы. Более того, h_n есть функция бесконечно гладкая по всем аргументам.

Теоретически, для решения поставленной в пункте 7.3. задачи достаточно найти значения h_n во всех стационарных точках, удовлетворяющих указанным ограничениям, а также значения h_n в граничных точках, и выбрать среди этих значений число с наибольшей абсолютной величиной.

На практике задача поиска стационарных точек в аналитической форме может быть неразрешимой при $n > 3$. Дело в том, что в общем случае необходимо решать уравнения, содержащие косинусы разных аргументов, так как мы имеем дело с действительной частью функции. Однако, если ограничиться случаем функций с действительными коэффициентами, то косинусы исчезнут и можно будет получить решения при бо́льших n.

Напомним, что упомянутые выше косинусы возникли из-за обозначений $z_k = x_k e^{i\varphi_k}$. Если взять $z_k = x_k + iy_k$, где $x_k = \operatorname{Re} z_k$, а $y_k = \operatorname{Im} z_k$, то косинусы исчезнут и в случае комплексных коэффициентов.

С другой стороны, в пунктах 7.1. и 7.2. размерность задачи на 1 ниже, чем в пункте 7.3., что может быть полезно, если использовать численные методы, не требующие дифференцируемости целевой функции.

Заметим, что все сказанное здесь применимо к любым коэффициентным функционалам над Ω_0, например, к c_n, r_n или каким-то еще.

8. Заключение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. В настоящей статье приводится обзор решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0. Затем выводятся первые шесть неравенств, описывающих соответственно первые шесть тел коэффициентов на классе Ω_0. Далее дается метод получения аналогичных неравенств для связанных с классом Ω_0 классов M_F, что по сути распространяет решение проблемы коэффициентов на эти классы. Затем анализируются свойства упомянутых неравенств, а также связи между ними. Кроме того показано, что для описания n-го тела коэффициентов на классе Ω_0, а следовательно, и M_F достаточно только одного n-го неравенства. Обсуждается задача вывода оценок модулей тейлоровских коэффициентов из полученных неравенств.

В итоге, задача получения точных оценок модуля тейлоровского коэффициента с номером n, то есть функционала $|\{f\}_n|$, на классе M_F сначала сведена к задаче об оценке функционала над классом Ω_0, которая в свою очередь сведена к задаче о поиске максимального по модулю условного экстремума действительнозначной функции $2(n-1)$ действительных аргументов с ограничениями типа неравенств $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi_k < 2\pi$, что позволяет применять стандартные методы дифференциального исчисления для исследования на экстремумы, так как целевая функция бесконечно гладкая по всем своим аргументам. Для этого используются результаты решения классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0.

Заметим, что в пункте 6. речь идет об оценке модуля каждого начального коэффициента по отдельности, тогда как в пункте 5. речь идет — об оценке всех коэффициентов сразу, причем требуется сделать это, используя только неравенства и не используя каких-либо известных свойств исследуемого класса, таких как выпуклость.

Таким образом, применение разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций, а также на других классах голоморфных функций. Более того, задачи на экстремум функционала широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

References

[1] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд., Наука, М., 1966; англ. пер.:G. M. Golusin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, **I, II**, Amer. Math. Soc., 1969.

[2] I. Schur, “Über potenzreihen, die in Innern des Einheitskrises Beschränkt Sind”, *Reine Angew. Math.*, **147** (1917), 205–232.

[3] C. Carathéodory, “Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen”, *Mathematische Annalen*, **64** (1907), 95–115.

[4] C. Carathéodory, “Über die Variabilitätsbereich des Fourierschen Konstanten von Positiv Harmonischen Funktion”, *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*, **32** (1911), 193–217.

[5] Д. Л. Ступин, “Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщенный круг и задача Каратеодори–Фейера”, *Применение функционального анализа в теории приближений*, Издательство Тверского государственного университета, Тверь, 2012, 45–74. [D. L. Stupin, “The problem of coefficients for functions mapping a circle into a generalized circle and the Caratheodory–Feuer problem”, *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, Tver State University Publishing House, Tver, 2012, 45–74 (In Russian)].

[6] R. A. Kortram, “A simple proof for schur’s theorem”, *Proc. American Math. Soc.*, **129**:11 (2001), 3211–3212.

[7] V. V. Savchuk, M. V. Savchuk, “Characterization of the Schur class in terms of the coefficients of a series on the Laguerre basis”, *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. Math.*, **129**:11 (2020), 3211–3212.

[8] W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **48** (1943), 48–82.

[9] J. G. Krzyz, “Problem 1”, Proceedings of the Fourth Conference on Analytic Functions, *Annals of Polish Mathematicians*, **20** (1968), 314.

[10] J. E. Brown, “Iterations of functions subordinate to schlicht functions”, *Compl. Var.*, **9** (1987), 143–152.

[11] C. Carathéodory, L. Fejer, “Über den Zusammenhang der extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard–Landau’schen Satz”, *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*, **32** (1911), 218–239.

[12] Д. Л. Ступин, *Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$*, Preprints.ru, 2022, https://doi.org/10.24108/preprints-3112533. [D. L. Stupin, *New proof of Krzyz’s conjecture for $n = 3$*, Preprints.ru, 2022, https://doi.org/10.24108/preprints-3112533].

Информация об авторе

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Тверской государственный университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: dstupin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9183-9543

Поступила в редакцию 19.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 22.08.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Denis L. Stupin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, Tver State University, Tver, Russian Federation. E-mail: dstupin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9183-9543

Received 19.05.2023
Reviewed 22.08.2023
Accepted for press 12.09.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-298-325

УДК 517.9

Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимизации линейных систем вольтеррова типа с функциональными ограничениями

Владимир Иосифович СУМИН [1,2] **, Михаил Иосифович СУМИН** [1,2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[2] ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности (КУО) — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) — в выпуклой задаче оптимального управлении с функциональными ограничениями типа равенства и неравенства. Управляемая система задается линейным функционально-операторным уравнением II рода общего вида в пространстве L_2^m, основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. Минимизируемый функционал задачи является выпуклым (возможно не сильно). Регуляризация КУО в неитерационной и итерационной формах основана на использовании соответственно методов двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации. При получении неитерационных регуляризованных КУО используются два параметра регуляризации, один из которых «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем тихоновском добавке к целевому функционалу исходной задачи, обеспечивая тем самым корректность задачи минимизации функции Лагранжа. Основное предназначение регуляризованных ПЛ и ПМП — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги. Регуляризованные КУО: 1) формулируются как теоремы существования МПР в исходной задаче с одновременным конструктивным представлением конкретных МПР; 2) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов — своих предельных вариантов, сохраняя общую структуру последних; 3) «преодолевают» свойства некорректности КУО и дают регуляризирующие алгоритмы для решения оптимизационных задач. Рассматриваются иллюстрирующие примеры конкретных задач оптимального управления, связанных с системой уравнений с запаздыванием и с интегродифференциальным уравнением типа уравнения переноса.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, функциональные ограничения, функционально-операторное уравнение вольтеррова типа, некорректность, регуляризация, итеративная регуляризация, двойственность, минимизирующее приближенное решение, регуляризирующий оператор, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина

Благодарности: Результаты, представленные в вводной части и в разделах 1, 3, 4, получены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/); результаты, представленные в разделе 2, получены за счет гранта Министерства образования и науки Тамбовской области № 2-ФП-2023.

Для цитирования: *Сумин В.И., Сумин М.И.* Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимизации линейных систем вольтеррова типа с функциональными ограничениями // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 298–325. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-298-325

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-298-325

Regularization of classical optimality conditions in optimization problems for linear Volterra-type systems with functional constraints

Vladimir I. SUMIN [1,2], **Mikhail I. SUMIN** [1,2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University
23 Gagarin Ave., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation

Abstract. We consider the regularization of classical optimality conditions (COCs) — the Lagrange principle (LP) and the Pontryagin maximum principle (PMP) — in a convex optimal control problem with functional constraints such as equalities and inequalities. The controlled system is given by a linear functional-operator equation of the second kind of general form in the space L_2^m, the main operator on the right side of the equation is assumed to be quasi-nilpotent. The problem functional to be minimized is convex (probably not strongly). The regularization of the COCs in the non-iterative and iterative forms is based on the use of the methods of dual regularization and iterative dual regularization, respectively. Obtaining non-iterative regularized COCs uses two regularization parameters, one of which is "responsible" for the regularization of the dual problem, the other is contained in a strongly convex regularizing Tikhonov addition to the objective functional of the original problem, thereby ensuring the correctness of the problem of minimizing the Lagrange function. The main purpose of regularized LP and PMP is the stable generation of minimizing approximate solutions (MASs) in the sense of J. Warga. Regularized COCs: 1) are formulated as existence theorems for MASs in the original problem with simultaneous constructive representation of specific MASs; 2) are sequential generalizations of classical analogues — their limiting variants and preserve the general structure of the latter; 3) "overcome" the ill-posedness properties of the COCs and give regularizing algorithms for solving optimization problems. Illustrating examples are considered: the problem of optimal control for the equation with delay, the problem of optimal control for the integrodifferential equation of the type of transport equation.

Keywords: convex optimal control, functional constraints, Volterra-type functional-operator equation, ill-posedness, regularization, iterative regularization, duality, minimizing approximate solution, regularizing operator, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle

Acknowledgements: The results of Introduction and Sections 1, 3, 4 were obtained within the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/). The results of Section 2 were obtained within the grant of the Ministry of Education and Science of the Tambov region (project no. 2-ФП-2023).

Mathematics Subject Classification: 49K20, 47A52, 35R25, 49N15, 90C46.

For citation: Sumin V.I., Sumin M.I. Regularization of classical optimality conditions in optimization problems for linear Volterra-type systems with functional constraints. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 298–325. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-298-325 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Как известно, классические условия оптимальности (КУО), к которым мы относим, в частности, принцип Лагранжа (ПЛ) и принцип максимума Понтрягина (ПМП), обязаны своим появлением на свет, прежде всего, необходимости решения различных практических оптимизационных (экстремальных) задач (см., например, [1–4]). Однако на пути непосредственного применения ПЛ и ПМП для практического решения многих прикладных задач оптимизации, поставляемых современными естественнонаучными приложениями (см., например, [5]), возникает немало серьезных проблем. Одна из этих проблем связана с тем, что при анализе и решении подобных оптимизационных задач неизбежно приходится учитывать возможную погрешность соответствующих исходных данных. Но неточность в задании исходных данных оптимизационной задачи фактически противоречит базовым построениям классической теории экстремума, предполагающим точное знание этих данных при получении КУО. Кроме того, нужно учитывать свойственную самим задачам условной оптимизации некорректность [6, гл. 9], неизбежно влекущую за собой некорректность и соответствующих КУО (см., например, [7–11] и библиографию в этих работах).

Данная статья продолжает линию работ [10, 11] по регуляризации ПЛ и ПМП в выпуклых задачах оптимального управления распределенными системами вольтеррова типа с функциональными ограничениями. Системами вольтеррова типа мы называем управляемые системы, которые могут быть описаны линейными функциональными (иначе, функционально-операторными) уравнениями II рода общего вида с квазинильпотентным основным линейным оператором правой части. Такие уравнения можно назвать функциональными уравнениями вольтеррова типа, так как указанным свойством обладают, прежде всего, различного рода вольтерровы операторы.

Заметим, что название «вольтерровы операторы» (операторы типа Вольтерра) присваивалось разными авторами различным классам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы и др.), начиная с известных работ L. Tonelli (1929) и А. Н. Тихонова (1938); см., например, краткий обзор определений вольтерровых операторов [12, Дополнение], а также [13]. В случае линейных операторов эти определения так или иначе связаны со свойством квазинильпотентности: либо это свойство включено в само определение вольтеррова оператора (см., например, [14, с. 10]), либо при естественных условиях следует из этого определения (см., например, определение [15] функционального оператора, «вольтеррова на системе множеств», являющееся многомерным обобщением определения А. Н. Тихонова, и опирающийся на определение [15] цепочечный признак квазинильпотентности [13, теорема 2]).

К уравнениям вольтеррова типа естественным образом (обращением главной части) сводятся самые разнообразные начально-краевые задачи для различных уравнений с частными производными (гиперболических, параболических, интегро-дифференциальных, систем таких уравнений, уравнений с запаздываниями разного рода и др., см., например, разнообразные конкретные примеры в [12, глава 2], обзоры в [12, 16]). Это позволило в настоящей статье получить регуляризованные ПЛ и ПМП единообразно для широкого класса распределенных оптимизационных задач. При этом существенным образом используется предложенное нами ранее понятие равностепенной квазинильпотентности семейства операторов (историю вопроса см. в [16]).

Как известно, изучение различных связанных с КУО вопросов лежит в основе теории оптимизации распределенных систем. Многообразие, сложность и актуальность этих вопросов вот уже более шести десятков лет постоянно привлекают внимание исследователей. Отличительная черта работ [10, 11] и данной работы — изучение вопросов регуляризации КУО на основе взаимовыгодного объединения методов теории КУО, теории регуляризации некорректных задач и теории управляемых распределенных систем вольтеррова типа. Достаточно подробное обсуждение свойств некорректности КУО в задачах оптимального управления для таких распределенных систем, комментарии по этому поводу и соответствующую библиографию можно найти в [10, 11].

С общей точки зрения рассматриваемая в данной работе задача оптимального управления может быть отнесена к классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Так как в подобных задачах, ввиду конечномерности образа оператора, задающего ограничения, проблема невыполнимости условий оптимальности в разрешимой задаче, по сути дела, снимается, то главное внимание в статье уделяется проблеме преодоления неустойчивости ПЛ и ПМП для таких задач. Неустойчивость КУО в задачах с ограничениями проявляет себя уже и в самых простейших конечномерных задачах выпуклого программирования как с ограниченными, так и неограниченными множествами допустимых элементов (см., в частности, [17, пример 3], [18, пример 0.1]). Примеры неустойчивости КУО в задачах с бесконечномерными ограничениями можно найти в [7–9].

Главное назначение получаемых в данной работе и выражаемых в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина регуляризованных КУО — устойчивое конструктивное генерирование в задаче оптимального управления обобщенных минимизирующих последовательностей — минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги [19]. Здесь уместно напомнить, что широко используемое в оптимальном управлении понятие МПР органично сочетает в себе учет как запросов строгой математической оптимизационной теории [19, гл. IV–VIII], так и потребностей инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых зазоров и при выполнении ограничений задачи и при приближении значений функционала цели к ее (обобщенной) нижней грани [19, гл. III]. Регуляризованные КУО ниже формулируются как теоремы существования в исходной задаче МПР, состоящих из минималей функции Лагранжа, двойственные переменные для которой генерируются в соответствии с выбранной процедурой регуляризации двойственной задачи. В общем случае выпуклого функционала качества мы применяем процедуру двойственной регуляризации [17, 20, 21] и получаем регуляризованные КУО, которые называем регуляризованными КУО в неитерационной форме [7–9]. В случае же сильно выпуклого функционала качества мы опираемся на процедуру итеративной двойственной регуляризации [20, 21] и приходим к регуляризованным КУО, которые называем регуляризованными КУО в итерационной форме [7, 9]. Центральную роль в наших формулировках играет введенное в [22] и ориентированное на задачи условной оптимизации понятие МПР-образующего алгоритма (см. ниже определение 1.1; о взаимосвязи понятия МПР-образующего алгоритма и «более привычного» для задач условной оптимизации понятия регуляризирующего алгоритма [6, гл. 9] см. во вводных частях работ [10, 11]). Как и в [10, 11], управляемая система ниже задается линейным функциональным уравнением II рода общего вида в пространстве L_2^m, а основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. При этом, как и в [10, 11], функционал качества оптимизационной задачи, а также функционалы ограничений считаются заданными в гильбертовом пространстве суммируемых с квадратом функций. Для упрощения изложения и в соответствии с традициями теории оптимального управления считаем, как и в [10, 11], множество допустимых управлений ограниченным.

Как сказано, данная работа написана в продолжение работ [10, 11]. Минимизируемый функционал в ней при получении регуляризованных КУО в неитерационной форме предполагается лишь выпуклым и не обязательно сильно выпуклым. Отметим, что регуляризация КУО в выпуклых задачах оптимального управления с не сильно выпуклыми целевыми функционалами рассматривалась в нашей работе [18]. Укажем, в чем сходство получаемых ниже результатов и результатов [10,11,18] и в чем их существенное различие.

О сходстве результатов. В рассматриваемой ниже задаче, как и в [10,11,18], МПР конструируются из экстремалей (минималей) ее функции Лагранжа, взятых при значениях двойственных переменных из некоторой последовательности, вырабатываемой соответствующей процедурой регуляризации двойственной задачи. При этом, как и в [11, 18], в качестве процедуры регуляризации двойственной задачи (эта задача является вогнутой) используется тихоновская стабилизация (см., например, [6, гл. 9]). В [10] с этой целью использовалась процедура так называемой итеративной регуляризации [23].

Говоря о различии, подчеркнем, что в данной работе при получении регуляризованных КУО в неитерационной форме целевой функционал предполагается лишь выпуклым, и не обязательно сильно выпуклым, тогда как в [10, 11] минимизируемые функционалы считались сильно выпуклыми. Далее, чтобы охарактеризовать отличие результатов данной статьи от результатов [18], целесообразно отметить сначала различие подходов [11] и [18] при получении регуляризованных КУО в неитерационной форме. В случае, как в [11], сильно выпуклого целевого функционала сильно выпуклой по исходной переменной является и функция Лагранжа и, как следствие, однозначно и корректно определяются элементы МПР, соответствующие выбранной процедуре регуляризации двойственной задачи. В отсутствие же, как в [18], сильной выпуклости функционала качества и, как следствие, в отсутствие сильной выпуклости функции Лагранжа по исходной переменной при ограниченном множестве допустимых элементов, гарантируется лишь существование (но, вообще говоря, не единственность) элементов МПР (как элементов из множества минималей функции Лагранжа, взятых при соответствующих значениях двойственных переменных). В такой ситуации генерирование МПР в силу регуляризованных КУО в существенной степени теряет свою конструктивность. По этой причине ниже, в преодоление указанного недостатка регуляризованных КУО в неитерационной форме [18], мы, следуя методу нашей работы [22], вместо одного используем два параметра регуляризации. Один из них, как и в [11, 18], «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем тихоновском добавке к целевому функционалу исходной задачи, обеспечивая тем самым корректность задачи минимизации функции Лагранжа. Так, отказываясь от существенным образом используемого в [11] условия сильной выпуклости функционала качества, мы тем не менее «преодолеваем» допускаемую в [18] некорректность задачи минимизации функции Лагранжа (эта задача является базовой во всех формулируемых ниже регуляризованных КУО).

Выделим важные на наш взгляд особенности получаемых в работе регуляризованных КУО, подчеркивающие актуальность формулируемых ниже результатов (связанные с этим подробности и поясняющие комментарии могут быть найдены в [7–11]). Регуляризованные КУО: 1) не связаны с «труднопроверяемыми» условиями, используемыми обычно для гарантии выполнимости и устойчивости их классических аналогов; 2) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов — своих предельных вариантов, сохраняют их общую структуру и могут трактоваться как условия оптимальности, выраженные в секвенциальной форме.

В качестве конкретных иллюстрирующих примеров нами рассматриваются задачи оптимального управления, связанные с системой уравнений с запаздыванием и с интегро-дифференциальным уравнением типа уравнения переноса.

Примем следующие обозначения и соглашения: $\mathbf{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел; $\mathbf{R}^n$ — пространство n-векторов-столбцов; $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ и $\|\cdot\|_n$ — евклидовы скалярное произведение и норма в $\mathbf{R}^n$; векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $*$ — знак сопряжения и транспонирования; $\Pi\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных, его элементы обозначаем через $t\equiv\{t^1,\dots,t^n\}$; $L_p(\Pi)$ — лебегово пространство со стандартной нормой ($1\le p\le\infty$); $L_p^m\equiv L_p^m(\Pi)\equiv(L_p(\Pi))^m$ ($1\le p\le\infty$); $\|\cdot\|_{p,m}$ — стандартная норма прямого произведения в L_p^m; $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,m}$ — стандартное скалярное произведение в L_2^m; $L_p^{m\times l}\equiv L_p^{m\times l}(\Pi)$ — пространство $(m\times l)$-матриц-функций с элементами из $L_p(\Pi)$; $\|\cdot\|_{p,m\times l}$ — стандартная норма прямого произведения в $L_p^{m\times l}$.

1. Постановка задачи оптимального управления

1.1. Базовая оптимизационная задача. Пусть заданы: натуральные числа m,n,s; $\Pi\subset\mathbf{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество; $c(t),t\in\Pi,$ — функция класса $L_2^m\equiv L_2^m(\Pi)$; $A:L_2^m\to L_2^m$ — линейный ограниченный оператор (ЛОО) с нулевым спектральным радиусом; ЛОО $B:L_2^s\to L_2^m$. Рассмотрим линейное функциональное уравнение II рода

$$z(t)=A[z](t)+B[u](t)+c(t),\quad t\in\Pi,\quad z\in L_2^m,\quad u\in L_2^s,\tag{1.1}$$

считая $u(\cdot)$ управляющей функцией (управлением). Ввиду квазинильпотентности A, уравнение (1.1) имеет для каждого $u(\cdot)\in L_2^s$ единственное в L_2^m решение $z(t)$, $t\in\Pi$, и справедлива формула

$$z(t)=S[B[u]+c](t),\quad t\in\Pi,\quad u\in L_2^s,\tag{1.2}$$

в которой $S:L_2^m\to L_2^m$ — ЛОО — сумма ряда Неймана: $S[y]\equiv\sum\limits_{i=0}^{\infty}A^i[y]$, $y\in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(\cdot)\in L_2^s$ и задаваемое формулой (1.2) решение $z(\cdot)$ уравнения (1.1) обозначаем $z_u(\cdot)$.

Чтобы поставить для управляемой системы (1.1) задачу оптимального управления, будем считать, что на прямом произведении $L_2^m\times L_2^s$ определены некоторые функционалы $\mathcal{J}_0,\mathcal{J}_1,\dots,\mathcal{J}_k$, $\mathcal{I}_1,\dots,\mathcal{I}_r$ со свойствами: $\mathcal{J}_0[z,u]\equiv K[z]+M[u]$, $z\in L_2^m$, $u\in L_2^s$, где $K:L_2^m\to\mathbf{R}$, $M:L_2^s\to\mathbf{R}$ — выпуклые функционалы; $\mathcal{J}_i[z,u]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbf{R}$ — выпуклый функционал ($i=1,\dots,k$); $\mathcal{I}_i[z,u]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbf{R}$ — линейный ограниченный функционал, задаваемый формулой $\mathcal{I}_i[z,u]\equiv\langle a_i,z\rangle_{2,m}+\langle b_i,u\rangle_{2,s}$, где $a_i\in L_2^m$, $b_i\in L_2^s$ ($i=1,\dots,r$).

