

ISSN 2686-9667

ВЕСТНИК
РОССИЙСКИХ
УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN
UNIVERSITIES
REPORTS
MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 25
№ 130
2020

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 25, № 130,
2020

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых
Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов
диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук,
на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам
(распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	107
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>Т.А. Аверина, К.А. Рыбаков</i>	Статистические алгоритмы фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой 109
<i>М.Ж. Алвеиш, С.М. Лабовский</i>	О спектральных свойствах и положительности решений периодической краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения второго порядка 123
<i>В.Р. Барсегян, С.В. Солодуша</i>	Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закрепленном правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени 131
<i>А.Ю. Вдовин, С.С. Рублева</i>	О возможности получения оптимального порядка точности при восстановлении воздействия динамическим методом 147
<i>Е.Б. Ланеев, П.А. Лесик, А.В. Климишин, А.М. Котюков, А.А. Романов, А.Г. Хегай</i>	Об устойчивом приближенном решении одной некорректно поставленной краевой задачи для метатармонического уравнения 156
<i>Р.А. Хачатрян</i>	Условия минимума гладкой функции на границе квазидифференцируемого множества 165
<i>Г.Ф. Хельминк, Е.А. Панасенко</i>	Свойства алгебры псевдодифференциальных операторов, связанные с интегрируемыми иерархиями 183

Выпуск содержит статьи участников Международной научной конференции «Колмогоровские чтения – IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)», посвященной 70-летию со дня рождения А.И. Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина. Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-22021), Администрации Тамбовской области и ТГУ имени Г.Р. Державина.

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Б.А. Пасынков (г. Москва, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html>

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-76133 от 03 июля 2019 г.

Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Редактор М.И. Филатова

Редакторы английских текстов: В.В. Ключихин, М.А. Сенина

Технический секретарь М.В. Борзова

Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. – 2020. – Т. 25, № 130. – 140 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130

Подписано в печать 26.06.2020. Дата выхода в свет 16.07.2020

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 17,5. Усл. печ. л. 17,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 20126. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 25, no. 130,
2020**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission for publication of principal scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF no. 90-p of December 28, 2018)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>T.A. Averina, K.A. Rybakov</i>	Statistical filtering algorithms for systems with random structure	109
<i>M.J. Alves, S.M. Labovskiy</i>	On the spectral properties and positivity of solutions of a periodic boundary value problem for a second-order functional differential equation	123
<i>V.R. Barseghyan, S.V. Solodusha</i>	The problem of boundary control of string vibrations by displacement of the left end when the right end is fixed with the given values of the deflection function at intermediate times	131
<i>A.Yu. Vdovin, S.S. Rubleva</i>	On the possibility of obtaining the optimal order of accuracy when restoring the impact by the dynamic method	147
<i>E.B. Laneev, P.A. Lesik, A.V. Klimishin, A.M. Kotyukov, A.A. Romanov, A.G. Khegai</i>	On a stable approximate solution of an ill-posed boundary value problem for the metaharmonic equation	156
<i>R.A. Khachatryan</i>	The conditions of minimum for a smooth function on the boundary of a quasidifferentiable set	165
<i>G.F. Helminck, E.A. Panasenکو</i>	Properties of the algebra $\mathcal{Psd}$ related to integrable hierarchies	183
<i>A.G. Chentsov</i>	Relaxation of the game problem of guidance connected with alternative in guidance-evasion differential game	196

The issue contains articles of the participants of the International scientific conference “Kolmogorov Readings – IX. General Control Problems and their Applications (GCP-2020)”, dedicated to the 70-th birth anniversary of A.I. Bulgakov and to the 90-th anniversary of the Institute of Mathematics, Physics and Information Technologies of Derzhavin Tambov State University. The conference is organized with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-22021), the administration of the Tambov region and Derzhavin Tambov State University.

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”.

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Assoc. Prof., Cand. E.A. Panasenko (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), I.V. Ilyina (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. L.M. Berezanskiy (Beer-Sheva, Israel), Prof., Dr. G. van Dijk (Leiden, Netherlands), Prof., Dr. V.F. Molchanov (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. B.A. Pasynkov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. M. Pevzner (Reims, French Republic), Prof., Dr. F.L. Pereira (Porto, Portuguese Republic), Prof., Dr. A.V. Ponossov (Ås, Kingdom of Norway), Corresponding Member of RAS, Prof., Dr. A.G. Chentsov (Ekaterinburg, Russian Federation), Prof., Dr. G. Helminck (Amsterdam, Netherlands)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440

E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html>

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate is ПИИ no. ФС77-76133 of July 3, 2019

Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency “Rospechat” is 83372

Editor M.I. Filatova

English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina

Technical editor M.V. Borzova

Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:

Russian Universities Reports. Mathematics. – 2020. – Vol. 25, no. 130. – 140 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130

Podpisano v pechat' 26.06.2020. Data vykhoda v svet 16.07.2020

Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.

Pech. list 17,5. Usl. pech. list 17,0. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 20126. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region,
FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy”
of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.

190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

© FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”, 2020

© The journal “Russian Universities Reports. Mathematics”, 2020

The reference is obligatory while reprinting and citation of materials.

The author is responsible for the contents of publications

© Аверина Т.А., Рыбаков К.А., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-109-122

УДК 519.676

Статистические алгоритмы фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой

Татьяна Александровна АВЕРИНА^{1,2}, Константин Александрович РЫБАКОВ³

¹ ФГБУН «Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН»
630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 6

² ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1

³ ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4

Statistical filtering algorithms for systems with random structure

Tatyana A. AVERINA^{1,2}, Konstantin A. RYBAKOV³

¹ Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS
6 Lavrent'eva Ave., Novosibirsk 630090, Russian Federation

² Novosibirsk State University
1 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russian Federation

³ Moscow Aviation Institute (National Research University)
4 Volokolamskoe Hwy., Moscow 125993, Russian Federation

Аннотация. Предлагаются новые алгоритмы решения задачи оптимальной фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой с непрерывным временем. Эта задача состоит в оценивании текущего состояния системы по результатам косвенных измерений. Математическая модель системы включает нелинейные стохастические дифференциальные уравнения, правая часть которых определяет структуру динамической системы, или режим функционирования. Правая часть может изменяться в случайные моменты времени. Число структур системы предполагается конечным, а процесс смены структуры — марковским или условно марковским. Вектор состояния такой системы состоит из двух компонент: вектора с вещественными координатами и целочисленного номера структуры. Закон изменения номера структуры определяется различными условиями: достижением непрерывной частью вектора состояния заданной поверхности в фазовом пространстве или распределением случайного промежутка времени между переключениями с заданной интенсивностью (средним числом переключений в единицу времени). Каждой упорядоченной паре режимов функционирования может отвечать свой закон перехода между ними.

Алгоритмы оценивания текущего состояния систем со случайно изменяющейся структурой относятся к типу фильтров частиц, они построены на основе метода статистического моделирования (метода Монте-Карло). Работа является продолжением исследований авторов в области статистических методов и алгоритмов анализа и фильтрации для стохастических систем с непрерывным временем.

Ключевые слова: оценивание; фильтрация; метод максимального сечения; стохастическое дифференциальное уравнение; система с переменной структурой; система со случайной структурой; статистическое моделирование; фильтр частиц

Благодарности: Работа выполнена в рамках госзадания ИВМиМГ СО РАН (проект 0315-2019-0002).

Для цитирования: Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Статистические алгоритмы фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 109–122. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-109-122.

Abstract. New algorithms for solving the optimal filtering problem for continuous-time systems with a random structure are proposed. This problem is to estimate the current system state vector from observations. The mathematical model of the dynamic system includes nonlinear stochastic differential equations, the right side of which defines the system structure (regime mode). The right side of these stochastic differential equations may be changed at random time moments. The structure switching process is the Markov or conditional Markov random process with a finite set of states (structure numbers). The state vector of such system consists of two components: the real vector (continuous part) and the integer structure number (discrete part). The switch condition for the structure number may be different: the achievement of a given surface by the continuous part of the state vector or the distribution of a random time period between structure switchings. Each ordered pair of structure numbers can correspond to its own switch law.

Algorithms for the estimation of the current state vector for systems with a random structure are particle filters, they are based on the statistical modeling method (Monte Carlo method). This work continues the authors' research in the field of statistical methods and algorithms for the continuous-time stochastic systems analysis and filtering.

Keywords: estimation; filtering; maximum cross section method; stochastic differential equation; system with variable structure; system with random structure; statistical modeling; particle filter

Acknowledgements: The work was carried out within the State assignment ICM&MG SB RAS (project 0315-2019-0002).

For citation: Averina T.A., Rybakov K.A. Statisticheskiye algoritmy fil'tratsii dlya sistem so sluchayno izmenyayushcheysoy strukturoy [Statistical filtering algorithms for systems with random structure]. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 109–122. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-109-122. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работах [1, 2] были предложены статистические алгоритмы оценивания траекторий динамических систем диффузионно-скачкообразного типа, когда модель системы описывается стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) с винеровской и пуассоновской составляющими. По результатам измерений, модель которых является системой диффузионного типа, т. е. описывается СДУ с винеровской составляющей, оценивалось состояние динамической системы по критерию минимума среднеквадратического отклонения ошибки оценивания в текущий (фильтрация), прошлый (сглаживание) и будущий (прогнозирование) моменты времени. Основу предложенных алгоритмов составляют методы численного решения СДУ и методы моделирования пуассоновских потоков. Для моделирования пуассоновских потоков применялись метод максимального сечения и его модификация, которые позволяют сократить количество обращений к датчику случайных чисел [2, 3]. Алгоритмы, предложенные в [1, 2], относятся к типу фильтров частиц [4].

В этой работе предлагается применить аналогичный подход к оцениванию траекторий стохастических динамических систем с переключением режимов функционирования (подробнее о таких системах со случайно изменяющейся структурой см. [5]). Модель таких систем описывается СДУ, правая часть которых зависит от марковского или условно-марковского случайного процесса с конечным множеством состояний. В новых алгоритмах фильтрации метод максимального сечения и его модификация применяются при моделировании композиции пуассоновских потоков для изменения режимов функционирования.

Возможные приложения разработанных алгоритмов фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой — задачи слежения за движущимися объектами [5, 6].

Решение задачи фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой в самом общем случае сводится к системе СДУ с частными производными, а именно, к системе обобщенных уравнений Стратоновича для условно-апостериорных плотностей [5] (аналог уравнения Стратоновича–Кушнера для систем диффузионного типа [4]). Даже для систем диффузионного типа нахождение апостериорной плотности составляет трудную задачу, которая упрощается в линейном случае и некоторых нелинейных случаях, допускающих построение так называемых конечномерных фильтров. Для систем со случайно изменяющейся структурой нахождение условно-апостериорных плотностей более трудоемко, поэтому были разработаны различные приближенные методы, в основном связанные с аппроксимацией плотностей с помощью частичных сумм функциональных рядов [7, 8], моментов и семиинвариантов [9–11], либо с применением подхода, получившего название условно оптимальной фильтрации [12]. Такие методы относят к субоптимальным, их применение обусловлено необходимостью решения задачи фильтрации в реальном времени.

Альтернативой может служить применение метода статистического моделирования (метода Монте–Карло) и построение алгоритмов оценивания текущего состояния систем со случайно изменяющейся структурой, которые можно отнести к типу фильтров частиц. Их реализация требует использования значительных вычислительных ресурсов [13], однако при этом такие алгоритмы могут обеспечить более точный результат оценивания по сравнению с алгоритмами, основанными на субоптимальных методах. Для сложных многомерных динамических систем реализация алгоритмов фильтрации в реальном времени может оказаться невозможной, но даже в этом контексте статистические алгоритмы фильтрации могут быть использованы при сравнительном анализе с более быстрыми алгоритмами субоптимальной фильтрации для оценки точности и эффективности последних.

В публикациях описано применение фильтров частиц для систем со случайно изменяющейся структурой, однако для упрощенных математических моделей. Например, для динамических систем, изменение режима функционирования которых происходит без учета информации о непрерывной части вектора состояния, либо при рассмотрении стационарных распределений [14, 15]. В этой работе рассматривается общий случай.

1. Задача оптимальной фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой

В задаче фильтрации предполагается, что известна математическая модель динамической системы, состояние которой измеряется. В этой работе будем полагать, что математическая модель задается векторным СДУ Ито

$$dX(t) = f^{(l)}(t, X(t))dt + \sigma^{(l)}(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (1.1)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор, $t \in \mathbb{T} = [0, T]$; $f^{(l)}(\cdot, \cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma^{(l)}(\cdot, \cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — заданные функции для всех $l \in \mathbb{L} = \{1, 2, \dots, L_{\max}\}$, l — номер структуры (номер режима функционирования); $W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский случайный процесс. Закон распределения начального вектора состояния X_0 задан.

Значение l в каждый момент времени — это значение случайного процесса смены структуры $L(t)$ [5]. Как правило, случайный процесс $L(t)$ можно задать с помощью совокупности уравнений $S_{lr}(t, x) = 0$, $S_{lr}(\cdot, \cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $l, r = 1, 2, \dots, L_{\max}$; $l \neq r$. Тогда при условии $L(t-0) = l$ и достижении вектором X поверхности $S_{lr}(t, x) = 0$ в момент времени t случайный процесс $L(t)$ принимает значение r . Такой тип смены структуры называется сосредоточенным переходом, а система (1.1) — системой с переменной структурой.

Другой вариант — задание функций $\lambda_{lr}(\cdot, \cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, определяющих интенсивности смены структуры; $l, r = 1, 2, \dots, L_{\max}$; $l \neq r$. Тогда при малых Δt

$$\begin{aligned} P(L(t + \Delta t) = r \mid L(t) = l, X(t) = x) &= \lambda_{lr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t), \\ P(L(t + \Delta t) = l \mid L(t) = l, X(t) = x) &= 1 - \sum_{r=1, r \neq l}^{L_{\max}} \lambda_{lr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

где P обозначает вероятность. Такой тип смены структуры называется распределенным переходом, а система (1.1) — системой со случайной структурой.

И при сосредоточенных, и при распределенных переходах смена структуры системы, т. е. изменение правой части уравнения (1.1) происходит случайным образом. В обоих случаях будем называть такие динамические системы системами со случайно изменяющейся структурой. В общем случае можно рассматривать системы, для которых часть переходов сосредоточенная, а часть — распределенная.

Начальное условие для процесса смены структуры $L(t)$ задается в виде $L(0) = L_0 \in \mathbb{L}$. Траектории $L(t)$ — это кусочно-постоянные функции со значениями из множества $\mathbb{L}$; X_0 , L_0 и $W(t)$ независимы.

Вектор состояния $\bar{X}$ системы со случайно изменяющейся структурой состоит из двух компонент: X — непрерывная и L — дискретная, т. е. информация о текущем состоянии задается в виде $\bar{X} = [X^T, L]^T$.

Измерения будем описывать векторным СДУ

$$dY(t) = c^{(l)}(t, X(t))dt + \zeta^{(l)}(t)dV(t), \quad Y(0) = Y_0 = 0, \quad (1.2)$$

в котором $Y \in \mathbb{R}^m$ — m -мерный вектор; $c^{(l)}(\cdot, \cdot): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\zeta^{(l)}(\cdot): \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ — заданные функции для всех $l \in \mathbb{L}$; $V(t)$ — d -мерный стандартный винеровский

случайный процесс, не зависящий от винеровского процесса $W(t)$. При этом предполагается, что матрица $\eta^{(l)}(t) = \zeta^{(l)}(t)[\zeta^{(l)}(t)]^T$ невырождена для всех $l \in \mathbb{L}$ и $t \in \mathbb{T}$.

Отметим, что в наиболее общем случае для систем со случайно изменяющейся структурой вводят уравнение индикатора структуры [12], либо задаются соответствующие переходные плотности [16, 17], тогда вектор измерений, как и вектор состояния, состоит из двух компонент: непрерывной и дискретной. Однако в этой работе ограничимся описанием измерительной системы только уравнением (1.2).

Будем предполагать, что решение СДУ (1.1), (1.2) существует и единственно. Для этого достаточно выполнения условий на функции $f^{(l)}(t, x)$, $\sigma^{(l)}(t, x)$, $c^{(l)}(t, x)$, $\zeta^{(l)}(t)$ и $\lambda_{lr}(t, x)$, которые приведены в [18]. При сосредоточенных переходах $S_{lr}(t, x)$ — гладкие функции на $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ (за исключением подмножества нулевой меры). Кроме того, $E|X_0|^2 < \infty$, где E обозначает математическое ожидание. Также предполагается, что существует плотность для вектора $X = X(t)$ в каждый момент времени $t \in \mathbb{T}$.

Задача оптимальной фильтрации для системы со случайно изменяющейся структурой (1.1), (1.2) заключается в нахождении оценки $\hat{X}$ вектора состояния $\bar{X}$ по доступным к текущему моменту времени t измерениям $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [0, t]\}$ в виде $\hat{X} = \Phi(t, Y_0^t)$, т. е. требуется определить функцию $\Phi(t, \cdot)$, преобразующую измерения Y_0^t в оценку вектора состояния в текущий момент времени $t \in \mathbb{T}$.

Функцию $\Phi(t, \cdot)$ можно найти из условия оптимальности оценки (синтезировать оптимальный фильтр), т. е. исходя из заданного критерия качества, обеспечивающего минимум среднего риска [12, 19]:

$$EP(\bar{X}, \hat{X}) \rightarrow \min,$$

где минимум берется по всем допустимым функциям $\Phi(t, \cdot)$, $P(\bar{x}, \hat{x})$ — функция потерь, $\bar{x} = [x^T, l]^T$.

Для систем со случайно изменяющейся структурой используют следующие функции потерь $P(\bar{x}, \hat{x})$:

- 1) аддитивную квадратично-простую функцию потерь

$$P(\bar{x}, \hat{x}) = (x - \hat{x})^T C (x - \hat{x}) + (1 - \delta_{l, \hat{l}}),$$

где C — симметричная положительно определенная матрица $n \times n$, $\delta_{l, \hat{l}}$ — символ Кронекера;

- 2) мультипликативную простую функцию потерь

$$P(\bar{x}, \hat{x}) = 1 - \delta_{l, \hat{l}} \delta(x - \hat{x}),$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция.

Функции потерь часто рассматривают как функции ошибки оценивания [5], т. е. разности $\varepsilon = \bar{x} - \hat{x}$. В этом случае они будут выражаться через $\delta_{0, l-\hat{l}} = \delta_{l, \hat{l}}$. Другие варианты функций потерь описаны в [19].

Для того чтобы записать решение задачи оптимальной фильтрации, требуется ввести обозначения для апостериорной плотности вектора X и вероятностей, задающих распределение номера структуры L . Обозначим через $\varphi(t, x, l | Y_0^t)$, $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot | Y_0^t): \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$, функцию, которая описывает апостериорное распределение вектора

состояния $\bar{X}$:

$$\sum_{l=1}^{L_{\max}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x, l | Y_0^t) dx = 1.$$

При фиксированном $l \in \mathbb{L}$ — это ненормированная условно-апостериорная плотность $\varphi^{(l)}(t, x | Y_0^t)$ вектора X , а функция

$$P^{(l)}(t | Y_0^t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{(l)}(t, x | Y_0^t) dx \quad (1.3)$$

определяет апостериорную вероятность события $L(t) = l$ (вероятности $P^{(l)}(0) = P_0^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, L_{\max}$, определяют распределение начального состояния L_0). Далее, функция

$$\tilde{\varphi}^{(l)}(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi^{(l)}(t, x | Y_0^t)}{P^{(l)}(t | Y_0^t)} \quad (1.4)$$

определяет условно-апостериорную плотность вектора X при $L(t) = l$, а функция

$$\tilde{\varphi}(t, x | Y_0^t) = \sum_{l=1}^{L_{\max}} \varphi^{(l)}(t, x | Y_0^t) \quad (1.5)$$

является нормированной апостериорной плотностью вектора X .

Согласно [12, 19] оптимальная оценка $\hat{X}(t) = [\hat{X}^T(t), \hat{L}(t)]^T$ для аддитивной квадратично-простой функции потерь определяется соотношениями

$$\hat{X}(t) = \sum_{l=1}^{L_{\max}} P^{(l)}(t | Y_0^t) \hat{X}^{(l)}(t), \quad \hat{L}(t) = \arg \max_{l \in \mathbb{L}} P^{(l)}(t | Y_0^t),$$

где

$$\hat{X}^{(l)}(t) = E[X(t) | L(t) = l, Y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} x \tilde{\varphi}^{(l)}(t, x | Y_0^t) dx, \quad l = 1, 2, \dots, L_{\max},$$

а для мультипликативной простой функции потерь —

$$\hat{X}(t) = \hat{X}^{(\hat{L}(t))}(t), \quad \hat{L}(t) = \arg \max_{l \in \mathbb{L}} \varphi^{(l)}(t, \hat{X}^{(l)}(t) | Y_0^t),$$

где

$$\hat{X}^{(l)}(t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \tilde{\varphi}^{(l)}(t, x | Y_0^t), \quad l = 1, 2, \dots, L_{\max}.$$

2. Статистические алгоритмы фильтрации

Для приближенного решения задачи оптимальной фильтрации применим метод статистического моделирования. В его основе лежит построение траекторий системы со случайно изменяющейся структурой по известной математической модели, включающей уравнение (1.1) для случайного процесса $X(t)$ и определение процесса смены структуры $L(t)$. По ансамблю траекторий (реализаций вектора состояния $\bar{X}$ системы в различные моменты времени, которые, как правило, образуют узлы разбиения отрезка $\mathbb{T}$) с помощью статистических методов можно найти оценки $\hat{\bar{X}}$, соответствующие

разным функциям потерь. При статистической обработке результатов моделирования могут быть найдены оценки плотности вектора X , оценки условных и безусловных моментных характеристик вектора X , оценка распределения для номера структуры L . Все это не требует вывода сложных соотношений, а базируется только на методах моделирования решений СДУ и марковских процессов с конечным множеством состояний.

Для учета имеющихся измерений Y_0^t предлагается применить метод частиц, в котором наряду с траекториями динамической системы (1.1) и процессом смены структуры требуется моделирование траекторий весовой функции по определенному правилу. Тогда вклад каждой траектории системы со случайно изменяющейся структурой в искомую оценку вектора состояния зависит от соответствующей траектории весовой функции, которая формируется на основе модели измерений (1.2) (вес уменьшается, если траектория далека от оптимальной оценки; вес растет, если траектория близка к оптимальной оценке). Для стохастических динамических систем с непрерывным и дискретным временем определения соответствующих весовых функций отличаются [4, 20]. Однако применение численных методов решения СДУ означает фактический переход от непрерывного времени к дискретному, что позволяет использовать более простое определение весовой функции и не приводить уравнения для ненормированных и нормированных условно-апостериорных плотностей вектора X [5].

Воспользуемся стохастическим методом Эйлера для построения дискретной аппроксимации решения СДУ (1.1), (1.2) при фиксированном $l \in \mathbb{L}$:

$$X_{k+1} = X_k + hf^{(l)}(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma^{(l)}(t_k, X_k)\Delta W_k, \quad (2.6)$$

$$Y_{k+1} = Y_k + hc^{(l)}(t_k, X_k) + \sqrt{h}\zeta^{(l)}(t_k)\Delta V_k, \quad (2.7)$$

где ΔW_k и ΔV_k — s -мерный и d -мерный случайные векторы, координаты которых независимы в совокупности и имеют стандартное нормальное распределение для всех k , $h > 0$ — шаг численного интегрирования, т. е.

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad t_0 = 0, \quad t_N = T.$$

Случайный вектор $(Y_{k+1} - Y_k)/h - c^{(l)}(t_k, X_k)$ имеет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\eta^{(l)}(t_k)/h$, т. е. с плотностью

$$p_k^{(l)}(x, h) = \frac{h^{n/2}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \eta^{(l)}(t_k)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^T [\eta^{(l)}(t_k)]^{-1} x h \right\}.$$

Эта плотность выполняет роль функции правдоподобия [4] и позволяет записать правило обновления весовых коэффициентов

$$\omega_{k+1} = \omega_k p_k^{(l)} \left(\frac{Y_{k+1} - Y_k}{h} - c^{(l)}(t_k, X_k), h \right). \quad (2.8)$$

Начальное условие для весового коэффициента должно быть положительным, его конкретная величина не имеет принципиального значения, например $\omega_0 = 1$. Эти весовые коэффициенты позволяют найти апостериорные моментные характеристики вектора X . В частности, апостериорное математическое ожидание вектора X в момент

времени t_k оценивается следующим образом (оно дает приближенное решение задачи оптимальной фильтрации при выборе аддитивной квадратично-простой функции потерь):

$$\hat{X}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \omega_k^i X_k^i, \quad \Omega_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^i,$$

где i — номер моделируемой траектории случайного процесса $X(t)$, M — число траекторий.

Аналогичным образом можно оценить апостериорные начальные и центральные моментные характеристики. Например, для моментов второго порядка имеем

$$\hat{\Psi}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \omega_k^i X_k^i (X_k^i)^T, \quad \hat{R}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \omega_k^i (X_k^i - \hat{X}_k)(X_k^i - \hat{X}_k)^T,$$

и оценка $\hat{R}_k$ ковариационной матрицы вектора X в момент времени t_k может использоваться как характеристика точности фильтрации.

Отметим, что в качестве численного метода решения СДУ (1.1) можно использовать любой подходящий метод, обеспечивающий более высокую точность по сравнению со стохастическим методом Эйлера [3, 21]. Численное решение уравнения (1.2) требуется только для моделирования работы фильтра. В реальной задаче фильтрации моделирование случайного процесса $Y(t)$ не проводится.

Для систем со случайно изменяющейся структурой наряду с моделированием траекторий случайного процесса $X(t)$ требуется моделирование траекторий случайного процесса $L(t)$ в соответствии с его определением [3]. При этом все приведенные выше соотношения остаются справедливыми, при их применении нужно положить $l = L_k = L(t_k)$.

При сосредоточенных переходах условие смены номера структуры с l на r — это равенство $S_{lr}(t, X(t)) = 0$. С учетом дискретной аппроксимации случайного процесса $X(t)$ это условие можно записать как $S_{lr}(t_k, X_k) S_{lr}(t_{k+1}, X_{k+1}) \leq 0$ [22].

При распределенных переходах можно воспользоваться условием ординарности композиции пуассоновских потоков или построить алгоритмы фильтрации на основе метода максимального сечения и его модификации. Не будем отдельно приводить соотношения для них, поскольку эти методы в приложении к задаче фильтрации для динамических систем диффузионно-скачкообразного типа описаны в [2].

Приведем сразу алгоритмы приближенного решения задачи оптимальной фильтрации, построенные на основе алгоритмов моделирования траекторий систем со случайной структурой и методов моделирования пуассоновских потоков, выбирая аддитивную квадратично-простую функцию потерь.

Алгоритм моделирования пуассоновского потока на основе определения его интенсивности применялся в [21]. В [23, 24] для моделирования пуассоновского потока применялись метод максимального сечения и его модификация. Прежде чем привести эти алгоритмы, введем необходимые обозначения.

Интенсивность композиции пуассоновских потоков смены структуры для текущего номера l задается выражением

$$\lambda_l(t, x) = \sum_{r=1, r \neq l}^m \lambda_{lr}(t, x).$$

Пусть также числа λ_{lr}^* ($l, r = 1, 2, \dots, L_{\max}; l \neq r$) удовлетворяют условиям:

$$\lambda_{lr}(t, x) \leq \lambda_{lr}^*, \quad l, r = 1, 2, \dots, L_{\max}, \quad l \neq r.$$

Обозначим

$$\lambda_l^* = \sum_{r=1, r \neq l}^m \lambda_{lr}^*.$$

АЛГОРИТМ 1 (ДЛЯ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ)

1. Задать M — число моделируемых траекторий случайных процессов $X(t)$, $L(t)$ и $\omega(t)$, т. е. число частиц; h — шаг численного интегрирования. Получить реализации векторов X_0^i и номеров L_0^i согласно заданным распределениям и положить $k = 0$, $\omega_0^i = 1$, $i = 1, 2, \dots, M$.
2. Оценить вектор состояния и ковариационную матрицу вектора X_k , а также номер структуры L_k по реализациям $\{X_k^i, L_k^i, \omega_k^i\}_{i=1}^M$:

$$\hat{X}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \omega_k^i X_k^i, \quad \hat{R}_k = \frac{1}{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \omega_k^i (X_k^i - \hat{X}_k)(X_k^i - \hat{X}_k)^T, \quad \hat{L}_k = \arg \max_{l \in \mathbb{L}} \hat{P}_k^{(l)},$$

где

$$\Omega_k = \sum_{i=1}^M \omega_k^i, \quad \hat{P}_k^{(l)} = \frac{\#\{i: L_k^i = l, i = 1, 2, \dots, M\}}{M}.$$

Проверить условие $T - t_k = 0$. Если оно выполнено, то завершить процесс. Положить $i = 1$.

3. Получить реализацию вектора X в следующем узле сетки $t = t_k + h$:

$$X_{k+1}^i = X_k^i + h f^{(l)}(t_k, X_k^i) + \sqrt{h} \sigma^{(l)}(t_k, X_k^i) \Delta W_k^i,$$

где $l = L_k^i$, ΔW_k^i — реализация s -мерного случайного вектора, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Обновить весовой коэффициент

$$\omega_{k+1}^i = \omega_k^i p_k^{(l)} \left(\frac{Y(t_{k+1}) - Y(t_k)}{h} - c^{(l)}(t_k, X_k^i), h \right).$$

Проверить условие смены структуры: если вектор X_{k+1} достиг поверхности $S_{lr}(t, x) = 0$ для некоторого номера r к моменту времени t_{k+1} , т. е. $S_{lr}(t_k, X_k) \times S_{lr}(t_{k+1}, X_{k+1}) \leq 0$, где $l = L_k^i$, то изменить номер структуры на r ($r \in \mathbb{L} \setminus \{l\}$), т. е. положить $L_{k+1}^i = r$. Иначе положить $L_{k+1}^i = l$.

4. Если $i = M$, то положить $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 2; если $i < M$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 3.

АЛГОРИТМ 2 (ДЛЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ
НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ)

1. Задать M — число моделируемых траекторий случайных процессов $X(t)$, $L(t)$ и $\omega(t)$, т. е. число частиц; h — шаг численного интегрирования. Получить реализации векторов X_0^i и номеров L_0^i согласно заданным распределениям и положить $k = 0$, $t_*^i = 0$, $\omega_0^i = 1$, $i = 1, 2, \dots, M$. Получить реализации случайных величин ξ^i , имеющих показательное распределение с параметром λ_l^* , где $l = L_0^i$, $i = 1, 2, \dots, M$.

2. Выполнить шаг 2 в алгоритме 1.

3. Положить $l = L_k^i$ и проверить условие $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 4, иначе положить $\tau = t_k$, $\tilde{X} = X_k^i$ и перейти к шагу 5.

4. Получить реализацию вектора X в следующем узле сетки $t = t_k + h$:

$$X_{k+1}^i = X_k^i + hf^{(l)}(t_k, X_k^i) + \sqrt{h}\sigma^{(l)}(t_k, X_k^i)\Delta W_k^i,$$

где ΔW_k^i — реализация s -мерного случайного вектора, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Положить $L_{k+1}^i = l$, и перейти к шагу 7.

5. Получить реализацию вектора X в дополнительном узле сетки $t = t_*^i + \xi^i$:

$$\tilde{X} = \tilde{X} + \tilde{h}f^{(l)}(\tau, \tilde{X}) + \sqrt{\tilde{h}}\sigma^{(l)}(\tau, \tilde{X})\Delta \tilde{W},$$

где $\tilde{h} = t_*^i + \xi^i - \tau$, $\Delta \tilde{W}$ — реализация s -мерного случайного вектора, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Положить $\tau = \tau + \tilde{h}$ и получить реализацию номера структуры r с вероятностью $P_r = \lambda_{lr}^*/\lambda_l^*$ ($r \in \mathbb{L} \setminus \{l\}$). Проверить условие смены структуры: если $\alpha \leq \lambda_{lr}(\tau, \tilde{X})/\lambda_{lr}^*$, где α — реализация случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, то изменить номер структуры на r , т. е. положить $l = r$. Далее положить $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию случайной величины ξ^i , имеющей показательное распределение с параметром λ_l^* . Проверить условие $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 6, иначе перейти к шагу 5.

6. Получить реализацию вектора X в следующем узле сетки $t = t_k + h$:

$$X_{k+1}^i = \tilde{X} + \tilde{h}f^{(l)}(\tau, \tilde{X}) + \sqrt{\tilde{h}}\sigma^{(l)}(\tau, \tilde{X})\Delta \tilde{W},$$

где $\tilde{h} = t_k + h - \tau$, $\Delta \tilde{W}$ — реализация s -мерного случайного вектора, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Положить $L_{k+1}^i = l$.

7. Обновить весовой коэффициент

$$\omega_{k+1}^i = \omega_k^i p_k^{(l)} \left(\frac{Y(t_{k+1}) - Y(t_k)}{h} - c^{(l)}(t_k, X_k^i), h \right),$$

где $l = L_k^i$.

8. Выполнить шаг 4 в алгоритме 1.

АЛГОРИТМ 3 (для систем с распределенными переходами
на основе модифицированного метода максимального сечения)

1. Задать M — число моделируемых траекторий случайных процессов $X(t)$, $L(t)$ и $\omega(t)$, т. е. число частиц; h — шаг численного интегрирования. Получить реализации векторов X_0^i и номеров L_0^i согласно заданным распределениям и положить $k = 0$, $t_*^i = 0$, $\omega_0^i = 1$, $i = 1, 2, \dots, M$. Получить реализации случайных величин ξ^i , имеющих показательное распределение с параметром λ_l^* , где $l = L_0^i$, и положить $\Pi^i = \Phi^i = 1$, $i = 1, 2, \dots, M$.
2. Выполнить шаг 2 в алгоритме 1.
3. Положить $l = L_k^i$ и проверить условие $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 4, иначе положить $\tau = t_k$, $\tilde{X} = X_k^i$. Если $\Phi^i = 1$, то получить реализацию случайной величины α , имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, и положить $\Phi^i = 0$. Перейти к шагу 5.
4. Выполнить шаг 4 в алгоритме 2.
5. Получить реализацию вектора X в дополнительном узле сетки $t = t_*^i + \xi^i$:

$$\tilde{X} = \tilde{X} + \tilde{h}f^{(l)}(\tau, \tilde{X}) + \sqrt{\tilde{h}}\sigma^{(l)}(\tau, \tilde{X})\Delta\tilde{W},$$

где $\tilde{h} = t_*^i + \xi^i - \tau$ и $\Delta\tilde{W}$ — реализация s -мерного случайного вектора, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Положить $\tau = \tau + \tilde{h}$ и получить реализацию номера структуры r с вероятностью $P_r = \lambda_{lr}^*/\lambda_l^*$ ($r \in \mathbb{L} \setminus \{l\}$). Положить $\Pi^i = \Pi^i(1 - \lambda_{lr}(\tau, \tilde{X})/\lambda_{lr}^*)$ и проверить условие смены структуры: если $1 - \alpha > \Pi^i$, то изменить номер структуры на r , т. е. положить $l := r$, и положить $\Pi^i = \Phi^i = 1$. Далее положить $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию случайной величины ξ^i , имеющей показательное распределение с параметром λ_l^* . Проверить условие $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 6, иначе перейти к шагу 5.

6. Получить реализацию вектора X в следующем узле сетки $t = t_k + h$:

$$X_{k+1}^i = \tilde{X} + \tilde{h}f^{(l)}(\tau, \tilde{X}) + \sqrt{\tilde{h}}\sigma^{(l)}(\tau, \tilde{X})\Delta\tilde{W},$$

где $\tilde{h} = t_k + h - \tau$ и $\Delta\tilde{W}$ — реализация s -мерного случайного вектора, координаты которого независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Положить $L_{k+1}^i = l$.

7. Выполнить шаг 7 в алгоритме 2.
8. Выполнить шаг 4 в алгоритме 1.

Заключение

В работе предложены новые алгоритмы решения задачи оптимальной фильтрации для систем со случайно изменяющейся структурой с непрерывным временем. В настоящее время с использованием оптимизирующих компиляторов, которые позволяют наиболее эффективно задействовать вычислительные ресурсы процессоров, можно реализовать подобные алгоритмы для сложных динамических систем, обеспечивая при этом решение задачи оптимальной фильтрации в реальном времени. Для систем диффузионного типа возможность реализации фильтров частиц в реальном времени продемонстрирована в [13]. При необходимости реализации более быстрых и не требующих обработки большого объема данных алгоритмов субоптимальной фильтрации алгоритмы, построенные на основе метода статистического моделирования, могут применяться для сравнения.

References

- [1] Т. А. Аверина, К. А. Рыбаков, *Применение метода максимального сечения в задачах оценивания случайных процессов*, Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики (АПВППМ-2019, Марчуковские научные чтения), НГУ, Новосибирск, 2019. [T. A. Averina, K. A. Rybakov, *Using the maximum cross section method in random processes estimation problems*, Int. Conf. on Advanced Mathematics, Computations and Applications (AMCA-2019, Marchuk Scientific Readings), NSU Publ., Novosibirsk, 2019 (In Russian)].
- [2] Т. А. Аверина, К. А. Рыбаков, “Using maximum cross section method for filtering jump-diffusion random processes”, *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **35**:2 (2020), 55–67.
- [3] Т. А. Аверина, *Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой*, Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2019. [T. A. Averina, *Statisticheskoe modelirovanie reshenii stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenii i sistem so sluchainoi strukturoi*, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., Novosibirsk, 2019 (In Russian)].
- [4] A. Bain, D. Crisan, *Fundamentals of Stochastic Filtering*, Springer, New York, 2009.
- [5] И. Е. Казаков, В. М. Артемьев, *Оптимизация динамических систем случайной структуры*, Наука, М., 1980. [I. E. Kazakov, V. M. Artem'ev, *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem sluchainoi struktury*, Nauka, Moscow, 1980 (In Russian)].
- [6] X. R. Li, V. P. Jilkov, “Survey of maneuvering target tracking. Part V: Multiple-model methods”, *IEEE Trans. Aerospace Electronic Syst.*, **41**:4 (2005), 1255–1321.
- [7] М. С. Ярлыков, С. М. Ярлыкова, “Оптимальные алгоритмы комплексной нелинейной обработки векторных дискретно-непрерывных сигналов”, *Радиотехника*, 2004, № 7, 18–29. [M. S. Yarlykov, S. M. Yarlykova, “Optimal algorithms for complex nonlinear processing of vector discrete-continuous signals”, *Radioengineering*, 2004, № 7, 18–29 (In Russian)].
- [8] М. С. Ярлыков, С. М. Ярлыкова, “Потенциальная точность синтезированных субоптимальных алгоритмов комплексной нелинейной обработки векторных дискретно-непрерывных шумоподобных сигналов”, *Радиотехника*, 2007, № 1, 46–61. [M. S. Yarlykov, S. M. Yarlykova, “The potential accuracy of synthesized suboptimal algorithms for complex nonlinear processing of vector discrete-continuous noises”, *Radioengineering*, 2007, № 1, 46–61 (In Russian)].
- [9] И. М. Косачев, Ю. Е. Кулешов, “Методология высокоточной оптимальной фильтрации случайных процессов, наблюдаемых в стохастических динамических системах со случайно изменяющейся структурой. Часть 1”, *Вестник Военной академии Республики Беларусь*, 2016, № 3 (52), 57–66. [I. M. Kosachev, Yu. E. Kuleshov, “Methodology of high-precision optimal filtering of random processes observed in stochastic dynamical systems with random structure. Part 1”, *Military Academy of the Republic of Belarus Proceedings*, 2016, № 3 (52), 57–66 (In Russian)].

- [10] И. М. Косачев, Ю. Е. Кулешов, “Методология высокоточной оптимальной фильтрации случайных процессов, наблюдаемых в стохастических динамических системах со случайно изменяющейся структурой. Часть 2”, *Вестник Военной академии Республики Беларусь*, 2016, № 4 (53), 64–73. [I. M. Kosachev, Yu. E. Kuleshov, “Methodology of high-precision optimal filtering of random processes observed in stochastic dynamical systems with random structure. Part 2”, *Military Academy of the Republic of Belarus Proceedings*, 2016, № 4 (53), 64–73 (In Russian)].
- [11] И. М. Косачев, Ю. Е. Кулешов, “Методология высокоточной оптимальной фильтрации случайных процессов, наблюдаемых в стохастических динамических системах со случайно изменяющейся структурой. Часть 3”, *Вестник Военной академии Республики Беларусь*, 2017, № 1 (54), 56–65. [I. M. Kosachev, Yu. E. Kuleshov, “Methodology of high-precision optimal filtering of random processes observed in stochastic dynamical systems with random structure. Part 3”, *Military Academy of the Republic of Belarus Proceedings*, 2017, № 1 (54), 56–65 (In Russian)].
- [12] Е. А. Руденко, “Конечномерные рекуррентные алгоритмы оптимальной нелинейной логико-динамической фильтрации”, *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2016, № 1, 43–65; англ. пер.: E. A. Rudenko, “Finite-dimensional recurrent algorithms for optimal nonlinear logical-dynamical filtering”, *J. Comput. Sys. Sc. Int.*, **55**:1 (2016), 36–58.
- [13] К. А. Рыбаков, А. А. Ющенко, “Непрерывные фильтры частиц и их реализация в реальном масштабе времени”, *Вестник ВГУ. Серия Системный анализ и информационные технологии*, 2018, № 3, 56–64. [K. A. Rybakov, A. A. Yushchenko, “Continuous particle filters and its real-time implementation”, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, 2018, № 3, 56–64 (In Russian)].
- [14] F. Karamé, “A new particle filtering approach to estimate stochastic volatility models with Markov-switching”, *Econometrics and Statistics*, **8**:C (2018), 204–230.
- [15] T. Lux, “Inference for nonlinear state space models: A comparison of different methods applied to Markov-switching multifractal models”, *Economics Working Paper*, **2018-07** (2018), 1–43.
- [16] В. А. Бухалев, *Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой*, Физматлит, М., 1996. [V. A. Bukhalev, *Raspoznavanie, otsenivanie i upravlenie v sistemakh so sluchainoi skachkoobraznoi strukturoi*, Fizmatlit, Moscow, 1996 (In Russian)].
- [17] В. А. Бухалев, А. А. Скрынников, В. А. Болдинов, *Алгоритмическая помехозащита беспилотных летательных аппаратов*, Физматлит, М., 2018. [V. A. Bukhalev, A. A. Skrynnikov, V. A. Boldinov, *Algoritmicheskaya pomekhozashchita bespilotnykh letatel'nykh apparatov*, Fizmatlit, Moscow, 2018 (In Russian)].
- [18] M. Ghosh, A. Arapostathis, S. Marcus, “Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems”, *SIAM J. Control Optim.*, **31**:5 (1993), 1183–1204.
- [19] А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков, *Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех*, Радио и связь, М., 1986. [A. P. Trifonov, Yu. S. Shinakov, *Sovmestnoe razlichenie signalov i otsenka ikh parametrov na fone pomekh*, Radio i svyaz', Moscow, 1986 (In Russian)].
- [20] К. А. Рыбаков, “О вычислении весовых коэффициентов в непрерывном фильтре частиц”, *Научный вестник МГТУ ГА*, **21**:2 (2018), 32–39. [K. A. Rybakov, “Calculation of weight coefficients in continuous particle filter”, *Civil Aviation High Technologies*, **21**:2 (2018), 32–39 (In Russian)].
- [21] Н. В. Черных, П. В. Пакшин, “Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных систем с переключаемой диффузией”, *Управление большими системами*, 2012, № 36, 106–143; англ. пер.: N. V. Chernykh, P. V. Pakshin, “Numerical solution algorithms for stochastic differential systems with switching diffusion”, *Autom. Remote Control*, **74**:12 (2013), 2037–2063.
- [22] Т. А. Аверина, К. А. Рыбаков, “Моделирование мультиструктурных систем на многообразиях в задачах статистического анализа и фильтрации”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **23**:122 (2018), 145–153. [T. A. Averina, K. A. Rybakov, “Modeling of multistructural systems on manifolds for statistical analysis and filtering problems”, *Tamov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:122 (2018), 145–153 (In Russian)].