Используя (1.2) как формулу подстановки, зададим на L_2^s функционалы: $J_0[u]\equiv\mathcal{J}_0[z_u,u]\equiv K[z_u]+M[u]$, $J_i[u]\equiv\mathcal{J}_i[z_u,u]$ $(i=1,\dots,k)$, $I_i[u]\equiv\mathcal{I}_i[z_u,u]$ $(i=1,\dots,r)$, $u(\cdot)\in L_2^s$. Функционалы $J_i[\cdot]\,(i=0,1,\dots,k)$ выпуклые, а функционалы $I_i[\cdot]\,(i=1,\dots,r)$

аффинные на L_2^s. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2^s, $d_1,\ldots,d_r$ — некоторые числа. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1.1) с минимизируемым функционалом $J_0[u]$ при функциональных ограничениях

$$J_1[u]\le 0,\ldots,J_k[u]\le 0,\quad I_1[u]=d_1,\ldots,I_r[u]=d_r \tag{1.3}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$J_0[u]\to\min,\quad (1.3),\quad u\in\mathcal{D}. \tag{1.4}$$

1.2. Точная и приближенная оптимизационные задачи. Задача (1.4) полностью определяется набором своих исходных данных

$$\mathsf{f}\equiv\{A,B,c,K,M,\mathcal{J}_i(i=1,\ldots,k),\{a_i,b_i,d_i\}(i=1,\ldots,r)\}\,.$$

Предположим, что точные исходные данные

$$\mathsf{f}^0\equiv\left\{A^0,B^0,c^0,K^0,M^0,\mathcal{J}_i^0(i=1,\ldots,k),\left\{a_i^0,b_i^0,d_i^0\right\}(i=1,\ldots,r)\right\}$$

нам не известны, но мы можем оперировать с приближенными исходными данными

$$\mathsf{f}^\delta\equiv\left\{A^\delta,B^\delta,c^\delta,K^\delta,M^\delta,\mathcal{J}_i^\delta(i=1,\ldots,k),\left\{a_i^\delta,b_i^\delta,d_i^\delta\right\}(i=1,\ldots,r)\right\},$$

где δ — меняющийся в некотором полуинтервале $(0,\delta_0]$ числовой параметр (δ_0 — фиксированное число), характеризующий близость приближенных данных f^δ к точным данным f^0 в указанном ниже условиями Б и В смысле. Таким образом, мы считаем, что при каждом $\delta\in[0,\delta_0]$ существуют следующие объекты: квазинильпотентный ЛОО $A^\delta: L_2^m\to L_2^m$; ЛОО $B^\delta: L_2^s\to L_2^m$; функция $c^\delta(\cdot)\in L_2^m$; выпуклые функционалы $K^\delta[z]: L_2^m\to\mathbf{R}$, $M^\delta[u]: L_2^s\to\mathbf{R}$, $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]: L_2^m\times L_2^s\to\mathbf{R}$ ($i=1,\ldots,k$); линейные ограниченные функционалы $\mathcal{I}_i^\delta[z,u]: L_2^m\times L_2^s\to\mathbf{R}$, задаваемые формулой $\mathcal{I}_i^\delta[z,u]\equiv\left\langle a_i^\delta,z\right\rangle_{2,m}+\left\langle b_i^\delta,u\right\rangle_{2,s}$, где $a_i^\delta\in L_2^m$, $b_i^\delta\in L_2^s$ ($i=1,\ldots,r$); числа $d_i^\delta\,(i=1,\ldots,r)$.

При любом $\delta\in[0,\delta_0]$ управляемое функциональное уравнение

$$z(t)=A^\delta[z](t)+B^\delta[u](t)+c^\delta(t),\quad t\in\Pi,\quad z\in L_2^m,\quad u\in L_2^s, \tag{1.5}$$

ввиду квазинильпотентности оператора A^δ, имеет для каждого $u(\cdot)\in L_2^s$ единственное в классе L_2^m решение $z(t), t\in\Pi$, и справедлива формула

$$z(t)=S^\delta[B^\delta[u]+c^\delta](t),\quad t\in\Pi,\quad u(\cdot)\in L_2^s, \tag{1.6}$$

где $S^\delta: L_2^m\to L_2^m$ — ЛОО — сумма ряда Неймана: $S^\delta[y]\equiv\sum_{i=0}^{\infty}(A^\delta)^i[y]$ $y\in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(\cdot)\in L_2^s$ и задаваемое формулой (1.6) решение $z(\cdot)$ уравнения (1.5) будем обозначать $z_u^\delta(\cdot)$, $\delta\in[0,\delta_0]$. При любом $\delta\in[0,\delta_0]$ имеем набор ограничений

$$J_1^\delta[u]\le 0,\ldots,J_k^\delta[u]\le 0,\quad I_1^\delta[u]=d_1^\delta,\ldots,I_r^\delta[u]=d_r^\delta, \tag{1.7}$$

где $J_i^\delta[u]\equiv\mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta,u]$ $(i=1,\ldots,k)$, $I_i^\delta[u]\equiv\mathcal{I}_i^\delta[z_u^\delta,u]$ $(i=1,\ldots,r)$, $u(\cdot)\in L_2^s$, и задачу оптимального управления

$$J_0^\delta[u]\to\min,\quad (1.7),\quad u(\cdot)\in\mathcal{D}, \tag{OC^δ}$$

где $J_0^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_0^\delta[z_u^\delta, u] \equiv K^\delta[z_u^\delta] + M^\delta[u]$, $u(\cdot) \in L_2^s$. Задачу (OC^0) называем *точной* задачей, а задачи (OC^δ), $\delta \in (0, \delta_0]$, — *приближенными* задачами оптимального управления. Множество всех решений (OC^0) обозначаем через U^0 (оно может быть и пустым), а его элементы — через u^0.

Предполагаем, что выполняется

Условие А. Функционалы K^δ, M^δ и каждый из функционалов $\mathcal{J}_i^\delta$ $(i = 1, \dots, k)$, $\delta \in [0, \delta_0]$, суть липшицевы на каждом ограниченном множестве пространств L_2^m, L_2^s и $L_2^m \times L_2^s$ соответственно, причем липшицевость равномерна по параметру $\delta \in [0, \delta_0]$, т. е. соответствующие постоянные Липшица не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$.

Считаем также, что входные данные задач семейства (OC^δ), $\delta \in (0, \delta_0]$, связаны с входными данными точной задачи (OC^0) приведенными ниже условиями Б, В, Г.

Условие Б. Существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем

$$\left\|A^\delta - A^0\right\| \le C\delta,\ \left\|B^\delta - B^0\right\| \le C\delta,\ \left\|c^\delta - c^0\right\|_{2,m} \le C\delta,\ \left\|a_i^\delta - a_i^0\right\|_{2,m} \le C\delta \quad (i = 1, \dots, r), \quad (1.8)$$

$$\left\|b_i^\delta - b_i^0\right\|_{2,s} \le C\delta\,(i = 1, \dots, r),\ \left|d_i^\delta - d_i^0\right| \le C\delta\,(i = 1, \dots, r),\ \left|M^\delta[u] - M^0[u]\right| \le C\delta(u \in \mathcal{D}).$$

Условие В. Существует неубывающая функция $N_1(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $l > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ при $\|z(\cdot)\|_{2,m} \le l$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$\left|K^\delta[z] - K^0[z]\right| \le N_1(l)\delta, \quad \left|\mathcal{J}_i^\delta[z, u] - \mathcal{J}_i^0[z, u]\right| \le N_1(l)\delta \quad (i = 1, \dots, k). \qquad (1.9)$$

Чтобы сформулировать условие Г, воспользуемся следующим введенным нами ранее (историю вопроса см., например, в [16]) понятием равностепенной квазинильпотентности. Пусть $\mathbf{B}$ — банахово пространство, Ξ — некоторое множество, $\{G(\xi)[\cdot] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}\}_{\xi \in \Xi}$ — семейство зависящих от параметра $\xi \in \Xi$ квазинильпотентных ЛОО (напомним: квазинильпотентность ЛОО $G(\xi)[\cdot] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ означает, что $\sqrt[k]{\left\|\{G(\xi)\}^k\right\|} \to 0$ при $k \to \infty$). Назовем семейство операторов $\{G(\xi)\}_{\xi \in \Xi}$ *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sup\limits_{\xi \in \Xi} \sqrt[k]{\left\|\{G(\xi)\}^k\right\|} \to 0$ при $k \to \infty$.

Условие Г. Семейство $\left\{A^\delta : L_2^m \to L_2^m\right\}_{\delta \in [0, \delta_0]}$ равностепенно квазинильпотентно.

1.3. МПР и МПР-образующий оператор. Для компактности записи введем обозначения: $J^\delta[u] \equiv \left\{J_1^\delta[u], \dots, J_k^\delta[u]\right\}$, $I^\delta[u] \equiv \left\{I_1^\delta[u], \dots, I_r^\delta[u]\right\}$, $d^\delta \equiv \left\{d_1^\delta, \dots, d_r^\delta\right\}$. Положим

$$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \left\{u(\cdot) \in \mathcal{D} : \left\|I^\delta[u] - d^\delta\right\|_r \le \epsilon, \quad J_i^\delta[u] \le \epsilon\,(i = 1, \dots, k)\right\}, \qquad \delta \in [0, \delta_0], \quad \epsilon \ge 0; \quad \mathcal{D}^0 \equiv \mathcal{D}^{0,0}.$$

Определим обобщенную нижнюю грань β задачи (OC^0) как предел $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim\limits_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon$, где $\beta_\epsilon \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \ne \emptyset$, и $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset$. Вообще говоря, имеет место очевидное неравенство $\beta \le \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^0} J_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи (OC^0). Однако ввиду выпуклости задачи (OC^0), непрерывности задающих ее функционалов и ограниченности $\mathcal{D}$ имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Как уже было сказано выше, центральным для нас является понятие МПР в задаче (OC^0). Напомним, что последовательность $u^k(\cdot) \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, называется МПР задачи (OC^0), если $J_0^0[u^k] \to \beta$ при $k \to \infty$, причем $u^k(\cdot) \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^k}$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел ϵ^k, $k = 1, 2, \ldots$.

Введем другое центральное понятие работы — понятие МПР-образующего оператора (алгоритма) [22] в задаче (OC^0).

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \ldots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (1.8), (1.9) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) \equiv u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (OC^0), если последовательность u^{δ^k}, $k = 1, 2, \ldots$, есть МПР в этой задаче.

2. Эквивалентная задача выпуклого программирования и регуляризация принципа Лагранжа

2.1. Задача выпуклого программирования. При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ задача оптимального управления (OC^δ) имеет форму задачи выпуклого программирования в пространстве L_2^s. Мы перепишем ее в виде, позволяющем напрямую воспользоваться результатами работы [22], где рассматривалась регуляризация КУО в задачах выпуклого программирования и выпуклого оптимального управления в гильбертовом пространстве. Для этого выделим в аффинных функционалах $I_j^\delta[\cdot]$, $j = 1, \ldots, r$, линейную часть:

$$\mathbf{I}_j^\delta[u] \equiv I_j^\delta[u] - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \right\rangle_{2,m} \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u^\delta, u] - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \right\rangle_{2,m}, \quad u \in L_2^s, \ \ \delta \in [0, \delta_0] \ \ (j = 1, ..., r).$$

Для единообразия записи введем обозначения: $\mathbf{J}_0^\delta[u] \equiv J_0^\delta[u]$, $\mathbf{J}_i^\delta[u] \equiv J_i^\delta[u]$ $(i = 1, \ldots, k)$, $u(\cdot) \in L_2^s$. Функционалы $\mathbf{J}_i^\delta$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ — выпуклые, а $\mathbf{I}_j^\delta$ $(j = 1, \ldots, r)$ — линейные на L_2^s. Положим $e_j^\delta \equiv d_j^\delta - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta] \right\rangle_{2,m}$ $(j = 1, \ldots, r)$. Очевидно, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ задача выпуклого программирования в L_2^s

$$\mathbf{J}_0^\delta[u] \to \min, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \le 0 \ (i = 1, \ldots, k), \quad \mathbf{I}_j^\delta[u] = e_j^\delta \ (j = 1, \ldots, r), \quad u \in \mathcal{D}, \qquad (P^\delta)$$

эквивалентна задаче оптимального управления (OC^δ): совпадают множества решений и значения этих задач. Задачи (P^δ), $\delta \in [0, \delta_0]$, принадлежат классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве, изучавшемуся в [22].

Условие А влечет за собой следующее равномерное по $\delta \in [0, \delta_0]$ свойство липшицевости функционалов $\mathbf{J}_i^\delta$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ на любом ограниченном множестве пространства L_2^s: существует неубывающая функция $\mathbf{N}_2(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ для любого $l > 0$ имеем

$$\left|\mathbf{J}_i^\delta[u_1] - \mathbf{J}_i^\delta[u_2]\right| \le \mathbf{N}_2(l) \left\|u_1 - u_2\right\|_{2,s}, \quad u_1, u_2 \in L_2^s, \quad \left\|u_1\right\|_{2,s}, \left\|u_2\right\|_{2,s} \le l \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

Условия Б и Г влекут за собой такое свойство семейства операторов $\left\{A^\delta\right\}_{0 \le \delta \le \delta_0}$.

Лемма 2.1. *Существует число $\mathcal{K}$ такое, что* $\left\|S^\delta - S^0\right\| \le \mathcal{K} \left\|A^\delta - A^0\right\|$, $0 < \delta \le \delta_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия Б следует существование постоянной C_1 такой, что $\left\|A^\delta\right\| \le C_1$, $0 \le \delta \le \delta_0$. Фиксируем любое $\epsilon \in (0, 1)$. В силу условия Г найдется натуральное $N(\epsilon)$ такое, что $\left\|\left(A^\delta\right)^i\right\| \le \epsilon^i$ при $i \ge N(\epsilon)$, $0 \le \delta \le \delta_0$. То есть при любом

$\delta \in (0, \delta_0]$ имеем $\left\|S^\delta\right\| \le \sum_{i=0}^{N(\epsilon)-1}(C_1)^i + \sum_{i=N(\epsilon)}^{\infty} \epsilon^i$. Зависящее от ϵ число, стоящее в правой части последнего неравенства, обозначим через C_2. Произвольно выберем $z \in L_2^m$. Так как $S^\delta[z] = A^\delta\left[S^\delta[z]\right] + z$, $\delta \in (0, \delta_0]$, то $S^0[z] - S^\delta[z] = A^0\left[S^0[z] - S^\delta[z]\right] + \left(A^0 - A^\delta\right)\left[S^\delta[z]\right]$ и поэтому $S^0[z] - S^\delta[z] = S^0\left[\left(A^0 - A^\delta\right)\left[S^\delta[z]\right]\right]$. То есть при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем $\left\|S^\delta - S^0\right\| \le C_2\left\|S^0\right\|\left\|A^\delta - A^0\right\|$, и можно взять $\mathcal{K} = C_2\left\|S^0\right\|$. □

Из условий Б, В и Г простыми выкладками, используя лемму 2.1, получаем следующую связь входных данных задачи (P^0) с входными данными задач (P^δ) при $\delta \in (0, \delta_0]$.

Лемма 2.2. *Существует постоянная* Γ, *зависящая лишь от операторов* A^0, B^0, *функционалов* $K^0, \mathcal{J}_i^0 (i = 1, \dots, k)$, *функций* $c^0, a_i^0 (i = 1, \dots, r)$, $b_i^0 (i = 1, \dots, r)$, N_1, *чисел* $d_i^0 (i = 1, \dots, r)$, $C, \mathcal{K}, \delta_0$ *и множества* $\mathcal{D}$, *такая, что для каждого* $\delta \in (0, \delta_0]$ *выполняются неравенства*

$$\left|\mathbf{J}_i^\delta[u] - \mathbf{J}_i^0[u]\right| \le \Gamma\delta, \quad u \in \mathcal{D}\ (i = 0, 1, \dots, k); \tag{2.1}$$

$$\left|\mathbf{I}_i^\delta[u] - \mathbf{I}_i^0[u]\right| \le \Gamma\delta\,\|u\|_{2,s}, \quad u \in L_2^s\ (i = 1, \dots, r); \quad \left|e_i^\delta - e_i^0\right| \le \Gamma\delta\ (i = 1, \dots, r).$$

2.2. МПР и МПР-образующий оператор в задаче выпуклого программирования. Положим: $\mathbf{J}^\delta[u] \equiv \left\{\mathbf{J}_1^\delta[u], \dots, \mathbf{J}_k^\delta[u]\right\}$, $\mathbf{I}^\delta[u] \equiv \left\{\mathbf{I}_1^\delta[u], \dots, \mathbf{I}_r^\delta[u]\right\}$, $e^\delta \equiv \left\{e_1^\delta, \dots, e_r^\delta\right\}$. Имеем

$$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} = \left\{u \in \mathcal{D} : \left\|\mathbf{I}^\delta[u] - e^\delta\right\|_r \le \epsilon, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \le \epsilon\ (i = 1, \dots, k)\right\}, \quad \delta \in [0, \delta_0], \quad \epsilon \ge 0.$$

Так как обобщенная нижняя грань задачи (P^0) определяется фактически той же самой формулой, что и обобщенная нижняя грань задачи (OC^0), и эти грани совпадают, то мы сохраним за ней то же обозначение β. Имеем $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim\limits_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} \mathbf{J}_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \ne \emptyset$; $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset$. Как уже отмечалось, имеет место очевидное неравенство $\beta \le \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^0} \mathbf{J}_0^0[u]$ — классическая нижняя грань задачи (P^0). Однако ввиду выпуклости задачи (P^0), непрерывности задающих ее функционалов и ограниченности $\mathcal{D}$ имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Определение 2.1. Последовательность $\{u^j\}_{j=1}^\infty$ элементов множества $\mathcal{D}$, для которой существует такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$, что $u^j \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^j}$ $(j = 1, 2, \dots)$ и $\mathbf{J}_0^0\left[u^j\right] \to \beta = \inf\limits_{u \in \mathcal{D}^0} \mathbf{J}_0^0[u]$ при $j \to \infty$, называется минимизирующим приближенным решением (МПР) задачи (P^0).

Лемма 2.3. *В силу ограниченности* $\mathcal{D}$ *существование МПР в задаче* (P^0) *равносильно неравенству* $\beta < +\infty$. *Если* $\beta < +\infty$, *то каждая слабая предельная точка любого МПР является ее решением. Если же в этом случае функционал* $\mathbf{J}_0^0$ *является сильно выпуклым и субдифференцируемым* (*в смысле выпуклого анализа*) *в точках* $\mathcal{D}$, *то для любого МПР* u^k, $k = 1, 2, \dots$, *в разрешимой единственным образом в этом случае задаче* (P^0) *справедливо предельное соотношение* $u^k \to u^0$, $k \to \infty$.

Доказательство. Во-первых, можно заметить, что, так как множество $\mathcal{D}$ ограничено, то благодаря слабой полунепрерывности снизу функционалов $\mathbf{J}_0^0[u]$, $\mathbf{J}_i^0[u]$ $(i = 1, \dots, k)$, $u \in \mathcal{D}$, слабой непрерывности функционалов $\mathbf{I}_i^0[u]$ $(i = 1, \dots, r)$, $u \in \mathcal{D}$, каждая слабая предельная точка любого МПР (ограниченного ввиду ограниченности $\mathcal{D}$) в этом случае является решением задачи (P^0). Если же функционал $\mathbf{J}_0^0$ является и сильно выпуклым, то последовательность u^k, $k = 1, 2, \dots$, о которой идет речь в лемме, слабо сходится к ее единственному в этом случае решению u^0. И, наконец, так как в последнем случае одновременно $\mathbf{J}_0^0[u^k] \to \mathbf{J}_0^0[u^0]$ при $k \to \infty$, то с учетом субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ в точках $\mathcal{D}$ получаем сильную сходимость u^k к u^0 при $k \to \infty$. □

Введем понятие МПР-образующего оператора [22] в задаче (P^0).

Определение 2.2. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \dots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{I}^{\delta^k}, e^{\delta^k}\}$, удовлетворяющих условиям (2.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{I}^{\delta^k}, e^{\delta^k}, \delta^k) = u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (P^0), если последовательность u^{δ^k}, $k = 1, 2, \dots$, есть МПР в этой задаче.

Наша задача (P^δ) является частным случаем задачи (P^δ) работы [22]: набор исходных данных $\{\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta\}$ данной работы соответствует набору исходных данных $\{f^\delta, g^\delta, A^\delta, h^\delta\}$ в [22]. В нашей задаче (P^δ) в том случае, когда ее целевой функционал $\mathbf{J}_0^\delta$ является лишь выпуклым (и может быть и не сильно выпуклым), выполняются все условия, при которых к ней могут быть применены теорема сходимости метода двойственной регуляризации с дополнительным параметром регуляризации в функционале цели и регуляризованный принцип Лагранжа для задачи выпуклого программирования с выпуклым (вообще говоря не сильно выпуклым) целевым функционалом работы [22] (это теорема 2 и теорема 3 из [22] соответственно).

Таким образом, мы можем переформулировать указанные результаты работы [22] в терминах задачи (P^δ), а следовательно и в терминах эквивалентной ей задачи (OC^δ) данной работы. Так как наше исследование направлено на изучение задач оптимального управления (OC^δ), а задачи выпуклого программирования (P^δ) выступают при этом как вспомогательные, причем исходные данные задач (P^δ) и (OC^δ) связаны между собою простыми соотношениями ($\mathbf{J}_0^\delta[u] \equiv J_0^\delta[u]$, $\mathbf{I}_j^\delta[u] \equiv I_j^\delta[u] - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta]\rangle_{2,m} \equiv I_j^\delta[z_u^\delta, u] - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta]\rangle_{2,m}$, $e_j^\delta \equiv d_j^\delta - \langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta]\rangle_{2,m}$ $(j = 1, \dots, r)$, $\mathbf{J}_i^\delta[u] \equiv J_i^\delta[u]$ $(i = 1, \dots, k)$, $u \in L_2^s$, $\delta \in [0, \delta_0]$), мы в следующем разделе проведем переформулировку указанных результатов [22] сразу в терминах задачи (OC^δ).

3. Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления распределенными системами

Чтобы переформулировать указанные выше результаты работы [22] в терминах нашей задачи (OC^δ), введем необходимые конструкции с дополнительным параметром регуляризации ε в целевом функционале. Запишем регуляризованные задачи (OC^δ) со стабилизирующим тихоновским добавком в целевом функционале (здесь $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \delta_0]$):

$$J_0^\delta[u] + \varepsilon\|u\|_{2,s}^2 \to \min, \quad I^\delta[u] = d^\delta, \quad J_i^\delta[u] \le 0 \ (i = 1, \dots, k), \quad u \in \mathcal{D}. \qquad (OC_\varepsilon^\delta)$$

Очевидно, в задаче (OC_ε^δ) с положительным ε функционал качества $J_0^\delta[\cdot]+\varepsilon\|\cdot\|_{2,s}^2$ является непрерывным и сильно выпуклым на $\mathcal{D}$ с постоянной сильной выпуклости ε. Решение задачи (OC_ε^δ) с $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \delta_0]$ может и не существовать, но если существует, то из-за сильной выпуклости функционала качества единственно. Будем обозначать такое решение через u^δ_ε и положим $u^0_0 \equiv u^0$, где, как принято выше, через u^0 обозначается некоторый элемент множества U^0 решений задачи (OC^0). Положим $(OC^\delta_0) \equiv (OC^\delta)$. Введем регулярную функцию Лагранжа задачи (OC^δ_ε)

$$L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu) \equiv J^\delta_0[u] + \varepsilon\|u\|^2_{2,s} + \left\langle \lambda, I^\delta[u] - d^\delta \right\rangle_r + \left\langle \mu, J^\delta[u] \right\rangle_k, \quad u \in L^s_2, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}^k_+,$$

положив $L^{\delta,0}(u,\lambda,\mu) \equiv L^\delta(u,\lambda,\mu)$, $u \in L^s_2$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}^k_+$. При любых $\varepsilon > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}^k_+$ и каждом $\delta \in (0,\delta_0]$ функция $L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$ сильно выпукла с постоянной сильной выпуклости ε и непрерывна как функция переменной u в L^s_2, а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в L^s_2 множестве $\mathcal{D}$, причем в единственной точке $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu] \equiv \operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}^k_+$ (см. [6, гл. 8, § 2, теорема 10]). Двойственной к задаче оптимального управления (OC^δ_ε) является задача

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) \equiv \min_{u\in\mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu) \to \sup, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}^k_+.$$

Положим: $V^{\delta,0}(\lambda,\mu) \equiv V^\delta(\lambda,\mu)$, $\lambda\in \mathbf{R}^r$, $\mu\in \mathbf{R}^k_+$, $\delta\in (0,\delta_0]$. Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha,\varepsilon}, \mu^{\delta,\alpha,\varepsilon})$ единственную точку, дающую на $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k_+$ максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta,\alpha,\varepsilon}(\lambda,\mu) \equiv V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) - \alpha\|\lambda\|^2_r - \alpha\|\mu\|^2_k, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}^k_+, \quad \alpha > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta \in (0,\delta_0].$$

3.1. Общий случай задачи оптимального управления с выпуклым функционалом цели. Регуляризация принципа Лагранжа, основанная на регуляризации по Тихонову двойственной задачи и использовании стабилизирующего тихоновского добавка к основному целевому функционалу. Теперь мы можем переформулировать теоремы 2 и 3 из [22] в терминах нашей задачи (OC^δ).

3.1.1. Регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления. Переформулируем теорему 2 из [22] о сходимости метода двойственной регуляризации с дополнительным параметром регуляризации ε в функционале цели. Пусть $\alpha(\delta)$, $\delta \in (0,\delta_0]$, — некоторая положительнозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления. Пусть выполняется условие согласования* (3.1), *а* $\delta^j \in (0,\delta_0)$, ε^j, $j = 1,2,\ldots,$ *— сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел. Тогда оператор* $R(\cdot,\delta^j)$, *ставящий в соответствие любому набору исходных данных* f^{δ^j}, *удовлетворяющих оценкам* (1.8), (1.9) *при* $\delta = \delta^j$, *управление* $R(\mathsf{f}^{\delta^j},\delta^j) \equiv u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j),\varepsilon^j}, \mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j),\varepsilon^j}]$, *является МПР-образующим в задаче оптимального управления* (OC^0) *в смысле определения 1.1.*

3.1.2. Регуляризованный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления. Переформулируем регуляризованный принцип Лагранжа для задачи выпуклого программирования с выпуклым (вообще говоря, не сильно выпуклым) целевым функционалом [22, теорема 3]. Подчеркнем, что за счет применения секвенциального подхода его формулировка учитывает одновременно и регулярный, и нерегулярный случаи задачи.