- [23] Т. А. Аверина, “Построение и обоснование статистических алгоритмов моделирования решения систем со случайной структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **20**:5 (2015), 986–991. [Т. А. Averina, “Construction and justification of statistical algorithms for simulation of switching diffusion, given by stochastic differential equations”, *Tamboy University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **20**:5 (2015), 986–991 (In Russian)].
- [24] Т. А. Аверина, “Использование модификаций метода максимального сечения для моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами”, *Сибирский журнал вычислительной математики*, **19**:3 (2016), 235–247; англ. пер.: Т. А. Averina, “A randomized maximum cross-section method to simulate random structure systems with distributed transitions”, *Numer. Anal. Appl.*, **9**:3 (2016), 179–190.

Информация об авторах

Аверина Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории численного анализа СДУ, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН; доцент механико-математического факультета, Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: ata@osmf.ssc.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2206-289X>

Рыбаков Константин Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация. E-mail: rkoffice@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6839-1090>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Константин Александрович Рыбаков
E-mail: rkoffice@mail.ru

Поступила в редакцию 25 марта 2020 г.
Поступила после рецензирования 14 мая 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the authors

Tatyana A. Averina, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Laboratory of SDE Numerical Analysis, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS; Associate Professor of the Mechanics and Mathematics Department, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: ata@osmf.ssc.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2206-289X>

Konstantin A. Rybakov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Cybernetics Department. Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation. E-mail: rkoffice@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6839-1090>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Konstantin A. Rybakov
E-mail: rkoffice@mail.ru

Received 25 March 2020
Reviewed 14 May 2020
Accepted for press 8 June 2020

© Alves M.J., Labovskiy S.M., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-123-130

UDC 517.9

On the spectral properties and positivity of solutions of a periodic boundary value problem for a second-order functional differential equation

Manuel J. ALVES¹, Sergey M. LABOVSKIY²¹ Eduardo Mondlane University

Julius Nyerere Av., Maputo 3453, Mozambique

² Plekhanov Russian University of Economics

36, Stremyanny Lane, Moscow 117997, Russian Federation

О спектральных свойствах и положительности решений периодической краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения второго порядка

Мануэль Жоаким АЛВЕШ¹, Сергей Михайлович ЛАБОВСКИЙ²¹ Университет имени Эдуардо Мондлане

3453, Мозамбик, г. Мапуто, ул. Джулиуса Нейрере

² ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»

117997, Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер., 36

Abstract. For a functional-differential operator

$$\mathcal{L}u = (1/\rho) \left(-(pu')' + \int_0^l u(s) d_s r(x, s) \right)$$

with symmetry, the completeness and orthogonality of the eigenfunctions is shown. The positivity conditions of the Green function of the periodic boundary value problem are obtained.

Keywords: positive solutions; spectral properties

For citation: Alves M.J., Labovskiy S.M. O spektral'nykh svoystvakh i polozhitel'nosti resheniy periodicheskoy krayevoy zadachi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [On the spectral properties and positivity of solutions of a periodic boundary value problem for a second-order functional differential equation]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 123–130. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-123-130.

Аннотация. Для функционально-дифференциального оператора

$$\mathcal{L}u = (1/\rho) \left(-(pu')' + \int_0^l u(s) d_s r(x, s) \right)$$

с симметрией показаны полнота и ортогональность собственных функций. Получены условия положительности функции Грина периодической краевой задачи

Ключевые слова: положительные решения; спектральные свойства

Для цитирования: *Алвес М.Ж., Лабовский С.М.* О спектральных свойствах и положительности решений периодической краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения второго порядка. // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 123–130. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-123-130. (In Engl., Abstr. in Russian)

1. Generalized string Delay and deviation

Equation

$$-(pu')' + \int_0^l u(s) d_s r(x, s) = \rho(x) f(x), \quad x \in [0, l],$$

was considered in [1–3] as a generalization of the string equation. In this regard, we mention book [4] devoted to the general theory of functional differential equations. Note, that usually this functional differential equation is presented as an delayed equation. This is due to the focus on applications to dynamic systems. The string oscillation problem has various generalizations, including the problems of quantum mechanics. In such problems, the presence of delay is not characteristic. Here, symmetry is more important, which is reflected both *in delay and in advance*. However, we can speak about delay and advance only conditionally, since we are talking about a spatial variable. Bearing in mind the problem of string vibrations, it is natural to consider the Sturm-Liouville boundary conditions

$$k_0 u(0) - pu'|_{x=0} = k_1 u(l) + pu'|_{x=l} = 0.$$

Here we are dealing with the eigenvalue problem under periodic boundary conditions

$$-(p(x)u')' + R(x)u - \int_0^l u(s) d_s r(x, s) = \lambda \rho(x) u \quad (1.1)$$

$$u(0) = u(l), \quad pu'|_{x=0} = pu'|_{x=l}. \quad (1.2)$$

Function $r(x, \cdot)$ is assumed to be non-decreasing, and $r(x, 0) = 0$. In the second condition, expression pu' is considered as a quasi-derivative of function u .

Form (1.1) of the equation is not chosen by chance. In case $R(x) \geq r(x, l)$, it can be interpreted as the equation of a generalized loaded string. This mechanical interpretation allows us to predict the well-known properties of an ordinary string.

Assumptions. Notation

Under assumptions below, the boundary value problem $\mathcal{L}u = f$, (1.2), where the operator $\mathcal{L}$ is defined by the equality

$$\mathcal{L}u := \frac{1}{\rho(x)} \left(-(p(x)u')' + R(x)u - \int_0^l u(s) d_s r(x, s) \right), \quad (1.3)$$

has Fredholm property. Despite this, we use the variational method here, since our goal in particular is the properties of the eigenfunctions of Problem (1.1), (1.2).

the sign $:=$ means ‘equal by definition’

It is assumed that p , ρ and $r(\cdot, s)$ (for all s) are measurable, $p(x) \geq c > 0$, $\rho(x) > 0$, $0 \leq x \leq l$, $r(x, \cdot)$ does not decrease for almost all x , $r(x, 0) = 0$. Let

$$\xi(x, y) := \int_0^x r(s, y) ds. \quad (1.4)$$

Assume that ξ is symmetris, that is, $\xi(x, y) = \xi(y, x)$, $x, y \in [0, l]$.

Let $I := [0, l]$. In the space $L_2(I, \rho)$ of functions with integrable square on I the scalar product is defined by

$$(f, g) := \int_0^l f(x)g(x) \rho(x) dx. \quad (1.5)$$

In this section assume that $R(x) \geq r(x, l)$, R is measurable and integrable on $[0, l]$,

$$\int_0^l (R(x) - r(x, l)) dx > 0. \quad (1.6)$$

Introduce the bilinear form

$$[u, v] := \int_0^l (p(x)u'(x)v'(x) + R(x)uv) dx - \int_0^l dx v(x) \int_0^l u(s) d_s r(x, s). \quad (1.7)$$

Let W be the set of absolutely continuous on $[0, l]$ functions satisfying the conditions $[u, u] < \infty$ and

$$u(0) = u(l). \quad (1.8)$$

Variational method

We follow the scheme of the variational method in [1]. Let us consider the equation in variational form with relation to u

$$\begin{aligned} \int_0^l (p(x)u'(x)v'(x) + R(x)uv) dx - \int_0^l dx v(x) \int_0^l u(s) d_s r(x, s) \\ = \int_0^l f(x)v(x)\rho(x) dx. \end{aligned} \quad (1.9)$$

It can be presented in the short form

$$[u, v] = (f, Tv), \quad (\forall v \in W), \quad f \in L_2(I, \rho). \quad (1.10)$$

Form $[u, v]$ is a scalar product (Lemma 1.1) in Hilbert space W of all absolutely continuous on I functions satisfying the boundary condition $u(0) = u(l)$. Let $T: W \rightarrow L_2(I, \rho)$ be defined by the equality $Tu(x) = u(x)$. The image $T(W)$ of the operator T is dense in $L_2(I, \rho)$. The equation (1.9) with respect to u has unique solution $u = T^*f$. It is equivalent to equation $\mathcal{L}u = f$, where $\mathcal{L} := (T^*)^{-1}$. Operator $\mathcal{L}$ can be represented by (1.3) (Lemma 1.3). Thus, eigenvalue problem (1.1), (1.2) has the short form

$$\mathcal{L}u = \lambda Tu \quad (1.11)$$

Discreteness of spectrum of operator $\mathcal{L}$ is equivalent to compactness of the operator T . If T is compact, the eigenvalue problem has a system eigenfunctions u_n that forms an orthogonal basis in the space W . The system Tu_n forms an orthogonal basis in $L_2(I, \rho)$.

Theorem 1.1. *The equation (1.11) only has a nontrivial solution u_n in case of $\lambda = \lambda_n$, $n=1, 2, \dots$. The sequence λ_n is non-decreasing sequence of positive numbers and $\lim \lambda_n = \infty$ (if the sequence is infinite one). The system u_n forms an orthogonal basis in the space W .*

Green function and positivity of solutions

From the previous it follows that equation

$$-(p(x)u')' + R(x)u - \int_0^l u(s)d_sr(x, s) = \rho(x)f(x) \quad (1.12)$$

has a unique solution in W for any $f \in L_2(I, \rho)$. But it can be considered on the more wide class of functions with nonzero boundary conditions. Let us consider the problem (1.12) with nonzero conditions

$$u(0) - u(l) = 0, \quad (pu')|_{x=l} - (pu')|_{x=0} = \beta. \quad (1.13)$$

The Fredholm property of this problem can be shown as a generalization of problem (1.12), (1.2). However, we also refer to [4]. Since a homogeneous problem has only trivial solution, problem (1.12), (1.13) is uniquely solvable.

R e m a r k 1.1. We will use the fact [1] that the two-point boundary value problem

$$\mathcal{L}u = f, \quad u(0) = a, \quad u(l) = b \quad (1.14)$$

is uniquely solvable. Moreover, its solution is positive if $f \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\int_0^l f(x) dx + a + b > 0$ and if $a = b = 0$ then $(pu')(0) > 0$, $(pu')(l) < 0$.

Theorem 1.2. *If $\beta > 0$ the solution of the problem $\mathcal{L}u = 0$, (1.13) is positive on $[0, l]$.*

P r o o f. First, we note that the solution to problem $\mathcal{L}u = 0$, $u(0) = u(l) = 1$ is strictly positive (Remark 1.1). Let $v = 1 - u$. Then $\mathcal{L}v = \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}u = R(x) - r(x, l) \geq 0$. Thus, $v \geq 0$ and $u \leq 1$. From here $(pu')(l) \geq 0$, $(pu')(0) \leq 0$. Since u is nontrivial solution, it is proportional to the solution of $\mathcal{L}u = 0$, (1.13). $\square$

Theorem 1.3. *Suppose $f \geq \not= 0$ and $u(x)$ is the solution of the problem (1.12) under boundary condition (1.2). Then $u(x) > 0$ on $[0, l]$.*

P r o o f. If $u(0) = u(l) = \alpha > 0$, then u is a solution to problem $\mathcal{L}u = f$, $u(0) = u(l) = \alpha$, which is positive (Remark 1.1). Suppose $\alpha \leq 0$. Let $v(x) = u(x) - \alpha$. Then $\mathcal{L}v = f - \alpha(R(x) - r(x, l)) \geq 0$. Thus v is solution to problem $\mathcal{L}v \geq 0$, $v(0) = v(l) = 0$. Thus $v \geq 0$. But u is not a constant. Thus $pv'(0) > 0$, $pv'(l) < 0$ that contradicts (1.2). $\square$

R e m a r k 1.2. This statement also follows from the differential inequality theorem. This theorem 2.1 is considered below for more general case of equation. Put $v = 1$ in inequality (2.7). Then we have $R(x) - r(x, l) \geq \not= 0$ in view of (1.6).

Auxiliary propositions

Lemma 1.1. *The set W with the inner product $[u, v]$ defined by (1.7) is a Hilbert space.*

P r o o f. If $u \neq \text{const}$ then $[u, u] \geq \int_0^l p(u')^2 dx > 0$ because of the condition: $p > 0$ almost everywhere on $[0, l]$. If $u = \text{const} \neq 0$ then $[u, u] > 0$ in view of (1.6). Thus if $[u, u] = 0$ then $u = 0$, thence $[u, v]$ is a positive definite form.

To prove the completeness of W consider a Cauchy sequence $\{u_n\}$ in W . Then $\{u'_n\}$ is a Cauchy sequence in $L_2(I, p)$. Denote $\varphi = \lim u'_n$ in $L_2(I, p)$. Since $p \geq \text{const} > 0$,

$$\int_0^l \varphi(x) dx < \infty.$$

Let $u(x) = c + \int_0^x \varphi(s) ds$ where $c = \lim u_n(0)$ (it can be shown that $u_n(0)$ is a Cauchy sequence).

The remaining part of the proof can be realized in the same manner as it was done in [2]. $\square$

Lemma 1.2. *$W \subset L_2(I, \rho)$ and the embedding operator $T: W \rightarrow L_2(I, \rho)$ is continuous.*

P r o o f. From the Bunyakovsky inequality

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x u'(s) ds \right)^2 &= \left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(s)}} \sqrt{p(s)} u'(s) ds \right)^2 \\ &\leq \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \int_0^x p(s) u'(s)^2 ds \leq \int_0^x \frac{ds}{p(s)} \cdot [u, u]. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \int_0^l u^2 \rho dx &= \int_0^l \left(u(0) + \int_0^x u'(s) ds \right)^2 \rho dx \\ &= u(0)^2 \int_0^l \rho dx + 2u(0) \int_0^l \left(\int_0^x u'(s) ds \right) \rho dx + \int_0^l \left(\int_0^x u'(s) ds \right)^2 \rho dx. \end{aligned}$$

Since $[u, u] \geq \int_0^l \rho u^2 dx$, it is easy to show that $u(0)^2 \leq C \cdot [u, u]$ where C doesn't depend on u . $\square$

Lemma 1.3. *Operator $\mathcal{L}$ has representation (1.3), under boundary conditions (1.2).*

P r o o f. To find a representation of the operator $\mathcal{L} = (T^*)^{-1}$ we use the relation (1.10), $u = T^* f$ or $[u, v] = (f, Tv)$, $\forall v \in W$, or (1.9). Thus

$$\begin{aligned} \int_0^l p(x) u' v' dx &= - \int_0^l R(x) uv dx + \int_0^l dx v(x) \int_0^l u(s) d_s r(x, s) \\ &\quad + \int_0^l f(x) v(x) \rho(x) dx = - \int_0^l h' v dx, \end{aligned}$$

where

$$h' = R(x)u - \int_0^l u(s) d_s r(x, s) - f(x)\rho(x).$$

Let $v(0) = v(l) = 0$ in

$$-\int_0^l h'v dx = -v(l)h(l) + v(0)h(0) + \int_0^l hv' dx.$$

We have from here $pu' = h + \text{const}$. Furthermore $-v(l)h(l) + v(0)h(0) = 0$ and $h(l) = h(0)$ because of $v(0) = v(l)$. Since $pu' = h + \text{const}$, pu' is absolutely continuous one (or is equivalent to). Thus

$$-(pu')' + Ru - \int_0^l u(s) d_s r(x, s) = f\rho$$

and $\mathcal{L}$ has representation (1.3).

Note that $(pu')(l) = (pu')(0)$ because of $h(l) = h(0)$. Thus u is a solution of the boundary value problem

$$-(pu')' + qu - \int_0^l (u(y) - u(x)) d_y r(x, y) = \rho f, \quad (1.15)$$

$$u(0) = u(l), \quad (pu')(0) = (pu')(l). \quad (1.16)$$

□

2. General case

In this second part we remove the restriction $R(x) \geq r(x, l)$. The condition of symmetry of function ξ defined by equality (1.4) is also removed.

In this case, the Green function can already change sign. We state a theorem on differential inequality, which serves as a necessary and sufficient condition for the positivity of the Green's function. The general scheme is simple, it is similar to how it was done in [1].

$$-(p(x)u')' + R(x)u - \int_0^l u(s) d_s r(x, s) = \rho(x)f(x). \quad (2.1)$$

Our equation (2.1) can be presented in the form $\mathcal{L}u = f$ where $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - Q$,

$$\mathcal{L}_0 u := \frac{1}{\rho} \left(-(pu')' + R(x)u - \int_0^l u(s) d_s r_0(x, s) \right), \quad (2.2)$$

$$Qu := \int_0^l u(s) d_s q(x, s). \quad (2.3)$$

Function r_0 must be chosen so that inequality

$$R(x) \geq r_0(x, l) \quad (2.4)$$

holds. Then $q = r - r_0$. We require function q to be non-decreasing:

$$q(x, s) := \begin{cases} 0, & \text{if } r(x, s) \leq R(x), \\ r(x, s) - R(x), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.5)$$

It is only necessary to make a small correction so that condition

$$\int_0^l (R(x) - r_0(x, l)) dx > 0 \quad (2.6)$$

is satisfied. Assume that r_0 satisfies the symmetry condition

$$\xi_0(x, y) = \xi(y, x),$$

where $\xi_0(x, y) := \int_0^x r(s, y) ds$.

Positive solutions

The question of the positivity of the Green's function, and therefore of the positivity of the solutions of the boundary value problem, is solved by the necessary and sufficient condition in the theorem about differential inequality.

Theorem 2.1. *Let function $v \geq 0$ satisfy the differential inequality*

$$\mathcal{L}v \geq \neq 0 \quad (2.7)$$

and boundary conditions (1.2). Then the problem (2.1), (1.2) uniquely solvable and if $f \geq \neq 0$ then $u(x) > 0$, $x \in [0, l]$.

This theorem is proved in the same way as in [1].

References

- [1] S. Labovskiy, "On spectral problem and positive solutions of a linear singular functional-differential equation", *Functional Differential Equations*, **20**:3-4 (2013), 179–200.
- [2] S. M. Labovskii, "On the Sturm-Liouville problem for a linear singular functional-differential equation", *Russ. Math.*, **40**:11 (1996), 50-56.
- [3] S. Labovskii, "Little vibrations of an abstract mechanical system and corresponding eigenvalue problem", *Functional Differential Equations*, **6**:1-2 (1999), 155-167.
- [4] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications.*, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2007.

Information about the authors

Manuel J. Alves, PhD in Mathematics, Full Professor of the Mathematics Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: mjalves@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3713-155X>

Информация об авторах

Алвеш Мануэль Жоаким, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики. Университет имени Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик. E-mail: mjalves@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3713-155X>

Sergey M. Labovskiy, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the High Mathematics Department. Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russian Federation. E-mail: labovski@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7305-4630>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Sergey M. Labovskiy
E-mail: labovski@gmail.com

Received 1 April 2020

Reviewed 20 May 2020

Accepted for press 8 June 2020

Лабовский Сергей Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: labovski@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7305-4630>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Лабовский Сергей Михайлович
E-mail: labovski@gmail.com

Поступила в редакцию 1 апреля 2020 г.

Поступила после рецензирования 20 мая 2020 г.

Принята к публикации 8 июня 2020 г.

© Барсегян В.Р., Солодуша С.В., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-131-146

УДК 517.977: 534.112

**Задача граничного управления колебаниями струны
смещением левого конца при закреплённом правом конце
с заданными значениями функции прогиба
в промежуточные моменты времени**

Ваня Рафаелович БАРСЕГЯН^{1,2}, Светлана Витальевна СОЛОДУША³

¹ Институт механики НАН Республики Армения

0019, Армения, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б

² Ереванский государственный университет

0025, Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

³ ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН»

664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130

**The problem of boundary control of string vibrations
by displacement of the left end when the right end is fixed
with the given values of the deflection function
at intermediate times**

Vanya R. BARSEGHYAN^{1,2}, Svetlana V. SOLODUSHA³

¹ Institute of Mechanics NAS RA

24B Marshal Baghramyan Ave., Yerevan 0019, Armenia

² Yerevan State University

1 Alec Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

³ Melentiev Energy Systems Institute SB RAS

130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается задача граничного управления колебаниями однородной струны, для которой наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями заданы значения функции прогиба в промежуточные моменты времени. Задача управления смещением одного конца струны при закреплённом другом конце сведена к задаче управления с нулевыми граничными условиями. Предложен конструктивный метод построения граничного управления процессом колебаний струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени. Проведен вычислительный эксперимент и построены соответствующие графики, которые подтверждают полученные результаты.

Ключевые слова: колебания струны; управление колебаниями; граничное управление; управление промежуточными состояниями; разделение переменных

Благодарности: Работа выполнена при частичной поддержке программы фундаментальных исследований СО РАН (рег. № AAAA-A17-117030310442-8).

Для цитирования: Барсегян В.Р., Солодуша С.В. Задача граничного управления колебаниями струны смещением левого конца при закреплённом правом конце с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 131–146. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-131-146.

Abstract. We consider the boundary control problem for the homogeneous string vibration equation with given the classical boundary (initial and final) conditions and with given values of the deflection function at intermediate times. The control is performed by displacement of the left end of the string when the right end is fixed. The problem is reduced to the control problem with zero boundary conditions. We propose the constructive method for constructing the boundary control of the process of string vibrations with given values of the deflection function at intermediate times. We present the results of numerical experiments and the corresponding graphs confirm the validity of the results.

Keywords: string vibrations; vibration control; boundary control; intermediate state control; separation of variables

Acknowledgements: The research is partly supported by the Fundamental Research of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (reg. no. AAAA-A17-117030310442-8).

For citation: Barseghyan V.R., Solodusha S.V. Zadacha granichnogo upravleniya kolebaniyami struny smeshcheniyem levogo kontsa pri zakreplennom pravom kontse s zadannymi znacheniyami funktsii progiba v promezhutochnyye momenty vremeni [The problem of boundary control of string vibrations by displacement of the left end when the right end is fixed with the given values of the deflection function at intermediate times]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 131–146. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-131-146. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Волновыми уравнениями моделируется широкий спектр физических процессов, которые связаны с колебаниями. Управляемые колебательные системы широко распространены в промышленности, технике, механике и других теоретических и прикладных областях науки. Одной из актуальных прикладных задач управления колебаниями является генерация заранее заданной «желаемой» формы колебаний.

В связи с многочисленными приложениями и важным теоретическим значением вопросы управления колебательными процессами с различными типами граничных условий достаточно давно интересуют исследователей и им посвящена многочисленная литература (см., например, монографии [1–3] и их библиографию). Приведем ссылки на некоторые работы, наиболее близко относящиеся к настоящей статье. В [3] для задачи управления упругими колебаниями, описываемыми одномерным волновым уравнением, предложены способы нахождения граничных управлений. Проблема граничного управления и оптимального управления волновыми процессами в классе обобщенных решений рассмотрена в [4, 5]. Отметим, что в [5] изучена классическая задача граничного управления колебаниями струны, которое осуществляется за период времени меньше критического, получены необходимые и достаточные условия существования единственного управления. В работах [6–9] даны различные постановки задач граничного и распределенного управления, а также оптимального управления колебаниями струны с заданными промежуточными состояниями. В [10] рассмотрена задача граничного управления, а в [11] — оптимального граничного управления смещениями на двух концах процессом вынужденных колебаний струны. В работе [12] предложен метод приближенного построения оптимального управления процессом колебаний струны за счет задания режима колебаний ее концов. В работах [13, 14] рассматривается граничная задача для уравнения колебания струны с заданной в некоторый момент времени скоро-

стью и строится ее решение. Управление системами, динамика которых моделируется дифференциальными уравнениями с промежуточными условиями, является актуальным и активно развиваемым направлением современной теории управления.

В настоящей работе исследуются колебания однородной струны с заданными функциями прогиба в некоторые фиксированные моменты времени. Предложен конструктивный метод построения граничного управляющего воздействия. Построено граничное управление, под воздействием которого функция прогиба струны принимает в промежуточные моменты времени заданные (или близкие к заданным) значения. Проведен вычислительный эксперимент и построены соответствующие графики, которые подтверждают полученные результаты.

1. Постановка задачи

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания натянутой струны), т. е. отклонение от состояния равновесия, описывается функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $t > 0$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$Q(0, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

Здесь функция $u(t)$ — граничное управление. В уравнении (1.1) коэффициент определяется формулой $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны. Предполагается, что $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [0, l], t \in [0, T]\}$.

Пусть в некоторые моменты времени t_k , $k = \overline{1, m}$, такие что

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T,$$

заданы значения состояния

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.4)$$

Задача граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени ставится следующим образом: среди возможных управлений $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, требуется найти управление, переводящее систему из заданного начального состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние

$$Q(x, T) = \varphi_T(x) \equiv \varphi_{m+1}(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.5)$$

Будем предполагать, что функции $\varphi_i(x)$, $i = \overline{0, m+1}$, принадлежат пространству $C^2[0, l]$, а функции $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$ — пространству $C^1[0, l]$. Функция $u(t) \in C^2[0, T]$ называется допустимым управлением. Предполагается также, что все функции таковы, что выполняются условия согласования (см. раздел 2).

2. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями

Так как граничные условия (1.3) неоднородны, решение поставленной задачи сводим к задаче с нулевыми граничными условиями (см. [15]). Решение уравнения (1.1) ищем в виде суммы

$$Q(x, t) = V(x, t) + W(x, t), \quad (2.1)$$

где $V(x, t)$ — неизвестная функция, удовлетворяющая уравнению (1.1) с однородными граничными условиями

$$V(0, t) = V(l, t) = 0, \quad (2.2)$$

а $W(x, t)$ — решение уравнения (1.1) с неоднородными граничными условиями

$$W(0, t) = u(t), \quad W(l, t) = 0.$$

Функция $W(x, t)$ имеет вид

$$W(x, t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u(t). \quad (2.3)$$

Подставив (2.1) в (1.1) и учитывая (2.3), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x, t), \quad (2.4)$$

где

$$F(x, t) = \left(\frac{x}{l} - 1\right) u''(t). \quad (2.5)$$

В силу начальных, промежуточных и граничных условий, соответственно (1.2), (1.4) и (1.5), функция $V(x, t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u(0), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u'(0), \quad (2.6)$$

промежуточным условиям

$$V(x, t_i) = \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u(t_i), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.7)$$

и конечным условиям

$$V(x, T) = \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u(T), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) u'(T). \quad (2.8)$$

Из условия (2.2) следует

$$V(0, t_i) = V(l, t_i) = 0, \quad \left. \frac{\partial V(0, t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} = \left. \frac{\partial V(l, t)}{\partial t} \right|_{t=t_i} = 0, \quad i = \overline{0, m+1}. \quad (2.9)$$

Из условий (2.6), (2.7) и (2.8) с учетом (2.9) получим следующие условия согласования:

$$u(0) = \varphi_0(0), \quad u'(0) = \psi_0(0), \quad \varphi_0(l) = \psi_0(l) = 0, \quad (2.10)$$

$$u(t_i) = \varphi_i(0), \quad \varphi_i(l) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.11)$$

$$u(T) = \varphi_T(0), \quad u'(T) = \psi_T(0), \quad \varphi_T(l) = \psi_T(l) = 0. \quad (2.12)$$

С учетом условий (2.10)–(2.12), условия (2.6)–(2.8) запишутся следующим образом:

$$V(x, 0) = \varphi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_0(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_0(0), \quad (2.13)$$

$$V(x, t_i) = \varphi_i(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_i(0), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.14)$$

$$V(x, T) = \varphi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \varphi_T(0), \quad \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) + \left(\frac{x}{l} - 1\right) \psi_T(0). \quad (2.15)$$

Таким образом, решение задачи граничного управления колебаниями струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени сведена к задаче управления (2.4), (2.5) с граничными условиями (2.2), которая формулируется следующим образом: требуется найти граничное управление $u(t)$ при $0 \leq t \leq T$, переводящее колебание, описываемое уравнением (2.4) с граничными условиями (2.2), из заданного начального состояния (2.13) через промежуточные состояния (2.14) в конечное состояние (2.15).

3. Решение задачи

Учитывая, что граничные условия (2.2) однородны, выполнены условия согласованности и принадлежности функций указанным пространствам, решение уравнения (2.4) будем искать в виде

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x. \quad (3.1)$$

Представим функции $F(x, t)$, $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{0, m+1}$), $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$ в виде рядов Фурье и, подставив их значения вместе с $V(x, t)$ в уравнения (2.4), (2.5) и в условия (2.13)–(2.15), получим

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2, \quad (3.2)$$

$$V_k(0) = \varphi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_0(0), \quad \dot{V}_k(0) = \psi_k^{(0)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_0(0), \quad (3.3)$$

$$V_k(t_i) = \varphi_k^{(i)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_i(0), \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.4)$$

$$V_k(T) = \varphi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \varphi_T(0), \quad \dot{V}_k(T) = \psi_k^{(T)} - \frac{2a}{\lambda_k l} \psi_T(0), \quad (3.5)$$

где

$$F_k(t) = -\frac{2a}{\lambda_k l} u''(t), \quad (3.6)$$

а через $\varphi_k^{(i)}$ ($i = \overline{0, m+1}$), $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ обозначены соответственно коэффициенты Фурье функций $\varphi_i(x)$ ($i = \overline{0, m+1}$), $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$.

Общее решение уравнения (3.2) с начальными условиями (3.3) и его производная имеют вид

$$\begin{aligned} V_k(t) &= V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau, \\ \dot{V}_k(t) &= -\lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t + \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t + \int_0^t F_k(\tau) \cos \lambda_k(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь используем подходы и преобразования, приведенные в работах [16, 17]. Учитывая промежуточные (3.4) и конечные (3.5) условия, из (3.7) получим, что функции $F_k(\tau)$ для каждого k должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{aligned} \int_0^T F_k(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= \tilde{C}_{1k}(T), \\ \int_0^T F_k(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= \tilde{C}_{2k}(T), \\ \int_0^{t_j} F_k(\tau) \sin \lambda_k(t_j - \tau) d\tau &= \tilde{C}_{1k}(t_j), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1k}(T) &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k}(T) &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{1k}(t_j) &= \lambda_k V_k(t_j) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k t_j - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t_j. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подставляя выражение (3.6) функции $F_k(t)$ в (3.8) и интегрируя по частям с учетом условий (2.10)–(2.12), получим

$$\begin{aligned} \int_0^T u(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}(T), \quad \int_0^T u(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \\ \int_0^T u(\tau) h_k^{(1)}(\tau) d\tau &= C_{1k}(t_1), \quad \dots, \quad \int_0^T u(\tau) h_k^{(m)}(\tau) d\tau = C_{1k}(t_m), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(T) + X_{1k} \right], \\ C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{2k}(T) + X_{2k} \right], \\ C_{1k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{2a} \tilde{C}_{1k}(t_j) + X_{1k}^{(j)} \right], \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} X_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(0) - \psi_0(0) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(0) \cos \lambda_k T, \\ X_{2k} &= \psi_T(0) - \psi_0(0) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(0) \sin \lambda_k T, \\ X_{1k}^{(j)} &= \lambda_k \varphi_j(0) - \psi_0(0) \sin \lambda_k t_j - \lambda_k \varphi_0(0) \cos \lambda_k t_j, \end{aligned}$$

$$h_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.12)$$

Введем следующие обозначения:

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k (T - \tau) \\ \cos \lambda_k (T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) \\ \vdots \\ h_k^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, \dots, t_m, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \\ \vdots \\ C_{1k}(t_m) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Тогда соотношение (3.10) запишется следующим образом:

$$\int_0^T \bar{H}_k(\tau) u(\tau) d\tau = C_k(t_1, \dots, t_m, T), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Таким образом, для нахождения функции $u(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, получили бесконечные интегральные соотношения (3.14). На практике на основе модального метода выбираются несколько первых n гармоник упругих колебаний и решается задача синтеза управления, используя методы теории управления конечномерными системами [16, 17]. Следуя модальному методу, для первых n гармоник введем следующие обозначения блочных матриц:

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{H}_1(\tau) \\ \bar{H}_2(\tau) \\ \vdots \\ \bar{H}_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} C_1(t_1, \dots, t_m, T) \\ C_2(t_1, \dots, t_m, T) \\ \vdots \\ C_n(t_1, \dots, t_m, T) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

имеющих одинаковые размерности, равные $n(m+2) \times 1$.

Для первых n гармоник с учетом (3.15) из (3.14) будем иметь

$$\int_0^T H_n(\tau) u_n(\tau) d\tau = \eta_n \quad (3.16)$$

(здесь и далее обозначение в нижнем индексе буквы n будет означать «для первых n гармоник»).

На основе вышеприведенного, для произвольных чисел первых гармоник граничное управляющее воздействие $u_n(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (3.16), построено в виде [16–18]

$$u_n(t) = H_n^T(t) S_n^{-1} \eta_n + f_n(t), \quad (3.17)$$

где $H_n^T(t)$ — транспонированная матрица, $f_n(t)$ — некоторая вектор-функция, такие что

$$\int_0^T H_n(t) f_n(t) dt = 0, \quad S_n = \int_0^T H_n(t) H_n^T(t) dt. \quad (3.18)$$

Здесь $H_n(t) H_n^T(t)$ — внешнее произведение, S_n — известная матрица размерности $n(m+2) \times n(m+2)$, относительно которой предполагается, что $\det S_n \neq 0$.

Из (3.16) следует, что первые n гармоник системы (3.2) с условиями (3.3)–(3.5) вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n из (3.15) можно найти управление $u_n(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (3.17).

Подставляя (3.17) в (3.6), а полученное для $F_k(t)$ выражение — в (3.7), получим функцию $V_k(t)$, $t \in [0, T]$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь $V(x, t)$, а согласно (2.1), получим функцию $Q(x, t)$ прогиба струны для первых n гармоник.

4. Случай $m = 1$

Рассмотрим случай $m = 1$, т. е. когда в одном промежуточном моменте времени t_1 ($0 < t_1 < T$) задано состояние точек струны: $Q(x, t_1) = \varphi_1(x)$, $0 \leq x \leq l$.

В этом случае, согласно формулам (3.10)–(3.12), будем иметь следующие интегральные соотношения:

$$\begin{aligned} \int_0^T u(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}(T), \quad \int_0^T u(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau = C_{2k}(T), \\ \int_0^T u(\tau) h_k^{(1)}(\tau) d\tau &= C_{1k}(t_1), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (3.13),

$$\bar{H}_k(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \lambda_k(T - \tau) \\ \cos \lambda_k(T - \tau) \\ h_k^{(1)}(\tau) \end{pmatrix}, \quad C_k(t_1, T) = \begin{pmatrix} C_{1k}(T) \\ C_{2k}(T) \\ C_{1k}(t_1) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для простоты построим функцию граничного управления $u_n(t)$ при $n = 1$ (следовательно, $k = 1$). Тогда, согласно (3.15), будем иметь $H_1(\tau) = \bar{H}_1(\tau)$, $\eta_1 = C_1(t_1, T)$, а из (3.18) получим

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^T H_1(\tau) H_1^T(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} \sin^2 \lambda_1(T - \tau) & \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) \sin \lambda_1(T - \tau) \\ \frac{1}{2} \sin 2\lambda_1(T - \tau) & \cos^2 \lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) \cos \lambda_1(T - \tau) \\ h_1^{(1)}(\tau) \sin \lambda_1(T - \tau) & h_1^{(1)}(\tau) \cos \lambda_1(T - \tau) & (h_1^{(1)}(\tau))^2 \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

Элементы матрицы S_1 , согласно обозначениям (3.12), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, \quad s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, \quad s_{22} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, \\ s_{13} = s_{31} &= \int_0^{t_1} \sin \lambda_1(t_1 - \tau) \sin \lambda_1(T - \tau) d\tau = \frac{t_1}{2} \cos \lambda_1(T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T, \\ s_{23} = s_{32} &= \int_0^{t_1} \sin \lambda_1(t_1 - \tau) \cos \lambda_1(T - \tau) d\tau = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1(T - t_1), \\ s_{33} &= \int_0^{t_1} \sin^2 \lambda_1(t_1 - \tau) d\tau = \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1, \end{aligned}$$

при этом $\Delta = \det S_1 \neq 0$.

Пусть $\hat{s}_{ij}$ ($i, j = \overline{1, 3}$) — элементы матрицы S_1^{-1} , так что

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{s}_{11} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) - \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right)^2 \right],$$

$$\hat{s}_{12} = \hat{s}_{21} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) \right],$$

$$\hat{s}_{13} = \hat{s}_{31} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) - \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) \left(\frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \right],$$

$$\hat{s}_{22} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1 \right) - \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right)^2 \right],$$

$$\hat{s}_{23} = \hat{s}_{32} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T \left(\frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T \right) - \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right) \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1) \right) \right],$$

$$\hat{s}_{33} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{T^2}{4} - \left(\frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T \right)^2 - \left(\frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T \right)^2 \right].$$

Из формулы (3.17) следует, что

$$u_1(\tau) = H_1^T(\tau) S_1^{-1} \eta_1 + f_1(\tau).$$

Предполагая, что $f_1(\tau) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} u_1(\tau) = & \sin \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{11} C_{11}(T) + \hat{s}_{12} C_{21}(T) + \hat{s}_{13} C_{11}(t_1)] + \\ & + \cos \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{21} C_{11}(T) + \hat{s}_{22} C_{21}(T) + \hat{s}_{23} C_{11}(t_1)] + \\ & + \sin \lambda_1 (t_1 - \tau) [\hat{s}_{31} C_{11}(T) + \hat{s}_{32} C_{21}(T) + \hat{s}_{33} C_{11}(t_1)] \quad \text{при } \tau \in [0, t_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(\tau) = & \sin \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{11} C_{11}(T) + \hat{s}_{12} C_{21}(T) + \hat{s}_{13} C_{11}(t_1)] + \\ & + \cos \lambda_1 (T - \tau) [\hat{s}_{21} C_{11}(T) + \hat{s}_{22} C_{21}(T) + \hat{s}_{23} C_{11}(t_1)] \quad \text{при } \tau \in (t_1, T]. \end{aligned}$$

Отметим, что по аналогии с приведенными в конце раздела 3 формулами можно выписать выражение для функции $Q(x, t)$ при $n = 1$.

5. Пример с вычислительным экспериментом

Предположим, что $t_1 = l/a$, $T = 2l/a$. Тогда с учетом $\lambda_1 = a\pi/l$ получим $t_1\lambda_1 = \pi$, $T\lambda_1 = 2\pi$, $\lambda_1(T - t_1) = \pi$. Для матриц S_1 и S_1^{-1} будем иметь:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{\lambda_1} & 0 & -\frac{t_1}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{\lambda_1} & 0 \\ -\frac{t_1}{2} & 0 & \frac{t_1}{2} \end{pmatrix}, \quad S_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1}{\pi} & 0 & \frac{2\lambda_1}{\pi} \\ 0 & \frac{\lambda_1}{\pi} & 0 \\ \frac{2\lambda_1}{\pi} & 0 & \frac{4}{t_1} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\det S_1 = \pi^2 t_1 / (4\lambda_1^2)$. Из формул (3.9) и (3.11) получим

$$\begin{aligned} C_{11}(T) &= \frac{l}{2a} (V_1(T) - V_1(0)) + \frac{\varphi_T(0) - \varphi_0(0)}{\lambda_1}, \\ C_{21}(T) &= \frac{l}{2a\lambda_1} (\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)) + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1^2}, \\ C_{11}(t_1) &= \frac{l}{2a} (V_1(t_1) + V_1(0)) + \frac{\varphi_1(0) + \varphi_0(0)}{\lambda_1}, \end{aligned}$$

а для управления получим

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= \cos \lambda_1 \tau \left(\frac{\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)}{2\lambda_1} + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1 \pi} \right) + \\ &\quad + \sin \lambda_1 \tau \left(V_1(t_1) + V_1(0) + \frac{2}{\pi} (\varphi_1(0) + \varphi_0(0)) \right) \quad \text{при } \tau \in [0, t_1], \\ u_1(\tau) &= \cos \lambda_1 \tau \left(\frac{\dot{V}_1(T) - \dot{V}_1(0)}{2\lambda_1} + \frac{\psi_T(0) - \psi_0(0)}{\lambda_1 \pi} \right) - \\ &\quad - \sin \lambda_1 \tau \left(V_1(T) + V_1(t_1) + \frac{2}{\pi} (\varphi_T(0) + \varphi_1(0)) \right) \quad \text{при } \tau \in (t_1, T]. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что $a = 1/3$, $l = 1$, тогда $t_1 = 3$, $T = 6$. Из формулы (3.7) с учетом, что $F_1(t) = -2a u_1''(t) / (\lambda_1 l)$, получим

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \left(V_1(0) - \frac{t(V_1(0) + V_1(3))}{3} \right) \cos \frac{\pi}{3} t + \\ &\quad + \left(\frac{3\dot{V}_1(0)}{\pi} + \frac{V_1(0) + V_1(3)}{\pi} + \frac{t(\dot{V}_1(6) - \dot{V}_1(0))}{2\pi} \right) \sin \frac{\pi}{3} t \quad \text{при } t \in [0, 3], \\ V_1(t) &= \left(\frac{t(V_1(6) + V_1(3))}{3} - (2V_1(3) + V_1(6)) \right) \cos \frac{\pi}{3} t + \\ &\quad + \left(\frac{3\dot{V}_1(0)}{\pi} - \frac{V_1(3) + V_1(6)}{\pi} + \frac{t(\dot{V}_1(6) - \dot{V}_1(0))}{2\pi} \right) \sin \frac{\pi}{3} t \quad \text{при } t \in (3, 6]. \end{aligned}$$

Из формул (2.1), (2.3) и (3.1) имеем

$$Q_1(x, t) = V_1(t) \sin \frac{\pi}{l} x + \left(1 - \frac{x}{l} \right) u_1(t).$$

Здесь через $Q_1(x, t)$ обозначена функция, которая получается из формулы (2.1) при подстановке первого слагаемого ряда (3.1).