Теорема 3.2. *Регуляризованный принцип Лагранжа для задачи* (OC^0). *Пусть* $\{\varepsilon^j\}_{j=1}^{\infty}$ *— любая фиксированная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. МПР в задаче* (OC^0) *существует тогда и только тогда, когда существуют стремящиеся к нулю последовательности положительных чисел* $\{\delta^j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^{\infty}$ *и последовательность пар векторов двойственных переменных* $\{\lambda^j,\mu^j\}_{j=1}^{\infty}\subset \mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+$ *такие, что*

$$\delta^j\left\{\left\|\lambda^j\right\|_r+\left\|\mu^j\right\|_k\right\}\to 0 \quad \textit{при} \quad j\to\infty \tag{3.2}$$

и выполняются включения

$$u^{\delta^j,\varepsilon^j}\left[\lambda^j,\mu^j\right]\in\mathcal{D}^{\delta^j,\gamma^j} \qquad (j=1,2,\ldots), \tag{3.3}$$

а также предельное соотношение

$$\left\langle\lambda^j, I^{\delta^j}\left[u^{\delta^j,\varepsilon^j}\left[\lambda^j,\mu^j\right]\right]-d^{\delta^j}\right\rangle_r+\left\langle\mu^j, J^{\delta^j}\left[u^{\delta^j,\varepsilon^j}\left[\lambda^j,\mu^j\right]\right]\right\rangle_k\to 0 \quad \textit{при} \quad j\to\infty. \tag{3.4}$$

Если указанные последовательности $\{\delta^j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^{\infty}$ *и* $\{\lambda^j,\mu^j\}_{j=1}^{\infty}$ *существуют, то последовательность* $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j=1,2,\ldots$, *является МПР задачи* (OC^0), *т. е. помимо* (3.3) *выполняется и предельное соотношение*

$$J_0^0\left[u^{\delta^j,\varepsilon^j}\left[\lambda^j,\mu^j\right]\right]\to J_0^0\left[u^0\right] \quad \textit{при} \quad j\to\infty,$$

где $u^0\in U^0$.

Как следствие соотношений (3.2)–(3.4) *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^j,\mu^j)\to\sup_{\{\lambda,\mu\}\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+}V^0(\lambda,\mu)=J_0^0\left[u^0\right] \quad \textit{при} \quad j\to\infty.$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) *задача, алгоритм* $R(\cdot,\delta^j)$, *задаваемый равенством* $R(\mathsf{f}^{\delta^j},\delta^j)=u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$ *для каждого набора исходных данных* f^{δ^j}, *удовлетворяющих оценкам* (1.8), (1.9) *условий Б,В при* $\delta=\delta^j$, *является МПР-образующим в смысле определения 1.1, причем каждая слабая предельная точка последовательности* $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j=1,2,\ldots$, *принадлежит множеству* U^0, *т. е. является решением задачи* (OC^0).

В качестве конкретной последовательности $\{\lambda^j,\mu^j\}$, $j=1,2,\ldots$, *например, можно взять последовательность* $\left\{\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j),\varepsilon^j},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j),\varepsilon^j}\right\}$, $j=1,2,\ldots$, *о которой идет речь в теореме 3.1.*

Заметим, что в силу ограниченности $\mathcal{D}$ *условие* (3.3) *со стремящимися к нулю последовательностями положительных чисел* $\{\delta^j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^{\infty}$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]\in\mathcal{D}^{0,\widetilde{\gamma}^j}$ $(j=1,2,\ldots)$ *для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел* $\{\widetilde{\gamma}^j\}_{j=1}^{\infty}$.

З а м е ч а н и е 3.1. С учетом леммы 2.3 можно утверждать, что в случае сильной выпуклости $J_0^0[u]$, $u\in\mathcal{D}$, генерируемая теоремой 3.2 последовательность $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j=1,2,\ldots$, сильно сходится к единственному в этом случае решению задачи (OC^0), при этом можно считать $\varepsilon^j=0$, $j=1,2,\ldots$ (см., например, теоремы 4.1, 4.2 в [17]).

Пользуясь свойством компактности единичной сферы пространства $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k$ и переходя очевидным образом к пределу при $j \to \infty$ в соотношениях (3.3), (3.4), получаем следующее классическое условие оптимальности в задаче (OC^0) в форме недифференциального принципа Лагранжа, как следствие регуляризованного принципа Лагранжа теоремы 3.2, для каждой слабой предельной точки u^0 последовательности $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j = 1, 2, \ldots$.

Следствие 3.1. *Пусть $u^0 \in U^0$ — оптимальное управление в задаче (OC^0), являющееся слабой предельной точкой последовательности $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j = 1, 2, \ldots$, о которой идет речь в теореме 3.2. Тогда существует невырожденный набор множителей Лагранжа (ν, λ, μ), $\nu \geq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}^k_+$, такой, что выполняются соотношения*

$$\nu J_0^0[u^0] + \left\langle \lambda, I^0[u^0] - d^0 \right\rangle_r + \left\langle \mu, J^0[u^0] \right\rangle_k \leq \nu J_0^0[u] + \left\langle \lambda, I^0[u] - d^0 \right\rangle_r + \left\langle \mu, J^0[u] \right\rangle_k, \quad u \in \mathcal{D},$$

$$\mu_i J_i^0[u^0] = 0 \ (i = 1, \ldots, k).$$

3.2. Задача оптимального управления с сильно выпуклым функционалом цели. Регуляризация принципа Лагранжа, основанная на итеративной регуляризации двойственной задачи. Пусть теперь $M^0[\cdot] : L_2^s \to \mathbf{R}$, а вместе с ним и $M^\delta[\cdot] : L_2^s \to \mathbf{R}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, — сильно выпуклые функционалы с постоянной сильной выпуклости κ. Тогда и все функционалы $J_0^\delta[\cdot] : L_2^s \to \mathbf{R}$, $\delta \in [0, \delta_0]$, также сильно выпуклы с постоянной сильной выпуклости κ. В этом случае: не только $\beta = \beta_0$, но множество U^0 решений задачи (OC^0) (и эквивалентной задачи (P^0)) состоит не более чем из одного элемента u^0, на котором и достигаются обе грани β и β_0 в случае непустоты U^0 [7, 20, 21]; все задачи (P^δ), $\delta \in [0, \delta_0]$, что для нас важно, принадлежат классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с сильно выпуклыми функционалами цели, изучавшемуся в работах [7, 20, 21]; в задаче выпуклого программирования (P^0) выполняются все условия, которые позволяют применить к ней утверждения [21, теорема 2], [20, теорема 3.5.2], [10, теоремы 1, 3, 4, 5] для обоснования процедур итеративной двойственной регуляризации и итеративной регуляризации ПЛ.

Функция Лагранжа $L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv L^{\delta,0}(u, \lambda, \mu)$ задачи $(OC^\delta) \equiv (OC_0^\delta)$ сильно выпукла с постоянной сильной выпуклости κ и непрерывна как функция переменной u в L_2^s, а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в L_2^s множестве $\mathcal{D}$, причем в единственной точке $u^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname*{argmin}_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}^k_+$ (см., например, [6, гл. 8, § 2, теорема 10]). Двойственной к задаче оптимального управления (OC^δ) является задача

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu) \to \sup, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}^k_+.$$

Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha}, \mu^{\delta,\alpha})$ единственную точку, дающую на $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k_+$ максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha\|\lambda\|_r^2 - \alpha\|\mu\|_k^2, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}^k_+, \quad \alpha > 0, \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

Будем опираться на регуляризацию двойственной к (OC^0) задачи. Для формулировки соответствующих результатов введем необходимую итерационную процедуру [7, 20, 21]. Обозначим через $\partial V^\delta(\lambda, \mu)$ супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала $V^\delta : \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^k_+ \to \mathbf{R}$. Вектор $\widetilde{\partial V}^\delta(\lambda, \mu) \equiv \left\{ I^\delta\left[u^\delta[\lambda, \mu]\right] - d^\delta, J^\delta\left[u^\delta[\lambda, \mu]\right] \right\}$

лежит в $\partial V^\delta(\lambda,\mu)$. Пусть последовательность $\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\}$, $j=0,1,2,\ldots,$ конструируется по итерационному правилу

$$\left\{\bar\lambda^{j+1},\bar\mu^{j+1}\right\}=Pr_\Lambda\left(\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\}+\beta^j\widetilde{\partial V^{\delta^j}}\left(\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right)-2\beta^j\alpha^j\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\}\right),\quad j=0,1,2,\ldots; \tag{3.5}$$

$$\left\{\bar\lambda^0,\bar\mu^0\right\}\in\Lambda\equiv\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+,$$

где последовательности δ^j, α^j, β^j, $j=1,2,\ldots,$ удовлетворяют условиям согласования

$$\delta^j\ge0,\quad \alpha^j>0,\quad \beta^j>0,\quad \lim_{j\to\infty}(\delta^j+\alpha^j+\beta^j)=0,\quad \frac{\alpha^j}{\alpha^{j+1}}\le C_0, \tag{3.6}$$

$$\frac{|\alpha^{j+1}-\alpha^j|}{(\alpha^j)^3\beta^j}\le\tilde C,\quad \frac{\beta^j}{(\alpha^j)^3}\le\tilde C,\quad \frac{\delta^j}{(\alpha^j)^6}\le\tilde C,\quad \sum_{j=1}^\infty\alpha^j\beta^j=+\infty,$$

при некоторых положительных $\tilde C, C_0$. Такие последовательности существуют. Можно взять, например, $\alpha^j=j^{-1/6}$, $\beta^j=j^{-1/(5/3)}$, $\delta^j=j^{-1}$.

3.2.1. Регуляризирующий итерационный двойственный алгоритм в задаче оптимального управления. Переформулировка теорем [21, теорема 2], [20, теорема 3.5.2], [10, теорема 1] применительно сразу к задаче (OC^0) приводит к следующему результату.

Теорема 3.3. *Итеративная двойственная регуляризация в задаче оптимального управления* (OC^0). *Пусть* u^0 *— решение задачи* (OC^0), *и выполняются условия* (3.6). *Тогда, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (OC^0) *задача, алгоритм* $R(\cdot,\delta^j)$, *задаваемый равенством* $R(\mathsf{f}^{\delta^j},\delta^j)=u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$ *для каждого набора исходных данных* f^{δ^j}, *удовлетворяющих оценкам* (1.8), (1.9) *при* $\delta=\delta^j$, *где последовательность* $\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\}\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+$, $j=0,1,\ldots,$ *порождается итерационным процессом* (3.5) *с условиями согласования* (3.6), *является МПР-образующим в смысле определения 1.1, причем, в случае субдифференцируемости* J_0^0 *в точках* $\mathcal{D}$, *имеет место и сильная сходимость (см. лемму 2.3)*

$$\left\|u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]-u^0\right\|_{2,s}\to0\quad \textit{при}\quad j\to\infty;$$

если такой субдифференцируемости нет, то, вообще говоря, гарантирована лишь слабая сходимость $u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$ *к* u^0 *при* $\delta^j\to0$, $j\to\infty$.

3.2.2. Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа в задаче оптимального управления. Переформулирока теоремы [10, теорема 3] применительно сразу к задаче (OC^0) приводит к следующему результату.

Теорема 3.4. *Регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме для задачи* (OC^0). *Для существования МПР в задаче* (OC^0) *необходимо и достаточно, чтобы для последовательности* $\left\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right\}\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+$, *с условиями согласования* (3.6), *выполнялось предельное соотношение*

$$\left\langle\bar\lambda^j, I^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]\right]-d^{\delta^j}\right\rangle_r+\left\langle\bar\mu^j, J^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]\right]\right\rangle_k\to0\quad \textit{при}\quad j\to\infty \tag{3.7}$$

и нашлась стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$ *такая, что*

$$u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]\in\mathcal{D}^{\delta^j,\epsilon^j},\ j=0,1,\ldots. \tag{3.8}$$

В этом случае последовательность $u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$, $j=0,1,\ldots,$ *есть МПР задачи* (OC^0) *и, вне зависимости от того, разрешима двойственная к* (OC^0) *задача или нет, при субдифференцируемости* J_0^0 *на* $\mathcal{D}$, *имеет место сходимость (см. лемму 2.3) в* L_2^s :

$$u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]\to u^0 \quad при \quad j\to\infty. \tag{3.9}$$

Одновременно и $V^0(\bar\lambda^j,\bar\mu^j)\to \sup\limits_{(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+} V^0(\lambda,\mu)=J_0^0\left[u^0\right]$ *при* $j\to\infty$. *То есть независимо от того, разрешима или нет двойственная к* (OC^0) *задача, алгоритм* $R(\cdot,\delta^j)$, *задаваемый равенством* $R(\mathsf{f}^{\delta^j},\delta^j)=\ u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$ *для каждого набора исходных данных* f^{δ^j}, *удовлетворяющих оценкам* (1.8), (1.9) *при* $\delta=\delta^j$, *является МПР-образующим в смысле определения 1.1, причем в случае субдифференцируемости* J_0^0 *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость* (3.9). *Если же такой субдифференцируемости нет, то можно говорить лишь о слабой сходимости* $u^{\delta^j}\left[\bar\lambda^j,\bar\mu^j\right]$ *к* u^0 *при* $\delta^j\to 0$, $j\to\infty$.

В случае субдифференцируемости J_0^0 на D, пользуясь свойством компактности единичной сферы $\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k$ и переходя очевидным образом к пределу при $j\to\infty$ в соотношениях (3.7), (3.8), получаем для задачи (OC^0) (как следствие теоремы 3.4) следующее КУО в форме недифференциального принципа Лагранжа.

Следствие 3.2. *Если* $u^0\in\mathcal{D}^0$ *оптимальное управление для* (OC^0), *то существует невырожденный набор множителей Лагранжа* $\{\nu,\lambda,\mu\}$, $\nu\ge 0$, $\lambda\in\mathbf{R}^r$, $\mu\in\mathbf{R}^k_+$, *такой что*

$$\nu J_0^0[u^0]+\left\langle\lambda,I^0[u^0]-d^0\right\rangle_r+\left\langle\mu,J^0[u^0]\right\rangle_k\le\nu J_0^0[u]+\left\langle\lambda,I^0[u]-d^0\right\rangle_r+\left\langle\mu,J^0[u]\right\rangle_k,\quad u\in\mathcal{D},$$

$$\mu_i J_i^0[u^0]=0\ (i=1,\ldots,k).$$

3.3. О минимизации функции Лагранжа. Ключевой задачей процедуры двойственной регуляризации процесса приближенного решения задачи (OC^0), а также возможного применения регуляризованных КУО для практического решения задач оптимального управления является задача минимизации функции (функционала) Лагранжа $L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$, $\{\lambda,\mu\}\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+$, задачи (OC^δ_ε)

$$L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)\to\min,\quad u\in\mathcal{D}, \tag{3.10}$$

решение которой мы обозначили через $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$. От «качества» решения этой «простейшей» задачи напрямую зависит и «качество» решения исходной задачи (OC^0) на основе регуляризованных КУО. Для упрощения изложения предположим, что при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ функционалы $K^\delta[z]:L_2^m\to\mathbf{R}$, $M^\delta[u]:L_2^s\to\mathbf{R}$, $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbf{R}$ ($i=1,\ldots,k$) дифференцируемы по Фреше. Тогда при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ дифференцируемы по Фреше функционалы $\mathbf{J}_i^\delta[u]:L_2^s\to\mathbf{R}$ $(i=0,1,\ldots,k)$ и функционал Лагранжа $L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$. В этом случае решение $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$ выпуклой задачи на минимум (3.10) удовлетворяет критерию минимума

$$L^{\delta,\varepsilon\,\prime}_{\ u}\left(u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu],\lambda,\mu\right)\left[u-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]\right]\ge 0,\quad u\in\mathcal{D}, \tag{3.11}$$

где $L^{\delta,\varepsilon\,\prime}_{\ u}(\bar u,\lambda,\mu)\,[\cdot]$ — производная Фреше функционала $L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu)$ по переменной u в точке $\bar u\in L_2^s$ при фиксированных λ,μ. Пусть $\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar u,\lambda,\mu](\cdot)\in L_2^s$ — функция Рисса функционала $L^{\delta,\varepsilon\,\prime}_{\ u}(\bar u,\lambda,\mu)\,[\cdot]\in(L_2^s)^*$. Критерий (3.11) можно записать в виде

$$\left\langle\Psi^{\delta,\varepsilon}[u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu],\lambda,\mu],u-u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]\right\rangle_{2,s}\ge 0,\quad u\in\mathcal{D}. \tag{3.12}$$

Найдем представление функции $\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u},\lambda,\mu](t), t \in \Pi$, в терминах задачи $(OC^{\delta}_{\varepsilon})$, а точнее — в терминах уравнения (1.5) и функционалов $K^{\delta}[z]$, $M^{\delta}[u]$, $\mathcal{J}^{\delta}_i[z,u]$ $(i=1,\ldots,k)$, $\mathcal{I}^{\delta}_j[z,u]$ $(j=1,\ldots,r)$, $\delta>0$. Пусть $\Upsilon^{\delta}[\bar{u}](\cdot) \in L^s_2$, $\Xi^{\delta}_i[\bar{u}](\cdot) \in L^s_2$ — функции Рисса соответственно для функционалов $M^{\delta\,/}_{\;u}(\bar{u}) \in (L^s_2)^*$, $\mathcal{J}^{\delta\,/}_{i\;u}\big(S^{\delta}B^{\delta}\bar{u}+S^{\delta}c^{\delta},\bar{u}\big) \in (L^s_2)^*$ $(i=1,\ldots,k)$, а $\Phi^{\delta}[\bar{u}](\cdot) \in L^m_2$ и $\Omega^{\delta}_i[\bar{u}](\cdot) \in L^m_2$ — функции Рисса функционалов $K^{\delta\,/}_{\;z}\big(S^{\delta}B^{\delta}\bar{u}+S^{\delta}c^{\delta}\big) \in (L^m_2)^*$ и $\mathcal{J}^{\delta\,/}_{i\;z}\big(S^{\delta}B^{\delta}\bar{u}+S^{\delta}c^{\delta},\bar{u}\big) \in (L^m_2)^*$ соответственно $(i=1,\ldots,k)$. По аналогии с [10, раздел 4.2] получаем:

$$\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u},\lambda,\mu](t) = \Psi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu](t) + 2\varepsilon\bar{u}(t), \quad t \in \Pi, \tag{3.13}$$

$$\Psi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu](t) = -\left(B^{\delta}\right)^{*}\left[\psi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu]\right](t) + \phi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu](t), \quad t \in \Pi, \tag{3.14}$$

где $\psi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu]$ — единственное в L^m_2 решение уравнения

$$\psi(t) - \left(A^{\delta}\right)^{*}[\psi](t) = -\Phi^{\delta}[\bar{u}](t) - \sum_{i=1}^{k}\mu_i\Omega^{\delta}_i[\bar{u}](t) - \sum_{j=1}^{r}\lambda_j a^{\delta}_j(t), \quad t \in \Pi, \quad \psi \in L^m_2, \tag{3.15}$$

а $\phi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu]$ задается формулой

$$\phi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu] \equiv \Upsilon^{\delta}[\bar{u}] + \sum_{i=1}^{k}\mu_i\Xi^{\delta}_i[\bar{u}] + \sum_{j=1}^{r}\lambda_j b^{\delta}_j. \tag{3.16}$$

3.4. Случай ограниченных управлений. Рассмотрим, например, задачу оптимального управления (OC^0) в ситуации, когда допустимые управления принимают значения из некоторого ограниченного замкнутого и выпуклого множества $U \subset \mathbf{R}^s$ (т. е. $\mathcal{D} \equiv \{u(\cdot) \in L^s_{\infty} : u(t) \in U,\ t \in \Pi\}$). В этом случае получаем из (3.12) критерий минимума функционала Лагранжа в виде следующего линеаризованного поточечного принципа максимума, который доказывается точно так же, как [11, лемма 4.1].

Лемма 3.1. *Функция $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{D}$ является решением задачи (3.10) тогда и только тогда, когда*

$$\left\langle\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u},\lambda,\mu](t),\bar{u}(t)\right\rangle_s = \max_{w\in U}\left\langle\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u},\lambda,\mu](t),w\right\rangle_s \quad \text{при почти всех} \quad t \in \Pi, \tag{3.17}$$

где $\Psi^{\delta,\varepsilon}[\bar{u},\lambda,\mu]$ задается формулами (3.13), (3.14), в которых $\psi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu]$ — решение сопряженного уравнения (3.15), а $\phi^{\delta}[\bar{u},\lambda,\mu]$ определяется формулой (3.16).

Обозначим через $U^{\delta,\varepsilon}_m[\lambda,\mu]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих (при сформулированных выше дополнительных условиях дифференцируемости) принципу максимума леммы 3.1. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости целевого функционала, множество $U^{\delta,\varepsilon}_m[\lambda,\mu]$ состоит из одного элемента, обозначим его через $u^{\delta,\varepsilon}_m[\lambda,\mu]$, и справедливо равенство $u^{\delta,\varepsilon}_m[\lambda,\mu] = u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$. Тогда непосредственным следствием теоремы 3.2 и леммы 3.1 является регуляризованный ПМП для задачи (OC^0).

Теорема 3.5. *Регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления (OC^0). При сформулированных дополнительных условиях дифференцируемости утверждения теоремы 3.2 останутся справедливыми, если в них $u^{\delta^j,\varepsilon^j}[\lambda^j,\mu^j]$ заменить везде на $u^{\delta^j,\varepsilon^j}_m[\lambda^j,\mu^j]$.*

4. Примеры регуляризации классических условий оптимальности в конкретных задачах оптимизации распределенных систем

Естественный переход от начально-краевой задачи к эквивалентному ей функциональному уравнению II рода вольтеррова типа осуществляется с помощью обращения главной части задачи. Разнообразные конкретные примеры начально-краевых задач (для параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и систем таких уравнений, различных уравнений с запаздывающим аргументом и др.), которые допускают эквивалентное описание с помощью функциональных уравнений вольтеррова типа можно найти, например, в [12] (см. также обзор в [16]). Из огромного множества самых различных подобных начально-краевых задач мы для иллюстрации изложенной выше теории выбрали две: начальную задачу для системы с запаздыванием и начально-краевую задачу для интегродифференциального уравнения типа уравнения переноса. В конце каждого примера выписываются те основные конструкции, которые и участвуют в формулировке регуляризованных КУО (формирующая критерий минимума функционала Лагранжа функция Ψ^δ, сопряженное уравнение, ...). Сформулировать с их помощью соответствующие регуляризованные КУО — конкретные реализации теорем 3.1, 3.2, 3.5 читателю уже не сложно.

Пример 1. Терминальная задача оптимизации для системы с запаздыванием. Пусть $n = 1$, $\Pi = [0,1]$ и заданы число $\rho \in (0,1)$, вектор $\eta \in \mathbf{R}^m$, функции $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in L_2^{m\times m}$, $\gamma(\cdot) \in L_\infty^{m\times s}$, $\xi(\cdot) \in L_\infty^m[-\rho, 0]$. Рассмотрим начальную задачу для линейной управляемой системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом ($x(\cdot)$ — m-вектор-функция)

$$\dot{x} = \alpha(t)x(t) + \beta(t)x(t-\rho) + \gamma(t)u(t), \quad t \in [0,1]; \tag{4.1}$$

$$x(t) = \xi(t), \quad t \in [-\rho, 0); \quad x(0) = \eta, \tag{4.2}$$

где $u(\cdot) \in L_2^s$ — управление. Решение начальной задачи (4.1), (4.2) понимаем как решение в смысле «почти всюду» из пространства $(W_2^1[0,1])^m$ абсолютно непрерывных функций, рассматривая первое из условий (4.2) как требуемое в (4.1) условие доопределения $x(t)$ слева от $t = 0$: $x(t-\rho) = \xi(t-\rho)$ при $t - \rho < 0$. Приведем задачу (4.1), (4.2) к эквивалентному уравнению вида (1.1), показав тем самым, что каждому $u(\cdot) \in L_2^s$ отвечает единственное в классе W функций $x(\cdot) \in (W_2^1[0,1])^m$, удовлетворяющих второму условию (4.2), решение этой задачи. Для этого сделаем в (4.1), (4.2) замену по формуле

$$x(t) = \eta + \int_0^t z(\zeta)d\zeta, \quad t \in [0,1], \tag{4.3}$$

устанавливающей взаимно однозначное соответствие между классом W функций $x(\cdot)$ и пространством L_2^m функций $z(\cdot)$. «Подставим» (4.3) в (4.1) (с учетом при $t \in [0,\rho)$ первого условия (4.2)):

$$z(t) = \alpha(t)\eta + \alpha(t)\int_0^t z(\zeta)d\zeta + \beta(t)\eta + \beta(t)\int_0^{t-\rho} z(\zeta)d\zeta + \gamma(t)u(t), \quad t \in [\rho, 1], \tag{4.4}$$

$$z(t) = \alpha(t)\eta + \alpha(t)\int_0^t z(\zeta)d\zeta + \beta(t)\xi(t-\rho) + \gamma(t)u(t), \quad t \in [0,\rho). \tag{4.5}$$

Положим $\omega(t) \equiv \{\xi(t-\rho),\ t\in[0,\rho);\ \eta,\ t\in[\rho,1]\}$, $t\in[0,1]$; $\Sigma_1[z](t)\equiv\int_0^t z(\zeta)d\zeta$, $\Sigma_2[z](t)\equiv\left\{0_m,\ t\in[0,\rho];\ \int_0^{t-\rho}z(\zeta)d\zeta,\ t\in(\rho,1]\right\}$, $z(\cdot)\in L_2^m$, где 0_m — ноль в $\mathbf{R}^m$. Используя введенные обозначения, запишем систему (4.4), (4.5) в виде

$$z(t)=\alpha(t)\{\eta+\Sigma_1[z](t)\}+\beta(t)\{\omega(t)+\Sigma_2[z](t)\}+\gamma(t)u(t) \tag{4.6}$$

$$\equiv\{\alpha(t)\Sigma_1[z](t)+\beta(t)\Sigma_2[z](t)\}+\gamma(t)u(t)+\{\alpha(t)\eta+\beta(t)\omega(t)\},\quad t\in\Pi.$$

Уравнение (4.6) и есть уравнение вида (1.1), эквивалентное начальной задаче (4.1), (4.2). Здесь $\Pi\equiv[0,1]$; $A[z](t)\equiv\alpha(t)\Sigma_1[z](t)+\beta(t)\Sigma_2[z](t)$, $z(\cdot)\in L_2^m$, $t\in\Pi$ (квазинильпотентность оператора $A[\cdot]:L_2^m\to L_2^m$ легко проверяется, например, с помощью цепочечного признака [13]); $B[u](t)\equiv\gamma(t)u(t)$, $u(\cdot)\in L_2^s$, $t\in\Pi$; $c(t)\equiv\alpha(t)\eta+\beta(t)\omega(t)$, $t\in\Pi$. Если $x(\cdot)\in W$ — решение задачи (4.1), (4.2) при некотором $u(\cdot)\in L_2^s$, то связанная с $x(\cdot)$ формулой (4.3) функция $z(\cdot)\in L_2^m$ есть решение уравнения (4.6) при том же $u(\cdot)$. И наоборот, если $z(\cdot)\in L_2^m$ — решение уравнения (4.6) при данном $u(\cdot)\in L_2^s$, то функция $x(\cdot)$, связанная с $z(\cdot)$ формулой (4.3), есть решение класса W задачи (4.1), (4.2) при этом $u(\cdot)$. Отвечающие управлению $u(\cdot)\in L_2^s$ решения задачи (4.1)–(4.2) и уравнения (4.6) обозначим через x_u и z_u соответственно.

Пусть заданы: выпуклые функции $G_i(\cdot):\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$, $i=0,1,\dots,k$; векторы $\mathbf{a}_j\in\mathbf{R}^m$ $j=1,\dots,r$; действительные числа $\mathbf{d}_j$, $j=1,\dots,r$; выпуклое ограниченное и замкнутое множество $\mathcal{D}$ в L_2^s. Формулами $F_i[x]\equiv G_i(x(1))$, $i=0,1,\dots,k$, и $Q_j[x]\equiv\langle\mathbf{a}_j\,,\,x(1)\rangle_m$, $j=1,\dots,r$, для $x(\cdot)\in(W_2^1[0,1])^m$ определены терминальные функционалы. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (4.1), (4.2) с минимизируемым функционалом $F_0[x]$ при ограничениях

$$F_1[x]\le 0,\dots,F_k[x]\le 0,\quad Q_1[x]=\mathbf{d}_1,\dots,Q_r[x]=\mathbf{d}_r,\quad x\in\left(W_2^1[0,1]\right)^m, \tag{4.7}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u]\to\min,\quad F_i[x_u]\le 0\ (i=1,\dots,k),\quad Q_j[x_u]=\mathbf{d}_j\ (j=1,\dots,r),\quad u\in\mathcal{D}. \tag{4.8}$$

Сделав в задаче (4.8) замену (4.3), получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы (4.6). При этом ограничения (4.7) преобразуются в ограничения

$$W_1[z]\le 0,\dots,W_k[z]\le 0,\quad E_1[z]=d_1,\dots,E_r[z]=d_r,\quad z\in L_2^m,$$

а целевой функционал примет вид $W_0[z]$, где $W_i[z]\equiv G_i\left(\eta+\int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right)$ $(i=0,1,\dots,k)$ — выпуклые функционалы на L_2^m, $E_j[z]\equiv\langle\mathbf{a}_j\,,\,z\rangle_{2,m}$ $(j=1,\dots,r)$ — линейные функционалы на L_2^m, $d_j\equiv\mathbf{d}_j-\langle\mathbf{a}_j,\,\eta\rangle_m$ $(j=1,\dots,r)$ — числа. Эту задачу оптимизации управляемой системы (4.6), эквивалентную задаче (4.8), запишем в виде

$$W_0[z_u]\to\min,\quad W_i[z_u]\le 0\ (i=1,\dots,k),\quad E_j[z_u]=d_j\ (j=1,\dots,r),\quad u\in\mathcal{D}.$$

Это задача вида (1.4), здесь $J_0[u]\equiv W_0[z_u]$ ($K[z]\equiv W_0[z]$, $M[u]\equiv 0$); $J_i[u]\equiv\mathcal{J}_i[z_u,u]\equiv W_i[z_u]$ ($\mathcal{J}_i[z,u]\equiv W_i[z]$) $(i=1,\dots,k)$; $I_j[u]\equiv\mathcal{I}_j[z_u,u]\equiv E_j[z_u]$ ($\mathcal{I}_j[z,u]\equiv E_j[z]$) $(j=1,\dots,r)$.

Пусть $\mathsf{f}\equiv\{\eta,\alpha,\beta,\gamma,\xi;G_i(i=0,1,\dots,k);\mathbf{a}_j,\mathbf{d}_j(j=1,\dots,r)\}$ — набор входных данных задачи (4.8), которые могут подвергаться возмущению, и точный набор

$$\mathsf{f}^0\equiv\{\eta^0,\alpha^0,\beta^0,\gamma^0,\xi^0;G_i^0(i=0,1,\dots,k);\mathbf{a}_j^0,\mathbf{d}_j^0(j=1,\dots,r)\}$$

нам не известен, но можно оперировать с приближенными наборами

$$\mathsf{f}^\delta \equiv \{\eta^\delta, \alpha^\delta, \beta^\delta, \gamma^\delta, \xi^\delta; G_i^\delta (i = 0, 1, \dots, k); \mathbf{a}_j^\delta, \mathbf{d}_j^\delta \ (j = 1, \dots, r)\}, \quad \delta \in (0, \delta_0]$$

($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором f^0 следующими условиями 4.1–4.3.

У с л о в и е 4.1. Функции $G_i^\delta(\cdot) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, \dots, k)$ выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве.

Заметим, что условие 4.1 выполняется, в частности, если функции $G_i^\delta(\cdot) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ $(i = 0, 1, \dots, k)$ выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ ограничены на любом ограниченном множестве пространства $\mathbf{R}^m$ (см., например, [24, теорема 8.2]).

У с л о в и е 4.2. Существует постоянная $\mathbf{C} > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $\left\|\eta^\delta - \eta^0\right\|_m$, $\left\|\alpha^\delta - \alpha^0\right\|_{2,m\times m}$, $\left\|\beta^\delta - \beta^0\right\|_{2,m\times m}$, $\left\|\gamma^\delta - \gamma^0\right\|_{2,m\times s}$, $\left\|\xi^\delta - \xi^0\right\|_{L_\infty^m[-\rho,0]}$; $\left\|\mathbf{a}_j^\delta - \mathbf{a}_j^0\right\|_m$, $\left|\mathbf{d}_j^\delta - \mathbf{d}_j^0\right|$ $(j = 1, \dots, r)$ не превосходят величины $\mathbf{C}\delta$.

У с л о в и е 4.3. Существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что для любых $l > 0$, $\delta \in (0, \delta_0]$ величина $\left|G_i^\delta(y) - G_i^0(y)\right|$ при $\|y\|_m \le l$ не превосходит величины $\mathbf{N}_1(l)\delta$ $(i = 0, 1, \dots, k)$.

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ мы имеем управляемую начальную задачу

$$\dot{x} = \alpha^\delta(t)x(t) + \beta^\delta(t)x(t - \rho) + \gamma^\delta(t)u(t), \quad t \in [0, 1]; \tag{4.9}$$

$$x(t) = \xi^\delta(t), \quad t \in [-\rho, 0); \quad x(0) = \eta^\delta, \tag{4.10}$$

минимизируемый функционал $F_0^\delta[x]$, $x \in (W_2^1[0,1])^m$, набор ограничений

$$F_1^\delta[x] \le 0, \dots, F_k^\delta[x] \le 0, \quad Q_1^\delta[x] = \mathbf{d}_1^\delta, \dots, Q_r^\delta[x] = \mathbf{d}_r^\delta, \quad x \in \left(W_2^1[0,1]\right)^m, \tag{4.11}$$

$F_i^\delta[x] \equiv G_i^\delta(x(1))$ $(i = 0, 1, \dots, k)$, $Q_j^\delta[x] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, x(1)\right\rangle_m$ $(j = 1, \dots, r)$, и задачу оптимизации

$$F_0^\delta[x_u^\delta] \to \min, \quad F_i^\delta[x_u^\delta] \le 0 \ (i = 1, \dots, k), \quad Q_j^\delta[x_u^\delta] = \mathbf{d}_j^\delta \ (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}, \tag{4.12}$$

где $x_u^\delta(\cdot)$ — отвечающее управлению $u(\cdot)$ решение задачи (4.9), (4.10). Сделав в задаче (4.12) замену $x(t) = \eta^\delta + \int_0^t z(\zeta)d\zeta$, $t \in [0, 1]$, получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы

$$z(t) = \left\{\alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2[z](t)\right\} + \gamma^\delta(t)u(t) + \left\{\alpha^\delta(t)\eta^\delta + \beta^\delta(t)\omega^\delta(t)\right\}, \quad t \in \Pi, \tag{4.13}$$

где принято обозначение $\omega^\delta(t) \equiv \left\{\xi^\delta(t - \rho),\ t \in [0, \rho);\ \eta^\delta,\ t \in [\rho, 1]\right\}$, $t \in \Pi$. При этом целевой функционал принимает вид $W_0^\delta[z]$, а ограничения (4.11) преобразуются к виду

$$W_1^\delta[z] \le 0, \dots, W_k^\delta[z] \le 0, \quad E_1^\delta[z] = d_1^\delta, \dots, E_r^\delta[z] = d_r^\delta, \quad z \in L_2^m,$$

где $W_i^\delta[z] \equiv G_i^\delta\left(\eta^\delta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right)$ $(i = 0, 1, \dots, k)$ — выпуклые функционалы на L_2^m, $E_j^\delta[z] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, z\right\rangle_{2,m}$ $(j = 1, \dots, r)$ — линейные функционалы на L_2^m, $d_j^\delta \equiv \mathbf{d}_j^\delta - \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, \eta^\delta\right\rangle_m$ $(j = 1, \dots, r)$. Эту задачу оптимизации системы (4.13) запишем в виде

$$W_0^\delta[z_u^\delta] \to \min, \quad W_i^\delta[z_u^\delta] \le 0 \ (i = 1, \dots, k), \quad E_j^\delta[z_u^\delta] = d_j^\delta \ (j = 1, \dots, r), \quad u \in \mathcal{D}, \tag{4.14}$$

где $z_u^\delta(\cdot)$ — отвечающее управлению $u(\cdot)$ решение уравнения (4.13).

Положив $A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2[z](t)$, $t \in \Pi$, $z(\cdot) \in L_2^m$; $B^\delta[u](t) \equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $t \in \Pi$, $u(\cdot) \in L_2^s$; $c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\eta^\delta + \beta^\delta(t)\omega^\delta(t)$, $t \in \Pi$, переписываем (4.13) в форме (1.5). Задача (4.14) имеет вид (OC^δ), в данном случае $J_0^\delta[u] \equiv W_0^\delta[z_u^\delta]$ ($K^\delta[z] \equiv W_0^\delta[z]$, $M^\delta[u] \equiv 0$); $J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \equiv W_i^\delta[z_u^\delta]$ ($\mathcal{J}_i^\delta[z,u] \equiv W_i^\delta[z]$) $(i = 1, \ldots, k)$; $I_j^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u^\delta, u] \equiv E_j^\delta[z_u^\delta]$ ($\mathcal{I}_j^\delta[z,u] \equiv E_j^\delta[z]$) $(j = 1, \ldots, r)$.

Семейство задач (4.14), $\delta \in [0, \delta_0]$, удовлетворяет условиям А-Г: выполнение А, Б доказывается элементарными выкладками, исходя из условий 4.1–4.3 и 4.2 соответственно; выполнение В проверяется так же, как и выполнение аналогичного условия в [10, пример 1]; выполнение Г легко доказать с помощью цепочечного признака равностепенной квазинильпотентности [16, теорема 2].

Предположив дополнительно гладкость функций G_i^δ, $i = 0, 1, \ldots, k$, $\delta \in (0, \delta_0]$, можем выписать критерии (3.12) и (3.17) решения задачи (3.10). Прямые вычисления дают: $\Phi^\delta[\bar{u}](t) \equiv \left(G_0^{\delta/}\left(x_{\bar{u}}^\delta(1)\right)\right)^*$, $\phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) \equiv 0$, $t \in \Pi$; $\Omega_i^\delta[\bar{u}](t) \equiv \left(G_i^{\delta/}\left(x_{\bar{u}}^\delta(1)\right)\right)^*$, $t \in \Pi$ $(i = 1, \ldots, k)$; $a_j^\delta(t) \equiv \mathbf{a}_j^\delta$, $t \in \Pi$ $(j = 1, \ldots, r)$; $(A^\delta)^*[\psi](t) \equiv \Sigma_1^*\left[\left(\alpha^\delta\right)^*\psi\right](t) + \Sigma_2^*\left[\left(\beta^\delta\right)^*\psi\right](t)$, $t \in \Pi$, $\psi \in L_2^m$, где $\Sigma_2^*[y](t) \equiv \left\{\int_{t+\rho}^1 y(\zeta)d\zeta,\ 0 \le t \le 1-\rho;\ 0_m,\ 1-\rho < t \le 1\right\}$, $\Sigma_1^*[y](t) \equiv \int_t^1 y(\zeta)d\zeta$, $t \in \Pi$, $y \in L_2^m$. То есть сопряженное уравнение (3.15) можно записать в виде

$$\psi(t) - \int_t^1 \left(\alpha^\delta(\zeta)\right)^*\psi(\zeta)d\zeta = h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], \quad 1-\rho \le t \le 1, \tag{4.15}$$

$$\psi(t) - \int_t^1 \left(\alpha^\delta(\zeta)\right)^*\psi(\zeta)d\zeta - \int_{t+\rho}^1 \left(\beta^\delta(\zeta)\right)^*\psi(\zeta)d\zeta = h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], \quad 0 \le t \le 1-\rho,$$

где $h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu] \equiv \left(G_0^{\delta/}\left(x_{\bar{u}}^\delta(1)\right)\right)^* + \sum_{i=1}^k \mu_i \left(G_i^{\delta/}\left(x_{\bar{u}}^\delta(1)\right)\right)^* + \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{a}_j^\delta$. Функция Ψ^δ, формирующая критерии (3.12), (3.17), которым удовлетворяет решение $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$ задачи (3.10), имеет вид $\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) \equiv \left(\gamma^\delta(t)\right)^*\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t)$, $t \in \Pi$, где $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ — решение уравнения вольтеррова типа (4.15). Единственное в L_2^m решение $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ уравнения (4.15) принадлежит классу $(W_2^1(\Pi))^m$. Уравнение (4.15) эквивалентно системе

$$\dot{\psi} + \left(\alpha^\delta(t)\right)^*\psi(t) = 0, \quad 1-\rho \le t \le 1; \quad \psi(1) = h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], \tag{4.16}$$

$$\dot{\psi} + \left(\alpha^\delta(t)\right)^*\psi(t) + \left(\beta^\delta(t+\rho)\right)^*\psi(t+\rho) = 0, \quad 0 \le t \le 1-\rho, \tag{4.17}$$

$$\psi(1-\rho) = \int_{1-\rho}^1 \left(\alpha^\delta(\zeta)\right)^*\psi(\zeta)d\zeta + h^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], \tag{4.18}$$

состоящей из задачи Коши (4.16) и начальной задачи (4.17), (4.18) для уравнения с опережением (4.17), в которой условие (4.18) играет роль условия Коши в точке $t = 1-\rho$; требуемое в (4.17) и (4.18) доопределение $\psi(\cdot)$ справа от точки $t = 1-\rho$ обеспечивается задачей Коши (4.16).

Пример 2. Оптимизационная задача для интегродифференциального уравнения типа уравнения переноса. Пусть $n = 3$, $\Pi = [0,1] \times [0,1] \times [-1,1]$. Рассмотрим на Π следующую краевую задачу для линейного интегродифференциального уравнения (краевая задача (4.19) подобна смешанной задаче для простейшего линейного нестационарного интегродифференциального уравнения переноса (см., например, [25–27]))

$$\begin{gathered}\partial x/\partial t^1+t^3\cdot\partial x/\partial t^2=\alpha(t)x(t)+\beta(t)\int\limits_{-1}^{1}Y(\zeta;t)x(t^1,t^2,\zeta)d\zeta+\gamma(t)u(t),\quad t\in\Pi;\\ x(0,t^2,t^3)=\varphi(t^2,t^3),\quad 0\le t^2\le 1,\quad -1\le t^3\le 1;\\ x(t^1,0,t^3)=\psi_1(t^1,t^3),\quad 0\le t^1\le 1,\quad 0\le t^3\le 1;\\ x(t^1,1,t^3)=\psi_2(t^1,t^3),\quad 0\le t^1\le 1,\quad -1\le t^3\le 0,\end{gathered}\tag{4.19}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\varphi,\psi_1,\psi_2,Y$ — фиксированные измеримые по совокупности переменных и ограниченные скалярные функции, $u(\cdot)\in L_2$ — управление. Левую часть уравнения (4.19) понимаем как полную производную функции $x(\cdot)$ по переменной t^1 вдоль характеристики дифференциального выражения, стоящего в левой части. Такую производную от $x(\cdot)$ вдоль характеристики l будем обозначать $\partial x(\cdot)/\partial l$. Пусть W — класс всех функций $x(\cdot)$ из L_2, абсолютно непрерывных вдоль почти любой характеристики и таких, что $\partial x(\cdot)/\partial l\in L_2$. Функцию $x(\cdot)$ из W назовем решением задачи (4.19), отвечающим управлению $u(\cdot)$, если она почти везде (по линейной мере) на почти каждой l в Π удовлетворяет уравнению (4.19) и почти всюду удовлетворяет краевым условиям (4.19). Характеристика $l=l(\bar t)$, проходящая через точку $\bar t=\{\bar t^1,\bar t^2,\bar t^3\}$, задается уравнениями $\{t^1=\xi,t^2=\bar t^2+\bar t^3(\xi-\bar t^1),t^3=\bar t^3\}$, где ξ – параметр. Она обязательно пересекает границу Π в одной из тех ее частей, где или $t^1=0$, или $t^2=0$, $t^3>0$, или $t^2=1$, $t^3<0$; значение t^1 в соответствующей точке t пересечения обозначим через $\nu(\bar t)$. Из краевых условий (4.19) следует:

$$x\left(\nu(\bar t),\bar t^2+\bar t^3(\nu(\bar t)-\bar t^1),\bar t^3\right)=\theta(\bar t)\equiv\begin{cases}\varphi(\bar t^2-\bar t^3\bar t^1,\bar t^3), & \text{если } \nu(\bar t)=0;\\ \psi_1(\bar t^1-\bar t^2/\bar t^3,\bar t^3), & \text{если } \nu(\bar t)>0,\quad \bar t^3>0;\\ \psi_2(\bar t^1+(1-\bar t^2)/\bar t^3,\bar t^3), & \text{если } \nu(\bar t)>0,\quad \bar t^3<0,\end{cases}\tag{4.20}$$

$\bar t\in\Pi$. Формула

$$x(t)=\theta(t)+\Sigma_1[z](t)\equiv\theta(t)+\int\limits_{\nu(t)}^{t^1}z(\xi,t^2+t^3(\xi-t^1),t^3)d\xi,\quad t\in\Pi,\tag{4.21}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом L_2 функций $z(\cdot)$ и классом удовлетворяющих краевым условиям (4.19) функций $x(\cdot)$ из W. Задача (4.19) заменой (4.21) сводится к эквивалентному функциональному уравнению (1.1), где $n=3$, $m=s=1$, $\Pi=[0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$; $c(t)\equiv\alpha(t)\theta(t)+\beta(t)\int\limits_{-1}^{1}Y(\zeta;t)\theta(t^1,t^2,\zeta)d\zeta$, $t\in\Pi$;

$$B[u](t)\equiv\gamma(t)u(t),\quad u(\cdot)\in L_2,\quad t\in\Pi;\qquad A[z](t)\equiv\alpha(t)\Sigma_1[z](t)+\beta(t)\Sigma_2[z](t),$$

$$\Sigma_2[z](t)\equiv\int\limits_{-1}^{1}\Big\{Y(\zeta;t)\int\limits_{\nu(t^1,t^2,\zeta)}^{t^1}z(\xi,t^2+\zeta(\xi-t^1),\zeta)d\xi\Big\}d\zeta,\quad z(\cdot)\in L_2,\quad t\in\Pi.$$

ЛОО $A[\cdot]:L_2\to L_2$ квазинильпотентен (это простое следствие признака [13, теорема 2]), и указанное уравнение (1.1), а вместе с ним и краевая задача (4.19), имеет единственное решение для любого $u(\cdot) \in L_2$. Отвечающее управлению $u(\cdot) \in L_2$ решение $x_u(\cdot)$ задачи (4.19) связано с соответствующим решением $z_u(\cdot)$ уравнения (1.1) формулой (4.21).