Пусть при $t = 0$

$$\varphi_0(x) = -\frac{2x^3}{3} + 2x^2 - \frac{4x}{3}, \quad \psi_0(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{x}{3},$$

промежуточное состояние при $t = t_1 = 3$

$$\varphi_1(x) = x^3 - 3x^2 + 2x,$$

конечное состояние при $t = T = 6$

$$\varphi_T(x) = 0, \quad \psi_T(x) = 0.$$

Коэффициенты рядов Фурье функций φ_0 , ψ_0 , φ_1 , φ_T , ψ_T соответственно равны:

$$\varphi_1^{(0)} = -\frac{8}{\pi^3}, \quad \psi_1^{(0)} = \frac{8}{3\pi^3}, \quad \varphi_1^{(1)} = \frac{12}{\pi^3}, \quad \varphi_1^{(T)} = 0, \quad \psi_1^{(T)} = 0.$$

Значения этих функций на краях струны следующие:

$$\varphi_0(0) = \varphi_T(0) = \varphi_1(0) = \psi_T(0) = \psi_0(0) = \varphi_0(1) = \varphi_T(1) = \varphi_1(1) = \psi_T(1) = \psi_0(1) = 0.$$

Из (3.3)–(3.5) получаем

$$V_1(0) = -\frac{8}{\pi^3}, \quad \dot{V}_1(0) = \frac{8}{3\pi^3}, \quad V_1(3) = \frac{12}{\pi^3}, \quad V_1(6) = \dot{V}_1(6) = 0.$$

Следовательно, для функций $u_1(t)$ и $V_1(t)$ при $t \in [0, 3]$ имеем:

$$u_1(t) = -\frac{4}{\pi^4} \cos \frac{\pi}{3}t + \frac{4}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{3}t, \quad V_1(t) = \left(-\frac{8}{\pi^3} - \frac{4t}{3\pi^3}\right) \cos \frac{\pi}{3}t + \left(\frac{12}{\pi^4} - \frac{4t}{3\pi^4}\right) \sin \frac{\pi}{3}t,$$

а при $t \in (3, 6]$ имеем:

$$u_1(t) = -\frac{4}{\pi^4} \cos \frac{\pi}{3}t - \frac{12}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{3}t, \quad V_1(t) = \left(-\frac{24}{\pi^3} + \frac{4t}{\pi^3}\right) \cos \frac{\pi}{3}t - \left(\frac{4}{\pi^4} + \frac{4t}{3\pi^4}\right) \sin \frac{\pi}{3}t.$$

Значение функции $u_1(t)$ в конечный момент первого промежутка совпадает со значением в начале второго промежутка и $u_1(3) = 4/\pi^4$. Отметим, что для функции $u_1(t)$ получается следующая оценка:

$$\max_{t \in [0, 6]} |u_1(t)| = \frac{4}{\pi^4} \sqrt{1 + 9\pi^2} \approx 0,3892.$$

График поведения функции $u_1(t)$ приведен на рис. 1.

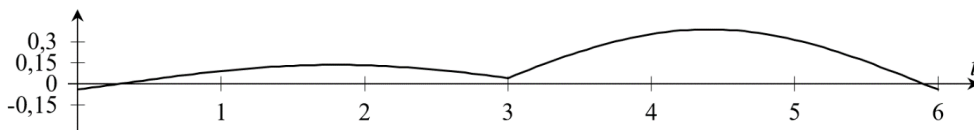


Рис. 1. График функции $u_1(t)$

Для функции прогиба $Q_1(x, t)$ имеем следующие явные выражения:

$$Q_1(x, t) = \left[\left(-\frac{8}{\pi^3} - \frac{4t}{3\pi^3} \right) \cos \frac{\pi}{3}t + \left(\frac{12}{\pi^4} - \frac{4t}{3\pi^4} \right) \sin \frac{\pi}{3}t \right] \sin \pi x +$$

$$+ \left(-\frac{4}{\pi^4} \cos \frac{\pi}{3}t + \frac{4}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{3}t \right) (1-x) \quad \text{при} \quad t \in [0, 3],$$

$$Q_1(x, t) = \left[\left(-\frac{24}{\pi^3} + \frac{4t}{\pi^3} \right) \cos \frac{\pi}{3}t - \left(\frac{4}{\pi^4} + \frac{4t}{3\pi^4} \right) \sin \frac{\pi}{3}t \right] \sin \pi x +$$

$$+ \left(-\frac{4}{\pi^4} \cos \frac{\pi}{3}t - \frac{12}{\pi^3} \sin \frac{\pi}{3}t \right) (1-x) \quad \text{при} \quad t \in (3, 6].$$

Можно проверить, что выражение функции прогиба $Q_1(x, 3)$ в конечный момент первого промежутка совпадает с выражением в начале второго промежутка и имеет следующий вид:

$$Q_1(x, 3) = \frac{12}{\pi^3} \sin \pi x + \frac{4}{\pi^4} (1-x).$$

Функция прогиба струны в момент времени $t = 0$ имеет вид:

$$Q_1(x, 0) = -\frac{8}{\pi^3} \sin \pi x + \frac{4}{\pi^4} (x-1).$$

Сравнивая построенную функцию $Q_1(x, 0)$ с заданной функцией $\varphi_0(x)$, получим, что

$$\max_{x \in [0,1]} |Q_1(x, 0) - \varphi_0(x)| \approx 0,0411.$$

Небольшое расхождение в поведении этих функций иллюстрируется на графике (рис. 2).

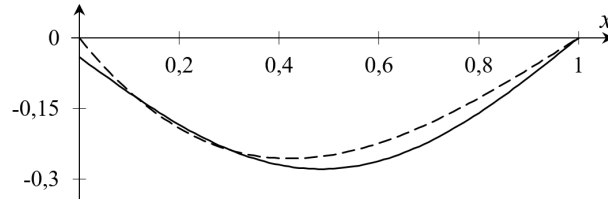


Рис. 2. Графики функций $Q_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\varphi_0(x)$ (пунктирная линия)

Вычислим

$$\left. \frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{Q}_1(x, 0) = \frac{8}{3\pi^3} \sin \pi x + \frac{4}{3\pi^2} (1-x)$$

и сравним $\dot{Q}_1(x, 0)$ с заданной функцией $\psi_0(x)$. Получим, что

$$\max_{x \in [0,1]} |\dot{Q}_1(x, 0) - \psi_0(x)| \approx 0,1351.$$

Графики этих функций приведены на рис. 3.

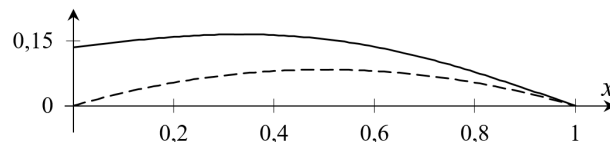


Рис. 3. Графики функций $\dot{Q}_1(x, 0)$ (сплошная линия) и $\psi_0(x)$ (пунктирная линия)

Сравнивая построенную функцию $Q_1(x, 3)$ с заданной функцией $\varphi_1(x)$, получим, что

$$\max_{x \in [0,1]} |Q_1(x, 3) - \varphi_1(x)| \approx 0,0527.$$

Небольшое расхождение между этими функциями иллюстрирует рис. 4, на котором представлены их графики.

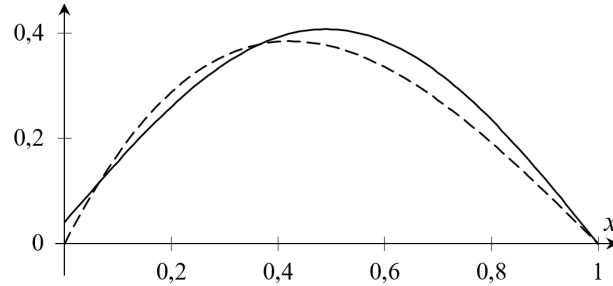


Рис. 4. Графики функций $Q_1(x, 3)$ (сплошная линия) и $\varphi_1(x)$ (пунктирная линия)

Функция прогиба и ее производная в момент времени $t = 6$ определяются формулами:

$$Q_1(x, 6) = \frac{4}{\pi^4}(x-1), \quad \left. \frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} \right|_{t=6} = \dot{Q}_1(x, 6) = \frac{4}{\pi^2}(x-1).$$

Оценивая отклонение этих функций соответственно от заданных функций $\varphi_T(x)$ и $\psi_T(x)$, получим

$$\max_{x \in [0,1]} |Q_1(x, 6) - \varphi_T(x)| = \frac{4}{\pi^4} \approx 0,0411, \quad \max_{x \in [0,1]} |\dot{Q}_1(x, 6) - \psi_T(x)| = \frac{4}{\pi^2} \approx 0,4053.$$

Графики функций $Q_1(x, 6)$ и $\dot{Q}_1(x, 6)$ приведены на рис. 5 и 6 соответственно.

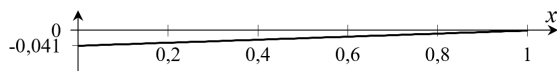


Рис. 5. График функции $Q_1(x, 6)$

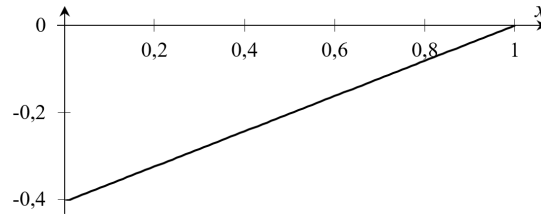


Рис. 6. График функции $\dot{Q}_1(x, 6)$

На рис. 7 приводится графическая иллюстрация динамики поведения состояния колебательной системы — функции $Q_1(x, t)$ при $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

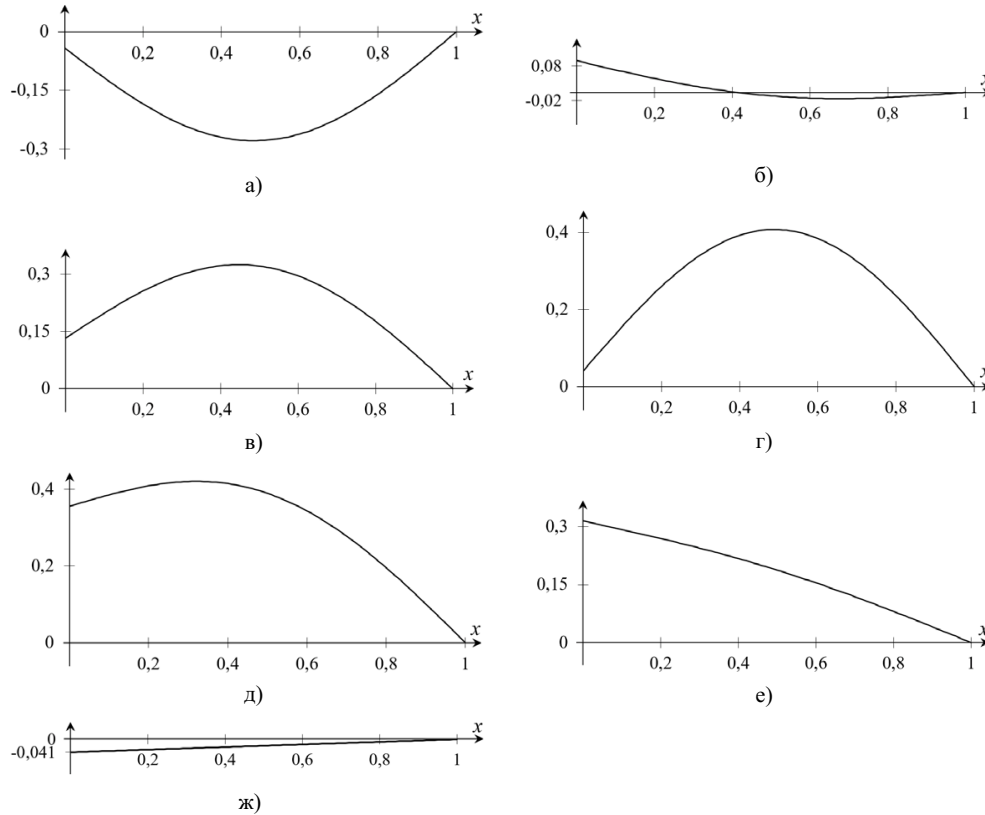


Рис. 7. График функции $Q_1(x, t)$ в фиксированные моменты времени t :

а) $Q_1(x, 0)$, б) $Q_1(x, 1)$, в) $Q_1(x, 2)$, г) $Q_1(x, 3)$, д) $Q_1(x, 4)$, е) $Q_1(x, 5)$, ж) $Q_1(x, 6)$

Таким образом, полученные результаты (даже при $n = 1$) показывают, что под воздействием построенного граничного управления $u_1(t)$ поведение функции $Q_1(x, t)$ достаточно близко к заданным исходным функциям.

Заключение

Предложен конструктивный метод построения граничного управления процессом колебаний однородной струны с заданными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени. Предложенный для волнового уравнения подход допускает распространение на другие неоднородные системы. Вычислительный эксперимент показал, что под воздействием построенного граничного управления поведение функции прогиба струны достаточно близко к заданным исходным функциям. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании граничного управления процессами колебаний в физических и технологических системах.

References

- [1] А. Г. Бутковский, *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965. [A. G. Butkovskii, *The Theory of Optimal Control of Systems with Distributed Parameters*, Nauka, Moscow, 1965 (In Russian)].
- [2] А. Г. Бутковский, *Методы управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1975. [A. G. Butkovskii, *Control Methods for Systems with Distributed Parameters*, Nauka, Moscow, 1975 (In Russian)].

- [3] Л. Н. Знаменская, *Управление упругими колебаниями*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2004. [L. N. Znamenskaya, *Control of Elastic Vibrations*, Fizmatlit, Moscow, 2004 (In Russian)].
- [4] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, “Оптимизация граничных управлений колебаниями струны”, *Успехи математических наук*, **60**:6(366) (2005), 89–114; англ. пер.: V. A. Il'in, E. I. Moiseev, “Optimization of boundary controls of string vibrations”, *Russian Mathematical Surveys*, **60**:6 (2005), 1093–1120.
- [5] Е. И. Моисеев, А. А. Холмеева, А. А. Фролов, “Граничное управление смещением процессом колебаний при граничном условии типа торможения за время, меньшее критического”, *Материалы международной конференции «International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS-17»*, Санкт-Петербургский политехнический университет, 24–28 июля 2017 г., Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **160**, ВИНТИ РАН, М., 2019, 74–84. [E. I. Moiseev, A. A. Holomeeva, A. A. Frolov, “Boundary displacement control for the oscillation process with boundary conditions of damping type for a time less than critical”, *Proceedings of the International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences ICMMAS-17, St. Petersburg Polytechnic University, July 24-28, 2017*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **160**, VINITI, Moscow, 2019, 74–84 (In Russian)].
- [6] В. Р. Барсегян, М. А. Саакян, “Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени”, *Известия НАН РА. Механика*, **61**:2 (2008), 52–60. [V. R. Barseghyan, M. A. Saakyan, “The optimal control of wire vibration in the states of the given intermediate periods of time”, *Proc. of NAS RA. Mechanics*, **61**:2 (2008), 52–60 (In Russian)].
- [7] V. R. Barseghyan, L. A. Movsisyan, “Optimal Control of the Vibration of Elastic Systems Described by the Wave Equation”, *Int. Appl. Mech.*, **48**:2 (2012), 234–239.
- [8] В. Р. Барсегян, “О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени”, *Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики*, XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015), Сборник трудов, 2015, 354–356. [V. R. Barseghyan, “O zadache granichnogo upravleniya kolebaniyami struny s zadannymi sostoyaniyami v promezhutochnye momenty vremeni”, *Fundamental'nyye problemy teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki*, XI Vserossiyskiy s'yezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki (Kazan', 2015), Sbornik trudov, 2015, 354–356 (In Russian)].
- [9] В. Р. Барсегян, “Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени”, *Аналитическая механика, устойчивость и управление движением*, XI Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Иркутск, 2017), **3**, Сборник трудов конференции, 2017, 119–125. [V. R. Barseghyan, “On one problem of optimal boundary control of string vibrations with restrictions in the intermediate moment of time”, *Analytical Mechanics, Stability and Motion Control*, XI International Chetaev Conference “Analytical Mechanics, Stability and Motion Control” (Irkutsk, 2017), **3**, Conference proceedings, 2017, 119–125 (In Russian)].
- [10] А. А. Андреев, С. В. Лексина, “Задача граничного управления для системы волновых уравнений”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*, 2008, №1(16), 5–10. [A. A. Andreev, S. V. Leksina, “The boundary control problem for the system of wave equations”, *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta, Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2008, №1(16), 5–10 (In Russian)].
- [11] М. Ф. Абдукаримов, “Об оптимальном граничном управлении смещениями процесса вынужденных колебаний на двух концах струны”, *Докл. АН Республики Таджикистан*, **56**:8 (2013), 612–618. [M. F. Abdukarimov, “On optimal boundary control of forced oscillations of the displacements at the two ends strings”, *Dokl. AN Respubliki Tadzhikistan*, **56**:8 (2013), 612–618 (In Russian)].
- [12] Н. В. Гибкина, М. В. Сидоров, А. В. Стадникова, “Оптимальное граничное управление колебаниями однородной струны”, *Радиоэлектроника и информатика*, 2016, №2, 3–11. [N. V. Gibkina, M. V. Sidorov, A. V. Stadnikova, “Optimal'noe granichnoe upravlenie kolebaniyami odnorodnoy struny”, *Radioelektronika i Informatika*, 2016, №2, 3–11 (In Russian)].

- [13] В. И. Корзюк, И. С. Козловская, “Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. I”, *Тр. Ин-та матем.*, **18**:2 (2010), 22–35. [V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya, “Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. I”, *Tr. Inst. Mat.*, **18**:2 (2010), 22–35 (In Russian)].
- [14] В. И. Корзюк, И. С. Козловская, “Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II”, *Тр. Ин-та матем.*, **19**:1 (2011), 62–70. [V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya, “Two-point boundary problem for string oscillation equation with given velocity in arbitrary point of time. II”, *Tr. Inst. Mat.*, **19**:1 (2011), 62–70 (In Russian)].
- [15] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнение математической физики*, Наука, М., 1977. [A. N. Tihonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1977 (In Russian)].
- [16] В. Р. Барсегян, *Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями*, Наука, М., 2016. [V. R. Barseghyan, *Control of Composite Dynamic Systems and Systems with Multipoint Intermediate Conditions*, Nauka, Moscow, 2016 (In Russian)].
- [17] В. Р. Барсегян, Т. В. Барсегян, “Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями”, *Автоматика и телемеханика*, 2015, № 4, 3–15; англ. пер.: V. R. Barseghyan, T. V. Barseghyan, “On an approach to the problems of control of dynamic systems with nonseparated multipoint intermediate conditions”, *Automation and Remote Control*, 2015, № 4, 549–559.
- [18] В. И. Zubov, *Лекции по теории управления*, Наука, М., 1975. [V. I. Zubov, *Lekcii po Teorii Upravleniya*, Nauka, Moscow, 1975 (In Russian)].

Информация об авторах

Барсегян Вая Рафаелович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Армении; профессор факультета математики и механики, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения. E-mail: barseghyan@sci.am
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6518-3694>

Солодуша Светлана Витальевна, доктор технических наук, заведующий лабораторией. Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: solodusha@isem.irk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6162-7542>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Барсегян Вая Рафаелович
 E-mail: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 7 апреля 2020 г.
 Поступила после рецензирования 28 мая 2020 г.
 Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the authors

Vanya R. Barseghyan, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Scientific Researcher, Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of RA; Professor of Mathematics and Mechanics Department, Yerevan State University, Yerevan, Armenia. E-mail: barseghyan@sci.am
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6518-3694>

Svetlana V. Solodusha, Doctor of Engineering, Head of Laboratory. Melentiev Energy Systems Institute, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: solodusha@isem.irk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6162-7542>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Vanya R. Barseghyan
 E-mail: barseghyan@sci.am

Received 7 April 2020
 Reviewed 28 May 2020
 Accepted for press 8 June 2020

© Вдовин А.Ю., Рублева С.С., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-147-155

УДК 517.935

О возможности получения оптимального порядка точности при восстановлении воздействия динамическим методом

Андрей Юрьевич ВДОВИН, Светлана Сергеевна РУБЛЕВА

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет»

620100, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Сибирский тракт, 37

On the possibility of obtaining the optimal order of accuracy when restoring the impact by the dynamic method

Andrey Yu. VDOVIN, Svetlana S. RUBLEVA

Ural State Forestry University

37 Siberian tract St., Yekaterinburg 620100, Russian Federation

Аннотация. Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжским был предложен метод динамической регуляризации для восстановления неизвестного воздействия в управляемой модели. В рамках этого подхода в настоящей работе исследуется свойство другого метода, основанного на использовании неявного метода Эйлера для задачи численного дифференцирования. Указан выбор параметров метода, позволяющий повысить его эффективность, снизить зашумленность приближенного решения, и получить оптимальный порядок точности в метрике $L(T)$, равный $\frac{1}{2}$.

Ключевые слова: метод динамической регуляризации; порядок точности алгоритма; неявный метод Эйлера

Для цитирования: Вдовин А.Ю., Рублева С.С. О возможности получения оптимального порядка точности при восстановлении воздействия динамическим методом // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 147–155. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-147-155.

Abstract. Yu. S. Osipov and A. V. Kryazhimsky proposed a method of dynamic regularization to restore an unknown effect in a controlled model. In the framework of this approach, in the present work we study the property of another method based on the use of the implicit Euler method for the problem of numerical differentiation. The choice of the parameters of the method is indicated, which makes it possible to increase its efficiency, reduce the noise level of the approximate solution, and obtain the optimal order of accuracy in the metric $L(T)$, equal to $\frac{1}{2}$.

Keywords: dynamic regularization method; order of accuracy of the algorithm; implicit Euler method

For citation: Vdovin A.Yu., Rubleva S.S. O vozmozhnosti polucheniya optimal'nogo por-yadka tochnosti pri vosstanovlenii vozdeystviya dinamicheskim metodom [On the possibility of obtaining the optimal order of accuracy when restoring the impact by the dynamic method]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 147–155. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-147-155. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается задача восстановления неизвестного воздействия $u(\cdot)$ из правой части динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))u(t). \quad (0.1)$$

Здесь $t \in [a, b] = T$, $x(t) \in R^m$, воздействие $u(\cdot)$ — функция $T \rightarrow Q \subset R^q$ из пространства $L_q^\infty(T)$, где Q — выпуклый компакт. Функции $g(\cdot)$, $f(\cdot)$ из $T \times R^m$ в R^m и в пространство матриц $R^{m \times q}$, соответственно, — липшицевы по совокупности переменных.

Таким образом, $x(t) = x(t, u)$ — решение задачи Коши в смысле Каратеодори для (0.1) с начальным условием $x(a) = x_0$ существует и единственно.

Очевидно, что проблема поиска $u(\cdot)$, порождающего $x(\cdot)$ по неточной информации $x_h(t_i)$:

$$|x(t_i) - x_h(t_i)| \leq h$$

в узлах разбиения T ($a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$) является некорректной. Здесь и далее $|\cdot|$ — евклидова норма, а $\|\cdot\|$ — согласованная с ней, спектральная норма матрицы.

1. Постановка задачи

Для решения этой задачи Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским была предложена процедура, названная ими конечношаговым динамическим алгоритмом [1], [2]. В ней использован предложенный Н. Н. Красовским в теории позиционных дифференциальных игр метод управляемых моделей [3].

В качестве такой модели рассматривалось разностное уравнение

$$w_h(t) = w_h(t_i) + (g(t_i, x_h(t_i)) + f(t_i, x_h(t_i))v_i)(t - t_i). \quad (1.1)$$

Постоянная при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ функция $v_h(t) = v_i$ — результат проектирования на Q вектора

$$f^T(t_i, x_h(t_i)) \frac{x_h(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha} \quad (1.2)$$

является приближением нормального решения $u_*(\cdot)$, где $u_*(\cdot)$ обладает наименьшей нормой в $L_q^2(T)$ среди всех воздействий, порождающих $x(\cdot)$. Далее предполагаем, что $|t_i - t_{i-1}| = \Delta$, $i = 1, \dots, n$ и слова «почти всюду» в равенствах и неравенствах опускаем. При условии согласования параметров метода α и Δ с величиной погрешности h : $\Delta(h) = h$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\alpha(h)} = 0$, описанное однопараметрическое семейство обладает свойством:

$$\|u_*(\cdot) - v_h(\cdot)\|_{L_q^2(T)} \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$ [1].

Такие семейства в теории некорректных задач называются регуляризирующими. При этом формулы (1.1), (1.2) позволяют осуществлять построение приближения $v_h(\cdot)$ в динамике, одновременно с функционированием системы (0.1). Кроме того, процедура построения состоит из конечного набора однотипных операций на каждом отрезке

разбиения промежутка T . Вышеуказанное есть обоснование названия обсуждаемого алгоритма — *конечношаговый, динамический, регуляризирующий*.

Функцию $\nu(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ назовем верхней точностью семейства в пространстве $L_q^2(T)$, если существует положительное число $\tilde{h}$ такое, что для всех $h \in (0, \tilde{h}]$ имеет место неравенство

$$\sup_{x_h(\cdot)} \|u_*(\cdot) - v_h(\cdot)\| \leq \nu(h).$$

Если $\nu(h) \leq C h^{\gamma(h)}$, то $\gamma(\cdot)$ назовем порядком точности, если $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = r$, то r — асимптотический порядок точности.

В [4] показано, что асимптотический порядок точности, рассмотренного выше алгоритма, при условии, что восстанавливаемое воздействие обладает ограниченной вариацией на T равен $\frac{1}{2}$. При этом рассматривалась непрерывная модель

$$w'(t) = g(t, x(t)) + f(t, x(t))v(t), \quad (1.3)$$

где $v(t) = f^T(t, x(t)) \frac{x(t) - w(t)}{\alpha}$, а $w(a) = x_0$.

Формулы (1.1), (1.2) можно трактовать как применение явного метода Эйлера для модели (1.3). Поскольку (1.3) относится к разряду жестких задач, то явный метод Эйлера, как известно из теории численных методов, приводит к существенной осцилляции (высокой зашумленности) получаемого приближения. Применение же неявных методов позволяет избежать этого недостатка. В настоящей работе исследуется возможность применения численного неявного метода для исходной задачи и получения его оценки точности.

2. Основные результаты

Для реализации этой идеи нами была рассмотрена задача численного дифференцирования, являющаяся частным случаем (0.1):

$$x'(t) = u(t),$$

для которой непрерывная управляемая модель имеет вид

$$w'(t) = \frac{x(t) - w(t)}{\alpha}, \quad w(a) = x_0.$$

При этом неявный метод Эйлера дает

$$w_h(t_{i+1}) = w_h(t_i) + \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha} \Delta, \quad (2.1)$$

а искомое приближение единственного воздействия на промежутке $[t_i, t_{i+1})$ в этом случае определяется как

$$u_h(t) \equiv u_h(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_{i+1})}{\alpha}. \quad (2.2)$$

Лемма 2.1. Пусть $u(\cdot)$ обладает ограниченной вариацией на T . Компакт Q содержит 0, $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\Delta + \frac{\alpha}{\Delta} \right) = 0$. Тогда найдутся положительные константы C_1, C_2, h_* такие, что для всех $h \in (0, h_*)$, $t \in T$

$$|w_h(t) - x_h(t)| \leq \frac{\alpha h}{\Delta} C_1 + \alpha C_2.$$

Доказательство. Преобразования уравнения (2.1) приводят к виду:

$$w_h(t_{i+1}) - x_h(t_{i+1}) = \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} (w_h(t_i) - x_h(t_i)) + \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} (x_h(t_i) - x_h(t_{i+1})), \quad (2.3)$$

из которого имеет место оценка нормы разности:

$$|w_h(t_{i+1}) - x_h(t_{i+1})| \leq \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \left[|w_h(t_i) - x_h(t_i)| + |x_h(t_i) - x_h(t_{i+1})| \right].$$

В силу того, что при всех $t \in [a, b]$ значения $u(t) \in Q$, существует постоянная $M_u > 0$ такая, что $|u(t)| \leq M_u$ при $t \in [a, b]$, поэтому

$$|x_h(t_i) - x_h(t_{i+1})| \leq 2h + \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau \right| \leq 2h + \Delta M_u,$$

и, следовательно,

$$|w_h(t_{i+1}) - x_h(t_{i+1})| \leq \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} |w_h(t_i) - x_h(t_i)| + \frac{2\alpha h}{\alpha + \Delta} + \frac{\alpha \Delta}{\alpha + \Delta} M_u.$$

С учетом того, что $|w_h(t_0) - x_h(t_0)| \leq h$, имеем :

$$|w_h(t_1) - x_h(t_1)| \leq \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} h + \frac{2\alpha h}{\alpha + \Delta} + \frac{\alpha \Delta}{\alpha + \Delta} M_u;$$

...

$$|w_h(t_n) - x_h(t_n)| \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^n h + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^i \left(\frac{2\alpha h}{\alpha + \Delta} + \frac{\alpha \Delta}{\alpha + \Delta} M_u \right).$$

Кроме того, при положительных α и Δ : $\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^i \leq \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\alpha + \Delta}} = \frac{\alpha + \Delta}{\Delta}$, поэтому для всех узлов разбиения справедлива оценка

$$|w_h(t_i) - x_h(t_i)| \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^n h + 2 \frac{\alpha h}{\Delta} + \alpha M_u.$$

При выполнении условия $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right) = 0$, найдется $h_* > 0$ такое, что при $h \in (0, h_*)$ имеет место $\left(\frac{\alpha}{\alpha + \Delta} \right)^n \leq \frac{\alpha}{\Delta}$, тогда:

$$|w_h(t_i) - x_h(t_i)| \leq 3 \frac{\alpha}{\Delta} h + \alpha M_u.$$

□

Получив результат для движения системы, можно получить верхнюю оценку для $|u(t) - u_h(t)|$ при $t \in T$.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда существуют положительные константы C_3, C_4 такие, что для всех $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$|u_h(t) - u(t)| \leq C_3 \frac{h}{\Delta} + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot),$$

где $\text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot)$ — вариация $u(\cdot)$ на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$.

Доказательство. В силу (2.1) с одной стороны $u_h(t_{i+1}) = \frac{w_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\Delta}$, с другой стороны:

$$w_h(t_{i+1}) = w_h(t_i) + \frac{\Delta}{\alpha + \Delta} (x_h(t_i) - w_h(t_i)) + \frac{\Delta}{\alpha + \Delta} (x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)).$$

Поэтому

$$u_h(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} + \frac{x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)}{\Delta} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \Delta}\right).$$

Так как $u_h(t) = u_h(t_{i+1})$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, то

$$\begin{aligned} u_h(t) - u(t) &= \frac{x_h(t_i) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} - \frac{x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)}{\Delta} \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \\ &+ \left(\frac{x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)}{\Delta} - \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta} \right) + \left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta} - u(t) \right). \end{aligned}$$

Переходя к оценке нормы разности, получаем:

$$\begin{aligned} |u_h(t) - u(t)| &\leq \frac{|x_h(t_i) - w_h(t_i)|}{\alpha + \Delta} + \frac{|x_h(t_{i+1}) - x_h(t_i)|}{\Delta} \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \\ &+ \frac{|x_h(t_{i+1}) - x(t_{i+1})|}{\Delta} + \frac{|x_h(t_i) - x(t_i)|}{\Delta} + \left| \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta} - u(t) \right|. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Пусть $u^{[j]}(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, m$ — это координата с номером j -вектора $u(\cdot)$.
 $(u_i^{[j]})^* = \min_{[t_i, t_{i+1}]} u^{[j]}(t)$, $(u_i^{[j]})^{**} = \max_{[t_i, t_{i+1}]} u^{[j]}(t)$. Существует вектор u_c , для координат которого справедливо $u_c^{[j]} : (u_i^{[j]})^* \leq u_c^{[j]} \leq (u_i^{[j]})^{**}$, тогда $\int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau = u_c \Delta$. Поэтому для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\left| \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta} - u(t) \right| = \left| \frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau - u(t) \right| \leq \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot).$$

Откуда, с учетом (2.4), леммы 2.1 имеем:

$$\begin{aligned} |u_h(t) - u(t)| &\leq \frac{3\alpha h}{\Delta(\alpha + \Delta)} + \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} M_v + \frac{2h + \Delta}{\Delta} \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \\ &+ \frac{h}{\Delta} + \frac{h}{\Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot), \end{aligned}$$

из последнего следует существование констант C_3, C_4 таких, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$|u_h(t) - u(t)| \leq C_3 \frac{h}{\Delta} + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot).$$

З а м е ч а н и е 2.1. Управляемая модель (2.1), (2.2) не может быть реализована на практике, поскольку правая часть (2.1) содержит значение $w_h(t_{i+1})$, поэтому в силу (2.3) для численного моделирования в (2.2) следует использовать

$$u_h(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta}. \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е 2.2. В силу (2.5) и ограниченности $|u(t)|$ существует положительная константа M_{uh} такая, что $|u_h(t)| \leq M_{uh}$ при любом $t \in T$.

Воспользуемся результатом, полученным для задачи численного дифференцирования, для более общего случая (0.1). Рассматривая его как систему для $u(t)$:

$$f(t, x(t))u(t) = x'(t) - g(t, x(t)),$$

получаем, что ее нормальное решение —

$$u_*(t) = f^+(t, x(t)) (x'(t) - g(t, x(t))). \quad (2.6)$$

Пусть $V(t)$ — правая часть (0.1), тогда модель при решении задачи $x'(t) = V(t)$ неявным методом Эйлера задается правилом

$$w'(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w(t_i)}{\alpha + \Delta}.$$

Пусть при $t \in [t_i, t_{i+1})$ $v_h^{(1)}(t) = v_h^{(1)}(t_{i+1}) = \text{const}$ — является решением системы

$$f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))v_h^{(1)}(t_{i+1}) = \frac{x_h(t_{i+1}) - w(t_i)}{\alpha + \Delta} - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})).$$

Тогда

$$v_h^{(1)}(t_{i+1}) = f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \left(\frac{x_h(t_{i+1}) - w(t_i)}{\alpha + \Delta} - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right). \quad (2.7)$$

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия леммы 2.1, ранг $f(\cdot, x(\cdot))$ постоянен на T (равен r и $0 < r \leq m$). Отображения $g(\cdot, x(\cdot))$, $f(\cdot, x(\cdot))$, удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных с постоянными L_g , L_f , соответственно. Тогда существуют положительные константы C_5 , C_6 , C_7 , C_8 , C_9 , h_{**} такие, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $h \in (0, h_{**})$

$$|u_*(t) - v_h^{(1)}(t)| \leq C_5 h + C_6 \Delta + \frac{h}{\Delta} C_7 + C_8 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + C_9 \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot),$$

константы C_i , $i = 5, 6, 7, 8, 9$ выписываются конструктивно в ходе доказательства леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.6) и (2.7) при $t \in [t_i, t_{i+1})$ получаем

$$\begin{aligned} |u_*(t) - v_h^{(1)}(t_{i+1})| &\leq \left\| f^+(t, x(t)) - f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| |x'(t) - g(t, x(t))| + \\ &+ \left\| f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| \left[\left| x'(t) - \frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} \right| + |g(t, x(t)) - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))| \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

В силу условий леммы существуют константы M_g , M_f и h_{**} такие, что для всех $t \in T$, и движений $x_h(\cdot)$ при $h \in (0, h_{**})$ справедливо $|g(t, x(t))| \leq M_g$, $\|f(t, x(t))\| \leq M_f$. Кроме того, согласно условию леммы $f^+(t, x(t))$ удовлетворяет условию Липшица и ее норма ограничена (см., например, [5]): $\|f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1}))\| \leq \frac{1}{2\lambda_r}$, где λ_r — точная нижняя грань ненулевых сингулярных чисел $\lambda_r(t)$ матриц $f(t, x(t))$. Пусть L_+ — константа Липшица для матрицы $f^+(\cdot, x(\cdot))$, тогда

$$\begin{aligned} & \left\| f^+(t, x(t)) - f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| \leq \left\| f^+(t, x(t)) - f^+(t_{i+1}, x(t_{i+1})) \right\| + \\ & + \left\| f^+(t_{i+1}, x(t_{i+1})) - f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| \leq L_+ (\Delta + \Delta(M_g + M_f M_u)) + L_+ h. \end{aligned}$$

С учетом результата леммы 2.2 из (2.8) следует:

$$\begin{aligned} & |u_*(t) - v_h^{(1)}(t_{i+1})| \leq L_+ (h + \Delta(1 + M_g + M_f M_u)) M_f M_u + \\ & + \frac{1}{2\lambda_r} \left[C_3 \frac{h}{\Delta} + C_4 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot) + L_g (\Delta + \Delta(M_g + M_f M_u) + h) \right], \end{aligned}$$

из последнего при выборе $C_5 = L_+ + \frac{1}{2\lambda_r} L_g$, $C_7 = \frac{1}{2\lambda_r} C_3$, $C_8 = \frac{1}{2\lambda_r} C_4$, $C_9 = \frac{1}{2\lambda_r}$, $C_6 = L_+ (1 + M_g + M_f M_u) M_f M_u + L_g (1 + M_g + M_f M_u) \frac{1}{2\lambda_r}$ следует результат леммы.

Далее рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha}{\Delta} E + f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right) v_h^{(2)}(t_{i+1}) = \\ & = f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \left[\frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right]. \end{aligned}$$

Ее решение представимо в виде

$$\begin{aligned} & v_h^{(2)}(t_{i+1}) = \left(\frac{\alpha}{\Delta} E + f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right)^{-1} \times \\ & \times f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \left[\frac{x_h(t_{i+1}) - w_h(t_i)}{\alpha + \Delta} - g(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пусть при $t \in [t_i, t_{i+1})$ $v_2(t) \equiv v_2(t_{i+1})$.

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.3. Тогда найдутся положительные постоянные C_{10} и h_{***} такие, что при $h \in (0, h_{***})$, $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$|u_*(t) - v_h^{(2)}(t)| \leq C_5 h + C_6 \Delta + \frac{h}{\Delta} C_7 + C_8 \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + C_9 \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\cdot) + C_{10} \frac{\alpha}{\Delta}.$$

Доказательство. Отметим, что

$$|u_*(t) - v_h^{(2)}(t)| \leq |v_*(t) - v_h^{(1)}(t)| + |v_h^{(1)}(t) - v_h^{(2)}(t)|.$$

Поскольку оценка первого слагаемого из правой части последнего неравенства получена в лемме 2.3, то остается рассмотреть второе слагаемое. В силу [5] имеет место оценка:

$$\begin{aligned} & \left\| f^+(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) - \left(\frac{\alpha}{\Delta} E + f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) f(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right)^{-1} f^T(t_{i+1}, x_h(t_{i+1})) \right\| \leq \\ & \leq \frac{\left(\frac{\alpha}{\Delta} \right)}{\lambda_r^2 (\lambda_r^2 + \left(\frac{\alpha}{\Delta} \right))} \leq \frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2 \frac{\alpha}{\Delta}} \frac{\alpha}{\Delta}, \end{aligned}$$

отметим, что существует h_{***} такое, что при $h \in (0, h_{***})$ $\frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2 \frac{\alpha}{\Delta}} \frac{\alpha}{\Delta} \leq \frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2} \frac{\alpha}{\Delta}$. Тогда, с учетом замечания 2.2, существует положительная константа C_{10} такая, что

$$|v_h^{(1)}(t) - v_h^{(2)}(t)| \leq \frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2} \frac{\alpha}{\Delta} [M_{uh} + M_g] \leq C_{10} \frac{\alpha}{\Delta},$$

где $C_{10} = \frac{1}{\lambda_r^4 + \lambda_r^2} [M_{uh} + M_g]$. □

3. Заключение

Перейдем к окончательному результату настоящей работы.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия леммы 2.3, тогда существуют положительные константы K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ такие, что:

$$\|u_*(\cdot) - v_h^{(2)}(\cdot)\|_{L(T)} \leq K_1 h + K_2 \Delta + K_3 \frac{h}{\Delta} + K_4 \frac{\alpha}{\Delta}, \quad (3.1)$$

константы K_i выписываются конструктивно.

Доказательство. Поскольку $\int_a^b \text{Var}_{[t_i, t_{i+1}]} u(\tau) d\tau \leq \text{Var}_{[a, b]} u(\cdot) \Delta$, то с учетом леммы 2.4

$$\begin{aligned} \|v_h^{(2)}(\cdot) - u_*(\cdot)\|_{L(T)} &= \int_a^b |v_h^{(2)}(t) - u_*(t)| dt \leq C_5(b-a)h + C_6(b-a)\Delta + \\ &+ \frac{h}{\Delta} C_7(b-a) + C_8(b-a) \frac{\alpha}{\alpha + \Delta} + C_9 \text{Var}_{[a, b]} u(\cdot) \Delta + C_{10}(b-a) \frac{\alpha}{\Delta} \end{aligned}$$

при $K_1 = C_5(b-a)$, $K_2 = C_6(b-a) + C_9 \text{Var}_{[a, b]} u(\cdot)$, $K_3 = C_7(b-a)$, $K_4 = (C_{10} + C_8)(b-a)$ получаем требуемую оценку.

Замечание 3.1. Таким образом, в работе рассматривается динамическое построение искомого воздействия $u_*(\cdot)$ по правилу (2.9) с построением модели вида (2.1). При выборе параметров в правой части (3.1) $\Delta = \sqrt{h}$, $\alpha = h$ достигается оптимальный порядок точности, равный $\frac{1}{2}$.

Замечание 3.2. Из замечания 3.1 следует, что при той же величине погрешности h измерения на входе алгоритма, величина шага увеличивается, по сравнению с оригинальным методом, что делает рассматриваемый подход более эффективным с точки зрения вычислительных затрат.

References

- [1] А. В. Кряжковский, Ю. С. Осипов, “О моделировании управления в динамической системе”, *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, **2** (1983), 51–60. [A. V. Kryazhimsky, Yu. S. Osipov, “On the modeling of control in a dynamic system”, *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika*, **2** (1983), 51–60 (In Russian)].
- [2] Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhimskii, *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*, Gordon and Breach, London, 1995.

- [3] Н. Н. Красовский, *Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата*, Наука, М., 1985. [N. N. Krasovsky, *Upravleniye Dinamicheskoy Sistemoy. Zadacha o Minimume Garantirovannogo Rezul'tata*, Nauka, Moscow, 1985 (In Russian)].
- [4] А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева, “О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией, зависящей от него линейно”, *Математические заметки*, **87**:3 (2010), 337–358; англ. пер.: A. Yu. Vdovin, S. S. Rubleva, “About the guaranteed precision of the procedure dynamic restoring control with limited variation in a system dependent on it linearly”, *Mathematical Notes*, **87**:3 (2010), 337–358.
- [5] Д. В. Беклемишев, *Дополнительные главы линейной алгебры*, Наука, М., 1983. [D. V. Beklemishev, *Dopolnitel'nyye Glavy Lineynoy Algebry*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russian)].