Пусть заданы: выпуклые функции $G_0(y) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G_i(y, w) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, k$; функции $\mathbf{a}_j(\cdot) \in L_2$ и $\mathbf{b}_j(\cdot) \in L_2$, действительные числа $\mathbf{d}_j$, $j = 1, \ldots, r$. Формулами $F_0[x] \equiv G_0\left(\int_\Pi x(t)dt\right)$, $F_i[x, u] \equiv G_i\left(\int_\Pi x(t)dt, \int_\Pi u(t)dt\right)$, $Q_j[x, u] \equiv \langle \mathbf{a}_j(\cdot)\,,\, x(\cdot)\rangle_{2,1} + \langle \mathbf{b}_j(\cdot)\,,\, u(\cdot)\rangle_{2,1}$ при $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, r$ для $x(\cdot) \in W$, $u(\cdot) \in L_2$ определены функционалы. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (4.19) с минимизируемым функционалом $F_0[x]$ при ограничениях

$$F_1[x, u] \le 0, \ldots, F_k[x, u] \le 0, \quad Q_1[x, u] = \mathbf{d}_1, \ldots, Q_r[x, u] = \mathbf{d}_r, \quad x \in W, \quad u \in L_2, \tag{4.22}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u] \to \min, \quad F_i[x_u, u] \le 0\ (i = 1, \ldots, k), \quad Q_j[x_u, u] = \mathbf{d}_j\ (j = 1, \ldots, r), \quad u \in \mathcal{D}. \tag{4.23}$$

Сделаем в задаче (4.23) замену (4.21). При этом целевой функционал принимает вид $W_0[z] \equiv F_0[\theta + \Sigma_1[z]]$, $z(\cdot) \in L_2$, а ограничения (4.22) преобразуются в ограничения

$$W_1[z, u] \le 0, \ldots, W_k[z, u] \le 0, \quad E_1[z, u] = d_1, \ldots, E_r[z, u] = d_r, \quad z \in L_2, \quad u \in L_2,$$

где $W_i[z, u] \equiv F_i[\theta + \Sigma_1[z], u]$ $(i = 1, \ldots, k)$ — выпуклые, а $E_j[z, u] \equiv \langle \mathbf{a}_j, \Sigma_1[z]\rangle_{2,1} + \langle \mathbf{b}_j, u\rangle_{2,1}$ $(j = 1, \ldots, r)$ — линейные функционалы на $L_2 \times L_2$, $d_j \equiv \mathbf{d}_j - \langle \mathbf{a}_j\,,\, \theta\rangle_{2,1}$ $(j = 1, \ldots, r)$. Получаем задачу оптимизации управляемой системы (1.1), эквивалентную задаче (4.23):

$$W_0[z_u] \to \min, \quad W_i[z_u, u] \le 0\ (i = 1, \ldots, k), \quad E_j[z_u, u] = d_j\ (j = 1, \ldots, r), \quad u \in \mathcal{D}.$$

Это задача вида (1.4), где $J_0[u] \equiv \mathcal{J}_0[z_u, u] \equiv W_0[z_u]$, $K[z] \equiv G_0\left(\int_\Pi (\theta(t) + \Sigma_1[z](t))\, dt\right)$, $M[u] \equiv 0$; $J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u, u] \equiv W_i[z_u, u]$ $(i = 1, \ldots, k)$; $I_j[u] \equiv \mathcal{I}_j[z_u, u] \equiv E_j[z_u, u]$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Пусть $\mathsf{f} \equiv \{\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, Y,\, \varphi,\, \psi_1,\, \psi_2;\ G_i\ (i = 0, 1, \ldots, k);\ \mathbf{a}_j,\, \mathbf{b}_j,\, \mathbf{d}_j\ (j = 1, \ldots, r)\}$ — набор входных данных задачи (4.23), которые могут подвергаться возмущению, и точный набор

$$\mathsf{f}^0 \equiv \left\{\alpha^0,\, \beta^0,\, \gamma^0,\, Y^0,\, \varphi^0,\, \psi_1^0,\, \psi_2^0;\ G_i^0\ (i = 0, 1, \ldots, k);\ \mathbf{a}_j^0,\, \mathbf{b}_j^0, \mathbf{d}_j^0\ (j = 1, \ldots, r)\right\}$$

нам не известен, но можно оперировать с приближенными наборами

$$\mathsf{f}^\delta \equiv \left\{\alpha^\delta,\, \beta^\delta,\, \gamma^\delta,\, Y^\delta,\, \varphi^\delta,\, \psi_1^\delta,\, \psi_2^\delta;\ G_i^\delta\ (i = 0, 1, \ldots, k);\ \mathbf{a}_j^\delta,\, \mathbf{b}_j^\delta,\, \mathbf{d}_j^\delta\ (j = 1, \ldots, r)\right\}, \quad \delta \in (0, \delta_0]$$

($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором f^0 следующими условиями.

У с л о в и е 4.4. Функции $G_0^\delta(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $G_i^\delta(\cdot, \cdot) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, k)$ выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве.

У с л о в и е 4.5. Существует такое положительное $\mathbf{C}$, что значения $\left\|\alpha^\delta - \alpha^0\right\|_{\infty,1}$, $\left\|\beta^\delta - \beta^0\right\|_{\infty,1}$, $\left\|\gamma^\delta - \gamma^0\right\|_{\infty,1}$, $\left\|Y^\delta - Y^0\right\|_{\infty,1}$, $\left\|\varphi^\delta - \varphi^0\right\|_{L_\infty([0,1]\times[-1,1])}$, $\left\|\psi_1^\delta - \psi_1^0\right\|_{L_\infty([0,1]\times[0,1])}$, $\left\|\psi_2^\delta - \psi_2^0\right\|_{L_\infty([0,1]\times[-1,0))}$, а также $\left\|\mathbf{a}_j^\delta - \mathbf{a}_j^0\right\|_{2,1}$, $\left\|\mathbf{b}_j^\delta - \mathbf{b}_j^0\right\|_{2,1}$, $\left|\mathbf{d}_j^\delta - \mathbf{d}_j^0\right|$ $(j = 1, \ldots, r)$, при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ не превосходят $\mathbf{C}\delta$.

Условие 4.6. Существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $\mathbf{l} > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $\left|G_0^\delta(y) - G_0^0(y)\right|$, $\left|G_i^\delta(y,w) - G_i^0(y,w)\right|$ $(i = 1,\dots,k)$ при $|y|, |w| \le \mathbf{l}$ не превосходят $\mathbf{N}_1(\mathbf{l})\delta$.

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеем управляемую краевую задачу

$$\partial x/\partial t^1 + t^3 \cdot \partial x/\partial t^2 = \alpha^\delta(t)x(t) + \beta^\delta(t)\int\limits_{-1}^{1} Y^\delta(\zeta;t)x(t^1,t^2,\zeta)d\zeta + \gamma^\delta(t)u(t), t \in \Pi;$$
$$x(0,t^2,t^3) = \varphi^\delta(t^2,t^3), \quad 0 \le t^2 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 1;$$
$$x(t^1,0,t^3) = \psi_1^\delta(t^1,t^3), \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad 0 \le t^3 \le 1;$$
$$x(t^1,1,t^3) = \psi_2^\delta(t^1,t^3), \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 0$$

(ее решение, отвечающее управлению $u(\cdot) \in L_2$, обозначаем через x_u^δ), минимизируемый функционал $F_0^\delta[x] \equiv G_0^\delta(\int_\Pi x(t)dt)$, набор функциональных ограничений

$$F_1^\delta[x,u] \le 0, \dots, F_k^\delta[x,u] \le 0, \quad Q_1^\delta[x,u] = \mathbf{d}_1^\delta, \dots, Q_r^\delta[x,u] = \mathbf{d}_r^\delta, \quad x \in W, \quad u \in L_2, \quad (4.24)$$

$F_i^\delta[x,u] \equiv G_i^\delta\left(\int_\Pi x(t)dt, \int_\Pi u(t)dt\right)$ $(i = 1,\dots,k)$, $Q_j^\delta[x,u] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta(\cdot)\,,\, x(\cdot)\right\rangle_{2,1} + \left\langle \mathbf{b}_j^\delta(\cdot)\,,\, u(\cdot)\right\rangle_{2,1}$ $(j = 1,\dots,r)$, и задачу оптимального управления

$$F_0^\delta[x_u^\delta] \to \min, \quad F_i^\delta[x_u^\delta, u] \le 0 \ (i = 1,\dots,k), \quad Q_j^\delta[x_u^\delta, u] = \mathbf{d}_j \ (j = 1,\dots,r), \quad u \in \mathcal{D}. \quad (4.25)$$

Сделав в (4.25) подстановку $x(t) = \theta^\delta(t) + \Sigma_1[z](t)$, $t \in \Pi$, где $\theta^\delta(\cdot)$ определяется формулой (4.20) с заменой φ, ψ_1, ψ_2 на φ^δ, ψ_1^δ, ψ_2^δ соответственно, получим эквивалентную задачу оптимизации системы (1.5), в которой $n = 3$, $m = 1$, $s = 1$, $\Pi = [0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$; $c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\theta^\delta(t) + \beta^\delta(t)\int\limits_{-1}^{1} Y^\delta(\zeta;t)\theta^\delta(t^1,t^2,\zeta)d\zeta$, $t \in \Pi$; $B^\delta[u](t) \equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $u(\cdot) \in L_2$, $t \in \Pi$; $A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2^\delta[z](t)$,

$$\Sigma_2^\delta[z](t) \equiv \int\limits_{-1}^{1}\Big\{Y^\delta(\zeta;t)\int\limits_{\nu(t^1,t^2,\zeta)}^{t^1} z(\xi, t^2 + \zeta(\xi - t^1), \zeta)d\xi\Big\}d\zeta, \quad z(\cdot) \in L_2, \quad t \in \Pi.$$

При этом ограничения (4.24) преобразуются в ограничения

$$W_1^\delta[z,u] \le 0, \dots, W_k^\delta[z,u] \le 0, \quad E_1^\delta[z,u] = d_1^\delta, \dots, E_r^\delta[z,u] = d_r^\delta, \quad z \in L_2, \quad u \in L_2,$$

$W_i^\delta[z,u] \equiv F_i^\delta[\theta^\delta + \Sigma_1[z], u]$ $(i = 1,\dots,k)$ и $E_j^\delta[z,u] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta\,,\, \Sigma_1[z]\right\rangle_{2,1} + \left\langle \mathbf{b}_j^\delta\,,\, u\right\rangle_{2,1}$ $(j = 1,\dots,r)$ — соответственно выпуклые и линейные функционалы на $L_2 \times L_2$, $d_j^\delta \equiv \mathbf{d}_j^\delta - \left\langle \mathbf{a}_j^\delta\,,\, \theta^\delta\right\rangle_{2,1}$ $(j = 1,\dots,r)$. Полученную задачу оптимизации системы (1.5) запишем в виде

$$W_0^\delta[z_u^\delta] \to \min, \quad W_i[z_u^\delta, u] \le 0 \ (i = 1,\dots,k), \quad E_j[z_u^\delta, u] = d_j^\delta \ (j = 1,\dots,r), \quad u \in \mathcal{D}, \quad (4.26)$$

где $W_0^\delta[z] \equiv F_0^\delta[\theta^\delta + \Sigma_1[z]]$. Это задача вида ($OC^\delta$), где $J_0^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_0^\delta[z_u^\delta, u] \equiv W_0^\delta[z_u^\delta]$, $K^\delta[z] \equiv G_0^\delta\left(\int_\Pi \left(\theta^\delta(t) + \Sigma_1[z](t)\right)dt\right)$, $M^\delta \equiv 0$; $J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \equiv W_i^\delta[z_u^\delta, u]$ $(i = 1,\dots,k)$, $I_j^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u^\delta, u] \equiv E_j^\delta[z_u^\delta, u]$ $(j = 1,\dots,r)$. При сделанных относительно семейства задач (4.25), $\delta \in [0, \delta_0]$, предположениях семейство задач (4.26), $\delta \in [0, \delta_0]$, удовлетворяет условиям А-Г: выполнение А и Б доказывается элементарными выкладками, исходя из условий 4.4–4.6 и 4.5 соответственно; выполнение В проверяется так же, как и выполнение аналогичного условия в [10, пример 2]; выполнение Г легко доказать с помощью признака равностепенной квазинильпотентности [16, теорема 2].

Предположив дополнительно, что функции G_i^δ, $i = 0, 1, \ldots, k$, $\delta \in (0, \delta_0]$, гладкие, можем выписать для данного примера критерии (3.12) и (3.17) решения задачи (3.10). Сопряженные к ЛОО $\Sigma_1 : L_2 \to L_2$, $\Sigma_2^\delta : L_2 \to L_2$ операторы: $\Sigma_1^*[z](t) = \int\limits_{t^1}^{\rho(t)} z(\xi, t^2 + t^3(\xi - t^1), t^3) d\xi$, $\Sigma_2^{\delta *}[z](t) = \int\limits_{-1}^{1} \Big\{ \int\limits_{t^1}^{\rho(t)} Y^\delta(t^3; \xi, t^2 + t^3(\xi - t^1), \zeta)\ z(\xi, t^2 + t^3(\xi - t^1), \zeta)\ d\xi \Big\} d\zeta$, $t \in \Pi$, где $\rho(\bar t)$ — значение t^1 в точке t пересечения характеристикой $l(\bar t)$ той части границы Π, где либо $t^1 = 1$, либо $t^2 = 0, t^3 < 0$, либо $t^2 = 1, t^3 > 0$. Примем обозначения: $\eta_\delta(\bar u) \equiv \int_\Pi x_{\bar u}^\delta(\zeta) d\zeta$, $\eta(\bar u) \equiv \int_\Pi \bar u(\zeta) d\zeta$. Прямыми вычислениями находим: $\Phi^\delta[\bar u](t) \equiv \Sigma_1^* \Big[G_0^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u)) \Big](t)$, $\Upsilon^\delta[\bar u](t) \equiv 0$, $\Omega_i^\delta[\bar u](t) \equiv \Sigma_1^* \Big[G_{iy}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u),\ \eta(\bar u)) \Big](t)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\Xi_i^\delta[\bar u](t) \equiv G_{iw}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u), \eta(\bar u))$ $(i = 1, \ldots, k)$, $t \in \Pi$; $b_j^\delta \equiv \mathbf{b}_j^\delta$ $(j = 1, \ldots, r)$; $a_j^\delta \equiv \Sigma_1^* \big[\mathbf{a}_j^\delta \big]$ $(j = 1, \ldots, r)$. То есть сопряженное уравнение (3.15) имеет вид

$$\begin{aligned} &\psi(t) - \Sigma_1^* \left[\alpha^\delta \psi \right](t) - \Sigma_2^{\delta *} \left[\beta^\delta \psi \right](t) \\ &\qquad = -\Sigma_1^* \Big[G_0^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u)) \Big](t) - \Sigma_1^* \Big[\sum_{i=1}^{k} \mu_i G_{iy}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u), \eta(\bar u)) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathbf{a}_j^\delta \Big](t), \\ &\qquad\qquad t \in \Pi, \quad \psi(\cdot) \in L_2, \end{aligned} \tag{4.27}$$

и является функциональным уравнением вольтеррова типа. Функция Ψ^δ, формирующая критерии (3.12) и (3.17), которым удовлетворяет решение $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda, \mu]$ задачи (3.10), задается формулой

$$\Psi^\delta[\bar u, \lambda, \mu](t) \equiv \gamma^\delta(t) \psi^\delta[\bar u, \lambda, \mu](t) + \sum_{i=1}^{k} \mu_i G_{iw}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u), \eta(\bar u)) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathbf{b}_j^\delta(t), \quad t \in \Pi,$$

где $\psi^\delta[\bar u, \lambda, \mu]$ — решение уравнения (4.27). Единственное в L_2 решение этого уравнения принадлежит классу W. Уравнение (4.27) эквивалентно краевой задаче

$$\begin{gathered} \partial\psi/\partial t^1 + t^3 \cdot \partial\psi/\partial t^2 = -\alpha^\delta(t)\psi(t) - \int\limits_{-1}^{1} Y^\delta(t^3; t^1, t^2, \zeta)\, \beta^\delta(t^1, t^2, \zeta)\, \psi(t^1, t^2, \zeta)\, d\zeta \\ + G_0^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u)) + \textstyle\sum_{i=1}^{k} \mu_i G_{iy}^{\delta/}(\eta_\delta(\bar u), \eta(\bar u)) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mathbf{a}_j^\delta(t), \quad t \in \Pi; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \psi(1, t^2, t^3) = 0, \quad 0 \le t^2 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 1; \\ \psi(t^1, 1, t^3) = 0, \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad 0 \le t^3 \le 1; \\ \psi(t^1, 0, t^3) = 0, \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 0, \end{gathered}$$

основное уравнение которой получается из (4.27) дифференцированием вдоль характеристик, а краевые условия — соответствующими подстановками независимых переменных.

References

[1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.:V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal control*, Plenum Press, New York, 1987.

[2] Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений”, *Успехи матем. наук*, **68**:3(411) (2013), 5–38; англ. пер.:E. R. Avakov, G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, “Lagrange's principle in extremum problems with constraints”, *Russian Math. Surveys*, **68**:3 (2013), 401–433.

[3] А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения*, Факториал Пресс, М., 2006. [A. V. Arutyunov, G. G. Magaril-Il‘yaev, V. M. Tikhomirov, *Pontryagin's Maximum Principle. Proof and Applications*, Faktorial Press Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].

[4] Р. В. Гамкрелидзе, “История открытия принципа максимума Понтрягина”, *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения*, Сборник статей. К 110-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **304**, МИАН, М., 2019, 7–14; англ. пер.:R. V. Gamkrelidze, “History of the Discovery of the Pontryagin Maximum Principle”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **304** (2019), 1–7.

[5] *Некорректные задачи естествознания*, ред. А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, Изд-во МГУ, М., 1987; англ. пер.: *Ill posed Problems in the Natural Science*, Advances in science and technology in the USSR . Mathematics and mechanics series, eds. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, Mir Publ., Moscow, 1989.

[6] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: В 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Optimization Methods: In 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].

[7] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **25**, 2019, 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 279–296 (In Russian)].

[8] М. И. Сумин, “Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 151–171. [M. I. Sumin, “Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis of stable solving optimal control and inverse problems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 151–171 (In Russian)].

[9] М. И. Сумин, “О некорректных задачах, экстремалях функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 58–79. [M. I. Sumin, “On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 58–79 (In Russian)].

[10] В. И. Сумин, М. И. Сумин, “Регуляризованные классические условия оптимальности в итерационной форме для выпуклых задач оптимизации распределенных систем вольтеррова типа”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **31**:2 (2021), 265–284. [V. I. Sumin, M. I. Sumin, “Regularized classical optimality conditions in iterative form for convex optimization problems for distributed Volterra-type systems”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp‘yuternye nauki*, **31**:2 (2021), 265—284 (In Russian)].

[11] В. И. Сумин, М. И. Сумин, “Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления линейными распределенными системами вольтеррова типа”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **62**:1 (2022), 45–70; англ. пер.:V. I. Sumin, M. I. Sumin, “Regularization of the classical optimality conditions in optimal control problems for linear distributed systems of Volterra type”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **62**:1 (2022), 42–65.

[12] В. И. Сумин, *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 1992. [V. I. Sumin, *Functional Volterra Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems*, Izd-vo Nizhegorodskogo Gosuniversiteta, Nizhnii Novgorod, 1992 (In Russian)].

[13] В. И. Сумин, А. В. Чернов, “Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность”, *Дифференц. ур-ния*, **34**:10 (1998), 1402–1411; англ. пер.:V. I. Sumin, A. V. Chernov, “Operators in the spaces of measurable functions: the Volterra property and quasinilpotency”, *Differ. Equ.*, **34**:10 (1998), 1403–1411.

[14] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*, Наука, М., 1967; англ. пер.:I. Ts. Gokhberg, M. G. Krein, *Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space*, American Mathematical Society, Providence, 1970.

[15] В. И. Сумин, “Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами”, *Докл. АН СССР*, **305**:5 (1989), 1056–1059; англ. пер.:V. I. Sumin, “Volterra functional-operator equations in the theory of the optimal control of distributed systems”, *Sov. Math., Dokl.*, **39**:2 (1989), 374–378.

[16] В. И. Сумин, “Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 262–278. [V. I. Sumin, “Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25**:1 (2019), 262–278 (In Russian)].

[17] М. И. Сумин, “Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.:M. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.

[18] М. И. Сумин, “Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:1 (2014), 25–49; англ. пер.:M. I. Sumin, “Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:1 (2014), 22–44.

[19] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. ориг.:J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.

[20] М. И. Сумин, *Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 2009. [M. I. Sumin, *Incorrect Problems and Methods for Solving Them. Materials for Lectures for Students Senior Students*, Publishing House of Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, 2009 (In Russian)].

[21] М. И. Сумин, “Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007), 602–625; англ. пер.:M. I. Sumin, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.

[22] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **26**:2 (2020), 252–269. [M. I. Sumin, “On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **26**:2 (2020), 252–269 (In Russian)].

[23] А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский, *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989. [A. B. Bakushinsky, A. V. Goncharsky, *Incorrect Tasks. Numerical Methods and Applications*, Moscow University Publishing House, Moscow, 1989 (In Russian)].

[24] А. В. Дмитрук, *Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс: Учебное пособие*, Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс, М., 2012. [A. V. Dmitruk, *Convex Analysis. Elementary Introductory Course: Textbook*, Publishing department of the Faculty of Computer Science and Technology of Moscow State University; MAX Press, Moscow, 2012 (In Russian)].

[25] K. Jorgens, “An asymptotic expansion in the theory of neutron transport”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11**:2 (1958), 219–242.

[26] С. Ф. Морозов, “Нестационарное интегродифференциальное уравнение переноса”, *Изв. вузов. Матем.*, 1969, № 1, 26–31. [S. F. Morozov, “Non-stationary integro-differential transport equation”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1969, № 1, 26–31 (In Russian)].

[27] Ю. А. Кузнецов, С. Ф. Морозов, “Корректность постановки смешанной задачи для нестационарного уравнения переноса”, *Дифференц. ур-ния*, **8**:9 (1972), 1639–1648. [Yu. A. Kuznetsov, S. F. Morozov, “Correctness of the mixed problem statement for the nonstationary transport equation”, *Differ. Uravn.*, **8**:9 (1972), 1639–1648 (In Russian)].

Информация об авторах

Сумин Владимир Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: v_sumin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7479-2181

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3700-6428

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Сумин Михаил Иосифович
E-mail: m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 30.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 06.09.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the authors

Vladimir I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: v_sumin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7479-2181

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3700-6428

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Mikhail I. Sumin
E-mail: m.sumin@mail.ru

Received 30.06.2023
Reviewed 06.09.2023
Accepted for press 12.09.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика
Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-326-334
УДК 517.93

Оценки фазовых траекторий управляемых систем с многозначными импульсными воздействиями

Ольга Викторовна ФИЛИППОВА
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Рассматривается управляемая система для дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \xi), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = \mathrm{x},$$

где параметр ξ является элементом некоторого заданного метрического пространства, управление u удовлетворяет ограничению

$$u(t) \in U(t, x(t), \xi), \quad t \in [a, b].$$

Предполагается, что в каждый из заданных моментов времени $t_k \in (a, b)$ решение $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (фазовая траектория) терпит разрыв, величина которого принадлежит непустому компакту $I_k(x(t_k)) \subset \mathbb{R}^n$, а на промежутках $(t_{k-1}, t_k]$ является абсолютно непрерывной функцией. Функция управления предполагается измеримой. Доказана теорема об оценке расстояния от заданной кусочно абсолютно непрерывной функции $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ до множества фазовых траекторий при всех начальных значениях из окрестности вектора x_0 и всех параметрах из окрестности точки ξ_0. Предполагается, что при заданных начальном значении $\mathrm{x} = x_0$ решения и значении $\xi = \xi_0$ параметра множество фазовых траекторий априорно ограничено. Доказанная теорема позволяет путем подбора функции y получить приближенное решение управляемой системы, а также оценку погрешности такого приближенного решения.

Ключевые слова: дифференциальное включение, задача Коши, многозначные импульсные воздействия, фазовая траектория

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, https://rscf.ru/project/22-11-00042/) в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.

Для цитирования: *Филиппова О.В.* Оценки фазовых траекторий управляемых систем с многозначными импульсными воздействиями // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 326–334. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-326-334

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-326-334

Estimates of the phase trajectories of controlled systems with multi-valued impulses

Olga V. FILIPPOVA

[1] Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. We consider a controlled system for the differential equation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \xi), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = \mathrm{x},$$

where the parameter ξ is an element of some given metric space, the control u satisfies the constraint

$$u(t) \in U(t, x(t), \xi), \quad t \in [a, b].$$

It is assumed that at each given moment of time $t_k \in (a, b)$ a solution $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (a phase trajectory) suffers discontinuity, the magnitude of which belongs to a non-empty compact set $I_k(x(t_k)) \subset \mathbb{R}^n$, and is an absolutely continuous function on intervals $(t_{k-1}, t_k]$. The control function is assumed to be measurable. A theorem on estimating the distance from a given piecewise absolutely continuous function $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ to the set of phase trajectories for all initial values from a neighborhood of a vector x_0 and for all parameters from a neighborhood of a point ξ_0 is proven. It is assumed that for the given initial value $\mathrm{x} = x_0$ of the solution and for the value $\xi = \xi_0$ of the parameter, the set of phase trajectories is a priori limited. The proven theorem allows, by selecting the function y, to obtain an approximate solution of the controlled system, as well as an estimate of the error of such solution.

Keywords: differential inclusion, Cauchy problem, multi-valued impulses, phase trajectory

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00042 https://rscf.ru/en/project/22-11-00042/) at the V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS.

Mathematics Subject Classification: 34K09.