Информация об авторах

Вдовин Андрей Юрьевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики. Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: vdovinau@m.usfeu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1235-4976>

Рублева Светлана Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: rublevass@m.usfeu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2696-0969>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Рублева Светлана Сергеевна
E-mail: rublevass@m.usfeu.ru

Поступила в редакцию 6 апреля 2020 г.
Поступила после рецензирования 25 мая 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the authors

Andrey Yu. Vdovin, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the High Mathematics Department. Ural State Forestry University, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: vdovinau@m.usfeu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1235-4976>

Svetlana S. Rubleva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of of the High Mathematics Department. Ural State Forestry University, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: rublevass@m.usfeu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2696-0969>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Svetlana S. Rubleva
E-mail: rublevass@m.usfeu.ru

Received 6 April 2020
Reviewed 25 May 2020
Accepted for press 8 June 2020

© Ланеев Е.Б., Лесик П.А., Климишин А.В., Котюков А.М., Романов А.А., Хегай А.Г., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-156-164

УДК 519.6

Об устойчивом приближенном решении одной некорректно поставленной краевой задачи для метагармонического уравнения

Евгений Борисович ЛАНЕЕВ, Полина Александровна ЛЕСИК,
Александр Владиславович КЛИМИШИН, Александр Михайлович КОТЮКОВ,
Андрей Андреевич РОМАНОВ, Анна Георгиевна ХЕГАЙ

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

On a stable approximate solution of an ill-posed boundary value problem for the metaharmonic equation

Evgeniy B. LANEV, Polina A. LESIK, Alexander V. KLIMISHIN,
Alexander M. KOTYUKOV, Andrey A. ROMANOV, Anna G. KHEGAI

RUDN University

6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

Аннотация. В работе рассматривается смешанная задача для метагармонического уравнения в области в цилиндре прямоугольного сечения. На боковых гранях цилиндрической области заданы однородные условия первого рода. Цилиндрическую область с одной стороны ограничивает поверхность общего вида, на которой заданы условия Коши, т. е. заданы функция и ее нормальная производная. Другая граница цилиндрической области – плоская – свободна. Такая задача некорректно поставлена, и для построения ее приближенного решения в случае данных Коши, известных с некоторой погрешностью, необходимо применение регуляризирующих алгоритмов. В работе рассматриваемая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе решения интегрального уравнения получено явное представление точного решения поставленной задачи. Устойчивое решение интегрального уравнения получено методом регуляризации Тихонова. В качестве его приближенного решения рассматривается экстремаль функционала Тихонова. На основе этого решения строится приближенное решение задачи в целом. Приведена теорема сходимости приближенного решения поставленной задачи к точному при стремлении к нулю погрешности в данных Коши и при согласовании параметра регуляризации с погрешностью в данных. Результаты работы могут быть использованы для математической обработки данных тепловидения в медицинской диагностике.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача; метагармоническое уравнение; интегральное уравнение первого рода; метод регуляризации Тихонова

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00590_а).

Для цитирования: Ланеев Е.Б., Лесик П.А., Климишин А.В., Котюков А.М., Романов А.А., Хегай А.Г. Об устойчивом приближенном решении одной некорректно поставленной краевой задачи для метатармонического уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 156–164. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-156-164.

Abstract. In this paper, we consider a mixed problem for a metaharmonic equation in a region in a rectangular cylinder. On the side faces cylinder region is set to homogeneous conditions of the first kind. The cylindrical area is bounded on one side by an arbitrary surface on which the Cauchy conditions are set, i. e. the function and its normal derivative are set. The other boundary of the cylindrical region, which is flat, is free. This problem is ill-posed, and to construct its approximate solution in the case of Cauchy data known with some error, it is necessary to use regularizing algorithms. In this paper, the problem is reduced to the Fredholm integral equation of the first kind. Based on the solution of the integral equation, an explicit representation of the exact solution of the problem is obtained. A stable solution of the integral equation is obtained by the method of Tikhonov regularization. The extremal of the Tikhonov functional is considered as an approximate solution. Based on this solution, an approximate solution of the problem as a whole is constructed. The convergence theorem of the approximate solution of the problem to the exact one is given when the error in the Cauchy data tends to zero and when the regularization parameter is agreed with the error in the data. The results can be used for mathematical processing of thermal imaging data in medical diagnostics.

Keywords: ill-posed problem; metaharmonic equation; integral equation of the first kind; method of Tikhonov regularization

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00590_a).

For citation: Laneev E.B., Lesik P.A., Klimishin A.V., Kotyukov A.M., Romanov A.A., Khagai A.G. Ob ustoychivom priblizhennom reshenii odnoy nekorrektno postavlennoy kraevoy zadachi dlya metagarmonicheskogo uravneniya [On a stable approximate solution of an ill-posed boundary value problem for the metaharmonic equation]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 156–164. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-156-164. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается некорректно поставленная смешанная краевая задача для метатармонического уравнения с условиями Коши на поверхности общего вида. Такая задача возникает в медицинской диагностике как задача обработки термографических данных с целью выявления патологий у пациентов [1]. Следуя работам [2, 3], в которых решена соответствующая задача для уравнения Лапласа, краевая задача для метатармонического уравнения приведена к линейному интегральному уравнению первого рода, устойчивое решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [4]. Задача аналогична задаче продолжения поля ньютоновского потенциала с плоскости [5]. Установлена сходимость приближенного решения к точному.

1. Постановка задачи

В цилиндрической области

$$D(F, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, F(x, y) < z < H\} \quad (1.1)$$

рассмотрим следующую краевую задачу для метагармонического уравнения

$$\begin{aligned} \Delta u(M) - k^2 u(M) &= 0, \quad M \in D(F, H), \\ u|_S &= f, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_S &= g, \\ u|_{x=0, l_x} &= 0, \\ u|_{y=0, l_y} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где поверхность

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y) < H\}. \quad (1.3)$$

Будем считать, что функции f и g непрерывны на S и обеспечивают существование решения $u \in C^2(D(F, H)) \cap C^1(\overline{D(F, H)})$.

Смешанная задача (1.2) с условиями Коши некорректно поставлена. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g . Получим явное выражение точного решения задачи в зависимости от точных данных Коши f и g .

2. Построение точного решения задачи

Пусть $\varphi(M, P)$ — функция источника первой краевой задачи для метагармонического уравнения

$$\begin{aligned} \Delta v(P) - k^2 v(P) &= -\rho(P), \quad P \in D^\infty, \\ v|_{x=0, l_x} &= 0, \\ v|_{y=0, l_y} &= 0, \\ v &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |z| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

в бесконечном цилиндре прямоугольного сечения

$$D^\infty = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < \infty\}. \quad (2.2)$$

Функция источника представляет собой сумму фундаментального решения метагармонического уравнения и метагармонической по P функции $W(M, P)$

$$\varphi(M, P) = \frac{\exp\{-kr_{MP}\}}{4\pi r_{MP}} + W(M, P), \quad (2.3)$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P , и удовлетворяет граничным условиям. Функция источника (2.3) может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2 + k^2} |z_M - z_P|}}{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2 + k^2}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}.$$

Пусть $M \in D(F, H)$. Применяя формулы Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.2) и функции источника $\varphi(M, P)$, получим

$$u(M) = \int_{\partial D(F, H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \varphi(M, P) - u(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(F, H). \quad (2.4)$$

Учитывая однородные граничные условия для φ и u на боковых гранях цилиндрической области $D(F, H)$, получим

$$u(M) = \int_S \left[g(P) \varphi(M, P) - f(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P + \int_{\Pi(H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \varphi(M, P) - u(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad (2.5)$$

где второй интеграл берется по прямоугольнику

$$\Pi(H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = H\}. \quad (2.6)$$

Обозначим

$$\Phi(M) = \int_S \left[g(P) \varphi(M, P) - f(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad z_M < H, \quad (2.7)$$

$$v(M) = \int_{\Pi(H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \varphi(M, P) - u(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad z_M < H, \quad (2.8)$$

тогда решение задачи (1.2) получим в виде

$$u(M) = v(M) + \Phi(M), \quad M \in D(F, H), \quad (2.9)$$

где функция Φ вычисляется по известным функциям f и g .

Функцию v можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta v(M) &= 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ v|_{z=H} &= v_H, \\ v|_{x=0, l_x} &= 0, \\ v|_{y=0, l_y} &= 0, \\ v &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что если решение задачи (1.2) существует, то функция v может быть представлена в виде ряда Фурье

$$v(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (\tilde{v}_H)_{nm} \exp\left\{ \sqrt{\left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2 + k^2} (z_M - H) \right\} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (2.11)$$

$$(\tilde{v}_H)_{nm} = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} v_H(x, y) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy, \quad (2.12)$$

причем ряд (2.11) сходится равномерно области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как

$$|(\tilde{v}_H)_{nm} e^{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2 + k^2}(z_M - H)} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}| \leq |(\tilde{v}_H)_{nm}| e^{-\varepsilon \sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2 + k^2}}.$$

Таким образом, из представления (2.9) решения задачи (1.2) и (2.11) следует, что для получения явного выражения для точного решения задачи (1.2) достаточно выразить функцию v_H в (2.11) через заданные функции f и g .

Покажем, что функция v_H удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Пусть $M \in D(-\infty, F)$, где

$$D(-\infty, F) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < F(x, y)\}.$$

Применяя формулу Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.2) и функции $\varphi(M, P)$ вида (2.3), аналогично (2.4) получим

$$0 = \int_{\partial D(F, H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \varphi(M, P) - u(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(F, H).$$

Отсюда с учетом однородных граничных условий для φ и u и обозначений (2.7) и (2.8) получим

$$v(M) = -\Phi(M), \quad M \in D(-\infty, F). \quad (2.13)$$

Из (2.11), (2.12) функция v может быть выражена через v_H в виде интеграла

$$v(M) = \int_{\Pi(H)} G(M, P) v_H(P) dx_P dy_P, \quad M \in D(-\infty, H), \quad (2.14)$$

где

$$G(M, P) = \frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2 + k^2}(-H + z_M)} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}. \quad (2.15)$$

Пусть $a < \min_{(x,y)} F(x, y)$ и $M \in \Pi(a)$, где $\Pi(a)$ — область вида (2.6) при $z = a$, тогда из (2.13) и (2.14) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int_{\Pi(H)} G(M, P) v_H(P) dx_P dy_P = -\Phi(M), \quad M \in \Pi(a). \quad (2.16)$$

Из уравнения (2.16) с учетом разложения (2.15) при $z_M = a$ получаем соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения v_H и коэффициентами Фурье правой части

$$-(\tilde{v}_H)_{nm} \exp\left\{-\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2 + k^2}(H - a)\right\} = \tilde{\Phi}_{nm}(a), \quad (2.17)$$

где $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M \in \Pi(a)}$:

$$\tilde{\Phi}_{nm}(a) = \frac{4}{l_x l_y} \int_{\Pi(a)} \Phi(x, y, a) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy. \quad (2.18)$$

Отметим, что формула (2.17) характеризует убывание коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ с ростом n и m , если функции f и g таковы, что обеспечивают существование решения задачи (1.2) и, следовательно, — функции v_H вида (2.11). Подставляя коэффициенты Фурье $(\tilde{v}_H)_{nm}$ из (2.17) в ряд (2.11), получим функцию v в области $D(-\infty, H)$

$$v(M) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{nm}(a) \exp\left\{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y}\right)^2 + k^2(z_M - a)}\right\} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (2.19)$$

Ряд (2.19) как и ряд (2.11) сходится равномерно в $D(-\infty, H - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, если решение задачи (1.2) существует при данных f и g .

Формула (2.9), где функции v и Φ вида (2.19) и (2.7) соответственно, дает явное выражение для решения задачи (1.2).

3. Решение задачи в случае приближенных данных

Пусть функции f и g в задаче (1.2) заданы с погрешностью, то есть вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ , такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leq \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leq \delta.$$

Построим приближенное решение задачи (1.2), сходящееся к точному решению при $\delta \rightarrow 0$. Функция Φ вида (2.7) в этом случае может быть получена приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = \int_S \left[g^\delta(P) \varphi(M, P) - f^\delta(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P. \quad (3.1)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к разности функций (3.1) и (2.7) при $M \in \Pi(a)$, $a < \min_{(x,y)} F(x, y)$, получим оценку погрешности правой части интегрального уравнения (2.16)

$$\begin{aligned} |\Phi^\delta(M) - \Phi(M)| &\leq \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_S \varphi^2(M, P) d\sigma_P \right)^{1/2} \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} + \\ &+ \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leq C\delta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В качестве приближенного решения интегрального уравнения (2.16) с приближенной правой частью (3.1) будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова [4] со стабилизатором нулевого порядка

$$M^\alpha[w] = \|Gw - \Phi^\delta\|_{L_2(\Pi(a))}^2 + \alpha \|w\|_{L_2(\Pi(H))}^2, \quad \alpha > 0. \quad (3.3)$$

Здесь G — интегральный оператор в (2.16). Экстремаль функционала может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (3.3)

$$G^*Gw + \alpha w = G^*\Phi^\delta,$$

которое может быть получено в виде алгебраического уравнения относительно коэффициентов Фурье функции w

$$\begin{aligned} \exp\{-2\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2} + k^2(H-a)\}\tilde{w}_{nm} + \alpha\tilde{w}_{nm} = \\ = -\exp\{-\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2} + k^2(H-a)\}\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a) = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Phi^\delta(x, y, a) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy$$

— коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M \in \Pi(a)}$.

Решая алгебраическое уравнение относительно коэффициентов Фурье экстремали и подставляя экстремаль w_α^δ вместо v_H в (2.11), найдем приближение v_α^δ к функции v в области $D(-\infty, H)$:

$$v_\alpha^\delta(M) = - \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a) \exp\{\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2} + k^2(z_M - a)\}}{1 + \alpha \exp\{2\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2} + k^2(H - a)\}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (3.5)$$

Функция (3.5) отличается от точного решения (2.19) интегрального уравнения (2.16) множителем $(1 + \alpha \exp\{2\sqrt{(\frac{n\pi}{l_x})^2 + (\frac{m\pi}{l_y})^2} + k^2(H - a)\})^{-1}$, обеспечивающим сходимость ряда.

В соответствии с (2.9) приближенное решение задачи (1.2) получим в виде

$$u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) + \Phi^\delta(M), \quad M \in D(F, H), \quad (3.6)$$

где v_α^δ и Φ^δ — функции вида (3.5) и (3.1).

Теорема 3.1. Пусть решение задачи (1.2) существует. Тогда для любого $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ функция $u_{\alpha(\delta)}$ вида (3.6) равномерно сходится при $\delta \rightarrow 0$ к точному решению в $D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0,5(H - \max_{(x,y)} F(x,y))$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство соответствующей теоремы в [2].

Формулы (3.6), (3.5) и (3.1), таким образом, дают приближенное решение поставленной задачи (1.2), устойчивое к погрешностям в данных.

4. Приложение результатов к обратной задаче термографии

Построенное решение задачи (1.2) может быть использовано для решения обратной задачи термографии [6] в приложении к задачам математической обработки термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине [7]. В частности в медицине при моделировании участка тела пациента к задаче (1.2) приводит модель теплопроводящего тела цилиндрической формы, содержащего источники тепла и систему кровотока, которая связана со вторым слагаемым в метагармоническом уравнении [1]. На боковых гранях цилиндра поддерживается постоянная температура, а на поверхности S имеет место теплообмен с внешней средой, описываемый законом Ньютона, то есть третьим краевым условием. Если распределение температуры на поверхности S может быть измерено как функция f , например, тепловизионными методами, то в рамках этой модели оказывается известной и нормальная производная, что приводит к рассмотренной здесь задаче восстановления пространственного распределения температуры, аномалии которого могут быть связаны с патологиями.

References

- [1] J.P. Agnelli, A.A. Barrea, C.V. Turner, “Tumor location and parameter estimation by thermography”, *Mathematical and Computer Modelling*, **53**:7-8 (2011), 1527–1534.
- [2] Е. Б. Ланеев, Б. Васудеван, “Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа”, *Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика*, 1999, № 1, 128–133. [E. B. Laneev, B. Vasudevan, “On a stable solution of a mixed problem for the Laplace equation”, *PFUR Reports. Series: Applied Mathematics and Computer Science*, 1999, № 1, 128–133 (In Russian)].
- [3] Е. Б. Ланеев, “О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа”, *Дифференциальные уравнения*, **54**:4 (2018), 483–491; англ. пер.: Е. В. Laneev, “Construction of a Carleman Function Based on the Tikhonov Regularization Method in an Ill-Posed Problem for the Laplace Equation”, *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 476–485.
- [4] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. YA. Arsenin, *Metody Resheniya Nekorrektnykh Zadach*, Nauka, Moscow, 1979 (In Russian)].
- [5] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов, “О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации”, *Изв. АН СССР. Физика Земли*, 1968, № 1, 30–48. [A. N. Tikhonov A.N., V. B. Glasko, O. K. Litvinenko, V. R. Melikhov, “O prodolzheni potentsiala v storonu vozmushchayushchih mass na osnove metoda regulyazitsii”, *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, 1968, № 1, 30–48 (In Russian)].
- [6] Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, “Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе.”, *Вестник РУДН. Серия Математика*, **10**:1 (2003), 100–110. [E. B. Laneev, M. N. Muratov, “Ob odnoy obratnoy zadache k kraevoy zadache dlya uravneniya Laplasa s uslovиеm tret'ego roda na netochno zadannoy granitse”, *PFUR Reports. Series: Mathematics*, **10**:1 (2003), 100–110 (In Russian)].
- [7] Г. Р. Иваницкий, “Тепловидение в медицине”, *Вестник РАН*, **76**:1 (2006), 48–58. [G. R. Ivanitskii, “Thermovision in medicine”, *Herald of the Russian Academy of Sciences*, **76**:1 (2006), 48–58 (In Russian)].

Информация об авторах

Ланеев Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4255-9393>

Лесик Полина Александровна, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: polinalesik@yandex.ru

Климишин Александр Владиславович, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: sa-sha-02@yandex.ru

Котюков Александр Михайлович, аспирант Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: amkotyukov@mail.ru

Романов Андрей Андреевич, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: an1romanov@gmail.com

Хегай Анна Георгиевна, студент Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: annh98@icloud.com

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Ланеев Евгений Борисович
E-mail: elaneev@yandex.ru

Поступила в редакцию 10 апреля 2020 г.

Поступила после рецензирования 22 мая 2020 г.

Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the authors

Evgeniy B. Laneev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4255-9393>

Polina A. Lesik, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: polinalesik@yandex.ru

Aleksandr V. Klimishin, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: sa-sha-02@yandex.ru

Aleksandr M. Kotyukov, Post-Graduate Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: amkotyukov@mail.ru

Andrey A. Romanov, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: an1romanov@gmail.com

Anna G. Khagai, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: annh98@icloud.com

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Evgeniy B. Laneev
E-mail: elaneev@yandex.ru

Received 10 April 2020

Reviewed 22 May 2020

Accepted for press 8 June 2020

© Хачатрян Р.А., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-165-182

УДК 519.6

Условия минимума гладкой функции на границе квазидифференцируемого множества

Рафик Агасиевич ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

0025, Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

The conditions of minimum for a smooth function on the boundary of a quasidifferentiable set

Rafik A. KHACHATRYAN

Yerevan State University

1 Alex Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

Аннотация. В статье рассматриваются задачи математического программирования с негладкими ограничениями типа равенств, задаваемыми квазидифференцируемыми функциями. С применением техники верхних выпуклых аппроксимаций, разработанной Б. Н. Пшеничным, получены необходимые условия экстремума в таких задачах. Благодаря тому, что для квазидифференцируемой функции можно построить целые семейства верхних выпуклых аппроксимаций, удалось уточнить знаки множителей Лагранжа и тем самым более полно охарактеризовать точки минимума в таких экстремальных задачах. Рассматривается также простейшая задача вариационного исчисления со свободной правой частью в предположении, что левый конец траектории начинается на границе выпуклого множества. При некоторых достаточных условиях уточнено условие трансверсальности на левом конце траектории.

Ключевые слова: верхняя выпуклая аппроксимация; квазидифференцируемая функция; субдифференциал; шатер

Для цитирования: Хачатрян Р.А. Условия минимума гладкой функции на границе квазидифференцируемого множества // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 165–182. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-165-182.

Abstract. In this paper, we consider problems of mathematical programming with non-smooth constraints of equality type given by quasidifferentiable functions. By using the technique of upper convex approximations, developed by B. N. Pshenichy, necessary conditions of extremum for such problems are established. The Lagrange multipliers signs are specified by virtue of the fact that one can construct whole families of upper convex approximations for quasidifferentiable function and thus the minimum points in such extremal problems are characterized more precisely. Also the simplest problem of calculus of variations with free right hand side is considered, where the left end of the trajectory starts on the boundary of the convex set. The transversality condition at the left end of the trajectory is improved provided certain sufficient conditions hold.

Keywords: upper convex approximation; quasidifferentiable function; subdifferential; tent

For citation: Khachatryan R.A. Usloviya minimuma gladkoy funktsii na granitse kvazidifferentsiruyemogo mnozhestva [The conditions of minimum for a smooth function on the boundary of a quasidifferentiable set]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 165–182. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-165-182. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В настоящей статье приняты следующие определения и обозначения: (x, y) — скалярное произведение векторов x и y , принадлежащие R^n ; $\text{conv}M$, $\text{con}M$, $\text{cl}\{M\}$ — выпуклая, коническая оболочка и замыкание множества M соответственно; K^* — конус сопряжений к конусу K . Положим $\text{Lin}M = \text{con}M - \text{con}M$. Исследования по необходимым условиям экстремума в последние годы были связаны в основном с более детальным изучением задач, в которых участвуют негладкие функции. При этом на первый план выдвигается учет негладких ограничений типа равенств. Конечно, каждое равенство вида $g(x) = 0$ можно заменить системой неравенств $g(x) \leq 0$, $-g(x) \leq 0$. В этой связи представляется естественной попытка вывести необходимые условия из частного случая, относящегося к задаче только с ограничениями — неравенствами. Однако такой путь не приводит к успеху, поскольку, как правило, не удастся получить содержательное необходимое условие экстремума. Это связано с тем, что в задачах с ограничениями — неравенствами потребуется условие регулярности типа Слейтера, которое здесь никогда не выполняется.

В статье [1] Ф. Кларк ввел понятие субдифференциала локально липшицевой функции. Положим

$$F_C(x, \bar{x}) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h + \lambda h) - f(x + h)}{\lambda}.$$

Оказывается, что функция $F(x, \bar{x})$ положительно однородна и выпукла по $\bar{x}$. Поэтому множество

$$\partial_C f(x) = \{y^* \in R^n : F_C(x, \bar{x}) \geq (y^*, \bar{x}) \forall \bar{x}\}$$

— непустой выпуклый компакт. Оно называется субдифференциалом Кларка функции f в точке x . Замечательно то, что многозначное отображение $x \rightarrow \partial_C f(x)$ непрерывно сверху. С использованием именно этого свойства Ф. Кларком в [1] доказано правило множителей Лагранжа в задачах математического программирования с ограничениями типа равенств, задаваемых локально липшицевыми функциями, т. е. в задачах вида:

$$\min_x \{f_0(x) : f_i(x) = 0, i \in I\}. \quad (0.1)$$

Этот результат формулируется следующим образом: если точка x^* является решением задачи (0.1), то существуют числа λ_i , $i \in I$, не все равные нулю одновременно, такие, что

$$0 \in \sum_{i \in \{0\} \cup I} \lambda_i \partial_C f_i(x^*). \quad (0.2)$$

В дальнейшем аналогичные условия экстремума получены в работах [2, 3] в терминах субдифференциалов Пено и асимптотических субдифференциалов Половинкина [4]. Эти условия более эффективны, чем условие Кларка, поскольку асимптотический субдифференциал и субдифференциал Пено в общем случае входят в субдифференциал Кларка.

Однако существуют подклассы локально липшицевых функций, для которых все перечисленные субдифференциалы совпадают, и простейшие примеры показывают, что полученные в этих терминах необходимые условия экстремума (условие (0.2)) довольно грубы и не позволяют отбросить заведомо неоптимальные точки. Такие негладкие

функции рассматриваются и в настоящей статье. Они составляют подкласс в пространстве квазидифференцируемых функций, введенном В. Ф. Демьяновым в работах [5, 6].

1. Основные понятия

Напомним определение квазидифференцируемой функции из [5].

Локально липшицева функция $g(x)$, дифференцируемая по направлениям, называется квазидифференцируемой в точке $x \in R^n$, если

$$g'(x, \bar{x}) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{g(x + \alpha \bar{x}) - g(x)}{\alpha} = \max_{x^* \in \underline{\partial}g(x)} (x^*, \bar{x}) + \min_{y^* \in \overline{\partial}g(x)} (y^*, \bar{x}),$$

где $\underline{\partial}g(x)$, $\overline{\partial}g(x)$ — выпуклые компакты в R^n , которые называются квазидифференциалами.

В статье [7] рассмотрена задача вида

$$\min_x \{f_0(x) : g(x) \leq 0\},$$

где $f_0(x)$ и $g(x)$ — квазидифференцируемые функции. С помощью квазидифференциалов удалось достаточно просто описать необходимые условия экстремума в этой задаче, и на примерах было показано, что эти условия эффективнее условий Кларка. Если функция $g(x)$ квазидифференцируемая, то множество $M = \{x \in R^n : g(x) \leq 0\}$ называется квазидифференцируемым.

В настоящей статье рассматриваются квазидифференцируемые функции следующего вида:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \max_{i \in I} f_i(x) + \min_{j \in J} f_j(x), \quad (1.1)$$

где I , J — конечные множества индексов, а $f_i(x)$, $f_j(x)$ $i \in I$, $j \in J$ — непрерывные дифференцируемые функции.

Согласно теореме 2.1 из [8, гл. 3, с. 71] функция g липшицева и дифференцируема по любому направлению $\bar{x}$, причем

$$g'(x, \bar{x}) = \max_{i \in I(x)} (f'_i(x), \bar{x}) + \min_{j \in J(x)} (f'_j(x), \bar{x}),$$

где $I(x) = \{i \in I : f_i(x) = g_1(x)\}$, $J(x) = \{j \in J : f_j(x) = g_2(x)\}$. Значит функция g квазидифференцируема, причем

$$\underline{\partial}g(x) = \text{conv}\{f'_i(x), i \in I(x)\}, \quad \overline{\partial}g(x) = \text{conv}\{f'_j(x), j \in J(x)\}$$

Согласно предложению 2.3.12 из [9, с. 51]

$$\partial_C g(x) = \partial_C g_1(x) + \partial_C g_2(x) = \underline{\partial}g(x) + \overline{\partial}g(x).$$

Заметим также, что в рассматриваемом случае, согласно [4, теорема 2] субдифференциалы Кларка, Пено и Половинкина совпадают. В общем случае связь квазидифференциала с субдифференциалами Пено и Кларка установлена в [6, гл. 3, п. 4, с. 152].

В настоящей статье рассматриваются задачи минимизации гладких функций при наличии ограничений типа равенств, задаваемых функциями вида (1.1). С использованием техники верхних выпуклых аппроксимаций, разработанной Б. Н. Пшеничным [10], и метода шатров В. Г. Болтянского [11] получены принципиально новые необходимые условия экстремума. Благодаря тому, что для функций вида (1.1) существуют целые семейства верхних выпуклых аппроксимаций, уточнены знаки множителей Лагранжа и тем самым более полно охарактеризованы точки минимума в экстремальных задачах.

Напомним определения верхней выпуклой аппроксимации.

Пусть $f(x)$ — липшицева в окрестности точки x функция. Для $\bar{x}$ положим

$$F(x, \bar{x}) = \limsup_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}} \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda \bar{y}) - f(x)}{\lambda}.$$

Положительно однородная и выпуклая по $\bar{x}$ функция $h(x, \bar{x})$ называется верхней выпуклой аппроксимацией функции f в точке x , если

$$h(x, \bar{x}) \geq F(x, \bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in R^n.$$

Множество

$$\partial f(x) = \{y^* \in R^n : h(x, \bar{x}) \geq (y^*, \bar{x})\}$$

называется субдифференциалом функции f в точке x . Ясно, что обобщенная производная $F_C(x, \bar{x})$ Кларка является верхней выпуклой аппроксимацией липшицевой функции f в точке x . Из определения следует, что верхняя выпуклая аппроксимация и соответственно субдифференциал определяются неоднозначно. Например, нетрудно видеть, что для квазидифференцируемой функции $f(x)$ при каждом $y^* \in \overline{\partial f(x)}$ функция

$$h(x, y^*) = \max_{u \in \underline{\partial f(x)}} (u, \bar{x}) + (y^*, \bar{x})$$

является верхней выпуклой аппроксимацией, а $\underline{\partial f(x)} + y^*$ — соответствующий субдифференциал.

О п р е д е л е н и е 1.1 (см. [11]). Выпуклый конус K называется шатром множества M в точке $x \in M$, если существуют окрестность U нуля и определенное на этой окрестности отображение r , такое, что

$$x + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M \quad \forall \bar{x} \in K \cap U,$$

причем $r(\bar{x})/\|\bar{x}\| \rightarrow 0$, при $\bar{x} \rightarrow 0$.

Шатер K называется непрерывным, если таковым является отображение r .

Следующее необходимое условие экстремума является простым следствием определения 1.1.

Теорема 1.1 (см. [10]). Пусть x^* — точка минимума функции $f(x)$ на множестве M . Допустим, что $h(x, \bar{x})$ верхняя выпуклая аппроксимация для f в точке x^* , а $K_M(x^*)$ — шатер к M в точке x^* . Тогда

$$\partial f(x^*) \cap K_M^*(x^*) \neq \emptyset. \quad (1.2)$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат о пересечении локальных непрерывных шатров.

Теорема 1.2 (см. [12]). Пусть M_i , $i \in I$ — множества в R^n , I — конечное множество индексов, K_i , $i \in I$ — непрерывные локальные шатры множеств M_i в точке $x^* \in M_i$. Если шатры K_i , $i \in I$ неотделимы, то конус $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ является локальным шатром к множеству $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ в точке $x^* \in M$.

Следует отметить, что этот результат в случае двух шатров доказан Б. Н. Пшеничным (см. [10, теорема 1.2., гл. 5, п. 1, с. 200]).

В настоящей статье для вывода необходимых условий экстремума в задачах с негладкими ограничениями типа равенств центральную роль играет следующий результат, доказанный в [13]. Это утверждение позволяет уточнить знаки множителей Лагранжа в необходимых условиях экстремума.

Теорема 1.3 (см. [13]). Пусть $G \subset R^n$ — выпуклый компакт. Предположим также, что $0 \notin G$ и число линейно независимых векторов в G больше или равно 2. Тогда

$$\bigcap_{x \in G} cl\{conG - conx\} = conG. \quad (1.3)$$

2. Необходимые условия в задачах с одним ограничением типа равенства

Рассмотрим задачу минимизации функции f_0 при ограничении $g(x) = 0$:

$$\min_x \{f_0(x) : g(x) = 0\}, \quad (2.1)$$

где функция $g(x)$ задается соотношением (1.1).

Теорема 2.1. Пусть x^* — решение задачи (2.1); функции $f_k(x)$, $k \in 0 \cup I \cup J$ непрерывно дифференцируемы и существует такой вектор w , что $(f'_k(x^*), w) < 0$, $k \in I(x^*) \cup J(x^*)$. Тогда для любых $i_0 \in I(x^*)$, $j_0 \in J(x^*)$ либо существуют числа $\lambda_{j_0}^+ \geq 0$, $\lambda_i^+ \geq 0$, $i \in I(x^*)$ такие, что

$$f'_0(x^*) + \lambda_{j_0}^+ f'_{j_0}(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^+ f'_i(x^*) = 0, \quad (2.2)$$

либо существуют числа $\lambda_{i_0}^- \geq 0$, $\lambda_j^- \geq 0$, $j \in J(x^*)$, такие, что

$$f'_0(x^*) - \lambda_{i_0}^- f'_{i_0}(x^*) - \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j^- f'_j(x^*) = 0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Допустим, что равенства (2.2) и (2.3) одновременно не выполнены. Если условие (2.4) не выполняется, то согласно теореме о строгой отделенности выпуклых множеств это равносильно тому, существуют вектор u_1 и число $\delta_1 > 0$ такие, что

$$(u_1, f'_0(x^*) + y^*) < -\delta_1 \quad \forall y^* \in con(\partial g_1(x^*) + f'_{j_0}(x^*)). \quad (2.4)$$

Если для некоторого $y_0^* \in \text{con}(\partial g_1(x^*) + f'_{j_0}(x^*))$ $(y_0^*, u_1) > 0$, то $(\lambda y_0^*, u_1) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, что противоречит неравенству (2.4). Поэтому

$$(y^*, u_1) \leq 0, \quad \forall y^* \in \text{con}(\partial g_1(x^*) + f'_{j_0}(x^*)).$$

Отсюда

$$u_1 \in (-\text{con}(\partial g_1(x^*) + f'_{j_0}(x^*)))^*. \quad (2.5)$$

Обозначим

$$h_{j_0}^+(x^*, \bar{x}) = \max_{i \in I(x^*)} (f'_i(x^*), \bar{x}) + (f'_{j_0}(x^*), \bar{x}).$$

Из предположений теоремы следует, что $h_{j_0}^+(x^*, w) < 0$. Тогда, имея ввиду включение (2.5), используя теорему о двойственности выпуклых конусов (см. например [14, теорема 2.6., с. 56]), получим $h_{j_0}^+(x^*, u_1) \leq 0$. Положим $u_1^\alpha = u_1 + \alpha(w - u_1)$. Для $\alpha \in (0, 1]$ получим

$$\begin{aligned} h_{j_0}^+(x^*, u_1^\alpha) &= h_{j_0}^+(x^*, u_1 + \alpha(w - u_1)) = h_{j_0}^+(x^*, \alpha w + (1 - \alpha)u_1) \\ &\leq \alpha h_{j_0}^+(x^*, w) + (1 - \alpha)h_{j_0}^+(x^*, u_1) < 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как выполнено $g'(x^*, \bar{x}) \leq h_{j_0}^+(x^*, \bar{x})$, то положительно однородная выпуклая функция $h_{j_0}^+(x^*, \bar{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции g в точке x^* . Поэтому в силу леммы 3.5 работы [10, гл. 5, п. 3, с. 232] существует функция $r(\bar{x})$ такая, что $\|x\|^{-1}r(\bar{x}) \rightarrow 0$ при $\bar{x} \rightarrow 0$ и

$$g(x^* + \bar{x}) \leq g(x^*) + h_{j_0}^+(x^*, \bar{x}) + r(\bar{x}).$$

Отсюда, учитывая неравенство (2.6), для достаточно малых положительных β имеем

$$g(x^* + \beta u_1^\alpha) \leq g(x^*) + h_{j_0}^+(x^*, \beta u_1^\alpha) + r(\beta u_1^\alpha) \leq \beta(h_{j_0}^+(x^*, u_1^\alpha) + \frac{r(\beta u_1^\alpha)}{\beta}) < 0. \quad (2.7)$$

Из неравенства (2.4) следует, что $(f'(x^*), u_1) < 0$. Следовательно, для малых $\alpha > 0$ имеем

$$(f'_0(x^*), u_1^\alpha) = (f'(x^*), u_1 + \alpha(w - u_1)) < 0. \quad (2.8)$$

Обозначим

$$h_{i_0}^-(x^*, \bar{x}) = \max_{j \in J(x^*)} (-f'_j(x^*), \bar{x}) - (f'_{i_0}(x^*), \bar{x}).$$

Положительно однородная выпуклая функция $h_{i_0}^-(x^*, \bar{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции $-g$ в точке x^* . Имеем также $h_{i_0}^-(x^*, -w) < 0$. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, докажем существование такого вектора u_2^α , что для малых $\beta > 0$

$$(f'_0(x^*), u_2^\alpha) < 0, \quad g(x^* + \beta u_2^\alpha) > 0. \quad (2.9)$$

Поскольку функция g непрерывна, из неравенств (2.7)–(2.9) следует существование такого числа $\xi \in (0, 1)$, что

$$g(x^* + \xi \beta u_1^\alpha + (1 - \xi)\beta u_2^\alpha) = 0,$$

$$f_0(x^* + \xi \beta u_1^\alpha + (1 - \xi) \beta u_2^\alpha) = f_0(x^*) + \beta \left((f'(x^*), \xi u_1^\alpha + (1 - \xi) u_2^\alpha) + \frac{o(\beta)}{\beta} \right) < f_0(x^*).$$

Но эти соотношения противоречат тому, что x^* является точкой локального минимума функции f_0 при ограничении $g(x) = 0$. $\square$

Пример 2.1. Пусть требуется найти проекцию точки $a = (1, 0, 0, 1)$ на множество

$$M = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max\{x_1 + x_2, x_2\} + \min\{x_3, x_3 + x_4\}\},$$

т. е. надо решить задачу:

$$\min_x \{f_0(x) = \frac{1}{2} \|x - a\|^2 : g(x) = 0\}.$$

Поскольку проекции любой точки на замкнутое множество существуют, то наша задача имеет решение. Допустим, что точка $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ — одно из искомым решений. Положим

$$f_1(x) = x_1 + x_2, \quad f_2(x) = x_2, \quad f_3(x) = x_3, \quad f_4(x) = x_3 + x_4.$$

Отсюда

$$f'_1(x^*) = (1, 1, 0, 0), \quad f'_2(x^*) = (0, 1, 0, 0), \quad f'_3(x^*) = (0, 0, 1, 0), \quad f'_4(x^*) = (0, 0, 1, 1).$$

В точке x^* необходимое условие (2.2) не выполнено. Действительно, допустим, что существуют числа $\lambda_1^- \geq 0, \lambda_2^- \geq 0, \lambda_3^- \geq 0, \lambda_4^- \geq 0$, такие, что

$$x_1^* - 1 = \lambda_1^-, \quad x_2^* = \lambda_1^- + \lambda_2^-, \quad x_3^* = \lambda_3^- + \lambda_4^-, \quad x_4^* - 1 = \lambda_4^-.$$

Отсюда $x_1^* > 0, x_2^* \geq 0, x_3^* \geq 0, x_4^* \geq 0$. Значит, $g(x^*) \neq 0$, что противоречит задаче. Следовательно, точка x^* удовлетворяет необходимому условию (2.3). Это означает, что существуют числа $\lambda_1^+ \geq 0, \lambda_2^+ \geq 0, \lambda_3^+ \geq 0, \lambda_4^+ \geq 0$, такие, что

$$x_1^* - 1 = -\lambda_1^+, \quad x_2^* = -\lambda_1^+ - \lambda_2^+, \quad x_3^* = -\lambda_3^+ - \lambda_4^+, \quad x_4^* - 1 = -\lambda_4^+.$$

Если $x_1^* < 0$, то $I(x^*) = \{2\}$. Следовательно $\lambda_1^+ = 0$, и из первого равенства получим $x_1^* = 1$, что также противоречит задаче. Если $x_1^* = 0, x_4^* < 0$, то $\lambda_1^+ = 1, I(x^*) = \{1, 2\}, J(x^*) = 4$. Отсюда $\lambda_3^+ = 0, g(x^*) = x_2^* + x_3^* + x_4^* = 0$. Значит,

$$-1 - \lambda_2^+ - \lambda_4^+ + 1 - \lambda_4^+ = 0 \Rightarrow \lambda_2^+ + 2\lambda_4^+ = 0 \Rightarrow \lambda_2^+ = \lambda_4^+ = 0 \Rightarrow x_4^* = 1,$$

и снова получено противоречие. Если $x_1^* = 0, x_4^* = 0$, то $I(x^*) = \{1, 2\}, J(x^*) = \{3, 4\}$. Поэтому

$$\begin{aligned} g(x^*) &= x_2^* + x_3^* = -(\lambda_1^+ + \lambda_2^+ + \lambda_3^+ + \lambda_4^+) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1^+ = 0, \lambda_2^+ = 0, \lambda_3^+ = 0, \lambda_4^+ = 0 \Rightarrow x_4^* = 1, \end{aligned}$$

что опять противоречит задаче.

Таким образом, из необходимого условия (2.3) следует, что $x_1^* > 0, x_4^* > 0$. Окончательно, решая задачу

$$\min_x \{f_0(x) : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 > 0, x_4 > 0\},$$

получим точку $x^* = (2/3, -1/3, -1/3, 1)$, которая и является решением нашей задачи.

Пусть $y^* \in \overline{\partial g(x)}$, $z^* \in \underline{\partial g(x)}$. Обозначим

$$h_{y^*}^+(x, \bar{x}) = \max_{u \in \underline{\partial g(x)}} (u, \bar{x}) + (y^*, \bar{x}), \quad h_{z^*}^-(x, \bar{x}) = \max_{v \in \partial g(x)} (-v, \bar{x}) - (z^*, \bar{x}).$$

Верна следующая теорема, доказательство которой мы не приведем, поскольку оно совершенно аналогично доказательству теоремы 2 работы [13].

Теорема 2.2. Пусть функции $f_i(x)$, $i \in I \cup J$ являются гладкими и $x^* \in M = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$. Предположим также, что существует такой вектор w , что

$$f'_k(x^*), w) < 0 \quad \forall k \in I(x^*) \cup J(x^*).$$

Тогда для любых $y^* \in \overline{\partial g(x)}$, $z^* \in \underline{\partial g(x)}$ выпуклый конус

$$K = \{\bar{x} \in R^n / h_{y^*}^+(x^*, \bar{x}) \leq 0, h_{z^*}^-(x^*, \bar{x}) \leq 0\}$$

является непрерывным шатром к множеству M в точке x^* .

При некотором дополнительном предположении в задаче (2.1) можно уточнить знаки множителей Лагранжа. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть функции $f_i(x)$, $i \in I \cup J$, гладкие и точка x^* — решение задачи (2.1). Предположим также, что градиенты $f'(x^*)$, $i \in I(x^*) \cup J(x^*)$, линейно независимы и

$$|I(x^*)| \geq 2, \quad |J(x^*)| \geq 2.$$

Тогда существуют такие числа $\lambda_i^+ \geq 0$, $i \in I(x^*)$, $\lambda_j^- \geq 0$, $j \in J(x^*)$, что

$$f'_0(x^*) + \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^+ f'_i(x^*) - \sum_{j \in J(x^*)} \lambda_j^- f'_j(x^*) = 0.$$

Доказательство. Найдем конус K^* , сопряженный конусу K (определение конуса K см. в теореме 2.2). Так как сумма многогранных выпуклых конусов $\text{con} \partial h_{y^*}^+(x^*, 0)$ и $\text{con} \partial h_{z^*}^-(x^*, 0)$ замкнута, получаем

$$\begin{aligned} K^* &= -cl\{\text{con} \partial h_{y^*}^+(x^*, 0) + \text{con} \partial h_{z^*}^-(x^*, 0)\} \\ &= -\text{con}\{f'_i(x^*), i \in I(x^*)\} - \text{con} y^* + \text{con}\{f'_j(x^*), j \in J(x^*)\} + \text{con} z^*. \end{aligned}$$

Согласно необходимому условию экстремума для задачи (2.1) имеем

$$\begin{aligned} f'_0(x^*) &\in K^* \Rightarrow \\ f'_0(x^*) &\in -\text{con}\{f'_i(x^*), i \in I(x^*)\} - \text{con} y^* + \text{con}\{f'_j(x^*), j \in J(x^*)\} + \text{con} z^*. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Фиксируем теперь элемент $z^* \in \underline{\partial g(x^*)}$. Тогда из соотношения (2.10) следует, что для каждого $y^* \in \overline{\partial g(x^*)}$ существует элемент $u^* \in \text{con}\{f'_i(x^*), i \in I(x^*)\} - \text{con} z^*$ такой, что

$$f'_0(x^*) + u^* \in \text{con}\{f'_j(x^*), j \in J(x^*)\} - \text{con} y^*. \quad (2.11)$$

Для всех $y^* \in \overline{\partial g(x)}$, $z^* \in \underline{\partial g(x)}$ существует единственный элемент u^* , удовлетворяющий условию (2.11). Действительно, если существуют два различных элемента u_1^*, u_2^* ,

удовлетворяющие условию (2.11), то из этого немедленно следует, что ненулевой элемент $u_1^* - u_2^*$ можно представить линейной комбинацией элементов $f'_j(x^*)$, $j \in J(x^*)$. С другой стороны, этот элемент также представляется в виде линейной комбинации векторов $f'_i(x^*)$, $i \in I(x^*)$. Мы получаем противоречие, поскольку система векторов $f'_k(x^*)$, $k \in I(x^*) \cap J(x^*)$, по предположению теоремы линейно независима.

Итак, найдется элемент u^* такой, что

$$u^* \in \bigcap_{z^* \in \overline{\partial g(x)}} \{ \text{con}\{f'_i(x^*), i \in I(x^*)\} - \text{con} z^* \}, \quad (2.12)$$

$$f'_0(x^*) + u^* \in \bigcap_{y^* \in \overline{\partial g(x)}} \{ \text{con}\{f'_j(x^*), j \in J(x^*)\} - \text{con} y^* \}. \quad (2.13)$$

Так как по предположению $|I(x^*)| \geq 2$, $|J(x^*)| \geq 2$, то согласно теореме 1.3

$$\begin{aligned} \bigcap_{z^* \in \overline{\partial g(x)}} \{ \text{con}\{f'_i(x^*), i \in I(x^*)\} - \text{con} z^* \} &= \{ \text{con}\{f'_i(x^*), i \in I(x^*)\} \}, \\ \bigcap_{y^* \in \overline{\partial g(x)}} \{ \text{con}\{f'_j(x^*), j \in J(x^*)\} - \text{con} y^* \} &= \{ \text{con}\{f'_j(x^*), j \in J(x^*)\} \}. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношений (2.12)–(2.13) непосредственно вытекает утверждение доказываемой теоремы. $\square$

3. Необходимые условия в задачах с несколькими ограничениями типа равенств

Теперь рассмотрим задачу с несколькими ограничениями типа равенств, задаваемыми квазидифференцируемыми функциями. В частности получим необходимые условия экстремума в задачах следующего типа:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad x \in M_1 \cap M_2, \quad (3.1)$$

где

$$M_1 = \{x : g_1(x) = \max_{i \in I_1} f_i(x) = 0\}, \quad M_2 = \{x : g_2(x) = \max_{i \in I_2} f_i(x) = 0\}.$$

Здесь I_1, I_2 — конечные множества индексов. Пусть $g_1(x^*) = g_2(x^*) = 0$.

Для фиксированных $u^* \in \overline{\partial g_1(x^*)}$, $v^* \in \overline{\partial g_2(x^*)}$ положим

$$K_1(x^*, u^*) = \{ \bar{x} : \max_{i \in I_1(x^*)} (f'_i(x^*), \bar{x}) \leq 0, \quad (-u^*, \bar{x}) \leq 0 \},$$

$$K_2(x^*, v^*) = \{ \bar{x} : \max_{i \in I_2(x^*)} (f'_i(x^*), \bar{x}) \leq 0, \quad (-v^*, \bar{x}) \leq 0 \}.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть $f_i(x)$, $i \in 0 \cup I_1 \cup I_2$ — непрерывно дифференцируемые функции. Допустим, что x^* является решением задачи (3.1) и в этой точке градиенты $f'_i(x^*)$, $i \in I_1(x^*) \cup I_2(x^*)$ линейно независимы. Предположим также, что выполнены

неравенства $|I_1(x^*)| \geq 2$, $|I_2(x^*)| \geq 2$. Тогда существуют числа $\lambda_i \geq 0$, $i \in I_1 \cup I_2$ такие, что

$$f'_0(x^*) + \sum_{i \in I_1(x^*) \cup I_2(x^*)} \lambda_i f'_i(x^*) = 0. \quad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпуклые конусы $K_1(x^*, u^*)$ и $K_2(x^*, v^*)$, согласно теореме 2.2, являются непрерывными шатрами соответственно к множествам M_1 и M_2 в точке x^* . Проверим условие неотделимости конусов $K_1(x^*, u^*)$ и $K_2(x^*, v^*)$. Это условие следующее (см. теорему 1.2 работы [10, гл. 5, п. 1, с. 200]):

$$\begin{aligned} K_1(x^*, u^*) - K_2(x^*, u^*) = R^n &\Leftrightarrow (K_1(x^*, u^*))^* \cap (-K_2(x^*, v^*))^* = \{0\} \\ &\Leftrightarrow (\text{con} \underline{\partial g_1(x^*)} - \text{con} u^*) \cap (-\text{con} \underline{\partial g_2(x^*)} + \text{con} v^*) = \{0\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Очевидно, что

$$(\text{con} \underline{\partial g_1(x^*)} - \text{con} u^*) \subseteq \text{Lin}\{f'_i(x^*), i \in I_1(x^*)\}, \quad (3.4)$$

$$(\text{con} \underline{\partial g_2(x^*)} - \text{con} v^*) \subseteq \text{Lin}\{f'_i(x^*), i \in I_2(x^*)\}. \quad (3.5)$$

Поскольку система векторов $\{f'_i(x^*), i \in I_1 \cup I_2\}$ линейно независима, то

$$\text{Lin}\{f'_i(x^*), i \in I(x^*)\} \cap \text{Lin}\{f'_i(x^*), i \in I_2(x^*)\} = \{0\}.$$

Отсюда, учитывая также соотношения (3.4)–(3.5), получим (3.3). Таким образом, согласно теореме 1.2 о пересечении непрерывных шатров конус $K = K_1(x^*, u^*) \cap K_2(x^*, v^*)$ является шатром к множеству $M = M_1 \cap M_2$ в точке x^* . Поэтому в силу необходимого условия экстремума (1.2) имеем

$$\begin{aligned} f'_0(x^*) \in K^* &\Rightarrow f'_0(x^*) \in (K_1(x^*, u^*) \cap K_2(x^*, v^*))^* = \text{cl}\{K_1^*(x^*, u^*) + K_2^*(x^*, v^*)\} \\ &= -\text{con}\{f'_i(x^*), i \in I_1(x^*)\} + \text{con} u^* - \text{con}\{f'_i(x^*), i \in I_2(x^*)\} + \text{con} v^*. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Фиксируем теперь элемент $u^* \in \underline{\partial g(x^*)}$. Тогда из (3.6) следует, что для каждого элемента $v^* \in \overline{\partial g(x^*)}$ существует $w^* \in \text{con}\{f'_i(x^*), i \in I(x^*)\} - \text{con} u^*$ такой, что

$$f'_0(x^*) + w^* \in \text{con}\{f'_j(x^*), j \in J(x^*)\} - \text{con} v^*. \quad (3.7)$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы (2.3), мы покажем, что найдется элемент w^* такой, что

$$w^* \in \bigcap_{u^* \in \underline{\partial g(x^*)}} \{\text{con}\{f'_i(x^*), i \in I_1(x^*)\} - \text{con} u^*\}, \quad (3.8)$$

$$f'_0(x^*) + w^* \in \bigcap_{v^* \in \overline{\partial g(x^*)}} \{\text{con}\{f'_i(x^*), i \in I_2(x^*)\} - \text{con} v^*\}. \quad (3.9)$$

Так как по предположению $|I_1(x^*)| \geq 2$, $|I_2(x^*)| \geq 2$, то согласно теореме 1.3

$$\bigcap_{u^* \in \underline{\partial g(x^*)}} \{\text{con}\{f'_i(x^*), i \in I_1(x^*)\} - \text{con} u^*\} = \text{con}\{f'_i(x^*), i \in I_1(x^*)\},$$

$$\bigcap_{v^* \in \overline{\partial g(x^*)}} \{\text{con}\{f'_i(x^*), i \in I_2(x^*)\} - \text{con} v^*\} = \text{con}\{f'_i(x^*), i \in I_2(x^*)\}.$$

Отсюда и из соотношений (3.8)–(3.9) вытекает утверждение теоремы. $\square$

Проиллюстрируем полученные результаты на следующих примерах.

Пример 3.1. Пусть $b = (1, 0, 0, 0)$. Рассмотрим задачу

$$\min_x \{1/2 \|x - b\|^2 : g_1(x) = \max\{x_1, x_2\} = 0, g_2(x) = \max\{x_3, x_4\} = 0\}. \quad (3.10)$$

Очевидно, точка $x^* = (0, 0, 0, 0)$ является решением этой задачи и в этой точке выполняются все условия теоремы 3.1. Условие (3.2) выполняется, если положить $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Очевидно также, что точка x^* является и решением задачи

$$\min_x \{1/2 \|x - b\|^2 \rightarrow \min, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0, x_4 \leq 0\}.$$

Пример 3.2. Пусть теперь $b = (-1, 0, 0, 1)$, и снова рассмотрим задачу (3.10). Для точки $x^* = (0, 0, 0, 0)$ имеем $I_1(x^*) = \{1, 2\}$, $I_2(x^*) = \{3, 4\}$. Легко заметить, что в этой точке необходимое условие (3.2) не выполняется. Следовательно, точка x^* не является решением задачи. Однако в этой точке очевидным образом имеет место необходимое условие (0.2) Кларка, поскольку в нем можно выбрать $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 1$. Таким образом, этот простой пример показывает, что условие (3.2) более эффективно, чем условие (0.2).

Теорема 3.2. Пусть x^* является решением задачи (0.1). Предположим, что

1) функция $f_0(x)$ дифференцируема и выпукла, а функции $f_i(x)$, $i \in I$, выпуклые на R^n .

2) $\dim \text{Lin} \partial g_i(x^*) \geq 2$, $\forall i \in I$;

3) для любых не равных одновременно нулю векторов $x_i^* \in \text{Lin} \partial g_i(x^*)$, $i \in I$, выполнено $\sum_{i \in I} x_i^* \neq 0$.

Тогда x^* является точкой минимума функции $f_0(x)$ при ограничениях — неравенствах $f_i(x) \leq 0$, $i \in I$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1. Тем не менее, приведем основные аспекты доказательства.

Покажем сначала, что в условиях теоремы сумма выпуклых конусов $K_i^*(x^*, u_i^*)$, $i \in I$, замкнута, т. е.

$$K^* = \text{cl} \left\{ \sum_{i \in I} K_i^*(x^*, u_i^*) \right\} = \sum_{i \in I} K_i^*(x^*, u_i^*).$$

Доказательство этого проведем в случае двух конусов. Пусть

$$y_k^* \in (K_1^*(x^*, u_1^*) + K_2^*(x^*, u_2^*))$$

и $y_k^* \rightarrow y_0^*$. Отсюда, существуют последовательности $p_k^* \in K_1^*(x^*, u_1^*)$, $q_k^* \in K_2^*(x^*, u_2^*)$ такие, что

$$y_k^* = p_k^* + q_k^*.$$

Предположим, что $\|p_k^*\| \rightarrow +\infty$. Имеем

$$\frac{y_k^*}{\|p_k^*\|} = \frac{p_k^*}{\|p_k^*\|} + \frac{q_k^*}{\|p_k^*\|}. \quad (3.11)$$

Не нарушая общности, допустим, что $p_k^*/\|p_k^*\| \rightarrow p_0^*$. Очевидно, что вектор p_0^* ненулевой и он принадлежит конусу $K_1^*(x^*, u^*)$. Теперь, в (3.11) переходя к пределу, получим

$$0 = p_0^* + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_k^*}{\|p_k^*\|}.$$

Значит, предел $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k^*/\|p_k^*\|$ также существует и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_k^*}{\|p_k^*\|} \rightarrow q_0^* \in K_2^*(x^*, v^*).$$

Таким образом

$$p_0^* + q_0^* = 0, \quad p_0^* \in \text{Lin}f_1(x^*), \quad q_0^* \in \text{Lin}f_2(x^*),$$

что противоречит предположению 3) теоремы.

Аналогично рассматривается случай, когда последовательность p_k^* ограничена. Таким образом, доказано, что конус K^* замкнут.

Теперь, применяя необходимое условие экстремума (1.1), получаем

$$\begin{aligned} f'_0(x^*) \in K^* &= cl\{K_1^*(x^*, u^*) + K_2^*(x^*, v^*)\} = K_1^*(x^*, u^*) + K_2^*(x^*, v^*) \\ &= -cl\{con\partial g_1(x^*) - conu^*\} - cl\{con\partial g_2(x^*) - conv^*\} \\ &\subseteq \text{Lin}\partial g_1(x^*) + \text{Lin}\partial g_2(x^*). \end{aligned}$$

Отсюда следует существование элементов $p^* \in \text{Lin}\partial g_1(x^*)$, $q^* \in \text{Lin}\partial g_2(x^*)$ таких, что

$$f'(x^*) + p^* + q^* = 0. \quad (3.12)$$

Такие элементы единственны, поскольку, если найдутся элементы $h^* \in \text{Lin}\partial g_1(x^*)$ и $m^* \in \text{Lin}\partial g_1(x^*)$, такие, что

$$f'(x^*) + h^* + m^* = 0, \quad h^* \neq p^*, \quad m^* \neq q^*,$$

то из (3.12) получим

$$(p^* - h^*) + (q^* - m^*) = 0.$$

Но элементы $(p^* - h^*) \in \text{Lin}\partial g_1(x^*)$, $(q^* - m^*) \in \text{Lin}\partial g_2(x^*)$ ненулевые, что противоречит предположению 3) теоремы. Окончательно, имея ввиду теорему 1.3, получим

$$\begin{aligned} p^* &\in \bigcap_{u^* \in \partial f_1(x^*)} -cl\{con\partial g_1(x^*) - conu^*\} = -con\partial f_1(x^*), \\ q^* &\in \bigcap_{v^* \in \partial f_2(x^*)} -cl\{con\partial f_2(x^*) - conv^*\} = -con\partial f_2(x^*). \end{aligned}$$

Отсюда и из включения (3.12) имеем

$$0 \in f'_0(x^*) + con\partial f_1(x^*) + con\partial f_2(x^*).$$

Заметим, что согласно теореме Куна-Таккера в дифференциальной форме (см. теорему 2.4 в [15, гл. 4, п. 2, с. 139]) это условие является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности в задаче выпуклого программирования:

$$\min_x \{f_0(x) : f_1(x) \leq 0, f_2(x) \leq 0\},$$

что завершает доказательство теоремы. $\square$

Приведем пример, показывающий, что предположение 2) теоремы 3.2 существенно.

Пример 3.3. Определим функции

$$f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Очевидно, что любая точка окружности $g_1(x_1, x_2) = 0$ является решением задачи

$$\min_x \{f_0(x) : g_1(x) = 0\}$$

и $\text{Lin} \partial g_1(x_1, x_2) = 1$. Однако, $x^* = (0, 0)$ является единственным решением задачи

$$\min_x \{f_0(x) : g_1(x) \leq 0\}.$$

Таким образом, предположение 2) теоремы 3.2 не выполнено, и утверждение теоремы не верно.

4. Условия максимума выпуклой функции на границе выпуклого множества

Теперь рассмотрим задачу максимизации выпуклой функции на границе выпуклого множества. Известно, что если выпуклая функция f не является постоянной на выпуклом множестве M , то она может достигать наибольшего значения только на границе множества M . Однако она может иметь и точки локальных максимумов. В этой связи представляет интерес следующий результат, который показывает, что в некоторых случаях точки локальных максимумов выпуклой функции f на границе выпуклого множества M являются и точками локальных максимумов этой функции на целом множестве M .

А именно, верна следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть x^* — точка локального максимума непрерывной выпуклой функции $f_0(x)$ при ограничении $g(x) = 0$, где $g(x)$ — выпуклая непрерывная функция, причем

$$0 \notin \partial g(x^*), \quad \dim \text{Lin} \partial g(x^*) \geq 2.$$

Допустим также, что существует вектор x^1 такой, что

$$g(x^1) \leq 0, \quad f'_0(x^*, x^1 - x^*) < 0.$$

Тогда x^* является точкой локального максимума функции $f_0(x)$ на множестве

$$M = \{x \in R^n / g(x) \leq 0\}.$$

Доказательство. Заметим, что для любого линейного функционала $-(y^*, \bar{x})$, $y^* \in \partial f_0(x^*)$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции $-f_0$ в точке x^* , поскольку

$$-f'_0(x^*, \bar{x}) = -\max_{y^*} \{(y^*, \bar{x}), y^* \in \partial f_0(x^*)\} = \min_{y^*} \{-(y^*, \bar{x}), y^* \in \partial f_0(x^*)\} \leq -(y^*, \bar{x}).$$

Поэтому согласно необходимому условию экстремума (1.2) имеем

$$-y^* \in -cl\{\text{con} \partial g(x^*) - \text{con} z^*\} \quad \forall y^* \in \partial f_0(x^*), \quad z^* \in \partial g(x^*).$$

Отсюда учитывая утверждение теоремы (1.3) получим

$$-y^* \in \bigcap_{z^* \in \partial g(x^*)} -cl\{con\partial g(x^*) - con z^*\} \Rightarrow -y^* \in -con\partial g(x^*).$$

Это означает, что линейный функционал $-(y^*, x)$ достигает своего минимального значения на множестве M в точке x^* , т. е.

$$-(y^*, x) \geq -(y^*, x^*) \quad \forall x \in M \Rightarrow (y^*, x) \leq (y^*, x^*) \Rightarrow f'_0(x^*, x - x^*) \leq 0 \quad \forall x \in M.$$

По предположению теоремы существует точка $x^1 \in M$ такая, что $f'_0(x^*, x^1 - x^*) < 0$. Положим $w = x^1 - x^*$. Согласно [16, теорема 2.2] существует отображение $\varphi(\bar{x}, \lambda) \geq 0$ такое, что

$$f_0(x^* + \lambda\bar{x} + \varphi(\bar{x}, \lambda)w) \leq f_0(x^*), \quad (4.1)$$

для фиксированного $\bar{x} \in con(M - x^*) \cap B_1(0)$ и для достаточно малых $\lambda > 0$, причем $\varphi(\bar{x}, \lambda)/\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ **равномерно** относительно $\bar{x} \in B_1(0)$. Поэтому, если $\bar{x} \in con(M - x^*)$, то применяя теорему о среднем значении для липшицевой функции (см. [9, теорема 2.3.7, с. 46]), получим

$$f_0(x^* + \lambda\bar{x}) - f_0(x^* + \lambda\bar{x} + \varphi(\bar{x}, \lambda)w) = (z^*, \varphi(\bar{x}, \lambda)w),$$

для некоторых

$$z^* \in \partial f_0(c), \quad c \in [x^* + \lambda\bar{x}, x^* + \lambda\bar{x} + \varphi(\bar{x}, \lambda)w].$$

Отсюда, учитывая неравенство (4.1), имеем

$$f_0(x^* + \lambda\bar{x}) \leq f_0(x^*) + \varphi(\bar{x}, \lambda)(z^*, w). \quad (4.2)$$

Поскольку многозначное отображение $x \rightarrow \partial f_0(x)$ полунепрерывно сверху, найдется такое положительное число δ , что

$$(y^*, w) \leq \frac{f'_0(x^*, w)}{2} < 0$$

для $\forall \lambda \in (0, \delta)$, $\forall \bar{x} \in B_1(0)$. Отсюда и из (4.2) следует, что

$$f_0(x^* + \lambda\bar{x}) \leq f_0(x^*) \quad \forall \lambda \in [0, \delta), \quad \forall \bar{x} \in B_1(0) \cap con(M - x^*).$$

Поэтому найдется окрестность V точки x^* такая, что

$$f_0(x) \leq f_0(x^*) \quad \forall x \in V \cap M,$$

т. е. x^* — точка локального максимума функции f на множестве M , что и доказывает теорему. $\square$

5. Задача вариационного исчисления с негладким ограничением типа равенства в левом конце траектории

Рассмотрим теперь следующую простейшую задачу вариационного исчисления со свободной правой частью:

$$\mathfrak{B}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t)) \rightarrow \min, \quad \varphi(x(t_0)) = 0, \quad (5.1)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $L = L(x, \dot{x}) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ — функция $2n$ переменных, непрерывная со своими частными производными на R^{2n} , $L'_x = (L'_{x_1}, L'_{x_2}, \dots, L'_{x_n})$ и $L'_{\dot{x}} = (L'_{\dot{x}_1}, L'_{\dot{x}_2}, \dots, L'_{\dot{x}_n})$, $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — выпуклая функция n переменных, определенная на R^n .

Теорема 5.1. Пусть выполнены вышеуказанные предположения, а непрерывно дифференцируемая вектор-функция $x^*(\cdot) \in C_1^n[t_0, t_1]$ является решением задачи (5.1). Предположим также, что

$$0 \notin \partial\varphi(x^*(t_0)), \quad \dim \text{con} \partial\varphi(x^*(t_0)) \geq 2.$$

Тогда существует число $\lambda \geq 0$ такое, что выполняются

а) уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} L'_{\dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t)) + L'_x(x^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0;$$

б) условие трансверсальности

$$L'_{\dot{x}}(t_0, x^*(t_0), \dot{x}^*(t_0)) \in \lambda \partial\varphi(x^*(t_0)).$$

Доказательство. Рассмотрим множество допустимых функций:

$$\mathfrak{M} = \{x(\cdot) \in C_1^n[t_0, t_1] : \varphi(x(t_0)) = 0\}.$$

Ясно, что

$$\mathfrak{B}'(x^*(\cdot), h) \geq 0 \quad \forall h \in \Gamma_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot)), \quad (5.2)$$

где $\mathfrak{B}'(x^*(\cdot), h(\cdot))$ — производная по направлению $h(\cdot)$ функционала $\mathfrak{B}$ в точке $x^*(\cdot)$, а $\Gamma_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot))$ — конус возможных направлений к множеству $\mathfrak{M}$ в точке $x^*(\cdot)$. Действительно, если $h \in K_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot))$, то для любой последовательности положительных чисел $\alpha_i \downarrow 0$ существует последовательность элементов $h_i(\cdot)$ такая, что

$$x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot) \in \mathfrak{M}.$$

Отсюда для достаточно больших i имеем

$$\mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot)) \geq \mathfrak{B}(x^*(\cdot)).$$

Нетрудно убедиться, что функционал $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки $x^*(\cdot)$ с некоторой константой $L > 0$. Поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot)) - \mathfrak{B}(x^*(\cdot))}{\alpha_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot)) - \mathfrak{B}(x^*(\cdot))}{\alpha_i}$$

$$+ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot)) - \mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h(\cdot))}{\alpha_i}.$$

Последний член стремится к нулю, поскольку

$$\left| \frac{\mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h_i(\cdot)) - \mathfrak{B}(x^*(\cdot) + \alpha_i h(\cdot))}{\alpha_i} \right| \leq L \|h_i - h\|_{C_1^n} \rightarrow 0,$$

и, следовательно, верно неравенство (5.2). Известно (см. [17, формула 4, с. 89]), что

$$\mathfrak{B}'(x^*(\cdot), h(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (L'_x - \frac{d}{dt} L'_x, h(t)) dt + (L'_x(t_1), h(t_1)) - (L'_x(t_0), h(t_0)) \geq 0, \quad (5.3)$$

$$\forall h(\cdot) \in \Gamma_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot)).$$

Согласно [13, теорема 2] для любого фиксированного $y^* \in \partial\varphi(x^*(t_0))$ выпуклый конус

$$K(x^*(t_0), y^*) = \{\bar{x} \in R^n : \varphi(x^*(t_0), \bar{x}) \leq 0, (-y^*, \bar{x}) \leq 0\}$$

является шатром для множества $M \equiv \{x \in R^n : \varphi(x) = 0\}$ в точке $x^*(t_0)$. Следовательно, множество

$$\Gamma_{\mathfrak{M}}(x^*(\cdot)) = \{h(\cdot) \in C_1^n[t_0, t_1] : h(t_0) \in K(x^*(t_0), y^*)\}$$

является конусом возможных направлений к множеству $\mathfrak{M}$ в точке $x^*(\cdot)$.

Подставляя в (5.3) $h(t_0) = h(t_1) = 0$, получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} (L'_x - \frac{d}{dt} L'_x, h(t)) dt \geq 0 \quad \forall h(\cdot) \in C_1^n[t_0, t_1], \quad h(t_0) = h(t_1) = 0.$$

Отсюда из леммы Дюбуа–Раймона следует, что

$$-\frac{d}{dt} L'_x(x^*(t), \dot{x}^*(t)) + L'_x(x^*(t), \dot{x}^*(t)) = 0.$$

Учитывая это, из (5.3) получаем

$$(L'_x(t_1), h(t_1)) - (L'_x(t_0), h(t_0)) \geq 0.$$

Поскольку $h(t_1)$ произвольно, то

$$-(L'_x(t_0), h(t_0)) \geq 0 \quad \forall h(t_0) \in K(x^*(t_0), y^*),$$

т. е.

$$-L'_x(t_0) \in K^*(x^*(t_0), y^*) = cl\{-con\partial\varphi(x^*(t_0)) + cony^*\}.$$

Отсюда и из теоремы 1.3 следует, что

$$L'_x(t_0) \in \bigcap_{y^* \in \partial\varphi(x^*(t_0))} cl\{con\partial\varphi(x^*(t_0)) - cony^*\} = con\partial\varphi(x^*(t_0)),$$

это и есть условие трансверсальности. □

References

- [1] F. H. Clarke, “A new approach to Lagrange multipliers”, *Mathematics of Operations Research*, **1:2** (1976), 165–174.
- [2] Р. А. Хачатрян, “О необходимых условиях экстремума в задачах с негладкими ограничениями типа равенств”, *Владикавказский математический журнал*, **18:3** (2016), 72–83. [R. A. Khachatryan, “On Necessary Optimality Conditions in Non-Smooth Problems with Constraints”, *Vladikavkazian Mathematical Journal*, **18:3** (2016), 72–83 (In Russian)].
- [3] A. D. Ioffe, “Lagrange multiplier rule with small convex-valued subdifferentials for nonsmooth problems of mathematical programming involving equality and nonfunctional constraints”, *Mathematical Programming*, **58** (1993), 137–145.
- [4] Е. С. Половинкин, “Субдифференциалы разности двух выпуклых функций”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **19:5** (2014), 167–184; англ. пер.: Е. S. Polovinkin, “Subdifferential for the difference of two convex functions”, *J. Math. Sci.*, **218:5** (2016), 664–677.
- [5] В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, М., 1981. [V. F. Dem'yanov, L. V. Vasilev, *Nedifferenciруемая Optimizaciya*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].
- [6] В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Наука, М., 1990. [V. F. Dem'yanov, A. M. Rubinov, *Osnovi Negladkogo Analisa i Kvazidifferencialnogo Ischisleniya*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russian)].
- [7] В. Ф. Демьянов, Л. Н. Полякова, “Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве”, *ЖВМ и МФ*, **20:4** (1980), 849–846; англ. пер.: V. F. Dem'yanov, L. N. Polyakova, “Minimization of a quasi-differentiable function in a quasi-differentiable set”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20:4** (1980), 34–43.
- [8] В. Ф. Демьянов, Б. Н. Малоземов, *Введение в минимакс*, Наука, М., 1972. [V. F. Dem'yanov, B. N. Malozemov, *Vvedenie v Minimax*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].
- [9] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Мир, М., 1988; англ. пер.: F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [10] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980. [B. N. Pshenychii, *Vypuklij Analiz i Extremalnye Zadachi*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].
- [11] В. Г. Болтянский, “Метод шатров в теории экстремальных задач”, *Успехи мат. наук*, **30:3** (1975), 3–53; англ. пер.: V. G. Boltyanskii, “The method of tents in the theory of extremal problems”, *Russian Math. Surveys*, **30:3** (1975), 1–54.
- [12] R. Ivanachi, “On the intersection of Continuous local Tents”, *Proc. Japan Acad.*, **69:A** (1993), 308–311.
- [13] Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, “О необходимых условиях экстремума для негладких функций”, *Известия НАН Армении, сер. Математика*, **18:4**(1983), 318–325. [B. N. Pshenychii, R. A. Khachatryan, “On the necessary extremum conditions for a nonsmooth functions”, *Izvestiya NAN Armenii, Matematika*, **18:4**(1983), 318–325 (In Russian)].
- [14] Б. Н. Пшеничный, *Необходимые условия экстремума*, Наука, М., 1982. [B. N. Pshenychii, *Neobkhodimye Uslovia Extremuma*, Nauka Publ., Moscow, 1982 (In Russian)].
- [15] А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров, *Методы оптимизации*, Наука, М., 1986. [A. G. Sukharev, A. V. Timokhov, V. V. Fedorov, *Metodi Optimizacii*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].
- [16] Р. А. Хачатрян, “О регулярных касательных конусах”, *Известия НАН Армении. Математика*, **52:2** (2017), 66–77; англ. пер.: R. A. Khachatryan, “On regular tangent cones”, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, **52:2** (2017), 74–80.
- [17] В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров, *Сборник задач по оптимизации, теория и примеры-задачи*, Наука, М., 1984. [V. M. Alekseev, E. M. Galeev, V. M. Tikhomirov, *Sbornik Zadach po Optimizacii, Teoria i Primeri-zadachy*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

Информация об авторе

Хачатрян Рафик Агасиевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и математического моделирования. Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения. E-mail: khrafik@ysu.am

Для контактов:

Хачатрян Рафик Агасиевич
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Поступила в редакцию 18 марта 2020 г.
Поступила после рецензирования 13 мая 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Information about the author

Rafik A. Khachatryan, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Numerical Analysis and Mathematical Modeling Department. Yerevan State University, Yerevan, Armenia. E-mail: khrafik@ysu.am

Corresponding author:

Rafik R. Khachatryan
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Received 18 March 2020
Reviewed 13 May 2020
Accepted for press 8 June 2020

© Helminck G.F., Panasenکو E.A., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-183-195

UDC 517.958+517.98

Properties of the algebra Psd related to integrable hierarchies

Gerard F. HELMINCK¹, Elena A. PANASENKO²¹ KdV Institute, University of Amsterdam

904 Science Park, Amsterdam, 1098 XH, the Netherlands

² Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Свойства алгебры псевдодифференциальных операторов, связанные с интегрируемыми иерархиями

Герард Франциск ХЕЛЬМИНК¹, Елена Александровна ПАНАСЕНКО²¹ Математический институт Кортевега – де Фриза, Университет г. Амстердам

1098 ХН, Нидерланды, г. Амстердам, Сайенс Парк, 904

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Abstract. In this paper we discuss and prove various properties of the algebra of pseudo differential operators related to integrable hierarchies in this algebra, in particular the KP hierarchy and its strict version. Some explain the form of the equations involved or give insight in why certain equations in these systems are combined, others lead to additional properties of these systems like a characterization of the eigenfunctions of the linearizations of the mentioned hierarchies, the description of elementary Darboux transformations of both hierarchies and the search for expressions in Fredholm determinants for the constructed eigenfunctions and their duals.

Keywords: pseudo differential operators; the adjoint; constant term; n -KdV hierarchy; KP hierarchy; strict KP hierarchy; Lax equations

For citation: Helminck G.F., Panasenکو E.A. Svoistva algebrы psevdodifferencialnykh operatorov, svyazannye s integriruemyimi ierarkhiiami [Properties of the algebra Psd related to integrable hierarchies]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 183–195. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-183-195.

Аннотация. В работе рассматриваются различные свойства алгебры псевдодифференциальных операторов, связанные с интегрируемыми иерархиями, возникающими в этой алгебре, в частности, иерархией Кадомцева–Петвиашвили (КП) и ее строгой версией. Одни свойства проясняют вид уравнений в иерархиях и дают понимание того, почему уравнения определенного вида скомбинированы в этих системах, другие позволяют изучить свойства самих систем, а именно: вид собственных функций линеаризаций упомянутых иерархий, описание элементарных преобразований Дарбу обеих иерархий, отыскание представлений построенных собственных функций и двойственных им в терминах определителей Фредгольма.

Ключевые слова: псевдодифференциальные операторы; сопряженный оператор; свободный член; иерархия n -КдФ; иерархия КП; строгая иерархия КП; уравнения Лакса

Для цитирования: Хельминк Г.Ф., Панасенко Е.А. Свойства алгебры псевдодифференциальных операторов, связанные с интегрируемыми иерархиями // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 183–195. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-183-195. (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

The integrable hierarchies that play a central role in this paper consist of collections of compatible Lax equations. This Lax form exists for many important nonlinear equations from mathematical physics. We illustrate it at the hand of the well-known example of the Korteweg – de Vries (KdV) equation that describes the propagation of shallow water waves in a narrow channel:

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx}, \quad (0.1)$$

where $u(x, t)$ corresponds to the height of the waves in the channel and depends on the space coordinate x along the channel and the time coordinate t . Let ∂ be the operator $\frac{\partial}{\partial x}$. The nonlinear partial differential equation (0.1) is then equivalent to the following identity between linear operators in ∂

$$\partial_t(\mathcal{L}_2) := \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}_2) = 0 \cdot \partial^2 + \partial_t(u) = [A, \mathcal{L}_2]. \quad (0.2)$$

Here $\mathcal{L}_2$ is the second order operator $\partial^2 + u$, also known as the *Schrödinger operator*, A is the third order operator $\partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u_x$, and $[A, \mathcal{L}_2] := A\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2A$ is the commutator of $\mathcal{L}_2$ and A . Let R be some commutative algebra of functions in x and t that contains all the coefficients of $\mathcal{L}_2$, A and $[A, \mathcal{L}_2]$ for which ∂ and ∂_t are derivations of R . Then all three operators belong to the algebra $R[\partial]$ of differential operators in ∂ with coefficients from R and identity (0.2) becomes an equality of differential operators, where two elements of $R[\partial]$ are called equal if the coefficients of corresponding powers of ∂ are. The relation between the KdV-equation and the operator form (0.2) was first found by P. Lax (see [1]), which explains the name *Lax form* of the KdV equation for (0.2).

We focus here on two issues related to the form of equation (0.2). First of all, note the special character of this identity: it says namely that the commutator of a second order differential operator in ∂ and a third order one is a zero-th order operator in ∂ , which is far from true in general. Moreover, the commutator on the right hand side of the identity suggests that $\mathcal{L}_2$ is a deformation of an operator independent of t by conjugation with an invertible time-dependent operator. For, if $\mathcal{L}_2 = KL_0K^{-1}$, with $\partial_t(L_0) = 0$, then there holds

$$\partial_t(\mathcal{L}_2) = \partial_t(K)L_0K^{-1} - KL_0K^{-1}\partial_t(K)K^{-1} = [\partial_t(K)K^{-1}, \mathcal{L}_2].$$

However, $R[\partial]$ does not seem to be the right framework to make sense out of this, for it lacks sufficient invertible elements. These considerations lead to a number of natural questions:

- (a) Is there some algebraic relation linking the operators $\mathcal{L}_2$ and A or was it simply pure coincidence?

- (b) Given $\mathcal{L}_2$, are there more differential operators $\tilde{A}$ in $R[\partial]$ and derivations $\partial_{\tilde{A}}$ of R such that

$$\partial_{\tilde{A}}(\mathcal{L}_2) = [\tilde{A}, \mathcal{L}_2]?$$

In particular, the commutator $[\tilde{A}, \mathcal{L}_2]$ has then degree zero in ∂ .

- (c) Is there a framework, where the deformation picture $\mathcal{L}_2 = KL_0K^{-1}$ holds?

All three questions can be solved in an extension $\text{Ps}d$ of $R[\partial]$ called the *algebra of pseudo differential operators*. The structure of $R[\partial]$, its extension $\text{Ps}d$ and the properties that allow you to solve the questions (a), (b) and (c) are treated in Section 1. The next section treats the properties related with two decompositions of $\text{Ps}d$ that lead to the characterization of the wave functions of the two central hierarchies, their expressions in special functions and the elementary Darboux transformations with whom one can construct new solutions out of known ones.

1. The algebra of pseudo differential operators

In the introduction we already met the algebra $R[\partial]$. We start with giving precise conditions on R and ∂ under which we can form the extension $\text{Ps}d$, keeping the perspective of application as wide as possible. So we let R be some commutative algebra over a field k of characteristic zero and let ∂ be a k -linear derivation defined on R . In this way one can choose to work in a real or complex context. Consider now the collection $R[\partial]$ of k -linear endomorphisms of R of the form $\sum_{i=0}^n a_i \partial^i$, $a_i \in R$, i.e. the maps

$$R \ni r \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \partial^i(r) \in R.$$

We call the elements of $R[\partial]$ *differential operators in ∂ with coefficients from R* . By the Leibnitz property of ∂ , the composition of “applying ∂^m ” and “multiplying with $r_0 \in R$ ” is given by

$$\partial^m \circ r_0 = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \partial^i(r_0) \partial^{m-i},$$

which belongs also to $R[\partial]$. Hence $R[\partial]$ is an algebra w.r.t. the composition of endomorphisms of R . In the rest of this paper we leave out this composition sign “ $\circ$ ” and the multiplication between $\sum_i a_i \partial^i$ and $\sum_j b_j \partial^j$ in $R[\partial]$ is given by:

$$\sum_{i,j} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} a_i \partial^k(b_j) \partial^{j+i-k}. \quad (1.1)$$

As was mentioned in the introduction, we want to be able to translate identities between differential operators from $R[\partial]$ directly into identities for their coefficients. Therefore we will assume that all $\{\partial^i \mid i \geq 0\}$ are R -linear independent in $R[\partial]$. If this condition is not satisfied, then one has to pass to a cover of $R[\partial]$, where these relations are decoupled ([2]), and make the extension of the cover.

Under the assumption just mentioned, the algebra $R[\partial]$ can be extended to the algebra of pseudo differential operators by adding the inverses of all the powers of ∂ and by allowing infinite sums of these negative powers. One can view this process as adding “integral operators” to the differential operators of $R[\partial]$, but it is done in a purely algebraic way. First of all, one wants all the integral powers of ∂ to satisfy

$$\partial^n \partial^m = \partial^{n+m}, n, m \in \mathbb{Z}, \partial^0 = 1.$$

Next one uses the relation $\partial r = \partial(r) + r\partial$, $r \in R$, and gets $\partial^{-1} r = r\partial^{-1} + \partial^{-1}\partial(r)\partial^{-1}$ or

$$\partial^{-1} r = r\partial^{-1} - \partial(r)\partial^{-2} + \partial^2(r)\partial^{-3} - \dots,$$

and from the last formula, by induction,

$$\partial^{-n} r = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+n-1}{k} \partial^k(r) \partial^{-n-k}, \quad n > 0.$$

Thus one arrives at the set $\text{Psd} = R[\partial, \partial^{-1}]$ of all formal series

$$P = \sum_{j=-\infty}^N p_j \partial^j, p_j \in R,$$

and letting for each $n \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \text{ if } k \geq 1, \text{ and } \binom{n}{0} := 1, \quad (1.2)$$

it can be verified that the product of two series $P = \sum_i p_i \partial^i$ and $Q = \sum_j q_j \partial^j$ in Psd is defined by a formula that reminds (1.1), namely

$$PQ := \sum_i \sum_j \sum_{s=0}^{\infty} \binom{i}{s} p_i \partial^s(q_j) \partial^{j+i-s}. \quad (1.3)$$

In this way Psd becomes an associative algebra. A pseudo differential operator $P = \sum_{j=-\infty}^N p_j \partial^j$ is said to be of order N if $p_N \neq 0$. It is convenient to use at many computations in Psd the notation

$$P = \sum_{j=-\infty}^N p_j \partial^j = p_N \partial^N + \text{l.o.},$$

where l.o. is short for the lower order part $\sum_{j=-\infty}^{N-1} p_j \partial^j$ of P .

The algebra of pseudo differential operators admits a number of decompositions. For $s \in \mathbb{Z}$, any operator $P = \sum_j p_j \partial^j \in \text{Psd}$ can be split as

$$P = P_{<s} + P_{\geq s}, \text{ where } P_{<s} = \sum_{j<s} p_j \partial^j \text{ and } P_{\geq s} = \sum_{j \geq s} p_j \partial^j. \quad (1.4)$$

For $s = 0$, this yields in particular the splitting of P in the strict integral operator part $P_{<0}$ of P and its differential operator part $P_{\geq 0}$. Similarly, we have

$$P = P_{\leq s} + P_{>s}, \text{ where } P_{\leq s} = \sum_{j \leq s} p_j \partial^j \text{ and } P_{>s} = \sum_{j > s} p_j \partial^j. \quad (1.5)$$

For $s = 0$, this corresponds to writing P as the sum of its integral operator part $P_{\leq 0}$ and its pure differential operator part $P_{> 0}$.

Being an associative k -algebra, Psd is a Lie algebra over k with respect to the commutator. From the multiplication rules in Psd it follows that for $s = 0$ the two decompositions (1.4) and (1.5) yield two ways to split the Lie algebra Psd into the direct sum of two Lie subalgebras. The first is given by

$$\text{Psd} = \{P \in \text{Psd}, P = P_{< 0}\} \oplus \{P \in \text{Psd}, P = P_{\geq 0}\} := \text{Psd}_{< 0} \oplus \text{Psd}_{\geq 0}.$$

and the second one by

$$\text{Psd} = \{P \in \text{Psd}, P = P_{\leq 0}\} \oplus \{P \in \text{Psd}, P = P_{> 0}\} := \text{Psd}_{\leq 0} \oplus \text{Psd}_{> 0}.$$

We denote by $\pi_{\geq 0}$ the projection from Psd on $\text{Psd}_{\geq 0}$ consisting of taking the differential operator part of an element in Psd . Similarly, the projections of Psd on respectively $\text{Psd}_{\leq 0}$, $\text{Psd}_{> 0}$, and $\text{Psd}_{< 0}$, we denote by respectively $\pi_{\leq 0}$, $\pi_{> 0}$, and $\pi_{< 0}$. Obviously, we have for every $P \in \text{Psd}$

$$\pi_{\leq 0}(P) = P_{\leq 0}, \pi_{\geq 0}(P) = P_{\geq 0}, \pi_{> 0}(P) = P_{> 0}, \text{ and } \pi_{< 0}(P) = P_{< 0}.$$

A special role in our considerations is played by the *constant term* $\text{ct}(P) := p_0$ of P .

Contrary to $R[\partial]$, the extended algebra Psd is rich in invertible elements. Let R^* denote the group of invertible elements in R .