For citation: Filippova O.V. Estimates of the phase trajectories of controlled systems with multi-valued impulses. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 326–334. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-326-334 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Для описания динамики различных процессов широко используются дифференциальные уравнения и их многочисленные обобщения. Если имеется возможность влиять на состояние процесса, меняя значения некоторых его параметров, то соответствующая модель принимает вид дифференциального уравнения с управлением. Для нахождения всех возможных траекторий такой управляемой системы в нее удобно вместо управления «подставить» все множество допустимых управлений и тем самым свести эту систему к дифференциальному включению. Эквивалентность полученного таким образом дифференциального включения и исходной управляемой дифференциальной системы устанавливает известная лемма Филиппова. Этот результат и другие классические результаты теории многозначных отображений и дифференциальных включений, основы которых были заложены в 60-х годах 20 века в работах А. Ф. Филиппова (см. [1]) и Т. Важевского (см. [2,3]) и др. авторов, в настоящее время имеют многочисленные актуальные теоретические и практические приложения. Распространению классических результатов посвящены многочисленные работы. Большой интерес современных авторов к проблемам управления вызван, в том числе, необходимостью их решения для развития новых технологий в энергетике, военной промышленности, авиации, космонавтике и др. (см. [4, с. 5–6]).

В представленной работе исследуется дифференциальная управляемая система, которая может подвергаться мгновенным скачкообразным (т. е. импульсным) воздействиям. Значения таких импульсных воздействий могут варьироваться в некоторой замкнутой области, которая определяется состоянием текущего процесса. Система также содержит параметр — элемент некоторого метрического пространства. Предполагается наличие ограничений на управление: значение управления в каждый момент времени выбирается из компактного множества допустимых управлений, зависящего от времени, состояния объекта в этот момент времени и значения параметра. Рассматриваемая управляемая система описывает задачи управления движением, в частности, для космических аппаратов (импульсные воздействия моделируют кратковременное включение двигателей для корректировки траектории). Исследуемое дифференциальное уравнение «стандарно» сводится к дифференциальному включению, подверженному импульсным воздействиям, и содержащему параметр. На основе результатов о таком включении получены оценки траекторий исходной управляемой системы.

Данное исследование продолжает работы [5–7] и опирается на результаты этих работ. Систематически используются методы многозначного анализа, теории управляемых систем и дифференциальных включений (см. [8, с. 115–141]). Близкие подходы с применением априорных неравенств для нахождения оценок решений использовались в [9] при изучении функционально-дифференциальных включений с импульсными воздействиями.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$, для $U,V \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ обозначим $|U| = \sup\{|u| : u \in U\}$, $h[U;V]$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U и V в пространстве $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$. Для заданного измеримого по Лебегу множества $\mathcal{U} \subset [a,b]$, с мерой $\mu(\mathcal{U}) > 0$, обозначим $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ — банахово пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$. Обозначим через $\mathbf{C}^1[a,b]$ и $\mathbf{L}^1[a,b]$ пространства скалярных, вещественных, определенных на $[a,b]$ непрерывных и, соответственно, суммируемых функций, а через $\mathbf{C}^1_+[a,b]$ и $\mathbf{L}^1_+[a,b]$ конусы неотрицательных функций в этих пространствах. Рассмотрим метрическое пространство Ξ и обозначим через $B_\Xi(\xi,\delta)$ открытый шар в этом пространстве с центром в точке $\xi\in\Xi$ радиуса $\delta>0$.

Пусть задан конечный набор точек $t_k\in[a,b]$, $k=1,2,\ldots,p$, $a<t_1<\ldots<t_p<b$. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ линейное пространство всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_p,b]$ ограниченных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,p$. Для любого $\tau\in(a,b]$ определим линейное пространство $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$ сужений на $[a,\tau]$ функций из $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. Зададим норму в этом пространстве формулой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]}=\sup\{|x(t)|:\,t\in[a,\tau]\}$. Полученное таким образом пространство является банаховым. В пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,\tau]$ скалярных функций определим конус $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,\tau]$ неотрицательных функций.

Определения используемых далее понятий многозначного анализа и сведения о многозначных отображениях см. [8, с. 15–76], [10, с. 65], [11, с. 117–127]).

Пусть заданы вектор $\mathrm{x}\in\mathbb{R}^n$, функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi\to\mathbb{R}^n$ и многозначные отображения $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$, $I_k:\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k=1,2,\ldots,p$ удовлетворяющие следующим условиям:

(f1) при каждом $(x,u,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi$ функция $f(\cdot,x,u,\xi):[a,b]\to\mathbb{R}^n$ измерима по Лебегу;

(f2) при почти всех $t\in[a,b]$ функция $f(t,\cdot):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi\to\mathbb{R}^n$ непрерывна;

(f3) для каждого ограниченного множества $W\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi$ существует функция $m_W\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$ такая, что при почти всех $t\in[a,b]$ и любых $(x,u,\xi)\in W$ выполняется неравенство $|f(t,x,u,\xi)|\leqslant m_W(t)$;

(U1) при каждом $(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$ отображение $U(\cdot,x,\xi)$ измеримо;

(U2) при почти всех $t\in[a,b]$ отображение $U(t,\cdot,\cdot)$ непрерывно по Хаусдорфу;

(U3) для каждого ограниченного множества $V\subset\mathbb{R}^n\times\Xi$ существует $\overline{m}_V\geq 0$ такое, что что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $(x,\xi)\in V$ выполнено $|U(t,x,\xi)|\leqslant\overline{m}_V$;

(I1) при любом $k=1,2,...,p$ отображение I_k локально ограничено (т. е. образ каждого ограниченного множества ограничен) и непрерывно по Хаусдорфу.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с параметром $\xi\in\Xi$, управлением u, испытывающего импульсные воздействия в заданные моменты времени $a<t_1<\ldots<t_p<b$:

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t),\xi),\tag{1.1}$$

$$u(t)\in U(t,x(t),\xi),\tag{1.2}$$

$$x(t_k+0)-x(t_k)\in I_k(x(t_k),\xi),\ k=1,2,\ldots,p,\tag{1.3}$$

$$x(a)=\mathrm{x}.\tag{1.4}$$

Определение 1.1. [5, Определение 1.1] Под допустимым управлением на отрезке $[a,\tau]$ ($\tau\in(a,b]$) системы (1.1)–(1.4) будем понимать такую измеримую по Лебегу функцию $u:[a,\tau]\to\mathbb{R}^m$, для которой при почти всех $t\in[a,\tau]$ выполняется включение (1.2) и существует функция $x\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]$, удовлетворяющая при всех $t\in[a,\tau]$ соотношению

$$x(t)=\mathrm{x}+\int\limits_a^t f(s,x(s),u(s),\xi)ds+\sum_{k\in[a,\tau]}\Delta_k(x)\chi_{(t_k,b]}(t),$$

где $\Delta_k(x) = (x(t_k+0) - x(t_k))$ при любом $k = 1, 2, \ldots, p$ удовлетворяет включению (1.3), $\chi_{(t_k,b]}$ — характеристическая функция интервала $(t_k, b]$. В этом случае пару (u, x) будем называть допустимой на отрезке $[a, \tau]$, а функцию $x \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, \tau]$ — фазовой траекторией.

Систему (1.1)–(1.4) будем называть управляемой системой с многозначными импульсными воздействиями и фазовыми ограничениями по управлению, поскольку отображения I_k являются многозначными, а множество U зависит от состояния управляемого объекта.

Определим многозначное отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ равенством

$$F(t, x, \xi) = f(t, x, U(t, x, \xi), \xi). \tag{1.5}$$

В силу теоремы об измеримом выборе (см. [11, с. 132]), управляемая система (1.1)–(1.4) эквивалентна задаче Коши с начальным условием (1.4) для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), \xi), \tag{1.6}$$

испытывающего импульсные воздействия (1.3). Это означает, что при любом $\tau \in (a, b]$, во-первых, для любой допустимой на $[a, \tau]$ пары (x, u) системы (1.1)–(1.4) ее первая компонента — функция x является решением на $[a, \tau]$ задачи Коши (1.6), (1.3), (1.4), и во-вторых, для любого x — решения на $[a, \tau]$ задачи Коши (1.6), (1.3), (1.4) существует такая измеримая на $[a, \tau]$ функция u, что пара (x, u) является решением на $[a, \tau]$ системы (1.1)–(1.4).

Обозначим через $H(\tau, \mathrm{x}, \xi)$ множество всех фазовых траекторий системы (1.1)–(1.4) на отрезке $[a, \tau]$, а через $\widetilde{H}(\mathrm{x}, \xi)$ множество всех *непродолжаемых* фазовых траекторий этот системы (см. [9, Определение 2.3]).

Определение 1.2. [12, Определение 1.2] Множество $\widetilde{H}(\mathrm{x}, \xi)$ будем называть *априорно ограниченным в точке* $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, если найдется такое число $\mathbf{r} > 0$, что для всякого $\tau \in (a, b]$ не существует $x \in H(\tau, x_0, \xi_0)$, для которого бы выполнялось неравенство $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,\tau]} > \mathbf{r}$.

Определение 1.3. [12, Определение 1.3] Пусть заданы непустые множества $S \subset \mathbb{R}^n$ и $K \subset \Xi$. Множество $\widetilde{H}(\mathrm{x}, \xi)$ будем называть *априорно ограниченным в совокупности на множестве* $S \times K$, если оно априорно ограничено в каждой точке множества $S \times K$, а константа $\mathbf{r} > 0$ в определении 1.2 является общей для всех точек из $S \times K$.

Для рассматриваемой здесь системы (1.1)–(1.4) в работе [5] рассмотрены вопросы существования и продолжаемости допустимых пар, доказано, что если для этой управляемой системы множество $\widetilde{H}(\mathrm{x}, \xi)$ в какой-то точке $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ априорно ограничено, то оно будет априорно ограниченным и в некоторой окрестности данной точки.

2. Основные результаты

Определим класс $\mathcal{L}_1$ всевозможных отображений $l_1 : [a, b] \times [0, \infty) \times [0, \infty) \times \Xi \to [0, \infty)$, удовлетворяющих условиям:

1) при каждых $v_1, v_2 \in [0, \infty)$ и $\xi \in \Xi$ выполнено $l_1(\cdot, v_1, v_2, \xi) \in \mathbf{L}^1_+[a, b]$;

2) при почти всех $t \in [a, b]$ и любом $\xi \in \Xi$ функция $l_1(t, \cdot, \cdot, \xi)$ не убывает по каждому аргументу и непрерывна по их совокупности.

Далее, определим класс $\mathcal{L}_2$ всевозможных отображений $l_2 : [a,b]\times[0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$, обладающих аналогичными свойствами, а именно:

1) при любых $v\in[0,\infty)$ и $\xi\in\Xi$ выполнено $l_1(\cdot,v_2,\xi)\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$;

2) при почти всех $t\in[a,b]$ и любом $\xi\in\Xi$ функция $l_1(t,\cdot,\xi)$ не убывает и непрерывна. И определим еще класс $\mathcal{I}$ отображений $\widetilde{I} : [0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$, таких, что при любом $\xi\in\Xi$ функция $\widetilde{I}(\cdot,\xi)$ непрерывна, не убывает и $\widetilde{I}(0,\xi)=0$.

Определение 2.1. Будем говорить, что набор рассмотренных выше отображений $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi\to\mathbb{R}^n$, $U:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$, $I_k:\mathbb{R}^n\times\Xi\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, $k=1,2,...,p$, *обладает свойством* $\mathcal{J}$ в точке $(\mathrm{x},\xi)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$, если

1) найдутся такие отображения $l_1\in\mathcal{L}_1$, $l_2\in\mathcal{L}_2$ и $\widetilde{I}_k\in\mathcal{I}$, $k=1,2,...,p$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и любых $x,y\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ выполняются неравенства

$$|f(t,x,u,\xi)|\leqslant l_1(t,|x|,|u|,\xi),\quad |U(t,x,\xi)|\leqslant l_2(t,|x|,\xi),$$
$$h[I_k(x,\xi);I_k(y,\xi)]\le\widetilde{I}_k(|x-y|,\xi),\quad k=1,2,\dots,p;$$

2) для отображения $l:[a,b]\times[0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$, определенного равенством

$$l(t,z,\xi)=l_1(t,z,l_2(t,z,\xi),\xi), \tag{2.1}$$

при любых $z\in[0,\infty)$ и $\xi\in\Xi$ выполнено $l(\cdot,z,\xi)\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$;

3) множество всех локальных решений задачи Коши

$$\begin{gathered}\dot y(t)=l(t,y(t),\xi),\\ \Delta(y(t_k))=\widetilde{I}_k(y(t_k),\xi),\quad k=1,2,\dots,p,\\ y(a)=|\mathrm{x}|,\end{gathered} \tag{2.2}$$

априорно ограничено.

Покажем, что в силу принятых предположений (f1)–(f3), (U1)–(U3) и (I1) для отображений f,U,I_k, $k=1,2,...,p$, в произвольной точке $(\mathrm{x},\xi)\in\mathbb{R}^n\times\Xi$ выполняются условия 1) и 2) свойства $\mathcal{J}$. Вначале построим требуемые отображения $l_1\in\mathcal{L}_1$ и $l_2\in\mathcal{L}_2$.

Из (f1), (f2) следует, что для отображения $f:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\Xi\to\mathbb{R}^n$ найдется такая измеримая по первому аргументу, неубывающая и непрерывная по второму и третьему аргументам функция $\widetilde{l_1}:[a,b]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times\Xi\to[0,\infty)$, что при почти всех $t\in[a,b]$ и всех $\xi\in\Xi$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$, $u_1,u_2\in\mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$|f(t,x_1,u_1,\xi)-f(t,x_2,u_2,\xi)|\leqslant\widetilde{l_1}(t,|x_1-x_2|,|u_1-u_2|,\xi). \tag{2.3}$$

А из (f3) следует, что существует функция $m\in\mathbf{L}^1_+[a,b]$ такая, что при почти всех $t\in[a,b]$ выполнено

$$|f(t,0,0,\xi)|\leqslant m(t). \tag{2.4}$$

Согласно неравенствам (2.3), (2.4), для почти всех $t\in[a,b]$, любых $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$ имеем

$$|f(t,x,u,\xi)|\leqslant|f(t,x,u,\xi)-f(t,0,0,\xi)|+|f(t,0,0,\xi)|\leqslant\widetilde{l_1}(t,|x|,|u|,\xi)+m(t).$$

Итак, положим

$$l_1(t,|x|,|u|,\xi)=\widetilde{l_1}(t,|x|,|u|,\xi)+m(t), \tag{2.5}$$

и заметим, что для определенного таким образом отображения выполнено: $l_1\in\mathcal{L}_1$ (по построению).

Аналогично, в силу (U1)–(U2) для отображения $U : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^m]$ существует такая измеримая по первому аргументу, неубывающая и непрерывная по второму аргументу функция $\widetilde{l}_2 : [a,b] \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $\xi \in \Xi$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, выполнено

$$h[U(t,x_1,\xi), U(t,x_2,\xi)] \leqslant \widetilde{l}_2(t,|x_1 - x_2|,\xi). \tag{2.6}$$

А в силу (f3) существует функция $\overline{m} \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ такая, что при почти всех $t \in [a,b]$ выполнено

$$|U(t,0,\xi)| \leqslant \overline{m}. \tag{2.7}$$

Определим отображение $l_2 : [a,b] \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$ равенством

$$l_2(t,x,\xi) = \widetilde{l}_2(t,x,\xi) + \overline{m}, \tag{2.8}$$

и заметим, что $l_2 \in \mathcal{L}_2$. Тогда согласно неравенствам (2.6), (2.7) для отображения U при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^n$ будет выполнено соотношение

$$|U(t,x,\xi)| \leqslant l_2(t,|x|,\xi).$$

В силу предположения (I1) для каждого $k = 1,2,\ldots,p$ найдется функция $\widetilde{I}_k : [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$, непрерывная, неубывающая по первому аргументу, удовлетворяющая равенству $\widetilde{I}(0,\xi) = 0$, т. е. $\widetilde{I}_k \in \mathcal{I}$, и для этой функции выполнено неравенство

$$h[I_k(x,\xi); I_k(y,\xi)] \leq \widetilde{I}_k(|x-y|,\xi).$$

Таким образом, для набора отображений f, U, I_k, $k = 1,2,\ldots,p$, выполнено условие 1) в определении 2.1 свойства $\mathcal{J}$ в точке $(\mathrm{x},\xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$.

Определим отображение $l : [a,b] \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$, формулой (2.1), где l_1 задано соотношением (2.5), а l_2 — соотношением (2.8). При любых фиксированных $z \in [0,\infty)$ и $\xi \in \Xi$ отображение $l(\cdot,z,\xi) : [a,b] \to [0,\infty)$ является суммируемой функцией. Условие 2) в определении 2.1 также выполнено.

Отметим, что включение $l(\cdot,z,\xi) \in \mathbf{L}^1_+[a,b]$ не гарантирует того, что множество всех локальных решений задачи (2.2) априорно ограниченно. Например, для начального значения $\mathrm{x} = 0$, отображений $l, \widetilde{I}$, определяемых при всех $t \in [0,2]$, $z \in \mathbb{R}$, $\xi \in \Xi$ соотношениями $l(t,z,\xi) \doteq z^2 + 1$ и $\widetilde{I}(z,\xi) \doteq 0$, решением задачи (2.2) является функция $z(t) = \operatorname{tg} t$, имеющая вертикальную асимптоту $x = \pi/2$. Это решение не продолжаемо на весь отрезок $[0,2]$. Следовательно, множество локальных решений не является априорно ограниченным.

Итак, доказано, что набор отображений f, U, I_k, $k = 1,2,\ldots,p$, удовлетворяет требованиям 1) и 2) свойства $\mathcal{J}$ в любой точке $(\mathrm{x},\xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$, но для выполнения требования 3) необходимы дополнительные ограничения. Свойство $\mathcal{J}$ существенно используется в следующей теореме, составляющей основной результат данного исследования.

Рассмотрим произвольную функцию $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. По определению пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ для этой функции существует такое $\widetilde{q}_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что имеет место равенство

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t \widetilde{q}_0(s)ds + \sum_{k=1}^{p} \Delta_k(y)\chi_{(t_k,b]}(t), \quad t \in [a,b], \tag{2.9}$$

где $\Delta_k(y) = (y(t_k+0) - y(t_k)) \in I_k(y(t_k),\xi_0)$ $k = 1,2,\ldots,p$, $\chi_{(t_k,b]}$ — характеристическая функция интервала $(t_k,b]$.

Теорема 2.1. *Пусть для произвольного* $\xi \in \Xi$, *для определенной формулой* (2.9) *функции* $y \in \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$ *и для всех измеримых управлений* $u(\cdot) \in U(\cdot, y(\cdot), \xi)$ *существует такая функция* $\varkappa : [a,b] \times \Xi \to [0,\infty)$, *что* $\varkappa(\cdot,\xi) \in \boldsymbol{L}^1_+[a,b]$ *при* $\xi \in \Xi$, *и для каждого измеримого множества* $\mathcal{U} \subset [a,b]$ *справедливо*

$$\|\widetilde{q}_0 - f(\cdot, y(\cdot), u(\cdot), \xi)\|_{\boldsymbol{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \varkappa(s,\xi)ds.$$

Пусть, кроме того, набор отображений f, U, I_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, *обладает свойством* $\mathcal{J}$ *в точке* (x_0, ξ_0) *при некоторых* $\xi_0 \in \Xi$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой пары* $(x,u) \in H(\mathrm{x},\xi)$ *при* $\xi \in B_\Xi(\xi_0,\delta)$ *и* $\mathrm{x} \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0,\delta)$, *если* $y(a) \in B_{\mathbb{R}^n}(x_0,\delta)$, *то фазовая траектория* x *удовлетворяет оценкам*

$$|x(t) - y(t)| \leqslant \eta(t), \quad t \in [a,b],$$

$$|f(t, x(t), u(t), \xi) - \widetilde{q}_0(t)| \leqslant \varkappa(t,\xi) + l(t, \eta(t), \xi) + \varepsilon, \quad t \in [a,b],$$

где $l : [a,b] \times [0,\infty) \times \Xi \to [0,\infty)$ *определено в свойстве* $\mathcal{J}$ *соотношением* (2.1), $\eta \in \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b]$ *— верхнее решение мажорантной задачи*

$$\begin{gathered} \dot{z}(t) = \varkappa(t,\xi) + \varepsilon + l(t, z(t), \xi), \\ z(t_k + 0) - z(t_k) = \widetilde{I}_k(z(t_k)), \ k = 1, 2, \ldots, p, \\ z(a) = \delta. \end{gathered}$$

Доказательство этого утверждения использует редукцию управляемой импульсной системы (1.1)–(1.4) к соответствующей задаче Коши для дифференциального включения (1.6), (1.3), (1.4). Затем применяются результаты работ [9] и [12], в которых получены оценки отклонения значений многозначного отображения $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенного равенством (1.5), от наперед заданной суммируемой функции (см. [9, теорема 1.2]). Этот подход позволяет получить в явном виде оценки отклонения множества фазовых траекторий управляемой системы (1.1)–(1.4) от кусочно абсолютно непрерывной функции y.

З а м е ч а н и е 2.1. Теорема 2.1 дает несколько больше, чем оценки фазовых траекторий задачи (1.1)–(1.4). Эта теорема позволяет также определить приближенную фазовую траекторию путем подбора функции $y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. При этом функция $\eta(\cdot)$ дает оценку погрешности такой приближенной фазовой траектории.

В заключение отметим, что полученные в данной статье оценки фазовых траекторий импульсных дифференциальных систем управления аналогичны оценкам, полученным в работах [6], [7], [12].

References

[1] А. Ф. Филиппов, "О некоторых вопросах теории оптимального регулирования", *Вестник Московского университета. Серия: Математика, механика.*, 1959, №2, 25–32. [A. F. Filippov, "On some questions of the theory of optimal controll", *Moscow Universities Reports*, 1959, №2, 25–32 (In Russian)].

[2] T. Wazewski, "Systemes de commande et equations au contingent", *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astr., Phys.*, **9**:3 (1961), 151–155.

[3] T. Wazewski, “Sur une generalisation de la notion des solution d'une equations au contingent”, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., Astr., Phys.*, **10**:1 (1962), 11–15.

[4] С. В. Емельянов, А. В. Ильин, С. К. Коровин, В. В. Фомичев, А. С. Фурсов, *Математические методы теории управления. Проблемы устойчивости, управляемости и наблюдаемости*, 1-е изд., Физматлит, М., 2014. [S. V. Emelyanov, A. V. Ilyin, S. K. Korovin, V. V. Fomichev, A. S. Fursov, *Mathematical Methods of Control Theory. Problems of Stability, Controllability and Observability*, 1st. ed., FIZMATLIT Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].

[5] О. В. Филиппова, “Управляемые дифференциальные уравнения с параметром и с многозначными импульсными воздействиями”, *Вестник российских университетов. Математика.*, **25**:132 (2020), 441–447. [O. V. Filippova, “Differential equations with a parameter, with multivalued impulses and with control”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 441–447 (In Russian)].

[6] П. И. Чугунов, “Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы”, *Прикл. математика и пакеты прикл. программ. Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР*, 1980, 155-179. [P. I. Chugunov, “Properties of solutions for differential switching and controlled systems”, *Applied Mathematics and Application Packages*, 1980, 155–179 (In Russian)].

[7] В. И. Благодатских, А. Ф. Филиппов, “Дифференциальные включения и оптимальное управление”, *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы*, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР, **169**, 1985, 194–252; англ. пер.:V. I. Blagodatskikh, A. F. Filippov, “Differential inclusions and optimal control”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **169** (1986), 199–259.

[8] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2016. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, 2nd ed., Book House “LIBROKOM”, Moscow, 2016].

[9] А. И. Булгаков, О. В. Филиппова, “Импульсные функционально-дифференциальные включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений”, *Изв. ИМИ УдГУ*, 2014, № 1(43), 3–48. [A. I. Bulgakov, O. V. Filippova, “The functional differential inclusions with impulses and with the right-hand side not necessarily convex-valued with respect to switching”, *Izv. IMI UdGU*, 2014, № 1(43), 3–48 (In Russian)].

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 2007; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, **I, II**, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[11] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, 1-е изд., ФИЗМАТЛИТ, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lectures on Convex and Multivalued Analysis*, FIZMATLIT Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].

[12] А. И. Булгаков, Е. В. Корчагина, О. В. Филиппова, “Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:6 (2009), 1275–1313. [A. I. Bulgakov, E. V. Korchagina, O. V. Filippova, “Functional-differential inclusions with impulses. Part I–VI”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:6 (2009), 1275–1313 (In Russian)].