Lemma 1.1. *Every pseudo differential operator $P = \sum_{j \leq m} p_j \partial^j$ with $p_m \in R^*$ has an inverse P^{-1} of the form $\sum_{i \leq -m} q_i \partial^i$, with $q_{-m} = p_m^{-1}$.*

P r o o f. The product of the elements $\sum_{j \leq m} p_j \partial^j$ and $\sum_{i \leq -m} q_i \partial^i$ is by definition equal to

$$\sum_{j \leq m} \sum_{i \leq -m} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j}{s} p_j \partial^s(q_i) \partial^{j+i-s}$$

This is an operator of order ≤ 0 and, if it has to equal 1, then the leading coefficient q_{-m} has to be the inverse of p_m and for all $k \geq 1$ there has to hold

$$\sum_{\substack{i, j, s \\ i+j-s = -k}} \binom{j}{s} p_j \partial^s(q_i) = p_m q_{-m-k} + \sum_{\substack{i, j, s \\ i+j-s = -k \\ i > -m-k}} \binom{j}{s} p_j \partial^s(q_i) = 0.$$

Since p_m is invertible, one can solve from this q_{-m-k} assuming all the q_i , with index $i > -m-k$, are known. This shows the existence of the inverse of P . $\square$

This Lemma leads to two groups inside Psd that play a role in the sequel.

Corollary 1.1. *The subsets $D(0)$ and $D(1)$ defined by*

$$D(0) = \{p_0 + \sum_{j < 0} p_j \partial^j \mid p_0 \in R^*\} \text{ resp. } D(1) = \{1 + \sum_{j < 0} p_j \partial^j \in \text{Psd}\}$$

are groups w.r.t. the multiplication on Psd .

The monic elements of positive order in Psd possess still another property.

Proposition 1.1. *Consider for $N \geq 1$ any monic element*

$$P = \partial^N + \sum_{i \geq 1} p_i \partial^{N-i} = \sum_{i \geq 0} p_i \partial^{N-i}$$

of order $N \geq 1$ in Psd. Then there is a unique monic pseudo differential operator of order one

$$P^{\frac{1}{N}} = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} \ell_i \partial^{1-i} = \sum_{i=0}^{\infty} \ell_i \partial^{1-i},$$

satisfying $(P^{\frac{1}{N}})^N = P$. The operator $P^{\frac{1}{N}}$ is called the N -th root of P . Moreover each coefficient ℓ_i of $P^{\frac{1}{N}}$ is a polynomial expression in the elements

$$\{\partial^{l_j}(p_j) \mid l_j \geq 0, j \leq i\}.$$

Proof. We will show that one can find the coefficients $\{\ell_i\}$ in a unique recurrent way. Both p_0 and ℓ_0 are equal to 1. Next we compare the other coefficients in the identity

$$\left(\sum_{i_1=0}^{\infty} \ell_{i_1} \partial^{1-i_1} \right) \cdots \left(\sum_{i_N=0}^{\infty} \ell_{i_N} \partial^{1-i_N} \right) = \sum_{i \geq 0} p_i \partial^{N-i}. \quad (1.6)$$

From the multiplication rules in Psd one sees that the term with ∂^{N-1} in P can only be obtained by choosing in the N -fold product of the operator $P^{\frac{1}{N}}$ in (1.6), $N-1$ times the term ∂ and once the term ℓ_1 and disregarding the lower order terms. This gives you that ℓ_1 is determined uniquely: $\ell_1 = \frac{1}{N} p_1$. Assume now that all $\{\ell_j \mid j \leq k\}$ are uniquely determined and each ℓ_j is a polynomial expression in the $\{\partial^s(p_i) \mid s \geq 0, i \leq j\}$. Then a similar reasoning as for $k=1$ shows that $p_{k+1} - N\ell_{k+1}$ is a polynomial expression in the $\{\partial^r(\ell_j) \mid j \leq k, r \geq 0\}$. Since these $\{\ell_j\}$ were unique and possessed the required property, this concludes the proof of the proposition. $\square$

Applying Proposition 1.1 to the operator $\mathcal{L}_2 = \partial^2 + u$ from the introduction, yields a first order operator $L = (\mathcal{L}_2)^{\frac{1}{2}}$ of the form

$$L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} \ell_{j+1} \partial^{-j}. \quad (1.7)$$

Note that operators of the form (1.7) can be obtained by conjugating ∂ with an element $K \in D(1)$. Under a mild condition, all L of the form (1.7) have this form.

Lemma 1.2. *If $\partial : R \rightarrow R$ is surjective, then any $P = \partial + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \partial^{-i}$ can be obtained by dressing the operator ∂ by an element of $D(1)$.*

Proof. The proof consists of solving step by step the equation $PK = K\partial$ with a $K \in D(1)$. For, if $K = 1 + \sum_{j>0} k_j \partial^{-j}$, the right hand side is equal to $\partial + \sum_{j>0} k_j \partial^{1-j}$ and the left hand side equals

$$\begin{aligned} PK &= \left(\partial + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \partial^{-i} \right) \left(1 + \sum_{j>0} k_j \partial^{-j} \right) = \partial + \sum_{i>0} k_i \partial^{1-i} + \\ &\quad \sum_{i>0} \partial(k_i) \partial^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \partial^{-i} + \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \sum_{l \geq 0} p_{i+1} \binom{-i}{l} \partial^l(k_j) \partial^{-i-j-l}. \end{aligned}$$

This shows that we have to choose K such that

$$\sum_{j \geq 1} \partial(k_j) \partial^{-j} + \sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1} \partial^{-i} + \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} \sum_{l \geq 0} p_{i+1} \binom{-i}{l} \partial^l(k_j) \partial^{-i-j-l} = 0.$$

The coefficient of ∂^{-1} in the expression in the left hand side is equal to $\partial(k_1) + p_2$ and thanks to the assumption on ∂ one can find a k_1 such that this coefficient is zero. Assuming that one has found $\{k_1, \dots, k_m\}$ for $m \geq 1$ such that the coefficients of all the $\partial^{-l}, l \leq m$, are zero, then the next coefficient has the form

$$\partial(k_{m+1}) + p_{m+2} + \text{polynomial expression in } \partial^l(k_i) \text{ and the } p_{j+1}, i \leq m \text{ and } j \leq m$$

and one can choose k_{m+1} such that this equals zero. Thus the coefficients of K can be found inductively. $\square$

Hence, if ∂ is surjective, then $\mathcal{L}_2 = K \partial^2 K^{-1}, K \in D(1)$, and the deformation picture from question (c) in the introduction holds. We can also comment now the questions (a) and (b) from the introduction. As for question (a), one verifies directly that $A = ((\mathcal{L}_2)^{3/2})_{\geq 0}$, the differential operator part of $(\mathcal{L}_2)^{3/2}$. Since for all $s \geq 1$ the operator $(\mathcal{L}_2)^{s/2}$ commutes with $\mathcal{L}_2$, we see that

$$[(\mathcal{L}_2)^{s/2}]_{\geq 0}, \mathcal{L}_2] = [\mathcal{L}_2, ((\mathcal{L}_2)^{s/2})_{< 0}]$$

and the right hand side of this equality is of order zero or less in ∂ . This shows that the $\{A_s = ((\mathcal{L}_2)^{s/2})_{\geq 0}\}$ are good candidates to consider question (b) and they span all $\tilde{A} \in R[\partial]$ with this property, for there holds

Proposition 1.2. *Denote as above $(\mathcal{L}_2)^{1/2}$ by L . Let $\tilde{A}$ be a differential operator in $R[\partial]$ of order r such that the commutator $[\tilde{A}, \mathcal{L}_2]$ is of order smaller or equal to zero. Then there are $a_i \in \text{Ker}(\partial), 0 \leq i \leq r$, such that*

$$\tilde{A} = \sum_{i=0}^r a_i (L^i)_{\geq 0}.$$

Proof. Note first of all that the operator L has the form $L = \partial + \sum_{j=1}^{\infty} \ell_{j+1} \partial^{-j}$. Therefore, we have for all $i \geq 1$ that $(L^i)_{\geq 0} = \partial^i + \text{l.o.}$ and there follows by induction on the order r of $\tilde{A}$ that $\tilde{A} = \sum_{i=0}^r a_i (L^i)_{\geq 0}$. What remains to be shown is that $a_i \in \text{Ker}(\partial)$ and for that we use the fact that the order of $[\tilde{A}, \mathcal{L}_2]$ in ∂ is $-\ell$, with $0 \leq \ell \leq \infty$. We claim now that the order of the commutator $[\tilde{A}, L]$ is $-1 - \ell$. In particular, if $\tilde{A}$ commutes with $\mathcal{L}_2$ then it also commutes with L . Suppose,

$$[\tilde{A}, L] = \alpha \partial^m + \text{l.o.}, \text{ with } \alpha \neq 0.$$

Then we have the formula

$$\begin{aligned} [\tilde{A}, \mathcal{L}_2] &= [\tilde{A}, L^2] = [\tilde{A}, L]L + L[\tilde{A}, L] \\ &= (\alpha \partial^m + \text{l.o.})(\partial + \text{l.o.}) + (\partial + \text{l.o.})(\alpha \partial^m + \text{l.o.}) \\ &= 2\alpha \partial^{m+1} + \text{l.o.} \end{aligned}$$

Hence the order of $[\tilde{A}, \mathcal{L}_2]$ is $m + 1$, which shows that $m = -1 - \ell$. As $\ell \geq 0$, we see that the order of $[\tilde{A}, L]$ in ∂ is smaller than zero. On the other hand we have

$$[\tilde{A}, L] = [a_r \partial^r + \text{l.o.}, \partial + \text{l.o.}] = -\partial(a_r) \partial^r + \text{l.o.}$$

and thus $\partial(a_r) = 0$. As a_r is in the kernel of ∂ , it commutes with all elements of Psd and we have $[a_r(L^r)_{\geq 0}, \mathcal{L}_2] = a_r[(L^r)_{\geq 0}, \mathcal{L}_2]$ and thus $a_r(L^r)_{\geq 0}$ satisfies the same property as $\tilde{A}$. This holds then also for the differential operator $\tilde{A} - a_r(L^r)_{\geq 0}$ and continuing in this fashion gives you that all the a_i belong to $\text{Ker}(\partial)$. This finishes the proof of the proposition. $\square$

So, we have seen that it makes sense for each $s \geq 1$ to look for Schrödinger operators $\mathcal{L}_2$ and a k -linear derivation ∂_s of R , commuting with ∂ such that the Lax equation

$$\partial_s(\mathcal{L}_2) = [A_s, \mathcal{L}_2] \quad (1.8)$$

holds. It were Gelfand and Dickey ([3]) who realized that it made also perfect sense to consider similar Lax equations for an n -th order analogue $\mathcal{L}_n$ of $\mathcal{L}_2$. Simply replace $\mathcal{L}_2$ by $\mathcal{L}_n$ and A_s by $((\mathcal{L}_n)^{s/n})_{\geq 0}$, where this fractional power exists thanks to Proposition 1.1.

Having found the examples $((\mathcal{L}_2)^{s/2})_{\geq 0}$ the next step was to consider not only single Lax equations, but actually a whole chain of them corresponding to all these examples and to construct solutions for the whole system. Much work in this direction was initiated by Sato and his school, see e.g. [4] and [5]. Thereto one had to consider a set of derivations $\{\partial_s \mid s \geq 1\}$ of R , all commuting with ∂ , and one looks for Schrödinger operators $\mathcal{L}_2$ that satisfy all the equations

$$\partial_s(\mathcal{L}_2) = [A_s, \mathcal{L}_2], s \geq 1. \quad (1.9)$$

This system of equations is the so-called *KdV hierarchy* and the equations (1.9) are the *Lax equations* of the hierarchy. Also for the higher order analogue $\mathcal{L}_n$ of the Schrödinger operator one can unite the corresponding Lax equations and that yields the n -KdV hierarchy. Note that the n -th root of a solution of the n -KdV hierarchy satisfies the same Lax equations as the solution itself. There holds namely

Proposition 1.3. *Let $\mathcal{L}_n$ be a solution of the n -KdV hierarchy, L its n -th root and A_s be the projection $(L^s)_{\geq 0}$, $s \geq 1$. Then L has the form (1.7) and satisfies the Lax equations*

$$\partial_s(L) = [(L^s)_{\geq 0}, L], s \geq 1. \quad (1.10)$$

Proof. The form of L is a consequence of the construction of the n -th root in Proposition 1.1. Assume there is an s for which equation (1.10) does not hold, i.e.

$$\partial_s(L) - [(L^s)_{\geq 0}, L] = \beta \partial^m + \text{l.o.}, \beta \neq 0.$$

Since ∂_s and taking the commutator with A_s are derivations of Psd , we get for its n -th power

$$\begin{aligned} \partial_s(\mathcal{L}_n) - [(L^s)_{\geq 0}, \mathcal{L}_n] &= \partial_s(L^n) - [(L^s)_{\geq 0}, L^n] = \sum_{j=1}^n L^{j-1} (\partial_s(L) - [(L^s)_{\geq 0}, L]) L^{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^n (\partial^{j-1} + \text{l.o.})(\beta \partial^m + \text{l.o.})(\partial^{n-j}) = n\beta \partial^{m+n-1} + \text{l.o.} \neq 0 \end{aligned}$$

and this contradicts the fact that the left hand side of this equality is zero, because $\mathcal{L}_n$ is a solution of the n -KdV hierarchy. Thus all the Lax equations (1.10) have to hold for L . $\square$

The equations (1.10) for any L in Psd of the form (1.7) are called the Lax equations of the *KP (Kadomtsev – Petviashvili) hierarchy*, as they imply for the coefficient ℓ_2 of L the KP equation. Such an L is seen as a prototype of dressing the operator ∂ with an element from $D(1)$. Proposition 1.3 shows how all n -KdV hierarchies are contained in the KP hierarchy. In [6] it was shown how to construct solutions of the KP hierarchy starting from an infinite dimensional Grassmanian of a separable Hilbert space.

A further step [7] is to consider deformations M of ∂ by dressing it with the wider class of invertible operators K from $D(0)$ and by requiring that M should satisfy a similar set of Lax equations as in (1.10), but this time A_s should be replaced by the strict differential part of M^s . This deformation is called the *strict KP hierarchy*. Besides its Lax form, the strict KP hierarchy possesses still two other descriptions: the zero curvature form [7] and the bilinear form [8]. Both the KP hierarchy and its strict version have natural Cauchy problems associated with them and their solvability is discussed in [9]. There exists also a geometric construction of solutions of the strict KP hierarchy in the style of [6]. The manifold from which solutions of the strict KP hierarchy can be constructed is a fiber bundle over the Grassmanian mentioned above with the projective space of a separable Hilbert space as the generic fiber. Details can be found in [10]. Moreover, the solutions constructed in [10] can be expressed in Fredholm determinants. This is described in [11].

We discuss in the next section some properties relating the constant term of pseudo differential operators and the projections $\pi_{<0}$ and $\pi_{\geq 0}$ of Psd .

2. Properties related to $\pi_{<0}$, $\pi_{\geq 0}$ and ct

We start with a number of properties relating the constant term and the projection $\pi_{<0}$ of Psd on $\text{Psd}_{<0}$.

Proposition 2.1. *For arbitrary $f, g \in R$ and each $P = \sum_{i=-\infty}^N p_i \partial^i \in \text{Psd}$ there hold the following relations in Psd :*

$$(fPg)_{<0} = fP_{<0}g, \quad (2.1)$$

$$(\partial P)_{<0} = \partial P_{<0} - \text{ct}(P\partial), \quad (2.2)$$

$$(P\partial)_{<0} = P_{<0}\partial - \text{ct}(P\partial), \quad (2.3)$$

$$(P\partial^{-1})_{<0} = P_{<0}\partial^{-1} + \text{ct}(P)\partial^{-1}. \quad (2.4)$$

P r o o f. As for the first property, just note that for each differential operator $Q \in R[\partial]$ any product $fQg \in R[\partial]$, $f, g \in R$. Hence we have

$$(fPg)_{<0} = (fP_{\geq 0}g)_{<0} + (fP_{<0}g)_{<0} = 0 + (fP_{<0}g)_{<0}.$$

To get property (2.2) we multiply P with ∂ from the left and substitute $P = \sum_i p_i \partial^i$. This yields

$$\begin{aligned} (\partial P)_{<0} &= (\partial \sum_i p_i \partial^i)_{<0} = \sum_{i<0} \partial(p_i) \partial^i + \sum_{i+1<0} p_i \partial^{i+1} \\ &= \sum_{i<0} \partial(p_i) \partial^i + \sum_{i<0} p_i \partial^{i+1} - p_{-1} \partial^0 = \partial P_{<0} - \text{ct}(P\partial). \end{aligned}$$

At the next two identities we proceed in a similar way:

$$\begin{aligned}(P\partial)_{<0} &= \left(\sum_i p_i \partial^{i+1}\right)_{<0} = \sum_{i+1<0} p_i \partial^{i+1} \\ &= \sum_{i<0} p_i \partial^{i+1} - p_{-1} = P_{<0} \partial - \mathbf{ct}(P\partial)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(P\partial^{-1})_{<0} &= \left(\sum_i p_i \partial^{i-1}\right)_{<0} = \sum_{i-1<0} p_i \partial^{i-1} \\ &= \sum_{i<0} p_i \partial^{i-1} + p_0 \partial^{-1} = P_{<0} \partial^{-1} + \mathbf{ct}(P) \partial^{-1}.\end{aligned}$$

This completes the proof of the proposition. $\square$

The properties in Proposition 2.1 are used in the proof of the next proposition and at the characterization of the wave functions of the KP hierarchy and its strict version in [10].

On $\mathcal{Psd}$ there is important transformation of *taking the adjoint*. The *adjoint operator* P^* of $P = \sum_i p_i \partial^i$ is given by

$$\begin{aligned}P^* &= \sum_i (-\partial)^i p_i = \sum_i (-1)^i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} \partial^k (p_i) \partial^{i-k} \\ &= \sum_{\ell} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\ell+k} \binom{\ell+k}{k} \partial^k (p_{\ell+k}) \right\} \partial^{\ell}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Taking the adjoint, defined here quite formally, is an algebraic analogue of the following real analytic context. Let $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ be the space of Schwartz–Bruhat functions on $\mathbb{R}$ with the inner product

$$\langle f | g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx.$$

Then considering on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ the linear operators of differentiating $\partial := \frac{d}{dx}$ and multiplying by a function $M_h : f \rightarrow hf, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, one has for all $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle \partial f | g \rangle = \langle f | -\partial g \rangle \text{ and } \langle M_h f | g \rangle = \langle f | M_h g \rangle$$

which is often expressed as the adjoint of ∂ is $-\partial$ and the adjoint of M_h is M_h . So the adjoint of a linear operator on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ such as $D = \sum_{i=0}^N M_{h_i} \partial^i$ is equal to $\sum_{i=0}^N (-\partial)^i M_{h_i}$.

Lemma 2.1. *The operation of taking the adjoint on $\mathcal{Psd}$ is an anti-algebra morphism.*

P r o o f. Obviously, it is enough to check the equality $(PQ)^* = Q^*P^*$ for the operators $P = \partial^i$ and $Q = q$, $i \in \mathbb{Z}$, $q \in R$, i.e. one needs to prove that $(\partial^i q)^* = (-1)^i q \partial^i$. Using the multiplication rule (1.3) and the definition of the adjoint we get:

$$\begin{aligned}(\partial^i q)^* &= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \binom{i}{s} \partial^s(q) \partial^{i-s} \right)^* = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{i}{s} (-1)^{i-s} \partial^{i-s} \partial^s(q) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{i}{s} (-1)^{i-s} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \binom{i-s}{t} \partial^{s+t}(q) \partial^{i-s-t} \right\} \\ &= \sum_{k \leq i} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{k+t} \binom{i}{i-(k+t)} \binom{k+t}{t} \right\} \partial^{i-k}(q) \partial^k.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Now we calculate coefficients of ∂^k in (2.6). For $k = i$, we have

$$\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{i+t} \binom{i}{-t} \binom{i+t}{t} \partial^0(q) = (-1)^{i+0} \binom{i}{0} \binom{i}{0} q = (-1)^i q.$$

For $k < i$, taking into account relation (1.2), we get

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^{k+t} \binom{i}{i-(k+t)} \binom{k+t}{t} &= \sum_{t=0}^{i-k} (-1)^{k+t} \binom{i}{(i-k)-t} \binom{k+t}{t} = \\ &= (-1)^k \binom{i}{i-k} \binom{k}{0} + (-1)^{k+1} \binom{i}{(i-k)-1} \binom{k+1}{1} + \dots + (-1)^i \binom{i}{0} \binom{i}{i-k} = \\ &= (-1)^k \frac{i(i-1)\dots(k+1)}{(i-k)!0!} + (-1)^{k+1} \frac{i(i-1)\dots(k+1)}{((i-k)-1)!1!} + \dots + (-1)^i \frac{i(i-1)\dots(k+1)}{0!(i-k)!} = \\ &= (-1)^k \frac{i(i-1)\dots(k+1)}{(i-k)!} \left\{ \frac{(i-k)!}{(i-k)!0!} - \frac{(i-k)!}{((i-k)-1)!1!} + \dots + (-1)^{i-k} \frac{(i-k)!}{0!(i-k)!} \right\}. \end{aligned}$$

The expression in curly brackets here is the binomial formula for $(1-1)^{i-k}$, and hence is equal to zero. So we have $(\partial^i q)^* = (-1)^i q \partial^i$. $\square$

By definition, the map $P \mapsto P^*$ maps $\text{Psd}_{\geq 0}$ to $\text{Psd}_{\geq 0}$ and $\text{Psd}_{< 0}$ to $\text{Psd}_{< 0}$ and since $P = (P^*)^*$, both maps are bijections. The adjoint plays a key role in the dual version of the hierarchies (see, e.g. [10]). Below we prove some relations between constant terms of certain combinations of pseudo differential operators and the projections $\pi_{\geq 0}$ and $\pi_{< 0}$.

Proposition 2.2. *For any $f, g \in R$ and each $P = \sum_{i=-\infty}^N p_i \partial^i \in \text{Psd}$ there hold the formulae:*

$$\mathbf{ct}(Pf) = P_{\geq 0}(f), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{ct}(\partial^{-1} f P \partial) = P_{\geq 0}^*(f), \quad (2.8)$$

$$(\partial^{-1} P)_{< 0} = \partial^{-1} P_{< 0} + \partial^{-1} \mathbf{ct}(P^*). \quad (2.9)$$

Proof. From the rule for multiplication in Psd follows that for each $f \in R$ and each $P \in \text{Psd}$ the element $P_{< 0} f$ belongs to $\text{Psd}_{< 0}$, hence we get that

$$\mathbf{ct}(Pf) = \mathbf{ct}(P_{\geq 0} f) = \mathbf{ct}\left(\sum_{i=0}^N p_i \partial^i f\right) = \sum_{i=0}^N p_i \partial^i(f) = P_{\geq 0}(f).$$

For the relation (2.8), we use first the multiplication rule (1.3) to compute the coefficients for $\partial^{-1} f P \partial$:

$$\partial^{-1} f P \partial = \partial^{-1} \sum_t p_t f \partial^{t+1} = \sum_i \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-1}{s} \partial^s(p_{i-1} f) \partial^{i-s-1}.$$

Hence the constant term is given by

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} \binom{-1}{i-1} \partial^{i-1}(p_{i-1} f) &= \sum_{t \geq 0} (-1)^t \partial^t(p_t f) = \\ &= \sum_{t \geq 0} \sum_{k=0}^t (-1)^t \binom{t}{k} \partial^{t-k}(p_t) \partial^k(f) = \sum_{k \geq 0} \left\{ \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{t}{k} \partial^{t-k}(p_t) \right\} \partial^k(f). \end{aligned}$$

Now we compare with the expression for the coefficients of $P_{\geq 0}^* = \sum_{\ell \geq 0} p_\ell^* \partial^\ell$, namely

$$p_\ell^* = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\ell+r} \binom{\ell+r}{r} \partial^r (p_{\ell+r}) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{\ell+r} \binom{\ell+r}{\ell} \partial^r (p_{\ell+r}),$$

and we get the identity (2.8). Next we focus on relation (2.9). Since there clearly holds

$$(\partial^{-1} P)_{<0} = \partial^{-1} P_{<0} + (\partial^{-1} P_{\geq 0})_{<0},$$

it suffices to show that $(\partial^{-1} P_{\geq 0})_{<0} = \partial^{-1} \mathbf{ct}(P^*)$. The constant term of P^* is by (2.5) given by

$$\mathbf{ct}(P^*) = \sum_{i=0}^N (-1)^i \partial^i (p_i).$$

Hence, this yields for the right hand side of the desired equality

$$\partial^{-1} \mathbf{ct}(P^*) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^N (-1)^s \partial^s ((-1)^i \partial^i (p_i)) \partial^{-1-s} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^N (-1)^{s+i} \partial^{s+i} (p_i) \partial^{-1-s}.$$

Next we compute the left hand side

$$\begin{aligned} (\partial^{-1} P_{\geq 0})_{<0} &= \left(\sum_{i=0}^N \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \partial^r (p_i) \partial^{i-1-r} \right)_{<0} = \sum_{i=0}^N \sum_{r \geq i} (-1)^r \partial^r (p_i) \partial^{i-1-r} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{i=0}^N (-1)^{s+i} \partial^{s+i} (p_i) \partial^{-1-s}. \end{aligned}$$

This concludes the proof. $\square$

Propositions 2.1 and 2.2 played a crucial role in [10] and [11] at the description of elementary Darboux transformations of both hierarchies and at expressing the constructed wave functions of the two hierarchies and their duals in Fredholm determinants.

References

- [1] P. D. Lax, “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **21**:5 (1968), 467–490.
- [2] G. Wilson, “Commuting flows and conservation laws for Lax equations”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **86**:1 (1979), 131–143.
- [3] I. M. Gelfand, L. A. Dickey, “Fractional powers of operators and Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Its Appl.*, **10**:4 (1976), 259–273.
- [4] M. Sato, Y. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassman manifold”, *Nonlinear Partial Differential Equations In Applied Science*, Proceedings of the U.S.-Japan seminar “Nonlinear partial differential equations in applied science” (Tokyo, 1982 (North-Holland mathematics studies)), 1983, 259–272.
- [5] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Non-Linear Integrable Systems—Classical Theory and Quantum Theory*, Proceedings of RIMS symposium “Non-linear integrable systems—classical theory and quantum theory” (Kyoto, Japan, 13-16 May, 1981), 1983, 39–119.
- [6] G. Segal, G. Wilson, “Loop groups and equations of KdV type”, *Publications Mathématiques de l’IHES*, **61** (1985), 5–65.

- [7] G. F. Helminck, A. G. Helminck, E. A. Panasenکو, “Integrable deformations in the algebra of pseudo differential operators from a Lie algebraic perspective”, *Theoret. and Math. Phys.*, **174**:1 (2013), 134–153.
- [8] G. F. Helminck, E. A. Panasenکو, S. V. Polenkova, “Bilinear equations for the strict KP hierarchy”, *Theoret. and Math. Phys.*, **185**:3 (2015), 1804–1816.
- [9] G. F. Helminck, A. G. Helminck, E. A. Panasenکو, “Cauchy problems related to integrable deformations of pseudo differential operators”, *Journal of Geometry and Physics*, **85** (2014), 196–205.
- [10] G. F. Helminck, E. A. Panasenکو, “Geometric solutions of the strict KP hierarchy”, *Theoret. and Math. Phys.*, **198**:3 (2019), 48–68.
- [11] G. F. Helminck, E. A. Panasenکو, “Expressions in Fredholm determinants for solutions of the strict KP hierarchy”, *Theoret. and Math. Phys.*, **199**:2 (2019), 637–651.

Information about the authors

Gerard F. Helminck, Professor. Korteweg – de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Amsterdam, the Netherlands.
E-mail: g.f.helminck@uv.nl
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7022-5852>

Elena A. Panasenکو, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: panlena_t@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4737-9906>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Elena A. Panasenکو
E-mail: panlena_t@mail.ru

Received 24 March 2020

Reviewed 15 May 2020

Accepted for press 8 June 2020

Информация об авторах

Хельминк Герард Франциск, профессор. Математический институт Кортвега – де Фриза, Университет г. Амстердам, Амстердам, Нидерланды. E-mail: g.f.helminck@uv.nl
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7022-5852>

Панасенко Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: panlena_t@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4737-9906>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Панасенко Елена Александровна
E-mail: panlena_t@mail.ru

Поступила в редакцию 24 марта 2020 г.

Поступила после рецензирования 15 мая 2020 г.

Принята к публикации 8 июня 2020 г.

© Ченцов А.Г., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244

УДК 517.977, 519.837.3

Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения-уклонения

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Relaxation of the game problem of guidance connected with alternative in guidance-evasion differential game

Aleksandr G. CHENTSOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics

of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin

19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается дифференциальная игра (ДИ) сближения-уклонения на конечном промежутке времени, в которой в качестве параметров используются целевое множество (ЦМ) и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО). Игрок I, заинтересованный в осуществлении сближения с ЦМ при соблюдении ФО, использует многозначные квазистратегии (неупреждающие стратегии), а игрок II, имеющий противоположную цель, — стратегии с неупреждающим выбором моментов коррекции и конечным числом таких моментов. Постановка на содержательном уровне соответствует теореме об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина. Для позиций, не принадлежащих множеству позиционного поглощения, представляет интерес определение наименьшего размера окрестностей множеств-параметров, при которых игрок I гарантирует сближение при ослабленных вышеупомянутым способом условиях задачи. В работе эта схема дополняется элементами приоритетности в вопросах достижения ЦМ и соблюдения ФО, что достигается введением специального параметра, определяющего соотношение размеров соответствующих окрестностей. В этих условиях функция оптимального размера окрестности ЦМ, определенная на пространстве позиций, реализуется посредством процедуры на основе метода программных итераций, применяемого в двух вариантах. Упомянутая функция является при этом неподвижной точкой одного из используемых «программных» операторов. Указан специальный тип функционалов качества, для которого значения вышеупомянутой функции позиции совпадают с ценой игры на минимакс-максимин.

Ключевые слова: дифференциальная игра; квазистратегия; метод программных итераций

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00410_а).

Для цитирования: Ченцов А.Г. Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения-уклонения // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 196–244. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244.

Abstract. Differential game (DG) of guidance-evasion for a finite time interval is considered; as parameters, the target set (TS) and the set defining phase constraints (PC) are used. Player I interested in realization of guidance with TS under validity PC uses set-valued quasistrategies (nonanticipating strategies) and Player II having opposite target uses strategies with nonanticipating choice of correction instants and finite numbers of such instants. On informative level, the setting corresponds to alternative theorem of N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin. For position not belonging to solvability set of Player I, determination of the least size of neighborhoods for set-parameters under that Player I guarantees guidance (under weakened conditions) is interested. In article, this scheme is supplemented by priority elements in questions of TS attainment and PC validity; this is realized by special parameter defining relation for sizes of corresponding neighborhoods. Under these conditions, a function of the least size of TS neighborhood is defined by procedure used program iteration method for two variants. The above-mentioned function is fixed point for one of two used “program” operators. Special type of the quality functional for which values of the above-mentioned function coincide with values of the minimax-maximin games is established.

Keywords: differential game; quasistrategy; program iteration method

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00410_a).

For citation: Chentsov A.G. Relaksatsii igrovoy zadachi sblizeniya, svyazannyye s al'ternativoy v differentsial'noy igre sblizeniya-ukloneniya [Relaxation of the game problem of guidance connected with alternative in guidance-evasion differential game]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 196–244. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматриваются задачи конфликтного управления нелинейной системой на конечном промежутке времени. Многочисленные содержательные примеры таких задач и методы их решения рассмотрены в монографии [1]. В настоящей статье исследуются вопросы, связанные с вариантами дифференциальной игры (ДИ) сближения-уклонения, полученными ослаблением условий фиксированной ДИ такого типа. Само упомянутое ослабление достигается заменой фиксированных множеств — параметров игры — соответствующими окрестностями. При этом размеры этих окрестностей могут быть различными, что отражает степень приоритетности в вопросах достижения целевого множества (ЦМ) и соблюдения фазовых ограничений (ФО). Таким образом, реализуются естественные релаксации исходной ДИ, решение которой определяется теоремой об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [2, 3]).

Для решения различных типов ДИ широко использовались программные конструкции (см. [3, 4]), оказывающиеся наиболее эффективными в т.н. регулярных [3, 4] ДИ. В связи с теоремой об альтернативе отметим принципиальный результат А. В. Кряжмского (см. [5], где было введено условие обобщенной единственности программных движений). С использованием упомянутой теоремы было установлено существование

седловой точки в различных классах ДИ; см. [3] (имеются в виду седловые точки в различных классах позиционных стратегий).

В исследованиях А. И. Субботина [7–9] и его учеников были получены глубокие результаты, связанные с построением обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби, которые, в частности, позволили установить целый ряд важных положений, касающихся функции цены ДИ. Эти результаты определили новое направление в современной теории управления и теории дифференциальных уравнений.

Одним из методов решения ДИ является метод программных итераций (МПИ), который представляет собой вариант применения программных конструкций для решения ДИ без предположения о их регулярности; см. [10–15]. Известно несколько вариантов МПИ; с точки зрения предназначения можно выделить процедуры (основанные на МПИ), реализующие множество позиционного поглощения в ДИ сближения-уклонения (максимальный стабильный мост Н. Н. Красовского), функцию цены (как правило, в ДИ с фиксированным моментом окончания), многозначные квазистратегии, разрешающие соответствующую игровую задачу. Конструкции на основе МПИ также использовались при исследовании обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби [16]. В настоящей работе построения на основе МПИ занимают важное место. Речь идет о следующей содержательной задаче, связанной с ДИ сближения-уклонения.

В ситуации, когда для заданных (основных) ЦМ и множества, определяющего ФО задачи сближения, позиция игры не содержится в множестве позиционного поглощения (по теореме об альтернативе игрок II гарантирует решение задачи уклонения), для игрока I может представлять интерес определение таких окрестностей вышеупомянутых двух множеств-параметров, для которых этот игрок может гарантировать решение задачи сближения с ослабленными, посредством упомянутых окрестностей, условиями (ЦМ заменяется окрестностью и множество — источник ФО — также заменяется окрестностью). Для игрока I естественным является стремление к минимизации размера упомянутых окрестностей при сохранении условий гарантированной разрешимости. Возможно также использование разных размеров из соображений приоритетности в вопросах наведения на ЦМ и соблюдения ФО. Последнее обстоятельство учитывается в построениях работы посредством введения специального параметра приоритетности в виде положительного множителя.

С использованием процедуры МПИ на пространстве множеств, точками которых являются позиции игры, для каждой такой позиции определяется наименьший размер окрестности, при котором игрок I с учетом соображений, связанных с приоритетностью, гарантирует решение релаксированной задачи сближения. Тем самым определяется функция позиции, которая, как показано ниже, является функцией цены при некотором естественном выборе типа критериев качества. Следует отметить, что данная процедура МПИ позволяет также ввести последовательность функций позиции, монотонно сходящуюся к упомянутой функции цены. Оказалось, однако, что данную последовательность можно реализовать и непосредственно, применяя уже другую версию МПИ, реализуемую на пространстве функций. Оператор, реализующий соответствующую (сходящуюся) последовательность функций позиции, на идейном уровне соответствует используемому в [13]. Упомянутая (предельная) функция цены оказывается при этом его неподвижной точкой, причем обладающей экстремальностью в порядко-

вом смысле.

Отметим, что упомянутая общая постановка и метод исследования являются логическим продолжением конструкций [17, 18], в которых, однако, не использовались элементы приоритетности в вопросах достижения ЦМ и соблюдения ФО. Кроме того, в настоящем исследовании указывается, что «предельная» функция позиции является функцией цены игры, а не только функцией гарантированного результата. Все же наиболее существенным отличием настоящего исследования от [17, 18] представляется построение релаксаций игровой задачи сближения с учетом соображений приоритетности. Так, например, мы можем рассматривать режим релаксаций, когда предъявляются достаточно «свободные» требования к выбору размера окрестности ЦМ и «жесткие» — к выбору аналогичного размера для множества, определяющего ФО; тем самым создается режим несимметричных релаксаций.

1. Общие понятия и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связи и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то $\{x; y\}$ есть def множество, содержащее x , y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z . Если x и y — объекты, то $(x, y) \triangleq \{\{x\}; \{x; y\}\}$ [21, с. 67] есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом x и вторым элементом y . Вообще, для каждой УП h через $\text{pr}_1(h)$ и $\text{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы этой УП соответственно; они однозначно определяются условием $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$.

Каждому множеству X сопоставляем семейство $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств (п/м) X . Тогда $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ есть семейство всех непустых п/м X . Каждому непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

(этого семейства) на множество B , получая непустое семейство п/м B . Если же $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})) \quad (1.1)$$

есть семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Для всяких двух непустых множеств A и B через B^A обозначаем [21, с. 87] множество всех отображений, действующих из A в B ; значения таких отображений и прообразы п/м B обозначаются традиционно. Если же $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $g^1(C) \triangleq \{g(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии g , при $C \neq \emptyset$ полагаем также, что

$$(g \mid C) \triangleq (g(x))_{x \in C} \in B^C.$$

В качестве $\mathcal{M}$ в (1.1) может, в частности, использоваться топология или семейство (всех) замкнутых множеств в топологическом пространстве (ТП). В дальнейшем, $\mathbb{R}$

— вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$. При $m \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\overline{1, m} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m\}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами, для всякого множества (в частности, семейства) H вместо $H^{\overline{1, m}}$ используем более традиционное H^m для обозначения множества всех кортежей

$$(h_i)_{i \in \overline{1, m}} : \overline{1, m} \rightarrow H$$

(т. е. отображений из $\overline{1, m}$ в H). При $m \in \mathbb{N}_0$ полагаем $\overline{m, \infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq k\}$. Заметим, что в виде $H^{\mathbb{N}}$ реализуется множество всех последовательностей в множестве H .

Если $\mathcal{S}$ — семейство, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{S}$ — множество, то, как обычно,

$$((S_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{S}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((S_{j+1} \subset S_j \quad \forall j \in \mathbb{N}) \& (\mathbb{S} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i)); \quad (1.2)$$

здесь и ниже используется индексная запись функций (см. семейство с индексом в [22, с. 11]). Многозначные отображения (мультифункции) из множества A в множество B рассматриваем ниже и (соответственно обозначаем) как «обычные» отображения из $\mathcal{P}(B)^A$; значениями таких отображений являются п/м B .

Мы полагаем, что $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\} = [0, \infty[$. Если $\mathcal{S}$ — непустое множество, то $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}]$ есть множество всех функций из $\mathcal{S}$ в $\mathbb{R}_+$, т. е. $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}] \triangleq (\mathbb{R}_+)^{\mathcal{S}}$. В качестве $\mathcal{S}$ может использоваться семейство; в этом случае мы получаем в виде элементов $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}]$ неотрицательные функции множеств.

Элементы теории меры. Если $\mathbf{S}$ — множество, то через $(\sigma - \text{alg})[\mathbf{S}]$ обозначаем семейство всех σ -алгебр п/м $\mathbf{S}$; если же при этом $\mathcal{S} \in (\sigma - \text{alg})[\mathbf{S}]$, то пару $(\mathbf{S}, \mathcal{S})$ называем (стандартным) измеримым пространством (ИП). При $\mathfrak{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{S}))$ через $\sigma_{\mathbf{S}}^0(\mathfrak{H})$ обозначаем σ -алгебру п/м $\mathbf{S}$, порожденную семейством $\mathfrak{H}$.

Если A — множество, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ и $B \in \mathcal{P}(A)$, то [23, предложение 2.3.5]

$$\sigma_B^0(\mathcal{A}|_B) = \sigma_A^0(\mathcal{A})|_B;$$

отметим, кроме того (см. [23, (2.3.31)]), следующее свойство:

$$(\sigma_B^0(\mathcal{A}|_B) \subset \sigma_A^0(\mathcal{A})) \Leftrightarrow (B \in \sigma_A^0(\mathcal{A})).$$

Как следствие получаем импликацию

$$(B \in \sigma_A^0(\mathcal{A})) \Rightarrow (\sigma_B^0(\mathcal{A}|_B) = \{L \in \sigma_A^0(\mathcal{A}) \mid L \subset B\}). \quad (1.3)$$

Если $(\mathbb{S}, \tau)$ есть топологическое пространство, то $\sigma_{\mathbb{S}}^0(\tau)$ называется σ -алгеброй борелевских множеств, а множества из $\sigma_{\mathbb{S}}^0(\tau)$ — борелевскими. В дальнейшем используются только такие варианты $\sigma_{\mathbb{S}}^0(\tau)$, когда $(\mathbb{S}, \tau)$ является конечномерным компактом в топологии покоординатной сходимости.

Если $(H, \mathcal{H})$ есть ИП, т. е. H — множество и $\mathcal{H} \in (\sigma - \text{alg})[H]$, то через $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{H}]$ обозначаем множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) счетно-аддитивных мер на σ -алгебре $\mathcal{H}$ (см. [24, гл. III, IV]); $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{H}] \subset \mathcal{R}_+[\mathcal{H}]$. Если $\mathcal{H} = \sigma_H^0(\tau)$, где τ — топология на множестве H , то меры из $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{H}]$ называются борелевскими; в случае, когда (H, τ) — метризуемое ТП, все такие меры регулярны (см. [25, гл. 1]). Последнее свойство непременно имеет место в упомянутом выше случае, когда (H, τ) — конечномерный компакт.

2. Содержательная постановка задачи

Пусть $T \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. Фиксируем далее $n \in \mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, v \in Q, \quad (2.1)$$

где $f : T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$. В (2.1) P и Q — непустые ограниченные и замкнутые множества в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$. Функция f предполагается непрерывной на $T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ (дополнительные условия будут оговорены позднее). В качестве обычных управлений игроков I и II на промежутке $[t, \vartheta_0]$, где $t \in T$, будем рассматривать сейчас (для простоты) кусочно-постоянные, непрерывные справа на $[t, \vartheta_0[$ и непрерывные слева в точке ϑ_0 функции, действующие из $[t, \vartheta_0]$ в P и Q соответственно. Через $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ обозначаем множества всех таких (простейших) управлений игроков I и II соответственно.

Полагаем, что позиции $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, а также управлениям $u(\cdot) = u_t(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{U}_t$ и $v(\cdot) = v_t(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{V}_t$ сопоставляется единственная траектория

$$\mathbf{x}(\cdot) = \mathbf{x}_t(\cdot)_{\vartheta_0} = (\mathbf{x}(\zeta))_{\zeta \in [t, \vartheta_0]},$$

являющаяся непрерывной функцией на $[t, \vartheta_0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ (позднее будут введены более общие определения). Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ — фиксированная позиция, то предполагается, что у игроков I и II имеются некоторые непустые множества $\mathfrak{U}(t_*, x_*)$ и $\mathfrak{V}(t_*, x_*)$ возможных способов формирования управлений $u_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{U}_{t_*}$ и $v_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{V}_{t_*}$ соответственно. Полагаем, что позиции (t_*, x_*) и способу $U \in \mathfrak{U}(t_*, x_*)$ соответствует непустое множество $\mathfrak{X}_I[t_*; x_*; U]$ возможных, при реализации данного способа, траекторий системы (2.1), которые являются непрерывными функциями из $[t_*, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$. Аналогично, позиции (t_*, x_*) и способу $V \in \mathfrak{V}(t_*, x_*)$ сопоставляем непустое множество $\mathfrak{X}_{II}[t_*; x_*; V]$ траекторий системы (2.1), возможных при реализации V . В построении упомянутых траекторий участвуют и управления $u_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{U}_{t_*}$ и управления $v_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{V}_{t_*}$.

В отношении целей, преследуемых игроками, принимаем сейчас традиционный для ДИ сближения-уклонения вариант. Итак, фиксируем замкнутые множества $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \subset T \times \mathbb{R}^n$, и $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \subset T \times \mathbb{R}^n$, первое из которых является целевым для игрока I, а второе используется для формирования его ФО. Тогда при $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$ (первоначальную) цель игрока I определим следующим образом: найти способ $U_* \in \mathfrak{U}(t_*, x_*)$, для которого $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_I[t_*; x_*; U_*] \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] :$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, x(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \quad (2.2)$$

Итак, в (2.2) речь идет о гарантированном обеспечении наведения на $\mathbf{M}$ при ФО, определяемых сечениями $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in \mathbf{N}\}$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$, множества $\mathbf{N}$. Если упомянутый способ U_* существует, то (t_*, x_*) принадлежит множеству (успешной) разрешимости задачи сближения с $\mathbf{M}$ «в пределах» $\mathbf{N}$.

У игрока II его (первоначальная) цель состоит в нахождении способа $V_* \in \mathfrak{V}(t_*, x_*)$ со свойством $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_{II}[t_*; x_*; V_*] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta] : (t, x(t)) \notin \mathbf{N}). \quad (2.3)$$

Реализацию (2.3) связываем с (гарантированной) осуществимостью уклонения, определяемого в терминах $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, т. е. в терминах $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ -уклонения.

Можно, однако, дополнить (2.2), (2.3) некоторыми ослабленными версиями, связывая с $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ непустые семейства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ замкнутых множеств M, N со свойствами $(\mathbf{M} \subset M \ \forall M \in \mathcal{M})$ и $(\mathbf{N} \subset N \ \forall N \in \mathcal{N})$ соответственно. Будем полагать при этом, что $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ и $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$. Наряду с (2.2) и (2.3) естественным является рассмотрение аналогов этих соотношений при замене $\mathbf{M} \rightarrow M$ и $\mathbf{N} \rightarrow N$, где $M \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}$. Этот процесс замены $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ их аналогами рассматриваем как релаксацию исходной задачи (сближения) игрока I. В качестве множеств $M \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}$ будем использовать окрестности $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ соответственно.

3. Обобщенные программные управления и квазистратегии

В настоящем разделе определяются управления-меры и неупреждающие многозначные отображения на пространствах таких управлений, именуемые ниже квазистратегиями.

Напомним, что $T = [t_0, \vartheta_0]$ есть «объемлющий» промежуток управления, а «рабочие» промежутки такого типа определяются в виде $[t, \vartheta_0]$, где $t \in T$. Для таких значений t наряду с $[t, \vartheta_0]$ рассматриваем сейчас конечномерные компакты $Z_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times Q$ и $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P \times Q$ в оснащении обычными топологиями покоординатной сходимости. Вводим σ -алгебры

$$\mathcal{I}_t \in (\sigma - \text{alg})[[t, \vartheta_0]], \ \mathcal{D}_t \in (\sigma - \text{alg})[Z_t], \ \mathcal{C}_t \in (\sigma - \text{alg})[\Omega_t]$$

борелевских п/м компактов $[t, \vartheta_0]$, Z_t и Ω_t соответственно. Отметим простейшие свойства цилиндрических множеств:

$$\begin{aligned} & (I \times P \times Q \in \mathcal{C}_t \ \forall I \in \mathcal{I}_t) \ \& \ (I \times Q \in \mathcal{D}_t \ \forall I \in \mathcal{I}_t) \\ & \& \ (D \times P \triangleq \{(\zeta, u, v) \in \Omega_t \mid (\zeta, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t \ \forall D \in \mathcal{D}_t); \end{aligned} \quad (3.1)$$

см. [25, добавление II]. В виде $([t, \vartheta_0], \mathcal{I}_t)$, $(Z_t, \mathcal{D}_t)$ и $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$ имеем стандартные ИП, отвечающие борелевскому оснащению соответствующих конечномерных компактов, зависящих от t .

Если $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$, то, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{t_2} &= \mathcal{I}_{t_1} \mid_{[t_2, \vartheta_0]} = \{I \in \mathcal{I}_{t_1} \mid I \subset [t_2, \vartheta_0]\}, \\ \mathcal{D}_{t_2} &= \mathcal{D}_{t_1} \mid_{Z_{t_2}} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset Z_{t_2}\}, \\ \mathcal{C}_{t_2} &= \mathcal{C}_{t_1} \mid_{\Omega_{t_2}} = \{C \in \mathcal{C}_{t_1} \mid C \subset \Omega_{t_2}\}, \\ \mathcal{D}_{t_1}^{t_2} &\triangleq \mathcal{D}_{t_1} \mid_{[t_1, t_2] \times Q} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset [t_1, t_2] \times Q\} \in (\sigma - \text{alg})[[t_1, t_2] \times Q], \\ \mathcal{C}_{t_1}^{t_2} &\triangleq \mathcal{C}_{t_1} \mid_{[t_1, t_2] \times P \times Q} = \{C \in \mathcal{C}_{t_1} \mid C \subset [t_1, t_2] \times P \times Q\} \in (\sigma - \text{alg})[[t_1, t_2] \times P \times Q]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Операции над σ -алгебрами, используемые в (3.2), доставляют характерные подпространства используемых ниже ИП. Рассмотрим нужные множества управлений-мер. При $t \in T$ полагаем, что $\lambda_t \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{I}_t]$ есть след меры Лебега на σ -алгебру $\mathcal{I}_t$, т. е. мера Лебега–Бореля на упомянутой σ -алгебре; кроме того (см. (3.1)), полагаем, что

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(I \times P \times Q) = \lambda_t(I) \ \forall I \in \mathcal{I}_t\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{D}_t] \mid \nu(I \times Q) = \lambda_t(I) \quad \forall I \in \mathcal{I}_t\}, \quad (3.4)$$

получая непустые множества (регулярных) борелевских мер с лебеговским маргинальным распределением; наконец,

$$\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(D \times P) = \nu(D) \quad \forall D \in \mathcal{D}_t\} \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_t. \quad (3.5)$$

Элементы $\mathcal{H}_t$ (3.3) — суть обобщенные аналоги пар $(u(\cdot), v(\cdot))$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$, обычных (и простейших) программных управлений на $[t, \vartheta_0]$; элементы $\mathcal{E}_t$ (3.4) являются обобщенными аналогами управлений $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$. Наконец, элементы множества (3.5) при фиксированном $\nu = \bar{\nu} \in \mathcal{E}_t$ — суть аналоги пар $(u(\cdot), \bar{v}(\cdot))$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$, где $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}_t$ фиксировано. Если $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$, то

$$\mathcal{H}_{t_2} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_2}) : \eta \in \mathcal{H}_{t_1}\}, \mathcal{E}_{t_2} = \{(\nu \mid \mathcal{D}_{t_2}) : \nu \in \mathcal{E}_{t_1}\} \quad (3.6)$$

(свойства сужаемости управлений-мер). Разумеется, при $t \in T$ множество $\mathcal{V}_t$ допускает естественное погружение в $\mathcal{E}_t$, а множество $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ — в множество $\mathcal{H}_t$; подробнее см. в [19, гл. IV, § 2]. Более того, это касается и более сложных типов обычных управлений — измеримых функций со значениями в P и Q .

Если $t_* \in T$, то определяем множество всех (многозначных обобщенных) квазистратегий на промежутке $[t_*, \vartheta_0]$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{t_*} &\triangleq \left\{ \alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) \mid \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0] \right. \\ &\quad \left. ((\nu_1 \mid \mathcal{D}_{t_*}^\theta) = (\nu_2 \mid \mathcal{D}_{t_*}^\theta)) \Rightarrow (\{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_*}^\theta) : \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_*}^\theta) : \eta \in \alpha(\nu_2)\}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Итак, квазистратегии — элементы (3.7) — суть отображения из множества $\mathcal{P}'(\mathcal{H}_{t_*})^{\mathcal{E}_{t_*}}$, т. е. непустозначные многозначные отображения из $\mathcal{E}_{t_*}$ в $\mathcal{H}_{t_*}$; при $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ в виде $\alpha(\nu)$ имеем непустое п/м $\Pi_{t_*}(\nu)$. При этом

$$\Pi_{t_*}(\cdot) \triangleq (\Pi_{t_*}(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \in \tilde{A}_{t_*},$$

а потому $\tilde{A}_{t_*} \neq \emptyset$. Среди квазистратегий будем выделять квазипрограммы в виде квазистратегий с улучшенными топологическими свойствами. Чтобы их ввести (а также и для других целей) потребуется краткая сводка понятий, относящихся к относительным *-слабым топологиям.

Для упрощения обозначений зафиксируем $t_* \in T$ до тех пор, пока не будет оговорено противное. Линейные пространства $C(\Omega_{t_*})$ и $C(Z_{t_*})$ всех непрерывных функций из $\mathbb{R}^{\Omega_{t_*}}$ и $\mathbb{R}^{Z_{t_*}}$ соответственно оснащаем нормами равномерной сходимости, получая при этом сепарабельные банаховы пространства (см. [24, гл. IV, раздел 6], [26, 4.2.18]). Введем в рассмотрение пространства $C^*(\Omega_{t_*})$ и $C^*(Z_{t_*})$, топологически сопряженные к $C(\Omega_{t_*})$ и $C(Z_{t_*})$ соответственно. С учетом теоремы Рисса множества $\mathcal{H}_{t_*}$ и $\mathcal{E}_{t_*}$ естественным образом погружаются в $C^*(\Omega_{t_*})$ и $C^*(Z_{t_*})$ соответственно и, по этой причине, оснащаются относительными *-слабыми топологиями (индуцированными топологиями), которые метризуемы (см. [24, гл. V]), что обеспечивается сепарабельностью пространств $C(\Omega_{t_*})$ и $C(Z_{t_*})$ и сильной ограниченностью $\mathcal{H}_{t_*}$ и $\mathcal{E}_{t_*}$. Поскольку $\mathcal{H}_{t_*}$

и $\mathcal{E}_{t_*}$ являются $*$ -слабо замкнутыми множествами, то они $*$ -слабо компактны в силу теоремы Алаоглу (см. [24, гл. V]). В силу упомянутой метризуемости относительных $*$ -слабых топологий замкнутость п/м множеств $\mathcal{H}_{t_*}$ и $\mathcal{E}_{t_*}$ тождественна секвенциальной замкнутости, а компактность — секвенциальной компактности; см. [23, (2.7.43)] (имеются в виду $*$ -слабая замкнутость и $*$ -слабая компактность). В этой связи см. [19, гл. IV]. Таким образом, все нужные в дальнейшем свойства допускают исчерпывающее представление в терминах $*$ -слабо сходящихся последовательностей (отметим подробное изложение теории $*$ -слабой сходимости в [27, гл. 8] и [28, гл. 2], где используется термин «слабая сходимость»). Для обозначения $*$ -слабой сходимости последовательностей мер используем символ $\rightharpoonup$. Полагая, что $\mathfrak{F}_{t_*}$ есть семейство всех $*$ -слабо замкнутых п/м $\mathcal{H}_{t_*}$, имеем, что

$$\mathfrak{F}_{t_*} \triangleq \{\mathbb{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_{t_*}) \mid \forall (\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}} \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \quad ((\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \Rightarrow (\eta \in \mathbb{H})\}. \quad (3.8)$$

Множества — элементы $\mathfrak{F}_{t_*}$ — $*$ -слабо компактны.

С использованием (3.8) введем в рассмотрение «усовершенствованный» вариант квазистратегий — квазипрограммы. Итак, при $t_* \in T$ полагаем, что

$$\tilde{A}_{t_*}^{\Pi} \triangleq \{\alpha \in \tilde{A}_{t_*} \mid \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \in \mathfrak{F}_{t_*}\}; \quad (3.9)$$

элементы множества (3.9) называем квазипрограммами на $[t_*, \vartheta_0]$. Отметим, что $\Pi_{t_*}(\cdot) \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}$; таким образом, (3.9) — непустое множество. В дальнейшем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ мы будем отождествлять $\mathfrak{U}(t_*, x_*)$ с $\tilde{A}_{t_*}$, хотя возможны и другие варианты определения $\mathfrak{U}(t_*, x_*)$, связанные с применением позиционных стратегий, процедур управления с поводырем (моделью) (см. в этой связи [2–4]).

4. Обобщенные траектории

В настоящем разделе мы совсем кратко обсудим вопросы, связанные с сопоставлением позиции (t, x) , где $t \in T$, и управлению-мере $\eta \in \mathcal{H}_t$ соответствующей траектории — скользящего режима. Здесь же будут введены требуемые весьма общие условия на систему (2.1), достаточные для всех последующих построений. Итак, пусть при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$

$$\begin{aligned} \Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \{ & x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \mid \\ & x(t) = x_* + \int_{[t_*, t] \times P \times Q} f(\tau, x(\tau), u, v) \eta(d(\tau, u, v)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_0] \}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где (здесь и ниже) $C_n([t_*, \vartheta_0])$ есть множество всех непрерывных отображений из $[t_*, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$ с топологией покоординатной сходимости. Заметим, что данная топология порождается, в частности, евклидовой нормой $\|\cdot\|$ пространства $\mathbb{R}^n$ (данное соглашение относительно $\|\cdot\|$ сохраняется и в дальнейшем). Как и в [5], полагаем всюду в дальнейшем выполненным условие обобщенной единственности: если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, то

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}, \quad (4.2)$$

где $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ есть обобщенная траектория (скользящий режим), стартующая из позиции (t_*, x_*) и развивающаяся под действием η . Условие (4.2) лишь по форме записи отличается от используемого в [5]. Именуем $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$ программным движением, отвечающим триплету (t_*, x_*, η) . Кроме того, полагаем (как в [5]) выполненным следующее условие равномерной ограниченности, для формулировки которого условимся, что при $c \in \mathbb{R}_+$ через $\mathbb{B}_n(c)$ обозначается евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в «нуле» и радиусом c , т. е. $\mathbb{B}_n(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq c\}$. Итак, всюду в дальнейшем полагаем, что $\forall a \in \mathbb{R}_+ \exists b \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(\xi, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \quad \forall t \in T \quad \forall x \in \mathbb{B}_n(a) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad \forall \xi \in [t, \vartheta_0]. \quad (4.3)$$

В (4.2), (4.3) мы имеем условия, налагаемые на систему (2.1); имеются, конечно, частные случаи, допускающие непосредственную проверку (см., в частности, условия на систему в [2, 3, 19]). Отметим важное свойство непрерывности отображения

$$(\eta, x) \mapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta) : \mathcal{H}_t \times \mathbb{R}^n \rightarrow C_n([t, \vartheta_0]), \quad (4.4)$$

где $t \in T$, $\mathcal{H}_t$ оснащено относительной $*$ -слабой топологией, а $\mathbb{R}^n$ — обычной топологией покоординатной сходимости (при проверке непрерывности отображения (4.4) используются (4.2), (4.3), а также (секвенциальная) $*$ -слабая компактность $\mathcal{H}_t$; см. [20, раздел 4]). Нужный в дальнейшем вариант данного свойства имеет следующий вид: если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathcal{H}_{t_*}$, а $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathbb{R}^n$, то

$$(((\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \& ((x_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow x_*)) \Rightarrow ((\varphi(\cdot, t_*, x_j, \eta_j))_{j \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)), \quad (4.5)$$

где $\rightrightarrows$ используется (здесь и ниже) для обозначения равномерной сходимости. Отметим полезные свойства [20, (4.12), (4.13)]. Если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то

$$\mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) : \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\} \quad (4.6)$$

есть непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. Кроме того, полагаем, что при $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$

$$\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) : \eta \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])). \quad (4.7)$$

В (4.6), (4.7) введены пучки обобщенных траекторий системы (2.1). В первом случае пучок сопоставляется управлению-мере, а во втором — квазистратегии игрока I. В этих терминах задача о реализации (2.2) приобретает следующий вид: для заданной позиции $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$ требуется найти квазистратегию $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ со свойством

$$\forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, x(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \quad (4.8)$$

Задачи, связанные с (4.8), можно распространить и на позиции из $(T \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbf{N}$, получая, однако, для таких позиций всякий раз случай неразрешимой задачи. Кроме того, мы можем в реализации, связанной с (4.7), осуществить релаксацию $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ -задачи игрока I, оперирующей квазистратегиями, т. е. организовать системы условий, используя в (4.8) вместо $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ множества $M \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}$ соответственно.

5. Релаксация задачи сближения

В настоящем разделе мы конкретизируем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, определяя последние как семейства окрестностей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ соответственно. Прежде всего введем и зафиксируем метрику

$$\rho : (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

посредством следующих условий: при $(t_1, x_1) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $(t_2, x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$ полагаем, что

$$\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \triangleq \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\}) \quad (5.1)$$

((5.1) есть наибольшее из чисел $|t_1 - t_2|$ и $\|x_1 - x_2\|$). Метрика ρ порождает (индуцирует; см. [26, гл. 4]) на $T \times \mathbb{R}^n$ топологию $\mathbf{t}$ покоординатной сходимости. Тогда $\mathcal{F} \triangleq \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\mathbf{t}]$ есть семейство всех замкнутых в смысле $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ п/м $T \times \mathbb{R}^n$, т. е. семейство всех замкнутых в традиционном смысле п/м $T \times \mathbb{R}^n$ (мы не будем использовать других топологий на $T \times \mathbb{R}^n$; см., однако, в этой связи [20, раздел 5], где используется и другое оснащение $T \times \mathbb{R}^n$). Полагаем, кроме того, $\mathcal{F}' \triangleq \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, получая семейство всех непустых замкнутых п/м $T \times \mathbb{R}^n$; $\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$. Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $z \in T \times \mathbb{R}^n$, то, как обычно,

$$\rho(z; H) \triangleq \inf(\{\rho(z, h) : h \in H\}) \in \mathbb{R}_+$$

есть обычное расстояние от точки (в данном случае — позиции) до множества. Фиксируя $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$, мы в виде

$$\rho(\cdot; H) \triangleq (\rho((t, x); H))_{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad (5.2)$$

получаем функцию расстояния до H , которая равномерно непрерывна, так как

$$|\rho(z_1; H) - \rho(z_2; H)| \leq \rho(z_1, z_2) \quad \forall z_1 \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall z_2 \in T \times \mathbb{R}^n.$$

В частности, $\rho(\cdot; H) \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$, где $\mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$ есть def множество всех непрерывных функций из множества $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Отметим, что при $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{S}_0(H, \varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z; H) \leq \varepsilon\} = \rho(\cdot; H)^{-1}([0, \varepsilon]) \in \mathcal{F} \quad (5.3)$$

(следствие непрерывности функции расстояния); при $\varepsilon > 0$ в (5.3) имеем замкнутую ε -окрестность H , а при $\varepsilon = 0$ — замыкание H в $(T \times \mathbb{R}, \mathbf{t})$. В частности, $\mathcal{S}_0(F, \varepsilon) \in \mathcal{F}$ при $F \in \mathcal{F}'$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; при этом $\mathcal{S}_0(F, 0) = F$. Мы рассматриваем ниже тот случай, когда семейства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ раздела 2 имеют вид

$$(\mathcal{M} \triangleq \{\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}) \& (\mathcal{N} \triangleq \{\mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}), \quad (5.4)$$

где $\kappa \in \mathbb{R}_+$ и $\kappa \neq 0$. Параметр κ , $\kappa > 0$, определяет степень приоритетности в вопросах, связанных с реализацией сближения и соблюдения ФО. Использование данного параметра приводит к существенным отличиям получаемых результатов от [17, 18] в сторону большей общности. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F}') \& (\mathbf{N} \in \mathcal{F}') \& (\mathbf{M} \subset \mathbf{N}). \quad (5.5)$$

Предложение 5.1. Справедливо равенство

$$T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} (\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)).$$

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Введем

$$(a_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \in \mathbb{R}_+) \& (b_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \in \mathbb{R}_+). \quad (5.6)$$

Кроме того, пусть $b^* \triangleq \sup(\{a_*\kappa; b_*\})$; $b^* \in \mathbb{R}_+$, причем $S_0(\mathbf{N}, b_*) \subset S_0(\mathbf{N}, b^*)$. Далее, рассматриваем

$$\beta \triangleq \frac{b^*}{\kappa};$$

тогда $\beta \in \mathbb{R}_+$. Мы имеем по определению b^* , что

$$(a_* \leq \frac{b^*}{\kappa} = \beta) \& (b_* \leq b^* = \kappa\beta).$$

Тогда в силу (5.6) $S_0(\mathbf{M}, a_*) \subset S_0(\mathbf{M}, \beta)$ и $S_0(\mathbf{N}, b_*) \subset S_0(\mathbf{N}, \kappa\beta)$. Поскольку в силу (5.3) и (5.6)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{S}_0(\mathbf{M}, a_*) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, b_*),$$

получаем с очевидностью, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \beta) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\beta). \quad (5.7)$$

Коль скоро $\beta \in \mathbb{R}_+$, из (5.7) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} (\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)),$$

чем и завершается проверка вложения $T \times \mathbb{R}^n \subset \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} (\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))$. Противоположное вложение очевидно (см. (5.3)). $\square$

Предложение 5.1 определяет вариант согласованного применения множеств из семейств (5.4); а именно: имея в виду релаксацию задачи, связанной с (4.8), мы при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ рассматриваем вопрос о нахождении квазистратегии $\alpha_* \in \tilde{A}_{t_*}$ игрока I со свойством

$$\begin{aligned} & \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ & ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \& ((t, x(t)) \in \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Второй вопрос состоит в следующем: каково наименьшее значение параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, при котором квазистратегия α_* со свойством (5.8) существует (позднее мы рассмотрим и вопрос о предельной реализации данного наименьшего значения игроком II). Упомянутое наименьшее значение зависит от (t_*, x_*) ; изменяя позицию, мы получаем функцию из $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, для нахождения которой будут применены процедуры на основе МПИ.

6. Операторы программного поглощения и итерационные процедуры в пространстве множеств

В настоящем разделе приведена сводка свойств, относящихся к варианту МПИ, реализуемому в пространстве п/м $T \times \mathbb{R}^n$ (см. в этой связи [20]). Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$\mathbf{A}[M](H) \triangleq \{(t, x) \in H \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, \nu) \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \& ((\xi, x(\xi)) \in H \forall \xi \in [t, \vartheta])\}. \quad (6.1)$$

Если зафиксировать M и рассматривать (6.1) как зависимость от H , то реализуется оператор $\mathbf{A}[M]$ на $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и именуемый ниже оператором программного поглощения (ОПП). В дальнейшем в качестве M будут использоваться множества из $\mathcal{M}$ (5.4), включая

$$\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, 0) = \mathbf{M} \quad (6.2)$$

(равенство (6.2) — простое следствие (5.5)). для наших целей особенно важно свойство

$$\mathbf{A}[M](F) \in \mathcal{F} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad (6.3)$$

(в связи с (6.3) см. [20, раздел 5 и предложение 7.1]). Далее, из (6.1) имеем также, что

$$M \cap F \subset \mathbf{A}[M](F) \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}. \quad (6.4)$$

Наконец, среди простейших свойств ОПП отметим «совокупную» изотонность: $\forall M_1 \in \mathcal{F} \forall F_1 \in \mathcal{F} \forall M_2 \in \mathcal{F} \forall F_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2) \& (F_1 \subset F_2)) \Rightarrow (\mathbf{A}[M_1](F_1) \subset \mathbf{A}[M_2](F_2)). \quad (6.5)$$

Более общие свойства см. в [20, раздел 5]. Отметим только важный для дальнейшего аналог «совокупной» секвенциальной непрерывности (см. [20, раздел 5]): если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и при этом

$$((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F), \quad (6.6)$$

то $M \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$ и, что особенно важно,

$$(\mathbf{A}[M_i](F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}[M](F). \quad (6.7)$$

Для дальнейшего импликация (6.6) $\Rightarrow$ (6.7) будет весьма существенной.

Степени операторов. Всюду в дальнейшем используем следующее традиционное определение степени оператора, действующего в произвольном непустом множестве Y : если $\mathbf{a} \in Y^Y$, то последовательность

$$(\mathbf{a}^k)_{k \in \mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \rightarrow Y^Y \quad (6.8)$$

степеней оператора $\mathbf{a}$ однозначно определяется условиями

$$(\mathbf{a}^0(y) \triangleq y \quad \forall y \in Y) \& (\mathbf{a}^{s+1} = \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^s \quad \forall s \in \mathbb{N}_0), \quad (6.9)$$

где $\circ$ — символ композиции отображений. Рассмотрим реализацию (6.8), (6.9) при $Y = \mathcal{F}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{A}[M]$, где $M \in \mathcal{F}$. Итак, получаем, что при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $s \in \mathbb{N}_0$

$$W_s(M, N) \triangleq \mathbf{A}[M]^s(N) \in \mathcal{F}. \quad (6.10)$$

Из (6.9), (6.10) вытекает, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$(W_0(M, N) = N) \& (W_{s+1}(M, N) = \mathbf{A}[M](W_s(M, N)) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0); \quad (6.11)$$

получаем, кроме того, что

$$W(M, N) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} W_k(M, N) \in \mathcal{F}. \quad (6.12)$$

В отношении (6.10)–(6.12) отметим ряд легкопроверяемых свойств (см. [20, раздел 6]). Итак (см. (6.1), (6.4), (6.11)), при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $s \in \mathbb{N}_0$

$$(W_{s+1}(M, N) \subset W_s(M, N)) \& (M \cap N \subset W_s(M, N)). \quad (6.13)$$

Из (6.13) следует, в частности, тот очевидный факт, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$M \cap N \subset W(M, N). \quad (6.14)$$

Кроме того, имеем очевидное следствие (6.5): при $M_1 \in \mathcal{F}$, $N_1 \in \mathcal{F}$, $M_2 \in \mathcal{F}$ и $N_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)) \Rightarrow (W_s(M_1, N_1) \subset W_s(M_2, N_2) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0). \quad (6.15)$$

Из (6.12) и (6.15) получаем, как следствие, что $\forall M_1 \in \mathcal{F} \quad \forall N_1 \in \mathcal{F} \quad \forall M_2 \in \mathcal{F} \quad \forall N_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)) \Rightarrow (W(M_1, N_1) \subset W(M_2, N_2)). \quad (6.16)$$

Отметим, наконец, достаточно простые следствия импликации (6.6) $\Rightarrow$ (6.7) [20, раздел 6] с учетом свойств, отмеченных в [20, раздел 5]. Итак, если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и при этом

$$((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N), \quad (6.17)$$

то справедливы следующие свойства

$$((W_k(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W_k(M, N) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \& ((W(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W(M, N)). \quad (6.18)$$

В заключение данной сводки свойств ОПП из [20] отметим, что согласно [20, предложение 6.1] при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$W(M, N) = \mathbf{A}[M](W(M, N)) \quad (6.19)$$

(свойство неподвижной точки). Из (6.14)–(6.16) извлекаем нужные положения, связанные с (5.4), (5.5). Так $\mathbf{M} \subset W(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и, кроме того,

$$S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \subset W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \quad (6.20)$$

Отметим также аналог (6.20) для множеств-итераций (см. (6.13))

$$S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \subset W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (6.21)$$

С учетом (6.21) и предложения 5.1 получаем систему равенств

$$\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = T \times \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (6.22)$$

Аналогичным образом из (6.20) и предложения 5.1 имеем равенство

$$\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = T \times \mathbb{R}^n \quad (6.23)$$

С учетом (6.22) получаем с очевидностью, что

$$\begin{aligned} \Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) &\triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \\ &\quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Аналогично, из (6.23) получаем свойство

$$\Sigma_0(t, x \mid \kappa) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (6.25)$$

С учетом (6.24) и (6.25) корректно определены при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ значения

$$\begin{aligned} (\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) &\triangleq \inf(\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \\ \&x(\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) &\triangleq \inf(\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Посредством (6.26) определены функции $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, $k \in \mathbb{N}_0$, и $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Итак, при $k \in \mathbb{N}_0$

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \triangleq (\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa))_{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n} = (\inf(\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa)))_{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \quad (6.27)$$

Кроме того, имеем из (6.26), что

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \triangleq (\varepsilon_0(t, x \mid \kappa))_{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n} = (\inf(\Sigma_0(t, x \mid \kappa)))_{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \quad (6.28)$$

Предложение 6.1. Если $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa) \subset \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (6.29)$$

Доказательство. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Пусть $\varepsilon_* \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$. Тогда (см. (6.25)) $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и при этом

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)), \quad (6.30)$$

где $W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \subset W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. С учетом (6.30) имеем включение

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)).$$

Из (6.24) вытекает требуемое свойство: $\varepsilon_* \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$. Итак, (6.29) установлено. $\square$

Предложение 6.2. Если $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa).$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и

$$(a_j)_{j \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$$

такова (см. (6.26)), что

$$(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \downarrow \varepsilon_*, \quad (6.31)$$

где $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$. Тогда, в частности, для последовательности $(\kappa a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}_+$ имеем сходимость

$$(\kappa a_j)_{j \in \mathbb{N}} \downarrow \kappa \varepsilon_*. \quad (6.32)$$

Из (5.3), (6.31) и (6.32) вытекает, что

$$((S_0(\mathbf{M}, a_j))_{j \in \mathbb{N}} \downarrow S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \& ((S_0(\mathbf{N}, \kappa a_j))_{j \in \mathbb{N}} \downarrow S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)). \quad (6.33)$$

Как следствие получаем из (6.33) с учетом (6.17), (6.18) свойство

$$(W_k(S_0(\mathbf{M}, a_j), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_j)))_{j \in \mathbb{N}} \downarrow W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)). \quad (6.34)$$

Согласно (6.24) $(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_j), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_j)) \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Поэтому (см. (1.2), (6.34))

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*))$$

и следовательно (см. (6.24)) $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$. □

Следствие 6.1. Если $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$ есть наименьший элемент множества $\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$.

Доказательство очевидно (см. (6.26)).

Отметим естественный аналог предложения 6.2: справедливо следующее положение

Предложение 6.3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$.

Доказательство аналогично предложению 6.2.

Следствие 6.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)$ есть наименьший элемент множества $\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$.

Доказательство очевидно (см. (6.26)). Заметим, что в силу предложений 6.1 и 6.3

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Это означает (см. (6.26)), что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ непременно $\{\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) : k \in \mathbb{N}_0\} \subset [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]$, а потому определено (конечное) значение

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) = \sup(\{\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) : k \in \mathbb{N}_0\}) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]. \quad (6.35)$$

Предложение 6.4. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (6.36)$$

Доказательство подобно обоснованию аналогичного положения [17, 18].

Предложение 6.5. Если $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \leq \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa).$$

Доказательство подобно аналогичному рассуждению в [17, 18].

Из предложений 6.4 и 6.5 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa))_{k \in \mathbb{N}} \uparrow \varepsilon_0(t, x \mid \kappa) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (6.37)$$

7. Последовательность в пространстве функций позиции: некоторые общие свойства

Как показано в предыдущем разделе, посредством итерационной процедуры в семействе п/м $T \times \mathbb{R}^n$ введена последовательность

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))_{k \in \mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \quad (7.1)$$

а также предельная функция $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Конкретное их определение в терминах упомянутой процедуры содержится в (6.26). Сейчас мы установим некоторые свойства последовательности (7.1) и функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$, рассматривая их с точки зрения последующей реализации в $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ непосредственно. Однако сначала отметим, что множества (6.24), (6.25) являются лучами в $\mathbb{R}_+$ с обычным порядком; следующие три положения устанавливаются по аналогии с [17, 18].

Предложение 7.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $s \in \mathbb{N}_0$, то

$$\Sigma_0^{(s)}(t_*, x_* \mid \kappa) = [\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_* \mid \kappa), \infty[. \quad (7.2)$$

Предложение 7.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa) = [\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa), \infty[. \quad (7.3)$$

Предложение 7.3. Если $b \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{N}_0$, то

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) = W_k(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)). \quad (7.4)$$

Следствие 7.1. Если $b \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{N}_0$, то $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}$.

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (6.10) и предложения 7.3.

Предложение 7.4. При $b \in \mathbb{R}_+$

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) = W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)). \quad (7.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $b \in \mathbb{R}_+$. Если $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b))$, то согласно (6.25) $b \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$, а потому (см. (6.26)) $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \leq b$, т. е. $(t_*, x_*) \in \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b])$. Итак,

$$W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)) \subset \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]). \quad (7.6)$$

Пусть $(t^*, x^*) \in \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b])$, т. е. $(t^*, x^*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon^* \triangleq \varepsilon_0(t^*, x^* \mid \kappa) \leq b$. Согласно предложению 7.2 $\Sigma_0(t^*, x^* \mid \kappa) = [\varepsilon^*, \infty[$, а потому $b \in \Sigma_0(t^*, x^* \mid \kappa)$ и в силу (6.25)

$$(t^*, x^*) \in W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)).$$

Поскольку выбор позиции (t^*, x^*) был произвольным, установлено, что

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) \subset W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)).$$

С учетом (7.6) получаем равенство (7.5). $\square$

Следствие 7.2. Если $b \in \mathbb{R}_+$, то $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}$.

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (6.12) и предложения 7.4. Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M} \triangleq \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid g^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F} \ \forall b \in \mathbb{R}_+\} \quad (7.7)$$

всех полунепрерывных снизу функций из $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Тогда из следствий 7.1 и 7.2 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M} \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}). \quad (7.8)$$

Введем в рассмотрение следующую функцию $\psi_\kappa \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$; а именно, полагаем, что

$$\psi_\kappa(t, x) \triangleq \sup(\{\rho((t, x); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa}\rho((t, x); \mathbf{N})\}) \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (7.9)$$

Так как $\rho(\cdot; \mathbf{M}) \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\rho(\cdot; \mathbf{N}) \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$, получаем, что

$$\psi_\kappa \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n). \quad (7.10)$$

Поскольку $\mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}$ (действительно, для $g \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$ и $b \in \mathbb{R}_+$ $g^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}$ как непрерывный прообраз замкнутого множества), имеем свойство $\psi_\kappa \in \mathfrak{M}$. В силу (7.9) ψ_κ есть точная верхняя грань в $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leq)$ неупорядоченной пары

$$\{\rho(\cdot; \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa}\rho(\cdot; \mathbf{N})\};$$

здесь и ниже $\leq$ есть поточечная упорядоченность на $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Итак, в дальнейшем $\leq$ обозначает поточечный порядок на $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, т. е. $\forall g_1 \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \ \forall g_2 \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$

$$(g_1 \leq g_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (g_1(t, x) \leq g_2(t, x) \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n). \quad (7.11)$$

Тогда из предложения 6.5 получаем, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leq \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa) \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (7.12)$$

Кроме того, из предложения 6.4 и (7.11) вытекает, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leq \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (7.13)$$

Свойство (6.37) существенно дополняет (7.13). Мы ниже используем обычные поточечно определяемые линейные операции в пространстве в/з функций на $T \times \mathbb{R}^n$.

Предложение 7.5. *Справедливо равенство*

$$\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa) = \frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N}).$$

Доказательство. Согласно (6.11) имеем, что

$$W_0(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \quad (7.14)$$

Поэтому при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ имеем в силу (6.24) и (7.14), что

$$\Sigma_0^{(0)}(t_*, x_* \mid \kappa) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+). \quad (7.15)$$

Кроме того, $\Sigma_0^{(0)}(t_*, x_* \mid \kappa) = [\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_* \mid \kappa), \infty[$, в частности,

$$\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (7.16)$$

Из (7.15) и (7.16) вытекает, что справедливо

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*).$$

Поэтому согласно (5.3) имеем неравенство

$$a_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_*. \quad (7.17)$$

Покажем, что в (7.17) на самом деле справедливо равенство. Допустим противное: $a_* < \kappa\varepsilon_*$. Тогда

$$b_* \triangleq \frac{a_*}{\kappa} \in \mathbb{R}_+ : b_* < \varepsilon_*. \quad (7.18)$$

Вместе с тем $\kappa b_* = a_*$ и в силу (7.17) $\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) = \kappa b_*$, что означает в силу (5.3) справедливость включения

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*). \quad (7.19)$$

Из (7.15), (7.18) и (7.19) следует, что $b_* \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_* \mid \kappa)$. Тогда в силу (6.26) $\varepsilon_* \leq b_*$ вопреки второму положению в (7.18). Полученное противоречие показывает, что вышеупомянутое строгое неравенство $a_* < \kappa\varepsilon_*$ невозможно и, следовательно (см. (7.17)), $a_* = \kappa\varepsilon_*$, т. е.

$$\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) = \kappa\varepsilon_* = \kappa\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_* \mid \kappa).$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено равенство

$$\kappa\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa) = \rho(\cdot; \mathbf{N}). \quad (7.20)$$

Из (7.20) вытекает утверждение доказываемого предложения. $\square$

Предложение 7.6. *Справедливо свойство $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq \psi_\kappa$.*

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $b_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{M})$. Кроме того, $c_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, b_*) \cap S_0(\mathbf{N}, c_*). \quad (7.21)$$

При этом реализуются следующие значения

$$a_* \triangleq \frac{1}{\kappa} c_* \in \mathbb{R}_+, \quad d_* \triangleq \sup(\{b_*; a_*\}) \in \mathbb{R}_+.$$

Ясно, что $S_0(\mathbf{M}, b_*) \subset S_0(\mathbf{M}, d_*)$ и, кроме того, $c_* = \kappa a_* \leq \kappa d_*$. Последнее означает, что $S_0(\mathbf{N}, c_*) \subset S_0(\mathbf{N}, \kappa d_*)$. Из (7.21) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, d_*) \cap S_0(\mathbf{N}, \kappa d_*). \quad (7.22)$$

Поэтому (см. (6.20)) $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, d_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa d_*))$. Это означает в силу (6.25), что $d_* \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$, а потому $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \leq d_*$ (см. (6.26)). При этом

$$d_* = \sup(\{\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N})\}). \quad (7.23)$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, получаем (см. (7.9)) требуемое свойство

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq \psi_\kappa.$$

□

Из (7.13) и предложения 7.6 вытекает, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leq \psi_\kappa \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (7.24)$$

В свою очередь, из (7.12) следует рассуждением по индукции, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leq \varepsilon_0^{(l)}(\cdot \mid \kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall l \in \overrightarrow{k, \infty}. \quad (7.25)$$

Тогда в силу (7.25) и предложения 7.5 имеем, что

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (7.26)$$

В свою очередь, из (7.13) и предложения 7.5 вытекает, что

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa). \quad (7.27)$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M}_\psi \triangleq \{g \in \mathfrak{M} \mid g \leq \psi_\kappa\}. \quad (7.28)$$

Ясно, что $\psi_\kappa \in \mathfrak{M}_\psi$, а тогда $\mathfrak{M}_\psi$ есть непустое множество. Далее, из (7.8), (7.24) получаем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi). \quad (7.29)$$

8. Функционал качества и его основные свойства

В настоящем разделе вводится специальный тип функционала качества (далее показывается, что значения функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ совпадают всякий раз с минимаксом данного функционала и в классе квазистратегий, и в классе квазипрограмм).

Если $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, то функция

$$t \mapsto \rho((t, x(t)); \mathbf{N}) : [t_*, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

непрерывна и достигает максимума. Поэтому полагаем, что

$$\begin{aligned} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) &\triangleq \sup(\{\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, x(t)); \mathbf{N})\}) \\ &\forall t_* \in T \quad \forall x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Вполне очевидно следующее свойство: если $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то

$$\vartheta \mapsto \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) : [t_*, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (8.2)$$

есть непрерывная функция.

С учетом непрерывности функций (8.2) корректно определяется при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ число

$$\min_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \quad (8.3)$$

В свою очередь, (8.3) позволяет ввести важное для дальнейшего определение: если $t_* \in T$, то

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)} : C_n([t_*, \vartheta_0]) \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (8.4)$$

определяется следующим условием: при $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \triangleq \min_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta). \quad (8.5)$$

Если $t_* \in T$, то на $C_n([t_*, \vartheta_0])$ вводим обычную норму $\|\cdot\|_{t_*}^{(\mathbf{C})}$ равномерной сходимости по правилу: если $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то

$$\|x(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} \triangleq \max_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\|.$$

Предложение 8.1. Если $t_* \in T$, то $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ есть равномерно непрерывный функционал на $(C_n([t_*, \vartheta_0]), \|\cdot\|_{t_*}^{(\mathbf{C})})$, т. е. $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists \delta \in]0, \infty[\quad \forall x_1(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \quad \forall x_2(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$(\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} < \delta) \Rightarrow (|\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_1(\cdot)) - \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_2(\cdot))| < \varepsilon). \quad (8.6)$$

Доказательство практически очевидно.

Предложение 8.2. Если $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то

$$\begin{aligned} &\exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ &((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))) \& ((t, x(t)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Доказательство легко следует из определений.