Информация об авторе

Филиппова Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: philippova.olga@rambler.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

Поступила в редакцию 14.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 04.09.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Olga V. Filippova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: philippova.olga@rambler.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

Received 14.06.2023
Reviewed 04.09.2023
Accepted for press 12.09.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 143 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-335-356
УДК 519.6

О топологических свойствах множества притяжения в пространстве ультрафильтров

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Аннотация. Рассматривается представление множества притяжения (МП) в классе направленностей в пространстве ультрафильтров на широко понимаемом измеримом пространстве (ИП) с топологиями стоуновского и волмэновского типов. Получено представление внутренности и некоторые его следствия. При этом возможности выбора обычных решений определяются посредством задания ограничений асимптотического характера (ОАХ). Упомянутые ОАХ могут быть связаны с ослаблением стандартных ограничений (в задачах управления — краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения, в задачах математического программирования — ограничения типа неравенств), но могут возникать и изначально в виде непустых направленных (как правило) семейств множеств. В работе трактуются как ОАХ и некоторые семейства множеств, связанные с построением ультрафильтров (максимальных фильтров) ИП, мажорирующих заданный априори фильтр. Показано, что в этом случае при условии, что пересечение всех множеств данного фильтра пусто, получающийся вариант МП является замкнутым, но не канонически замкнутым множеством, в каждой из топологий волмэновского и стоуновского типов. Это связывается с тем фактом, установленным в работе, что в упомянутом случае исходного фильтра со свойством пустого пересечения всех своих множеств у порождаемого данным фильтром МП внутренность пуста (в то же время известны примеры задач управления, где реализуется противоположное свойство: при пустом пересечении множеств семейства, определяющего ОАХ, внутренность возникающего МП непуста).

Ключевые слова: внутренность, множество притяжения, ультрафильтр

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* О топологических свойствах множества притяжения в пространстве ультрафильтров // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 143. С. 335–356. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-335-356

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-335-356

About topological properties of attraction set in ultrafilter space

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Abstract. The representation of attraction set (AS) in the class of nets in the ultrafilter space on the broadly understood measurable space (MS) with topologies of Stone and Wallman types is considered. Representation of the interior of AS and some of its implications are obtained. Possibilities of the choice of usual solutions are defined by specifying constraints of asymptotic nature (CAN). The mentioned CAN can be connected with weakening of standard constraints (in control problems, boundary and intermediate conditions, phase restrictions; in problems of mathematical programming, constraints of inequality type), but they may appear initially in the form of nonempty directed (usually) families of sets. In article, some set families connected with construction of ultrafilters (maximal filters) of MS majorizing a given a priory filter are treated as CAN. Shown, that in this case, under condition of the void intersection of all sets of the given filter, the resulting CAN variant is closed, but not canonically closed set for each of topologies Wallman and Stone types. This is connected with the fact established in the article that, for initial filter with property of the empty intersection of all its sets, the interior of generated by this filter AS is empty (at the same time, there are examples of control problems with opposite property: under empty intersection of sets for the family defining CAN, the interior of arising AS is not empty).

Keywords: interior, attraction set, ultrafilter

Mathematics Subject Classification: 93C83.

For citation: Chentsov A.G. About topological properties of attraction set in ultrafilter space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 335–356. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-143-335-356 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В связи с построением расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ) естественно возникают множества притяжения (МП), заменяющие обычные множества достижимости в случае стандартных ограничений. Последний случай важен для теории управления, где вопросы построения и исследования областей достижимости (ОД) представляют серьезный теоретический и практический интерес (см. [1–3] и др.). При ослаблении стандартных ограничений на выбор управления (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения) возможно скачкообразное расширение ОД. Предел ОД для ослабленных ограничений при их последовательном ужесточении доставляет множество, которое содержит замыкание исходной ОД, но может с ним не совпадать. Данное множество как раз и имеет смысл МП; по сути дела это практически интересный аналог ОД, характеризующий возможности управляющей стороны при соблюдении исходных стандартных ограничений с высокой, но все же конечной степенью точности. Сама же система ослабленных ограничений может рассматриваться при этом как ОАХ.

Данная конструкция допускает глубокое обобщение, когда ОАХ задаются изначально и могут уже не быть связанными с ослаблением каких-то стандартных ограничений (см. вариант ОАХ такого рода в [4, 5]). В общем случае ОАХ задаются посредством непустого семейства множеств в пространстве обычных (по смыслу, доступных для нашего выбора) решений. Пересечение всех множеств данного семейства можно рассматривать как множество точных решений (здесь — аналогия с [3, гл. III]), то есть решений, соблюдающих все требования, определяемые посредством ОАХ, «одновременно». Такое толкование вполне согласуется с [3, гл. III]. Результаты, доставляемые точными решениями, содержатся в МП; имеются в виду значения некоторого целевого оператора, заданного по условиям задачи (в случае задачи управления, связанной с изучением ОД, речь идет об операторе, сопоставляющем управлению терминальную точку траектории; здесь обычные решения имеет смысл толковать как управления). Представляется интересным вопрос о соотношении внутренности МП и множества результатов, обеспечиваемых точными решениями. Как показывают простые примеры, уже в задаче об исследовании ОД возможна ситуация, когда при отсутствии точных решений соответствующее МП имеет непустую внутренность. В настоящей работе будет, однако, указан случай, когда упомянутое свойство невозможно; данный случай связан с построением МП в пространстве ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства (ИП). В указанном случае, конечно, МП имеет другое смысловое содержание; например, оно может рассматриваться как множество допустимых обобщенных элементов (ОЭ) в абстрактной задаче о достижимости при ОАХ (здесь ОЭ выступают в качестве аналогов обобщенных управлений [3, гл. III]).

Возможна еще одна интерпретация МП в пространстве у/ф, представляющая теоретический интерес. А именно, в теории фильтров представляет интерес вопрос о множестве всех у/ф, мажорирующих заданный априори фильтр. Последний нередко допускает достаточно простое описание, чего нельзя сказать о множестве мажорирующих у/ф. Оказывается, однако, что данное множество есть МП в ситуации, когда ОАХ определяются исходным фильтром. В этом случае отсутствие точных решений гарантирует пустоту внутренности МП при оснащении множества у/ф топологией стоуновского типа; данное МП оказывается при этом замкнутым, но не канонически замкнутым, множеством.

Таким образом, конструкции на основе МП допускают различные интерпретации, касающиеся как приложений, так и самой математической теории. В настоящей работе, продолжающей [6–8], рассматриваются некоторые свойства МП в пространстве у/ф.

1. Основные понятия

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Принимаем аксиому выбора и называем семейством множество, все элементы которого — множества. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов ($\{x;y\}$ — неупорядоченная пара x, y). Множества — объекты и, следуя [9, с. 67], полагаем для объектов a и b, что $(a,b) \triangleq \{\{a\};\{a;b\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом a и вторым элементом b. Для каждой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы УП h, однозначно определяемые условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Каждому объекту x сопоставляем синглетон $\{x\} \triangleq \{x;x\}$, содержащий x (то есть $x \in \{x\}$).

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H, $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H) и $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$ (итак, $\mathrm{Fin}(H)$ есть семейство всех непустых конечных п/м H). В качестве H может, конечно, использоваться семейство. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то

$$(\{\cup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\})\&(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X \in \mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\})$$

(заметим, что $\varnothing \in \{\cup\}(\mathfrak{X})$). Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\, \mathbb{M} \setminus M : \ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

есть семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Для непустого семейства $\mathcal{A}$ и множества B

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{\, A \cap B : \ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

есть след $\mathcal{A}$ на B (обычно рассматривается случай $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$ и $B \in \mathcal{P}(\mathbb{A})$, где $\mathbb{A}$ — множество). Если P и Q — множества, то Q^P есть def множество всех отображений (функций) из P в Q; при $f \in Q^P$ и $C \in \mathcal{P}(P)$ в виде $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ имеем образ C при действии f; $f^1(C) \neq \varnothing$ при $C \neq \varnothing$. Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — непустые множества, $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))$, то семейство

$$f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(A) : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B}))$$

рассматриваем как f-образ семейства $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{H}$ — непустое семейство и S — множество, то

$$([\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}))\&(]\,\mathcal{H}\,[\,(S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid H \subset S\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}));$$

наконец, непустому множеству $\mathbb{X}$ и семейству $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{X} \mid \mathcal{X}] \triangleq \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \mid \mathbb{X} = \bigcup_{X \in \chi} X\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{X}))$$

всех покрытий $\mathbb{X}$ множествами из $\mathcal{X}$.

Специальные семейства, элементы топологии. Фиксируем до конца настоящего раздела непустое множество I. В виде

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(I \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.1}$$

имеем семейство всех π-систем [10, с.14] п/м I с «нулем» и «единицей», а π-системы из семейства

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\, \mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I} \, \forall x \in I \setminus L \, \exists \Lambda \in \mathcal{I}: \ (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\} \tag{1.2}$$

называем отделимыми. Примерами π-систем являются алгебры и полуалгебры множеств (они к тому же отделимы), топологии, семейства замкнутых множеств в топологических пространствах (ТП). Если $\mathcal{I} \in \pi[I]$, то УП $(I, \mathcal{I})$ рассматриваем как (широко понимаемое) измеримое пространство (ИП). Если $\mathcal{L} \in \pi[I]$, то

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$$

есть семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{L}$. В виде

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \{\, \tau \in \pi[I] | \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \, \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} \in \mathcal{P}'(\pi[I])$$

имеем семейство всех топологий на I. При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ в виде (I, τ) реализуется топологическое пространство (ТП); если $H \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathrm{cl}(H, \tau) \in \mathbf{C}_I[\tau]$ есть def замыкание H в (I, τ), а

$$(\tau - \mathrm{Int})[H] \triangleq \bigcup_{G \in \,]\, \tau \,[\,(H)} G \in \tau \tag{1.3}$$

есть внутренность H в (I, τ) (наибольшее открытое множество, содержащееся в H). Нам понадобится понятие канонически замкнутого множества: при $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ в виде

$$(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(I) \mid F = \mathrm{cl}((\tau - \mathrm{Int})[F], \tau)\} = \{\mathrm{cl}(G, \tau) : G \in \tau\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_I[\tau]) \tag{1.4}$$

имеем семейство всех канонически замкнутых в ТП (I, τ) п/м I. В связи со свойствами (1.3) и (1.4) см. [11, гл. 1].

Если $x \in I$, то $N_\tau^\circ(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N_\tau^\circ(x) : G \subset H\}$$

есть фильтр [12, гл. I] окрестностей x в ТП (I, τ). Будем использовать направленности и сходимость по Мору–Смиту (см. [13, гл. 2]). При этом потребуются некоторые новые обозначения. Так, условимся, что $\exists_X S[X \neq \varnothing]$ заменяет фразу «существует непустое множество X». Если M — множество, $\sqsubseteq \in \mathcal{P}(M \times M)$, $x \in M$ и $y \in M$, то, как обычно,

$$(x \sqsubseteq y) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((x, y) \in \sqsubseteq).$$

Далее, сопоставляем множеству M семейство

$$(\mathrm{Ord})[M] \triangleq \{\sqsubseteq \in \mathcal{P}(M \times M) \mid (x \sqsubseteq x \ \ \forall x \in M)$$
$$\&(\forall x_1 \in M \ \ \forall x_2 \in M \ \ \forall x_3 \in M \ \ ((x_1 \sqsubseteq x_2)\&(x_2 \sqsubseteq x_3)) \Rightarrow (x_1 \sqsubseteq x_3))\}$$

всех предпорядков на M, среди которых выделяем направления:

$$(\mathrm{DIR})[M] \triangleq \{\sqsubseteq \in (\mathrm{Ord})[M] \mid \forall x \in M \ \ \forall y \in M \ \ \exists\, z \in M : (x \sqsubseteq z)\&(y \sqsubseteq z)\}$$

есть семейство всех направлений на M; при $\preceq \in (\mathrm{DIR})[M]$ УП $(M, \preceq)$ называем направленным множеством (НМ). Если же A и B — непустые множества, $\preceq \in (\mathrm{DIR})[A]$ и $f \in B^A$, то триплет $(A, \preceq, f)$ называем направленностью в B; в этом случае в виде

$$(B - \mathrm{ass})[A; \preceq; f] \triangleq \{C \in \mathcal{P}(B) \mid \exists\, a \in A \ \ \forall \alpha \in A \ \ (a \preceq \alpha) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)\}$$

имеем фильтр [12, гл. I], ассоциированный с $(A, \preceq, f)$.

Если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, g)$ есть направленность в I и $x \in I$, то

$$((\mathbf{D}, \sqsubseteq, g) \xrightarrow{\tau} x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall H \in N_\tau(x) \ \ \exists\, d \in \mathbf{D} \ \ \forall \delta \in \mathbf{D} \ \ (d \sqsubseteq \delta) \Rightarrow (g(\delta) \in H)); \tag{1.5}$$

тем самым введена (см. (1.5)) сходимость по Мору–Смиту. Ясно, что выражение

$$\exists_{\mathbf{D}} S[\mathbf{D} \neq \varnothing] \ \ \exists \ \sqsubseteq \in (\mathrm{DIR})[\mathbf{D}] \ \ \exists\, f \in B^{\mathbf{D}},$$

где B — непустое множество, заменяет высказывание «существует направленность $(\mathbf{D}, \sqsubseteq, f)$ в множестве B». Если A и X — непустые множества, $\tau \in (\mathrm{top})[X]$, $h \in X^A$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то (см. (1.5))

$$\begin{aligned}(\mathbf{as})[A; X; \tau; h; \mathcal{A}] \triangleq \{x \in X \mid \exists_{\mathbf{D}} S[\mathbf{D} \neq \varnothing] \ \ \exists \ \sqsubseteq \in (\mathrm{DIR})[\mathbf{D}] \\ \exists\, f \in A^{\mathbf{D}} : (\mathcal{A} \subset (A - \mathrm{ass})[\mathbf{D}; \sqsubseteq; f])\&((\mathbf{D}, \sqsubseteq, h \circ f) \xrightarrow{\tau} x)\}\end{aligned} \tag{1.6}$$

рассматриваем как МП в ТП (X, τ) при ОАХ, определяемых посредством $\mathcal{A}$ (символ $\circ$ используется при обозначении суперпозиции отображений).

2. Фильтры и ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E (в вопросах, связанных с построением МП, точки E рассматриваются как обычные решения; здесь — аналогия с [3, гл. III]). Кроме того, фиксируем далее π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (дополнительные условия на $\mathcal{L}$ будут накладываться по мере надобности), получая широко понимаемое ИП $(E, \mathcal{L}), E \neq \varnothing$. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(\ A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F})\&([\mathcal{L}](F) \subset \mathcal{F} \ \forall F \in \mathcal{F})\} \tag{2.1}$$

имеем семейство всех фильтров ИП $(E, \mathcal{L})$; ясно, что при $x \in E$

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \triangleq \{\ L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \tag{2.2}$$

(тривиальный фильтр, отвечающий точке x). В силу (2.2) $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$; $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. При этом (см. [14, с. 260])

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

есть семейство всех ультрафильтров (у/ф) или максимальных фильтров ИП $(E,\mathcal{L})$; из (2.3) видно, что такие у/ф — суть максимальные непустые центрированные подсемейства $\mathcal{L}$ и только они. При этом (см. [8, (1.7)])

$$(\mathcal{L}\in\tilde{\pi}^0[E]) \Longleftrightarrow ((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall x\in E). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что при $\mathcal{L}\in\tilde{\pi}^0[E]$ множество E погружается в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (2.3) посредством отображения, определяемого в (2.2). В общем случае π-системы $\mathcal{L}$ имеем при $L\in\mathcal{L}$

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L)\overset{\triangle}{=}\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\mid L\in\mathcal{U}\}=\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\mid L\cap U\neq\varnothing\ \ \forall U\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \tag{2.5}$$

В терминах множеств (2.5) определяется база топологии

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\overset{\triangle}{=}\{G\in\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))\mid\forall\mathcal{U}\in G\ \ \exists U\in\mathcal{U}:\Phi_{\mathcal{L}}(U)\subset G\}\in(\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{2.6}$$

стоуновского типа (см. [8, с. 94]). В самом деле, семейство

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\overset{\triangle}{=}\{\ \Phi_{\mathcal{L}}(L):\ L\in\mathcal{L}\}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))) \tag{2.7}$$

есть база топологии (2.6); итак,

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]=\{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]). \tag{2.8}$$

При этом [14, с. 260] топология (2.6) превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное T_2-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{2.9}$$

(если $\mathcal{L}$ — алгебра п/м E, то (2.9) — нульмерный компакт, то есть нульмерное компактное T_2-пространство), причем

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\subset\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]\cap\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \tag{2.10}$$

(итак, в силу (2.10) имеем, что (2.7) есть база открыто-замкнутых в ТП (2.9) множеств; если $\mathcal{L}$ — алгебра п/м E, то (2.10) превращается в равенство; см. [14, с. 260]). При $H\in\mathcal{P}(E)$ полагаем, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}\mid H]\overset{\triangle}{=}\{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\mid\exists U\in\mathcal{U}:U\subset H\} \tag{2.11}$$

(заметим, что семейство всех множеств $\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}\mid C]$, $C\in\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, образует [14, с. 261] замкнутую базу ТП (2.9)).

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Если* $H\in\mathcal{P}(E)$, *то множество* (2.11) *открыто в ТП* (2.9)*:*

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}\mid H]\in\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $H\in\mathcal{P}(E)$. Пусть $\mathcal{V}\in\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}\mid H]$. Тогда в силу (2.11) $\mathcal{V}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и для некоторого $V\in\mathcal{V}$ имеет место $V\subset H$. Рассмотрим множество $\Phi_{\mathcal{L}}(V)\in\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$; см. (2.5). При этом, в частности, $V\in\mathcal{L}$.

Выберем произвольно $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{L}}(V)$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $V \in \mathcal{W}$. Получили, что

$$\exists U \in \mathcal{W} : U \subset H. \tag{2.13}$$

В итоге $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H]$ (см. (2.11), (2.13)). Поскольку $\mathcal{W}$ выбиралось произвольно, установлено, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H].$$

Итак, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обладает следующим свойством

$$\exists U \in \mathcal{V} : \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H].$$

Поскольку и выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, из (2.6) вытекает требуемое свойство (2.12). □

Из предложения 2.1 вытекает, в частности, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma] \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \tag{2.14}$$

С другой стороны, при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ определено множество

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma). \tag{2.15}$$

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}). \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то есть $\mathcal{E}$ — непустое подсемейство $\mathcal{L}$. Пусть

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma].$$

Тогда согласно (2.6) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$

$$V \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma. \tag{2.17}$$

Выберем произвольно $M \in \mathcal{E}$. Тогда, в частности, $M \in \mathcal{L}$ и определено множество $\Phi_{\mathcal{L}}(M)$; см. (2.5). Поскольку (см. (2.17)) $V \subset M$, то $M \in [\mathcal{L}](V)$ и согласно (2.1) $M \in \mathcal{V}$. Как следствие

$$\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(M). \tag{2.18}$$

Поскольку выбор M был произвольным, получили (см. (2.15), (2.18)) включение $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, чем и завершается проверка требуемого свойства (2.16). □

Из (1.3), (2.14) и предложения 2.2 вытекает очевидное свойство

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma] \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{2.19}$$

Предложение 2.3. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, *то* $\forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}$

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)) \Longrightarrow (L_1 \subset L_2). \tag{2.20}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда согласно (2.4)

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E. \tag{2.21}$$

Пусть $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$ таковы, что истинна посылка доказываемой импликации (2.20), то есть

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2).$$

Покажем, что $L_1 \subset L_2$. Допустим противное: пусть $L_1 \setminus L_2 \neq \varnothing$. Выберем $x_* \in L_1 \setminus L_2$ и рассмотрим тривиальный у/ф (см. (2.21))

$$\mathcal{V} \triangleq (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{2.22}$$

Поскольку $x_* \in L_1$, то согласно (2.2) $L_1 \in (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*]$. Как следствие $L_1 \in \mathcal{V}$ и мы имеем в силу (2.5) и (2.22) включение $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_1)$ и, по выбору L_1 и L_2, $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)$. Тогда $L_2 \in \mathcal{V}$ (см. (2.5)), а потому (см. (2.21), (2.22)) $x_* \in L_2$, что противоречит выбору x_*. Полученное противоречие доказывает, что на самом деле $L_1 \subset L_2$. Итак, истинность импликации (2.20) установлена. Поскольку L_1 и L_2. выбирались произвольно, предложение доказано. □

Теорема 2.1. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma]. \tag{2.23}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Тогда, в частности, $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (см. (1.2)), а потому имеет место (2.19).

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]$. Тогда, в частности,

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}).$$

Поскольку $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]$ — открытое множество, имеем по выбору $\mathcal{V}$ в силу (2.6) для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$ вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]. \tag{2.24}$$

В частности, $\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. С учетом (2.15) и (2.24) получаем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

Используя предложение 2.3 и свойство (2.5), имеем, что $V \subset \Sigma\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$. В итоге

$$V \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma.$$

Таким образом, получаем следующее положение:

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) : (\exists U \in \mathcal{V} : U \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma).$$

В силу (2.11) имеем, как следствие, включение

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma].$$

Тем самым установлено вложение

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma],$$

а потому (см. (2.19)) справедливо равенство (2.23). □

Следствие 2.1. *Если* $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то истинна импликация*

$$(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Longrightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \varnothing).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (2.1), (2.11) и теоремы 2.1. В связи с теоремой 2.1 отметим [8, теорема 6.1], где, однако, предполагалось выполненным весьма ограничительное условие [8, (6.1)]. Здесь мы от него отказались.

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что упомянутое положение [8] о представлении внутренности является частным случаем утверждения теоремы 2.1. В этой связи отметим, прежде всего, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid L] = \Phi_{\mathcal{L}}(L) \ \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{2.25}$$

В самом деле, пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$. Тогда из (2.5), (2.11) непосредственно следует, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathbb{L}]. \tag{2.26}$$

Пусть $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathbb{L}]$. Тогда $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и для некоторого множества $U_* \in \mathcal{U}_*$ имеет место $U_* \subset \mathbb{L}$. Поскольку, в частности, $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{L} \in [\mathcal{L}](U_*)$, то согласно (2.1) $\mathbb{L} \in \mathcal{U}_*$. Поэтому согласно (2.5) $\mathcal{U}_* \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathbb{L}] \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}).$$

С учетом (2.26) имеем равенство $\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \mathbb{L}] = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$. Поскольку $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$ выбиралось произвольно, (2.25) установлено. Вернемся к [8, теорема 6.1], где предполагалось при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, что (см. [8, (6.1)]) $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ обладает свойством

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma \in \mathcal{L}. \tag{2.27}$$

В этом случае согласно (2.25) справедливо равенство

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma] = \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma), \tag{2.28}$$

где множество в правой части (2.28) определено согласно (2.5), (2.27). В силу теоремы 2.1 имеем равенство (2.23), из которого согласно (2.28) вытекает утверждение [8, теорема 6.1]. Требуемое свойство установлено, а (2.27) есть как раз то ограничительное условие работы [8], от которого в теореме 2.1 удалось отказаться.

3. Элементы притяжения в пространстве ультрафильтров широко понимаемого пространства

В настоящем разделе, если не оговорено противное, полагаем, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда в силу (2.2) и (2.4) получаем, что

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot] \triangleq ((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x])_{x\in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E. \tag{3.1}$$

С учетом (1.6), (2.6) и (3.1) получаем, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ определено МП

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot];\mathcal{E}] \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})); \tag{3.2}$$

МП (3.2) определяется посредством (1.6) при следующей конкретизации параметров

$$A = E, X = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tau = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], h = (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot], \mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

В [15, предложение 2] установлено, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot];\mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{E}) \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{3.3}$$

Тогда получаем в силу следствия 2.1 и (3.3), что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Longrightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]-\mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot];\mathcal{E}]] = \varnothing). \tag{3.4}$$

В связи с (3.4) отметим важную особенность МП в пространстве у/ф с топологией стоуновского типа: если непустое подсемейство отделимой π-системы $\mathcal{L}$, формирующее ОАХ, имеет пустое пересечение всех своих множеств, то МП, соответствующее данному подсемейству, имеет пустую внутренность. В то же время в [16, раздел 1] указан пример задачи о достижимости с ОАХ, в которой при пустом пересечении всех множеств, формирующих ОАХ, соответствующее МП имеет уже непустую внутренность (в данном примере E — множество функций, а π-систему $\mathcal{L}$ можно полагать совпадающей с $\mathcal{P}(E)$). В связи с упомянутым примером отметим также [17, предложение 3.3.1], откуда следует, что в примере [16, раздел 1] действительно рассматривается МП нужного нам типа (упомянутое МП допускает при этом секвенциальную реализацию при построении в духе (1.6)).

Возвращаясь к общим конструкциям для ИП $(E,\mathcal{L}), E \neq \varnothing$, отметим особо случай, когда семейство $\mathcal{E}$, порождающее ОАХ, является фильтром упомянутого ИП. В этом случае МП, определяемое подобно (3.3), совпадает с множеством у/ф, мажорирующих исходный фильтр: если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то согласно (1.6), (2.15) и (3.3)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists_{\mathbf{D}} S[\mathbf{D} \neq \varnothing] \tag{3.5}$$

$$\exists \sqsubseteq \in (\mathrm{DIR})[\mathbf{D}] \ \ \exists f \in E^{\mathbf{D}} : (\mathcal{F} \subset (E-\mathrm{ass})[\mathbf{D};\sqsubseteq;f])\&(\mathbf{D},\sqsubseteq,(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]\circ f) \overset{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}{\longrightarrow} \mathcal{U})\}.$$

В связи с (3.5) заметим, что согласно (3.1) для всякого непустого множества $\mathbf{D}$ и отображения $f \in E^{\mathbf{D}}$

$$(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]\circ f = ((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[f(\partial)])_{\partial\in\mathbf{D}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^{\mathbf{D}}.$$

В (3.5) существенно применение НМ и направленностей. Заметим также в связи с (3.5), что в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ для $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ реализуется свойство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.6}$$

Возвращаясь к случаю $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ (отделимой π-системы), отметим следующее положение.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то истинна импликация*

$$(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing) \Longrightarrow (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \setminus (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]). \qquad (3.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ удовлетворяет условию посылки доказываемой импликации (3.7): пересечение всех множеств из $\mathcal{F}$ пусто. Тогда согласно следствию 2.1

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \varnothing,$$

а потому $\mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \varnothing$. С другой стороны, в силу (3.6) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \neq \varnothing$, а потому $\mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \neq \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$. В силу (1.4) имеем, следовательно, свойство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \notin (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]],$$

откуда с учетом (3.6) вытекает следствие импликации (3.7), истинность которой, таким образом, установлена. □

Заметим, что из (1.4) и предложения 3.1 следует, конечно, что $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing) \Longrightarrow (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \neq \mathrm{cl}(\mathbf{G}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \ \ \forall \mathbf{G} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \qquad (3.8)$$

Заметим, что фильтры $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ со свойством, определяемым в посылке (3.8), представляют интерес в связи с описанием свободных у/ф (таковыми в данном случае автоматически будут у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$). В этой связи отметим более подробные построения в [8, §§5,6].

4. Некоторые добавления

Мы возвращаемся к общему случаю $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Отметим некоторые простые свойства множеств (2.15). Прежде всего заметим, что при $\mathcal{E}_1 \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{U}\}$$
$$= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E}_1 \subset U\} \cap \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{U}\} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_1) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_2);$$

поэтому из общих свойств оператора внутренности получаем, что (см. [11, Теорема 1.1.6])

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)] = (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_1)] \cap (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}_2)].$$

Данное свойство по индукции распространяется на случай произвольных конечных объединений непустых подсемейств $\mathcal{L}$.

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если* $H_1 \in \mathcal{P}(E)$ *и* $H_2 \in \mathcal{P}(E)$, *то*

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2] = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H_2]. \qquad (4.1)$$

Доказательство. Фиксируем H_1 и H_2 в соответствии с условиями предложения. Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2]$. Тогда в силу (2.11) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$

$$V \subset H_1 \cap H_2.$$

Тогда (см. (2.11)) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1]$ и $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2]$, то есть

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2].$$

Поскольку выбор $\mathcal{V}$ был произвольным, то установлено, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2] \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2]. \tag{4.2}$$

Пусть $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2]$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. При этом (см. (2.11)) для некоторого множества $W_1 \in \mathcal{W}$ имеет место $W_1 \subset H_1$. Аналогично, для некоторого $W_2 \in \mathcal{W}$ выполнено (см. (2.11)) $W_2 \subset H_2$. Тогда

$$W_1 \cap W_2 \subset H_1 \cap H_2. \tag{4.3}$$

Далее, из (2.1) и (2.3) имеем включение $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{W}$. Поэтому (см. (4.3))

$$\exists\, U \in \mathcal{W} : U \subset H_1 \cap H_2.$$

С учетом (2.11) получаем, что $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2]$, чем завершается проверка свойства

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_2] \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_1 \cap H_2].$$

Используя (4.2), получаем теперь требуемое равенство (4.1). □

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то введем в рассмотрение семейство

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Sigma] : \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}));\tag{4.4}$$

в качестве $\mathcal{E}$ может использоваться π-система.

Предложение 4.2. *Если* $\mathcal{E} \in \pi[E]$, *то*

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}] \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]. \tag{4.5}$$

Доказательство. Фиксируем π-систему $\mathcal{E} \in \pi[E]$ и рассмотрим семейство (4.4). В силу (1.1) и (4.4)

$$(\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \varnothing] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}])\&(\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]). \tag{4.6}$$

Из (2.11) имеем, однако, равенство $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \varnothing] = \varnothing$. Далее, при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ имеем, в частности, что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, а тогда согласно (2.1) $E \in \mathcal{U}$; ясно, что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E]$. Тогда $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E]$ и, как следствие (см. (2.11)), $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. С учетом (4.6) имеем теперь, что

$$(\varnothing \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}])\&(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]). \tag{4.7}$$

Выберем произвольно $\mathbb{A} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]$ и $\mathbb{B} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]$. С учетом (4.4) подберем $A \in \mathcal{E}$ и $B \in \mathcal{E}$, для которых

$$(\mathbb{A} = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A])\&(\mathbb{B} = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid B]). \tag{4.8}$$

Тогда, поскольку $\mathcal{E}$ есть π-система, $A \cap B \in \mathcal{E}$ и согласно (4.4)

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A \cap B] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.9}$$

Далее, с учетом предложения 4.1 имеем равенство

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A] \cap \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid B] = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A \cap B],$$

а потому (см. (4.8), (4.9)) получаем включение

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.10}$$

Поскольку $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ выбирались произвольно, имеем из (4.10), что

$$\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2 \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}] \ \ \forall \mathbb{E}_1 \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}] \ \ \forall \mathbb{E}_2 \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.11}$$

Из (1.1), (4.4), (4.7) и (4.11) получаем требуемое свойство (4.5). □

Отметим, что (см. (1.1)) каждая π-система на $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ является [18, теорема 1.9] базой некоторой топологии: если $\mathfrak{S} \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$, то

$$\{\cup\}(\mathfrak{S}) = \{\bigcup_{\mathbf{S} \in \mathfrak{V}} \mathbf{S} : \mathfrak{V} \in \mathcal{P}(\mathfrak{S})\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] \tag{4.12}$$

(напомним, что объединение множеств пустого семейства пусто). В этой связи напомним, что по выбору $\mathcal{L}$ имеем (см. (2.7), [14, раздел 3]) включение

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$$

и при этом справедливо (2.8). Из (4.12) и предложения 4.2 получаем следующее общее свойство:

$$\{\cup\}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] \ \ \forall \mathcal{E} \in \pi[E]. \tag{4.13}$$

Заметим, в частности, что топология стоуновского типа (2.6) является одним из вариантов топологий (4.13). В этой связи отметим очевидное положение.

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Справедливо равенство*

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] = \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{F} \in (\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]$. С учетом (2.7) подберем $\mathbf{L} \in \mathcal{L}$ со свойством $\mathbf{F} = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L})$. Тогда в силу (2.25) $\mathbf{F} = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbf{L}]$, а потому согласно (4.4) $\mathbf{F} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]$. Итак,

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \subset \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]. \tag{4.15}$$

Пусть теперь $\mathbf{M} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]$. Тогда согласно (4.4)

$$\mathbf{M} = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid M], \tag{4.16}$$

где $M \in \mathcal{L}$. С учетом (2.25) получаем следующее равенство

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid M] = \Phi_{\mathcal{L}}(M),$$

а тогда (см. (4.16)) $\mathbf{M} = \Phi_{\mathcal{L}}(M)$, где $\Phi_{\mathcal{L}}(M) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ согласно (2.7). Поэтому $\mathbf{M} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$, чем и завершается проверка вложения

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}] \subset (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}],$$

а следовательно (см. (4.15)), и равенства (4.14). □

Из (2.8) и предложения 4.3 получаем, что $\mathbf{T}^{*}_{\mathcal{L}}[E]$ есть одна из топологий (4.13):

$$\mathbf{T}^{*}_{\mathcal{L}}[E] = \{\cup\}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathcal{L}]).$$

Полезно отметить естественное обобщение (2.5): если $A \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathbf{F}^{*}_{0}[\mathcal{L} \mid A] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L}) \mid A \cap L \neq \varnothing \;\; \forall\, L \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L})); \tag{4.17}$$

ясно (см. (2.5)), что $\mathbf{F}^{*}_{0}[\mathcal{L} \mid L] = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{L})$ при $L \in \mathcal{L}$. В связи с (4.17) отметим два взаимосвязанных свойства, имеющие смысл двойственности: при $A \in \mathcal{P}(E)$

1) $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid A] = \mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L}) \setminus \mathbf{F}^{*}_{0}[\mathcal{L} \mid E \setminus A]$;

2) $\mathbf{F}^{*}_{0}[\mathcal{L} \mid A] = \mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus A]$.

Сейчас мы рассмотрим вопрос об использовании множеств (2.11) при построении топологии волмэновского типа. Напомним, что π-система $\mathcal{L} \in \pi[E]$ у нас фиксирована; определено семейство

$$\mathbf{C}_{E}[\mathcal{L}] = \{E \setminus L : L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$$

(см. раздел 1). Тогда определено также семейство

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_{E}[\mathcal{L}]\} = \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathbf{C}_{E}[\mathcal{L}] \mid \mathcal{L}] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{F}^{*}_{0}(\mathcal{L})). \tag{4.18}$$

Легко видеть, что $\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]]$, откуда вытекает, что (4.18) есть замкнутая база ТП (2.9). Мы заметим, однако, сейчас другое очевидное свойство: семейство (4.18) есть (открытая) предбаза некоторой топологии на множестве $\mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L})$. В этой связи получаем, что

$$\mathbf{T}^{0}_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L})], \tag{4.19}$$

получая топологию на $\mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L})$, порожденную предбазой (4.18); семейство $\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])$ является при этом базой ТП

$$(\mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L}), \mathbf{T}^{0}_{\mathcal{L}}\langle E\rangle). \tag{4.20}$$

В (4.20) имеем ТП волмэновского типа (см. (4.19)). Нашей целью будет получение некоторых представлений, связанных с (4.20). В этой связи отметим, что из предложения 4.1 по индукции следует аналогичное свойство для произвольных конечных подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Полагая, что $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ и элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами, мы для всяких семейства $\mathbb{H}$ и числа $n \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{H}^n$ обозначаем множество всех отображений (кортежей)

$$(H_i)_{i \in \overline{1,n}} : \overline{1,n} \to \mathbb{H},$$

где $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\}$. Тогда в силу предложения 4.1 имеем по индукции, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{i=1}^{n} H_i] = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H_i] \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \ \forall\, (H_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{P}(E)^n. \tag{4.21}$$

С использованием определений раздела 1 введем при $L \in \mathcal{L}$ в рассмотрение семейство

$$\{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L))$$

всех конечных пересечений множеств из

$$[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L) = \{C \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}] \mid L \subset C\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]);$$

в качестве L может, конечно, использоваться множество из всякого у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L})$.

П р е д л о ж е н и е 4.4. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{T}^{0}_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in G \ \ \exists\, L \in \mathcal{U} \ \ \exists\, C \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)) : \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] \subset G\}. \tag{4.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathbf{T}$ семейство в правой части (4.22). Требуется установить равенство $\mathbf{T}^{0}_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbf{T}$.

Пусть $G_* \in \mathbf{T}^{0}_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$. Тогда, в частности, $G_* \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^{*}_{0}(\mathcal{L}))$. Кроме того, пусть $\mathcal{U}_* \in G_*$. С учетом (4.19) получаем для некоторого $\mathbb{H} \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])$ свойства

$$(\mathcal{U}_* \in \mathbb{H}) \& (\mathbb{H} \subset G_*). \tag{4.23}$$

При этом для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и кортежа $(\mathbb{H}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]^n$ справедливо равенство

$$\mathbb{H} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{H}_i. \tag{4.24}$$

С учетом (4.18) подберем кортеж $(\Lambda_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]^n$ со свойством

$$\mathbb{H}_j = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda_j] \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}.$$

Из (4.21) и (4.24) получаем, как следствие, цепочку равенств

$$\mathbb{H} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \Lambda_i] = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i]. \tag{4.25}$$

С учетом (2.11), (4.23) и (4.25) имеем для некоторого множества $\mathbb{L} \in \mathcal{U}_*$, что

$$\mathbb{L} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i,$$

где, как легко видеть, справедливо включение

$$\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\mathbb{L})).$$

Из второго свойства в (4.23) и (4.25) получаем, кстати, что

$$\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i] \subset G_*. \tag{4.26}$$

Теперь имеем из (4.23) — (4.26), что $\exists\, L \in \mathcal{U}_* \;\; \exists\, C \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)):$

$$\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] \subset G_*.$$

Поскольку выбор $\mathcal{U}_*$ был произвольным, установлено, что

$$\forall\, \mathcal{U} \in G_* \;\; \exists\, L \in \mathcal{U} \;\; \exists\, C \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)) : \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] \subset G_*.$$

В итоге, $G_* \in \mathbf{T}$, чем завершается проверка свойства

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}. \tag{4.27}$$

Пусть $G^* \in \mathbf{T}$. Тогда $G^* \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ и при этом

$$\forall\, \mathcal{U} \in G^* \;\; \exists\, L \in \mathcal{U} \;\; \exists\, C \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)) : \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] \subset G^*. \tag{4.28}$$

Выберем произвольно $\mathcal{U}^* \in G^*$. Тогда согласно (4.28) для некоторых $L^* \in \mathcal{U}^*$ и $C^* \in \{\cap\}_\sharp([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L^*))$

$$\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*] \subset G^*. \tag{4.29}$$

По выбору C^* имеем равенство

$$C^* = \bigcap_{i=1}^{p} C^*_i, \tag{4.30}$$

где $p \in \mathbb{N}$ и $(C^*_i)_{i \in \overline{1,p}} \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L^*)^p$. Тогда (см. (4.21), (4.30)) получаем, что

$$\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*] = \bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*_i]. \tag{4.31}$$

При этом $L^* \subset C^*_j \;\; \forall\, j \in \overline{1,p}$. Поэтому (см. (2.11))

$$\mathcal{U}^* \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*_i]. \tag{4.32}$$

Здесь (см. (4.18)) $\mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*_j] \in \mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \; \forall\, j \in \overline{1,p}$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^*_i] \in \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]). \tag{4.33}$$

Вместе с тем, согласно (4.29) и (4.31)

$$\bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid C_i^*] \subset G^*. \tag{4.34}$$

Из (4.32) — (4.34) вытекает, что $\exists\, \tilde{\mathbb{H}} \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]):$

$$(\mathcal{U}^* \in \tilde{\mathbb{H}})\&(\tilde{\mathbb{H}} \subset G^*).$$

Поскольку выбор $\mathcal{U}^*$ был произвольным, установлено, что

$$\forall\, \mathcal{U} \in G^* \;\; \exists\, \mathbb{B} \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]) : (\mathcal{U} \in \mathbb{B})\&(\mathbb{B} \subset G^*).$$

В силу (4.19) имеем по общим свойствам открытых баз включение $G^* \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle$. Итак, установлено вложение

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle,$$

а, стало быть (см. (4.27)), и требуемое равенство $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}$, откуда вытекает (4.22). $\square$

П р е д л о ж е н и е 4.5. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathfrak{U} \triangleq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid C] : C \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U))\} \tag{4.35}$$

есть локальная база (фундаментальная система окрестностей) ТП (4.20) *в точке* $\mathcal{U}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В связи с (4.35) введем при $U \in \mathcal{U}$ семейство

$$\mathfrak{C}_U \triangleq \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid C] : C \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U))\}; \tag{4.36}$$

ясно, что $\mathfrak{C}_U \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$; при этом

$$\mathfrak{C}_U \subset N_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle}(\mathcal{U}). \tag{4.37}$$

Действительно, фиксируем (при $U \in \mathcal{U}$) множество $C^0 \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U))$. Тогда для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $(C_i^0)_{i \in \overline{1,n}} \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U)^n$

$$C^0 = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^0. \tag{4.38}$$

Тогда $C_j^0 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ и $U \subset C_j^0$ при $j \in \overline{1,n}$. Это означает, что (см. (2.11))

$$\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid C_j^0] \;\; \forall\, j \in \overline{1,n}.$$

Тогда, как следствие, получаем, что (см. (4.18))

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid C_i^0] \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]) : \mathcal{U} \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid C_i^0]. \tag{4.39}$$

Из (4.19) и (4.39) следует, в частности, включение

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C_i^0] \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}). \tag{4.40}$$

При этом, однако, в силу (4.21) и (4.38) имеем равенство

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0] = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C_i^0]$$

и, следовательно (см. (4.40)), $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C^0] \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U})$. Поскольку выбор C^0 был произвольным, установлено (см. (4.36)) требуемое вложение (4.37). Коль скоро и множество U выбиралось произвольно, установлено, что

$$\mathfrak{C}_{\Sigma} \subset N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}) \ \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{U}.$$

Тогда, как следствие, получаем, что

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} \mathfrak{C}_U \subset N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}). \tag{4.41}$$

Пусть $\mathbb{H}^* \in N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U})$. Тогда (см. раздел 1) для некоторого множества $\mathbb{G}^* \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U})$ имеем вложение

$$\mathbb{G}^* \subset \mathbb{H}^*. \tag{4.42}$$

При этом $\mathbb{G}^* \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{G}^*$. Согласно предложению 4.4 для некоторых $\mathbb{L} \in \mathcal{U}$ и $\mathbb{C} \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\mathbb{L}))$

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbb{C}] \subset \mathbb{G}^*. \tag{4.43}$$

Используем (4.36) при $U = \mathbb{L}$. Итак, имеем

$$\mathfrak{C}_{\mathbb{L}} = \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] : C \in \{\cap\}_{\sharp}([\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\mathbb{L}))\}. \tag{4.44}$$

Тогда согласно (4.44) $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbb{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbb{C}] \in \mathfrak{C}_{\mathbb{L}}$. Из (4.35) и (4.44) следует, что $\mathfrak{C}_{\mathbb{L}} \subset \mathfrak{U}$, а потому (см. (4.42), (4.43))

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbb{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbb{C}] \in \mathfrak{U} : \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid \mathbb{C}] \subset \mathbb{H}^*. \tag{4.45}$$

Поскольку выбор $\mathbb{H}^*$ был произвольным, из (4.45) вытекает, что

$$\forall \mathbb{H} \in N_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}) \ \ \exists\, \mathbb{U} \in \mathfrak{U} : \mathbb{U} \subset \mathbb{H}. \tag{4.46}$$

Из (4.41) и (4.46) следует требуемое утверждение: семейство $\mathfrak{U}$ есть локальная база ТП (4.20) в точке $\mathcal{U}$. □

Напомним, что согласно [19, (2.10)]

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E], \tag{4.47}$$

а ТП (4.20) есть компактное T_1-пространство (см. [19, (2.9)]). Напомним, наконец, что ([20, теорема 7.1]) в случае, когда $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) &= (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] \\ &= (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \end{aligned} \tag{4.48}$$

С учетом теоремы 2.1 и (4.48) получаем при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] &= (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] \\ &= (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma]; \end{aligned}$$

с учетом данного свойства и (3.4) получаем импликацию

$$(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Rightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] = \varnothing). \tag{4.49}$$

Заметим, что согласно (1.3) и (4.47) в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{H}] \subset (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \mathrm{Int})[\mathbb{H}] \ \ \forall \mathbb{H} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})).$$

Из (4.49) имеем теперь в случае $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, что

$$(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Rightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{E}]] = \varnothing);$$

разумеется, в силу (4.48) последнее свойство может быть переписано в виде

$$(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma = \varnothing) \Rightarrow ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \varnothing). \tag{4.50}$$

П р е д л о ж е н и е 4.6. *Если $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то истинна импликация*

$$(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \varnothing) \Rightarrow (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle] \setminus (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle]). \tag{4.51}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, причем истинна посылка импликации (4.18): пересечение всех множеств из фильтра $\mathcal{F}$ есть пустое множество. Тогда согласно (4.50)

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \varnothing.$$

Как следствие получаем следующее равенство

$$\mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle) = \varnothing. \tag{4.52}$$

С другой стороны, из (3.6) следует, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] \neq \varnothing$. С учетом (4.52) получаем, что

$$\mathrm{cl}((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle - \mathrm{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle) \neq \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})).$$

В итоге (см. (1.4)) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \notin (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle]$. Заметим, что $\mathcal{F}$ — направленное семейство, а потому (см. (4.48), [15, (4.3)])

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = (\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{F}]$$
$$= \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] : x \in F\}, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle].$$

Итак, получаем следующее свойство:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle] \setminus (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle].$$

Тем самым установлена истинность импликации (4.51). □

В заключение отметим, используя (1.4) и предложение 4.6, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ истинна очевидная теперь импликация

$$\Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \varnothing\Big) \Rightarrow \big(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \neq \mathrm{cl}(G, \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) \ \ \forall\, G \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle\big).$$

References

[1] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1986. [N. N. Krasovsky, *Motion Control Theory*, Science, M., 1986 (In Russian)].

[2] А. И. Панасюк, В. И. Панасюк, *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем*, Наука и техника, Минск, 1986. [A. I. Panasyuk, V. I. Panasyuk, *Asymptotic Turnpike Optimization of Control Systems*, Science and Technology Publ., Minsk, 1986 (In Russian)].

[3] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]

[4] А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, “Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 292–311; англ. пер.:A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, “On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 279–298.

[5] А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, И. И. Савенков, “Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера”, *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **47**:1 (2016), 54–118. [A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, I. I. Savenkov, “A problem of attainability with constraints of asymptotic nature”, *Izv. IMI UdGU*, 2016, № 1(47), 54–118 (In Russian)].

[6] А. Г. Ченцов, “Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера”, Тр. ИММ УрО РАН, **22**, 2016, 294–309; англ. пер.:A. G. Chentsov, “Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **296**:suppl. 1 (2017), 102–118.

[7] А. Г. Ченцов, “Об одном примере построения множеств притяжения с использованием пространства Стоуна”, *Вестник Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **4** (2012), 108–124. [A. G. Chentsov, “About an example of the attraction set construction with employment of Stone space”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, № 4, 108–124 (In Russian)].

[8] А. Г. Ченцов, “К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов”, *Вестник Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **3** (2014), 90–109. [A. G. Chentsov, “To the validity of constraints in the class of generalized elements”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, № 3, 90–109 (In Russian)].

[9] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, World Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[10] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005. [A. V. Bulinsky, A. N. Shiryaev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[11] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engelking, *General Topology*, World Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[12] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968. [N. Bourbaki, *General Topology. Basic Structures*, Science Publ., Moscow, 1968 (In Russian)].

[13] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981. [J. L. Kelly, *General Topology*, Science Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].

[14] А. Г. Ченцов, "Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем", *Труды ИММ УрО РАН*, **24**:1 (2018), 257–272; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

[15] А. Г. Ченцов, "Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **1** (2014), 87–101. [A. G. Chentsov, "Some ultrafilter properties connected with extension constructions", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, №1, 87–101 (In Russian)].

[16] А. Г. Ченцов, "Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости", *Динамические системы: моделирование, оптимизация, управление*, Сборник научных трудов, Тр. ИММ УрО РАН, **12**, 2006, 216–241; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Nonsequential approximate solutions in abstract problems of attainability", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **253**:suppl. 1 (2006), S48–S75.

[17] A. G. Chentsov, *Asymptotic Attainability*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997.

[18] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология: учебное пособие для вузов*, Высшая школа, М., 1979. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology: Textbook for Universities*, High School Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[19] А. Г. Ченцов, "О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **54** (2019), 74–101. [A. G. Chentsov, "On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type", *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 74–101 (In Russian)].

[20] А. Г. Ченцов, "Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **52** (2018), 86–102. [A. G. Chentsov, "Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions", *Izv. IMI UdGU*, **52** (2018), 86–102 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Поступила в редакцию 15.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 08.08.2023 г.
Принята к публикации 12.09.2023 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Received 15.06.2023
Reviewed 08.08.2023
Accepted for press 12.09.2023