9. Минимакс в классе квазистратегий

В настоящем разделе будет определено значение гарантированного результата для функционала платы (8.4) в классе квазистратегий (момент t_* здесь предполагается заданным). Однако предварительно мы напомним некоторые общие положения [20], касающиеся разрешимости ДИ сближения-уклонения. Итак, следуя на идейном уровне [20, (10.22)] и учитывая (6.12), введем при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$, $(t, x) \in W(M, N)$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$ множество

$$\pi_{t,x}^{(W)} \langle \nu \mid M, N \rangle \triangleq \left\{ \eta \in \Pi_t(\nu) \mid \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \right. \\ \left. \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in W(M, N) \quad \forall \xi \in [t, \vartheta]) \right\}. \quad (9.1)$$

Тогда на основе (9.1) определяется [20, предложение 10.3] (многозначная) квазистратегия. Точнее,

$$\pi_{t,x}^{(W)} \langle \cdot \mid M, N \rangle = (\pi_{t,x}^{(W)} \langle \nu \mid M, N \rangle)_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \tilde{A}_t^\Pi \\ \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F} \quad \forall (t, x) \in W(M, N). \quad (9.2)$$

Напомним также, что (см. [20, (10.22)]) при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $(t, x) \in N$

$$\mathcal{S}_{M,N}(t, x) \triangleq \left\{ \eta \in \mathcal{H}_t \mid \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \right. \\ \left. \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in N \quad \forall \xi \in [t, \vartheta]) \right\}. \quad (9.3)$$

Отметим здесь же, что согласно [20, следствие 10.2] реализуется свойство

$$\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \pi_{t,x}^{(W)} \langle \nu \mid M, N \rangle \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x) \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F} \quad \forall (t, x) \in W(M, N). \quad (9.4)$$

Кроме того, отметим, что (см. [20, теорема 10.1])

$$W(M, N) = \{(t, x) \in N \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t : \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x)\} \\ = \{(t, x) \in N \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t^\Pi : \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x)\} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F}. \quad (9.5)$$

При этом в силу (4.7) и (9.3) при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$, $(t, x) \in N$ и $\alpha \in \tilde{A}_t$

$$\left(\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x) \right) \Leftrightarrow (\forall \tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t; x; \alpha] \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : \\ ((\vartheta, \tilde{x}(\vartheta)) \in M) \& ((\xi, \tilde{x}(\xi)) \in N \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])). \quad (9.6)$$

Отметим, наконец, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ определено значение

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) \in \mathbb{R}_+. \quad (9.7)$$

Более того, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ множество

$$\{\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) : \eta \in \mathcal{H}_{t_*}\} \quad (9.8)$$

компактно и, в частности, ограничено в $\mathbb{R}$ с метрикой-модулем. В самом деле, $\mathcal{H}_{t_*}$ *-слабо компактно, а

$$\eta \mapsto \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) : \mathcal{H}_{t_*} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

есть непрерывный функционал как композиция двух непрерывных отображений (см. (4.5) и предложение 8.1). Поэтому (9.8) есть непрерывный образ компакта. Заметим, что в силу (4.7) и ограниченности множества (9.8) при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ множество

$$\{\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]\} \quad (9.9)$$

ограничено, а потому определено значение

$$\sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

В этом случае при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено значение

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \triangleq \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+. \quad (9.10)$$

Отметим, что в случае $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi$ имеем, что (9.9) есть множество, компактное в $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, как непрерывный образ компакта

$$\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \quad (9.11)$$

(в самом деле, (9.11) есть замкнутое (см. (3.9)) п/м компакта $\mathcal{H}_{t_*}$); кроме того, в этом случае $\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]$ есть компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости как непрерывный (см. (4.5)) образ компакта (9.11) (учитываем (4.7)). Получаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi$ определено значение

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+ \quad (9.12)$$

(учитываем предложение 8.1 и теорему Вейерштрасса). Поэтому при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено значение

$$\inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+; \quad (9.13)$$

при этом, конечно, у нас (см. (3.9))

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leq \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \quad (9.14)$$

Согласно (6.25) и предложению 6.3 при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ получаем, что

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))) \quad (9.15)$$

где $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \in \mathcal{F}$ и $S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \in \mathcal{F}$; поэтому согласно (9.2) определена квазипрограмма

$$\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \triangleq \pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \cdot \mid S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \rangle \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi, \quad (9.16)$$

а тогда определено значение

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

Предложение 9.1. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и α_* есть квазипрограмма (9.16):

$$\alpha_* \triangleq \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi. \quad (9.17)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (9.18)$$

Доказательство. Отметим, что (см. (6.11), (6.12))

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \quad (9.19)$$

и, стало быть (см. (9.3)),

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_{S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))}(t_*, x_*) \\ &= \{ \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \mid \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))) \\ & \quad \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]) \}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Кроме того, $\alpha_* \in \tilde{A}_{t_*}$, а потому согласно (9.4) и (9.6)

$$\begin{aligned} & \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ & ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))) \& ((t, x(t)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Это означает, что $\forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] :$

$$(\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \& (\rho((t, x(t)); \mathbf{N}) \leq \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \quad (9.22)$$

Поэтому (см. (9.22)) получаем свойство

$$\begin{aligned} & \forall x(\cdot) \in \mathbf{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : (\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \\ & \quad \& (\frac{1}{\kappa} \rho((t, x(t)); \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Из (8.1) и (9.23) вытекает, что

$$\forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (9.24)$$

Тем более (см. (8.5), (9.24)) имеем оценки

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*]. \quad (9.25)$$

Из (9.17) и (9.25) получаем, что $\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)$. $\square$

Из (9.16) и предложения 9.1 вытекает, что (см. (9.13))

$$\inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.26)$$

Как следствия имеем из (9.14), (9.26) следующие оценки

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.27)$$

Предложение 9.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)[$ и $\bar{\alpha} \in \tilde{A}_{t_*}$, то $\exists x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}] : b < \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))$.

Доказательство использует свойство $b \notin \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$, а также (9.5).

Следствие 9.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)[$, то

$$b < \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}.$$

Доказательство непосредственно следует из предложения 9.2.

Из (9.10) и следствия 9.1 вытекает, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}_+$ и $b < \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)$

$$b \leq \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*). \quad (9.28)$$

Предложение 9.3. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$; тогда справедливо неравенство

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \leq \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*). \quad (9.29)$$

Доказательство очевидно (см. следствие 9.1).

Из (9.27) и предложения 9.3 вытекает, что

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.30)$$

Далее, из (9.26) и (9.30) имеем, что

$$\inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.31)$$

Поэтому из (9.14) и (9.31) получаем, что

$$\inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.32)$$

Получили (см. (9.30), (9.32)) свойство

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.33)$$

Заметим, что согласно (3.9) и (9.16) при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ реализуется $\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \in \tilde{A}_{t_*}$ и согласно (9.14)

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leq \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \quad (9.34)$$

Из предложения 9.1, (9.30) и (9.34) получаем следующее общее положение.

Теорема 9.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) &= \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \\ &= \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Из (9.35) следует, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ квазипрограмма (9.16) оптимальна.

10. Итерационная процедура на пространстве функций

Заметим сначала, что

$$\Psi \triangleq (\rho((t, x); \mathbf{M}))_{(t, x) \in T \times \mathbb{R}} \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n). \quad (10.1)$$

При этом $\Psi \leq \psi_\kappa$ в силу (7.9) и (10.1). Напомним далее, что при $t \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ функция

$$\tau \longmapsto \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) : [t, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (10.2)$$

непрерывна (см. (7.9)) и достигает максимума, т. е.

$$\max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+$$

определяется корректно; если, к тому же, $g \in \mathfrak{M}_\psi$ (см. (7.28)), то функция

$$\tau \longmapsto g(\tau, x(\tau)) : [t, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

ограничена, поскольку

$$g(\tilde{\tau}, x(\tilde{\tau})) \leq \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \quad \forall \tilde{\tau} \in [t, \vartheta_0], \quad (10.3)$$

что позволяет при $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$ определять

$$\sup_{\tau \in [t, \vartheta]} g(\tau, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+.$$

Более того, имеем при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ что

$$\sup_{\tau \in [t, \vartheta]} (g(\tau, x(\tau)); \Psi(\vartheta, x(\vartheta))) \leq \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]; \quad (10.4)$$

при этом, конечно, у нас

$$\sup_{\tau \in [t, \vartheta]} (g(\tau, x(\tau)); \Psi(\vartheta, x(\vartheta))) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]. \quad (10.5)$$

С учетом (10.2), (10.3) полагаем, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $t \in T$ функционал

$$\mathfrak{H}[g; t] \in \mathcal{R}_+[C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0]] \quad (10.6)$$

определяется условиями: при $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$\mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \triangleq \sup_{\tau \in [t, \vartheta]} (g(\tau, x(\tau)); \Psi(\vartheta, x(\vartheta))). \quad (10.7)$$

Введем в рассмотрение множества Лебега для функционала (10.6), (10.7). Итак, при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$ и $b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_b[g; t] &\triangleq \mathfrak{H}[g; t]^{-1}([0, b]) = \{(x(\cdot), \vartheta) \in C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0] \mid \mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \leq b\} \\ &= \{(x(\cdot), \vartheta) \in C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0] \mid (g(\tau, x(\tau)) \leq b \quad \forall \tau \in [t, \vartheta]) \\ &\quad \& (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq b)\} \in \mathcal{P}(C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0]). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Предложение 10.1. Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$ и $b \in \mathbb{R}_+$, то множество $\tilde{Y}_b[g, t_*]$ замкнуто в естественной метризуемой топологии, являющейся произведением топологии равномерной сходимости пространства $C_n([t_*, \vartheta_0])$ и обычной $|\cdot|$ -топологии отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, т. е.

$$\begin{aligned} \forall ((x_k(\cdot), \vartheta_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \tilde{Y}_b[g, t_*]^\mathbb{N} \quad \forall (x(\cdot), \vartheta) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \times [t_*, \vartheta_0] \\ ((x_k(\cdot))_{k \in \mathbb{N}} \rightrightarrows x(\cdot)) \& ((\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \vartheta) \Rightarrow ((x(\cdot), \vartheta) \in \tilde{Y}_b[g, t_*]). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Доказательство аналогично в идейном отношении положениям [17, 18] (см., в частности, [18, предложение 13]).

Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то получаем, что

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu] \triangleq (\mathfrak{H}[g; t_*] \mid \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]) \in \mathcal{R}_+ \left[X_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \right]. \quad (10.10)$$

Это означает, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu] : \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

и при этом $\forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta). \quad (10.11)$$

Ясно также, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $b \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu] \triangleq \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu]^{-1}([0, b]) = \tilde{Y}_b[g, t_*] \cap (\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]) \quad (10.12)$$

есть множество, замкнутое в подпространстве $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$ пространства $C_n([t_*, \vartheta_0]) \times [t_*, \vartheta_0]$ с топологией, определяемой произведением топологии равномерной сходимости на $C_n([t_*, \vartheta_0])$ и обычной $|\cdot|$ -топологии отрезка $[t_*, \vartheta_0]$. Иными словами, при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $b \in \mathbb{R}_+$ множество $\mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu]$ замкнуто в традиционном смысле, а именно:

$$\begin{aligned} \forall (z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu]^\mathbb{N} \quad \forall z \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \\ (((pr_1(z_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows pr_1(z)) \& ((pr_2(z_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow pr_2(z))) \Rightarrow (z \in \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu]). \end{aligned} \quad (10.13)$$

При этом согласно (10.10), (10.11), (10.12) и (10.8) при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu] = \{ (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \mid \\ (g(\tau, x(\tau)) \leq b \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta]) \& (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq b) \}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Отметим, что в силу компактности множеств (4.6) и отрезка $[t_*, \vartheta_0]$ получаем, что топология на $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$, определяемая произведением топологии равномерной сходимости $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и обычной $|\cdot|$ -топологии отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, превращает $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$ в компакт, а множество (10.14) замкнуто в данном компакте, а потому само является компактным.

Отметим, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \quad (10.15)$$

Предложение 10.2. Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то

$$\begin{aligned} & \exists(\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ & \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) = \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Доказательство подобно аналогичному положению в [17, 18].

Поэтому (см. предложение 10.2) определено значение

$$\begin{aligned} & \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \\ & \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Напомним, что согласно (10.4) и (10.7) при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$0 \leq \mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \leq \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)). \quad (10.18)$$

В частности (см. (10.11), (10.18)), при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$0 \leq \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq \max_{\tau \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)). \quad (10.19)$$

Предложение 10.3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ : \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \leq c \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (10.20)$$

Доказательство очевидно.

Предложение 10.4. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\begin{aligned} & \exists c \in \mathbb{R}_+ : \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \leq c \\ & \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. С учетом предложения 10.3 подберем $c_* \in \mathbb{R}_+$ так, что

$$\psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \leq c_* \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (10.22)$$

Поскольку $\Psi \leq \psi_\kappa$, имеем, что (см. (10.22)) $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq c_*. \quad (10.23)$$

Выберем произвольно $\bar{g} \in \mathfrak{M}_\psi$, $\bar{\nu} \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar{\nu})$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$. Тогда из (10.23) вытекает, что

$$\Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leq c_*. \quad (10.24)$$

Далее, по выбору $\bar{g}$, $\bar{g} \leq \psi_\kappa$ (см. (7.28)). В силу (10.3) и (10.22) получаем, что

$$\bar{g}(\tau, \bar{x}(\tau)) \leq \max_{\tilde{\tau} \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tilde{\tau}, \bar{x}(\tilde{\tau})) \leq c_* \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (10.25)$$

Поэтому (см. (10.4), (10.23), (10.25)) имеем неравенство

$$\sup\left(\left\{\sup_{\tau \in [t_*, \bar{\vartheta}]} \bar{g}(\tau, \bar{x}(\tau)); \Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta}))\right\}\right) \leq c_*; \quad (10.26)$$

учли также (10.22). Из (10.7), (10.26) получаем, что

$$\mathfrak{H}[\bar{g}; t_*](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leq c_*. \quad (10.27)$$

Поскольку выбор $\bar{g}$, $\bar{\nu}$, $\bar{x}(\cdot)$ и $\bar{\vartheta}$ был произвольным, установлено, что

$$\mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \leq c_* \quad \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (10.28)$$

С учетом того, что $c_* \in \mathbb{R}_+$, и (10.28) получаем утверждение (10.21). $\square$

Из (10.11) и предложения 10.4 следует

$$\begin{aligned} \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \exists c_* \in \mathbb{R}_+ : \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq c_* \\ \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Из (10.11), (10.12), (10.17) и (10.29) тем более получаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ для некоторого $c_* \in \mathbb{R}_+$

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq c_* \quad \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \quad (10.30)$$

Поскольку $\mathcal{E}_t \neq \emptyset \quad \forall t \in T$, имеем из (10.30), что корректно определяется для $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $g \in \mathfrak{M}_\psi$ значение

$$\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \quad (10.31)$$

Мы получаем теперь, что $\forall g \in \mathfrak{M}_\psi$

$$\left(\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \right)_{(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \quad (10.32)$$

С учетом (10.32) полагаем далее, что

$$\Gamma : \mathfrak{M}_\psi \rightarrow \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad (10.33)$$

определяется следующим условием: при $g \in \mathfrak{M}_\psi$

$$\Gamma(g) \triangleq \left(\sup_{\nu \in \mathcal{E}_\tau} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(\tau, y, \nu) \times [\tau, \vartheta_0]} \mathfrak{h}[g; \tau; y; \nu](x(\cdot), \vartheta) \right)_{(\tau, y) \in T \times \mathbb{R}^n}. \quad (10.34)$$

При этом, конечно, $\forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall (\tau, y) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\Gamma(g)(\tau, y) = \sup_{\nu \in \mathcal{E}_\tau} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(\tau, y, \nu) \times [\tau, \vartheta_0]} \mathfrak{h}[g; \tau; y; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \quad (10.35)$$

Заметим, в частности, что (см. 10.33), (7.28)) определены функции

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (10.36)$$

Теорема 10.1. Если $k \in \mathbb{N}_0$, то справедливо равенство

$$\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)). \quad (10.37)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда (см. (7.7), (7.8), (10.36))

$$(\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]) \& (\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]). \quad (10.38)$$

Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Сравним значения

$$(a_* \triangleq \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa) \in \mathbb{R}_+) \& (b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*) \in \mathbb{R}_+). \quad (10.39)$$

При этом согласно следствию 6.1

$$a_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (10.40)$$

Это означает в силу (6.24), что

$$(t_*, x_*) \in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \quad (10.41)$$

Иными словами (см. (6.11), (10.41)), имеем свойство

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*))). \quad (10.42)$$

Тогда согласно (6.1) и (10.42) $(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*))$ и при этом

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \& ((t, x(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned}$$

Из (5.3), (6.24) получаем теперь, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\rho(\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leq a_* \& (a_* \in \Sigma_0^{(k)}(t, x(t) \mid \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (10.43)$$

С учетом (10.1) и (10.43) реализуется свойство

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (a_* \in \Sigma_0^{(k)}(t, x(t) \mid \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (10.44)$$

Из (6.26) и (10.44) получаем с очевидностью, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (\varepsilon_0^{(k)}(t, x(t) \mid \kappa) \leq a_* \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (10.45)$$

С учетом (10.45) имеем теперь, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} \varepsilon_0^{(k)}(t, x(t) \mid \kappa) \leq a_*) \& (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*). \end{aligned} \quad (10.46)$$

Из (10.7) и (10.46) следует, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$:

$$\mathfrak{H}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa); t_*](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (10.47)$$

В свою очередь, из (10.11), (10.47) извлекается свойство

$$\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (10.48)$$

С учетом (10.17), (10.48) имеем теперь, что

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq a_* \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \quad (10.49)$$

Но в этом случае из (10.35) и (10.49) следует неравенство

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))(t_*; x_*) \leq a_*,$$

а потому (см. (10.39))

$$b_* \leq a_*. \quad (10.50)$$

Докажем справедливость противоположного неравенства. Пусть $\hat{\nu} \in \mathcal{E}_{t_*}$. Тогда для некоторых $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \hat{\nu})$ и $\hat{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa); t_*; x_*; \hat{\nu}](\hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) \leq b_*. \quad (10.51)$$

Из (10.11) и (10.51) вытекает, что

$$\mathfrak{H}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa); t_*](\hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) \leq b_*. \quad (10.52)$$

В свою очередь из (10.7) и (10.52) следует, что

$$\sup_{\tau \in [t_*, \hat{\vartheta}]} \varepsilon_0^{(k)}(\tau, \hat{x}(\tau)) \leq b_* \quad (10.53)$$

и, вместе с тем,

$$\Psi(\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \leq b_*. \quad (10.54)$$

В силу (10.1) и (10.54) имеем неравенство

$$\rho((\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})); \mathbf{M}) \leq b_*. \quad (10.55)$$

Это означает в силу (5.3), что

$$(\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, b_*). \quad (10.56)$$

Далее, из (10.53) имеем, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\tau, \hat{x}(\tau)) \leq b_* \quad \forall \tau \in [t_*, \hat{\vartheta}]. \quad (10.57)$$

В силу (10.57) и предложения 7.1 получаем теперь, что

$$b_* \in \Sigma_0^{(k)}(\tau, \hat{x}(\tau) \mid \kappa) \quad \forall \tau \in [t_*, \hat{\vartheta}].$$

Это означает в силу (6.24), что

$$(\tau, \hat{x}(\tau)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)) \quad \forall \tau \in [t_*, \hat{\vartheta}]. \quad (10.58)$$

Таким образом, у нас $(\hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \hat{\vartheta}) \times [t_*, \vartheta_0]$ есть такая УП, что (см. (10.56), (10.58))

$$((\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, b_*)) \& ((t, \hat{x}(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)) \quad \forall t \in [t_*, \hat{\vartheta}]). \quad (10.59)$$

Поскольку выбор $\hat{\nu}$ был произвольным, установлено, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, b_*)) \& ((t, x(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (10.60)$$

Легко видеть, что

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)). \quad (10.61)$$

Из (10.60), (10.61) имеем в силу (6.1), что

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, b_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*))), \quad (10.62)$$

где (см. (6.11))

$$\mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, b_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*))) = W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)). \quad (10.63)$$

Из (10.62) и (10.63) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)). \quad (10.64)$$

Тогда в силу (6.24)

$$b_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (10.65)$$

Из (6.26) и (10.65) получаем, что $\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa) \leq b_*$, а потому (см. (10.39))

$$a_* \leq b_*. \quad (10.66)$$

Из (10.50) и (10.66) получаем равенство

$$a_* = b_*. \quad (10.67)$$

Иными словами (см. (10.39), (10.67))

$$\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*). \quad (10.68)$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено (см. (10.38)) свойство (10.37), т. е. $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))$. $\square$

11. Свойство неподвижной точки

Напомним прежде всего, что согласно (7.29) и предложению 7.5 имеет место свойство

$$\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa) = \frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N}) \in \mathfrak{M}_\psi \quad (11.1)$$

Данное свойство (11.1) существенно для дальнейших построений.

Предложение 11.1. Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то $g \leq \Gamma(g)$.

Доказательство подобно рассуждению в [17, 18].

Предложение 11.2. Оператор Γ является изотонным: $\forall g_1 \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall g_2 \in \mathfrak{M}_\psi$

$$(g_1 \leq g_2) \Rightarrow (\Gamma(g_1) \leq \Gamma(g_2)). \quad (11.2)$$

Доказательство осуществляется по аналогии с подобным положением в [17, 18].

Теорема 11.1. Функция $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ есть неподвижная точка Γ :

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)). \quad (11.3)$$

Доказательство. Напомним, что $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$, а потому определена функция

$$\Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad (11.4)$$

(см. (10.35)). Тогда (см. предложение 11.1)

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)). \quad (11.5)$$

Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$,

$$(a_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \& (b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*)). \quad (11.6)$$

Тогда $a_* \in \mathbb{R}_+$, $b_* \in \mathbb{R}_+$ и, в силу (11.5), (11.6),

$$a_* \leq b_*. \quad (11.7)$$

Напомним, что (см. (11.6), следствие 6.2) $a_* \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$. Поэтому (см. (6.25))

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)).$$

Тогда (см. (6.19))

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*))). \quad (11.8)$$

Это означает (см. (5.3)), что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leq a_*) \& ((t, x(t)) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (11.9)$$

С учетом (6.25) имеем, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (a_* \in \Sigma_0(t, x(t) \mid \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned}$$

Но в этом случае согласно (6.26)

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (\varepsilon_0(t, x(t) \mid \kappa) \leq a_* \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Поэтому (см. 11.10)) имеет место свойство

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} \varepsilon_0(t, x(t) \mid \kappa) \leq a_*). \end{aligned} \quad (11.11)$$

С учетом (10.7) получаем теперь, что

$$\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \mathfrak{H}[\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa); t_*](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (11.12)$$

С учетом (10.17) получаем, как следствие, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (11.13)$$

Поэтому (см. (11.13)) имеем очевидное неравенство

$$\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (11.14)$$

С учетом (10.35), (11.14) получаем оценку

$$\Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*) \leq a_*.$$

Из (11.6) имеем, как следствие, неравенство

$$b_* \leq a_*. \quad (11.15)$$

Тогда (см. (11.7), (11.15)) получаем равенство

$$a_* = b_*. \quad (11.16)$$

Поэтому (см. (11.6), (11.16)) $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*)$. Поскольку (t_*, x_*) выбиралась произвольно, установлено (11.3), т. е. $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))$. $\square$

Введем в рассмотрение множество

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\psi}^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_{\psi} \mid (g = \Gamma(g)) \& (\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq g)\}. \quad (11.17)$$

Следующее положение подобно основному утверждению [17, 18].

Теорема 11.2. *Функция $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ является $\leq$ -наименьшим элементом множества (11.17):*

$$(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\psi}^{(\Gamma)}) \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq g \quad \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\psi}^{(\Gamma)}). \quad (11.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (7.29) $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi$. При этом согласно (7.27)

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa). \quad (11.19)$$

Тогда (см. (11.17), (11.19), теорему 11.1) имеем, что

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}. \quad (11.20)$$

Пусть $\mathbf{g} \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. Тогда в силу (11.17) имеем, что

$$\mathbf{g} \in \mathfrak{M}_\psi \quad (11.21)$$

и при этом

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq \mathbf{g}. \quad (11.22)$$

Тогда (см. (11.22), предложение 7.5)

$$\varepsilon_0^{(0)}(\cdot \mid \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.23)$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{N} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leq \mathbf{g}\}. \quad (11.24)$$

Тогда в силу (11.23) имеем, что $0 \in \mathfrak{N}$. Поэтому, в частности,

$$\mathfrak{N} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_0). \quad (11.25)$$

Пусть выбрано произвольное число

$$r \in \mathfrak{N}. \quad (11.26)$$

Тогда (см. (11.24), (11.26)) $r \in \mathbb{N}_0$ и при этом

$$\varepsilon_0^{(r)}(\cdot \mid \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.27)$$

Имеем, однако, в силу (7.29) и (11.21)

$$(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi) \& (\mathbf{g} \in \mathfrak{M}_\psi). \quad (11.28)$$

Из предложения 11.2 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot \mid \kappa) \leq \mathbf{g}) \Rightarrow (\Gamma(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot \mid \kappa)) \leq \Gamma(\mathbf{g})). \quad (11.29)$$

Из (11.27) и (11.29) вытекает, что

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot \mid \kappa)) \leq \Gamma(\mathbf{g}). \quad (11.30)$$

При этом по выбору $\mathbf{g}$ имеем из (11.17) равенство

$$\mathbf{g} = \Gamma(\mathbf{g}). \quad (11.31)$$

Тогда в силу (11.30), (11.31) получаем, что

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot \mid \kappa)) \leq \mathbf{g}. \quad (11.32)$$

Вместе с тем по теореме 10.1 имеем равенство

$$\varepsilon_0^{(r+1)}(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot \mid \kappa)). \quad (11.33)$$

Из (11.32) и (11.33) вытекает, что

$$\varepsilon_0^{(r+1)}(\cdot \mid \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.34)$$

При этом $r + 1 \in \mathbb{N}$ и, в частности, $r + 1 \in \mathbb{N}_0$. Поэтому (см. (11.34))

$$r + 1 \in \mathbb{N}_0 : \varepsilon_0^{(r+1)}(\cdot \mid \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.35)$$

Тогда (см. (11.24), (11.35)) получаем свойство

$$r + 1 \in \mathfrak{N}. \quad (11.36)$$

Итак (см. (11.26), (11.36)), установлено, что

$$k + 1 \in \mathfrak{N} \quad \forall k \in \mathfrak{N}. \quad (11.37)$$

Поэтому (см. (11.24), (11.25), (11.37))

$$\mathfrak{N} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_0) : (0 \in \mathfrak{N}) \& (k + 1 \in \mathfrak{N} \quad \forall k \in \mathfrak{N}). \quad (11.38)$$

Тогда по индукции имеем равенство $\mathfrak{N} = \mathbb{N}_0$. В итоге (см. (11.24))

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \leq \mathbf{g} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (11.39)$$

Это означает, что реализуются свойства

$$\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) \leq \mathbf{g}(t, x) \quad \forall k \in \mathfrak{N}_0 \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (11.40)$$

Тогда (см. (11.40), предложение 6.4) $\varepsilon_0(t, x \mid \kappa) \leq \mathbf{g}(t, x) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Это означает, что

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.41)$$

Поскольку выбор $\mathbf{g}$ был произвольным, установлено (см. (11.41)), что

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq g \quad \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}. \quad (11.42)$$

Из (11.20) и (11.42) вытекает (11.18), т. е.

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} : \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq g \quad \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}.$$

Итак, $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ есть $\leq$ -наименьший элемент множества $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. $\square$

Отметим, что из (7.28), (7.29), (11.17) и теоремы 11.2 вытекает, что $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi :$

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq \psi_\kappa). \quad (11.43)$$

При этом однако, ψ_κ есть точная верхняя грань множества

$$\{\rho(\cdot, \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N})\} = \{\Psi; \frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N})\}$$

в $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leq)$. Из (11.43) вытекает (см. (7.9)), что справедливо следующее

Предложение 11.3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \right) \\ & \& \left(\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \leq \sup \left(\{ \Psi(t_*, x_*); \frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \} \right) \right). \end{aligned} \quad (11.44)$$

Из предложения 11.3 вытекает, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ истинна импликация

$$(\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leq \frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N})) \Rightarrow (\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N})). \quad (11.45)$$

12. Программные конструкции (добавление)

Вернемся к построениям раздела 3, добавляя некоторые новые определения. Так, при $t \in T$ введем, следуя [29, раздел 3] конечномерный компакт $Y_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P$, оснащаемый σ -алгеброй борелевских множеств

$$\mathcal{K}_t \in (\sigma - \text{alg})[Y_t],$$

и получая стандартное ИП

$$(Y_t, \mathcal{K}_t). \quad (12.1)$$

Заметим, что при $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$

$$\mathcal{K}_{t_2} = \mathcal{K}_{t_1} \mid_{Y_{t_2}} = \{K \in \mathcal{K}_{t_1} \mid K \subset Y_{t_2}\}.$$

Мы используем стандартное [30, с. 17] определение декартова произведения трех множеств: если A , B и C — множества, то $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$. В частности, имеем при $t \in T$ равенство

$$\Omega_t = Y_t \times Q. \quad (12.2)$$

Если же при этом $K \in \mathcal{P}(Y_t)$, то

$$K \times Q \subset Y_t \times Q = \Omega_t,$$

т. е. $K \times Q \in \mathcal{P}(\Omega_t)$. В частности,

$$K \times Q \in \mathcal{P}(\Omega_t) \quad \forall t \in T \quad \forall K \in \mathcal{K}_t.$$

Более того (см. [29, раздел 3]), имеем свойство: при $t \in T$ и $K \in \mathcal{K}_t$.

$$K \times Q \in \mathcal{C}_t; \quad (12.3)$$

в виде (12.3) имеем борелевский цилиндр в Ω_t (12.2), являющийся аналогом последнего множества в (3.1). Здесь же отметим, что $I \times P \in \mathcal{K}_t$ при $t \in T$ и $I \in \mathcal{I}_t$. С учетом этого вводим при $t \in T$ множество

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{ \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{K}_t] \mid \mu(I \times P) = \lambda_t(I) \quad \forall I \in \mathcal{I}_t \}; \quad (12.4)$$

элементы (12.4) (т. е. борелевские меры) являются аналогами обычных управлений из $\mathcal{U}_t$. Кроме того, при $t \in T$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$

$$\pi_t(\mu) \triangleq \{ \eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(K \times Q) = \mu(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}_t \} \quad (12.5)$$

(учитываем (12.3)). Множество (12.5) является аналогом множества всех УП $(\bar{u}(\cdot), v(\cdot))$, где $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$, а $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_t$ фиксировано. Заметим, что множества (12.4) и (12.5) допускают погружение в пространства $C^*(Y_t)$ и $C^*(\Omega_t)$, где $C^*(Y_t)$ — топологическое сопряженное к сепарабельному банахову пространству $C(Y_t)$ непрерывных функций из $\mathbb{R}^{Y_t}$, а $C^*(\Omega_t)$ определено в разделе 3. При этом множества $\mathcal{R}_t$ и $\pi_t(\mu)$, $\mu \in \mathcal{R}_t$, в оснащении относительными $*$ -слабыми топологиями компактны, т. е. $*$ -слабо компактны. В силу сепарабельности пространств $C(Y_t)$ и $C(\Omega_t)$ (при оснащении нормами равномерной сходимости) вышеупомянутые пространства борелевских мер в оснащении относительными $*$ -слабыми топологиями метризуемы (имеются в виду пространства $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{H}_t$, а также множества (12.5)). Тогда, в частности, (12.4) и (12.5) с относительными $*$ -слабыми топологиями секвенциально компактны. Свойство замкнутости п/м $\mathcal{R}_t$ и множеств (12.5) эквивалентно секвенциальной замкнутости (подробнее см. в [29, раздел 3]). В частности, относительная $*$ -слабая топология на $\mathcal{R}_t$ (12.4) полностью описывается в терминах ($*$ -слабо) сходящихся последовательностей; для обозначения упомянутой сходимости используем, как и в разделе 3, символ $\rightharpoonup$.

В дальнейшем потребуется один специальный тип совокупных обобщенных управлений, отвечающих содержательно одновременному воздействию $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$, где $t \in T$. Точное определение приведено в [29, раздел 3]: при $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$ имеем $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$ (стандартное произведение μ и сужения меры Дирака, отвечающей точке v , на σ -алгебру борелевских п/м Q). Напомним важное свойство [29, (3.4)]: если $t \in T$, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ есть последовательность в $\mathcal{R}_t$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$, то

$$((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu) \Rightarrow ((\mu_i \otimes v)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu \otimes v \quad \forall v \in Q). \quad (12.6)$$

В свою очередь, (12.6) в комбинации с (4.5) реализует [29, (3.7)]. Мы получаем по аналогии с (4.6), что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$

$$\mathcal{X}^{(\Pi)}(t_*, x_*, v) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v) : \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])) \quad (12.7)$$

есть непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости (в [29, раздел 3] использовалось обозначение $\mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, v)$). Заметим, что (12.7) является вариантом множества (4.6) в случае, когда $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ порождено постоянным на $[t_*, \vartheta_0]$ управлением v .

13. Операторы стабильности и итерационные процедуры на их основе

В настоящем разделе вводится аналог итерационной процедуры раздела 6, которая порождалась соответствующим вариантом оператора (6.1). Процедура, рассматриваемая ниже, соответствует [29, раздел 5].

Итак, при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ вводим оператор

$$\mathbb{A}[M] : \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n), \quad (13.1)$$

определяемый следующим правилом: если $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$\mathbb{A}[M](H) \triangleq \{(t, x) \in H \mid \forall v \in Q \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}^{(\Pi)}(t, x, v) \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \& ((\xi, x(\xi)) \in H \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])\}. \quad (13.2)$$

Отметим, что оператор (13.1), (13.2) отличается в общем случае от оператора стабильности в [29, раздел 4]. Однако нам понадобится только тот случай, когда в (13.2) $M \in \mathcal{F}$ и $H \in \mathcal{F}$; в этом случае (13.2) совпадает с [29, (4.3)]. Итак, мы используем ниже только тот случай (13.1), когда $M \in \mathcal{F}$. Мы не будем сейчас рассматривать подробно свойства данного оператора в применении к множествам из $\mathcal{F}$. Отметим только, что из положений [29, раздел 10] вытекает, что

$$\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}. \quad (13.3)$$

Далее мы используем (6.9) в случае $\mathbf{a} = \mathbb{A}[M]$, где $M \in \mathcal{F}$. Итак (см. (13.3)), при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $s \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{W}_s(M, N) \triangleq \mathbb{A}[M]^s(N) \in \mathcal{F}. \quad (13.4)$$

Отметим, что из (6.9) и (13.4) следует, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$(\mathcal{W}_0(M, N) = N) \& (\mathcal{W}_{s+1}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_s(M, N)) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0); \quad (13.5)$$

кроме того, получаем (см. (13.4), (13.5)), что

$$\mathcal{W}(M, N) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M, N) \in \mathcal{F}. \quad (13.6)$$

В связи с (13.5), (13.6) напомним положения [29, раздел 5]. Для наших целей существенно то, что (см. (13.2), (13.5))

$$\mathcal{W}_{s+1}(M, N) \subset \mathcal{W}_s(M, N) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0. \quad (13.7)$$

Кроме того, отметим, что (см. [19, § 5.4], [31, раздел 11])

$$\mathcal{W}(M, N) = W(M, N) \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F}. \quad (13.8)$$

Из (13.5), (13.7) вытекает, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{W}_k(M, N) \subset N; \quad (13.9)$$

кроме того, из (13.6), (13.8) следует очевидное равенство

$$W(M, N) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M, N). \quad (13.10)$$

При этом, как легко видеть,

$$(T \times \mathbb{R}^n) \setminus W(M, N) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} ((T \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{W}_k(M, N)) \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F}. \quad (13.11)$$

Более подробные сведения о процедуре (13.5), (13.6) см. в [29]; мы используем здесь лишь некоторые положения, связанные с уклонением в классе стратегий-троек (триплетов).

14. Процедуры уклонения

В настоящем разделе приводится краткая сводка положений [29, раздел 7], касающаяся допустимых процедур формирования управлений игрока II и траекторий, порождаемых упомянутыми процедурами.

Через $\mathfrak{V}_{\text{pos}}$ обозначаем далее множество всех отображений из $T \times \mathbb{R}^n$ в $\mathcal{P}'(Q)$, т. е.

$$\mathfrak{V}_{\text{pos}} \triangleq \mathcal{P}'(Q)^{T \times \mathbb{R}^n} \quad (14.1)$$

есть множество всех позиционных стратегий игрока II; см. [2, 3]. Далее рассматриваются процедуры управления игрока II с ограничением на число переключений.

Если $t \in T$, то полагаем, что

$$G^*(t) \triangleq \{g^* \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{C_n([t, \vartheta_0])} \mid \forall g_1 \in C_n([t, \vartheta_0]) \quad \forall g_2 \in C_n([t, \vartheta_0]) \quad \forall \theta \in [t, \vartheta_0] \\ ((g_1 \mid [t, \theta]) = (g_2 \mid [t, \theta])) \Rightarrow (g^*(g_1) \cap [t, \theta] = g^*(g_2) \cap [t, \theta])\}. \quad (14.2)$$

Элементы (14.2) называем правилами коррекции на отрезке $[t, \vartheta_0]$, где $t \in T$; пусть, кроме того,

$$\mathbf{G}_0^*(t) \triangleq G^*(t)^{\mathbb{R}^n}; \quad (14.3)$$

т. е. элементами (14.3) являются всевозможные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$. С учетом (14.3) полагаем, что

$$\mathbf{G}_\theta^* \triangleq \prod_{t \in [\theta, \vartheta_0]} \mathbf{G}_0^*(t) \quad \forall \theta \in T. \quad (14.4)$$

Элементы множества $\mathbf{G}_\theta^*$, где $\theta \in T$, называем стратегиями коррекции на отрезке $[\theta, \vartheta_0]$. Если $t_* \in T$, то (допустимой) стратегией-тройкой на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ называем всякий триплет (V, γ, k) , где $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\gamma \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$.

При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ каждой стратегии-тройке (V, γ, k) на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ сопоставляется [29, предложение 7.3] (непустой) пучок траекторий

$$\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k] \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])), \quad (14.5)$$

порожденных данной стратегией-тройкой из позиции (t_*, x_*) . Теперь мы можем рассматривать вариант (2.3), определяя $\mathfrak{V}(t_*, x_*)$ раздела 2 как множество всех стратегий-троек, конкретизируя для каждой такой стратегии $V_* = (V, \gamma, k)$ игрока II множество $\mathfrak{X}_{\text{II}}[t_*; x_*; V_*]$ как (14.5). Согласно [29, теорема 9.2] при $M \in \mathcal{F}'$, $N \in \mathcal{F}$ и $s \in \mathbb{N}$

$$N \setminus \mathcal{W}_s(M, N) = \{(t, y) \in N \mid \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \gamma \in \mathbf{G}_t^* \quad \exists k \in \overline{1, s} \\ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; y; V; \gamma; k] \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0] ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \Rightarrow (\exists \xi \in [t, \vartheta]: (\xi, x(\xi)) \notin N)\}. \quad (14.6)$$

Из (13.8) и (14.6) получаем при $M \in \mathcal{F}'$ и $N \in \mathcal{F}$, что для позиций из $N \setminus \mathcal{W}(M, N)$ разрешима задача уклонения в классе стратегий-троек.

15. Функция цены

Вернемся к построениям раздела 8, связанным с оптимизацией функционала (8.5). Заметим, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbf{G}_{t_*}^*$, $k \in \mathbb{N}$ и $x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ определено значение

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+. \quad (15.1)$$

Мы напомним, что в [29, раздел 8] построен конкретный вариант стратегии-тройки, гарантирующей уклонение (и даже уклонение «с запасом») по отношению к заданным замкнутым множествам-параметрам игры сближения-уклонения (в [29, раздел 8] допускается даже несколько более общий случай, а именно: относительно множества, определяющего ФО для игрока I, требуется только замкнутость сечений). Сейчас мы рассмотрим результаты, создаваемые такими стратегиями-тройками, в терминах величин (15.1). В этой связи полезно напомнить предложение 8.2.

Предложение 15.1. Если $t_* \in T$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, причем

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)), \quad (15.2)$$

то непременно $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon$.

Доказательство. Будем использовать (8.1), фиксируя $t_*, \varepsilon, x(\cdot)$ и ϑ со свойством (15.2). Тогда

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \vee ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)). \quad (15.3)$$

Оба случая в (15.3) рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала

$$(\vartheta, x(\vartheta)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon). \quad (15.4)$$

Тогда имеем неравенство

$$\varepsilon < \rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}). \quad (15.5)$$

Поэтому (см. (8.1), (15.5)) в рассматриваемом случае (15.4)

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon. \quad (15.6)$$

Итак (см. (15.4), (15.6)), установлена импликация

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon). \quad (15.7)$$

2) Пусть теперь

$$(\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon). \quad (15.8)$$

Тогда в силу (15.2) для некоторого

$$t^* \in [t_*, \vartheta[\quad (15.9)$$

имеет место свойство

$$(t^*, x(t^*)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon). \quad (15.10)$$

Следовательно (см. (5.3)), имеем из (15.10), что

$$\kappa\varepsilon < \rho((t^*, x(t^*)); \mathbf{N}). \quad (15.11)$$

Поэтому (см. (15.11)) справедливо очевидное неравенство

$$\frac{1}{\kappa} \rho((t^*, x(t^*)); \mathbf{N}) > \varepsilon. \quad (15.12)$$

Тем более (см. (15.9), (15.12)) имеет место

$$\frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, x(t)); \mathbf{N}) > \varepsilon. \quad (15.13)$$

Поэтому из (8.1) и (15.13) имеем (и в случае (15.8)) неравенство

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon. \quad (15.14)$$

Итак (см. (15.8), (15.14)), истинна импликация

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon). \quad (15.15)$$

Из (15.3), (15.7) и (15.15) имеем, что во всех возможных случаях $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon$. $\square$

Следствие 15.1. Если $t_* \in T$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и при этом

$$\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)), \quad (15.16)$$

то справедливо неравенство $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) > \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $t_* \in T$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ со свойством (15.16). Тогда согласно (8.1) при $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ определено значение $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+$. В результате реализуется непрерывная функция (8.2). Кроме того определено значение $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+$ (см. (8.5)). При этом (см. (8.5)) для некоторого $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta_*). \quad (15.17)$$

Согласно (15.16) имеем, в частности, что

$$((\vartheta_*, x(\vartheta_*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta_*]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)). \quad (15.18)$$

Итак, $t_* \in T$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_0]$ обладают свойством (15.18). В силу предложения 15.1 имеем неравенство $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta_*) > \varepsilon$. Поэтому (см. (15.17)) $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) > \varepsilon$. $\square$

Напомним, что (см. (14.6)) согласно [29, теорема 9.2] при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{N}$ и $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \gamma \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \overline{1, s} \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)). \quad (15.19)$$

При этом, в частности, имеем (см. (13.6)) при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, что

$$S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} (S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))). \quad (15.20)$$

Тогда из (15.19)–(15.20) получаем, что

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \\ & \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \gamma \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k] \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \\ & ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)). \end{aligned} \quad (15.21)$$

Предложение 15.2. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]$. Тогда, $\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \mathbb{N}$:

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) > \varepsilon_* \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]. \quad (15.22)$$

Доказательство. Напомним, что $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и при этом

$$\varepsilon_* < \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.23)$$

По выбору (t_*, x_*) имеем один из следующих двух возможных случаев:

$$((t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)) \vee ((t_*, x_*) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)) \quad (15.24)$$

Оба случая в (15.24) рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала имеет место свойство

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*). \quad (15.25)$$

В силу (6.26) и (15.23) реализуется свойство

$$\varepsilon_* \notin \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.26)$$

Поэтому $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+ \setminus \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$ и согласно (6.25) имеем, что

$$(t_*, x_*) \notin W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)). \quad (15.27)$$

В силу (13.8) и (15.27) получаем равенство

$$W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)) = \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)) \quad (15.28)$$

и, следовательно,

$$(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)). \quad (15.29)$$

Из (15.25) и (15.29) вытекает, что $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)). \quad (15.30)$$

Тогда в силу (15.21) имеем свойство $\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \mathbb{N} \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)]$. Пусть $V_* \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\gamma_* \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $r \in \mathbb{N}$ таковы, что $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)]. \quad (15.31)$$

Заметим, что (см. (14.5))

$$(\mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r] \neq \emptyset) \& (\mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r] \subset C_n([t_*, \vartheta_0])). \quad (15.32)$$

Поэтому согласно следствию 15.1 $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r]$

$$\begin{aligned} & (\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \\ & \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)]) \Rightarrow (\gamma_{t_*}(x(\cdot)) > \varepsilon_*). \end{aligned} \quad (15.33)$$

Из (15.31), (15.33) получаем, что (при условии (15.25))

$$\gamma_{t_*}(x(\cdot)) > \varepsilon_* \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r]. \quad (15.34)$$

Итак (см. (15.25), (15.34)), установлено, что

$$\begin{aligned} & ((t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \\ \Rightarrow & (\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] \quad \gamma_{t_*}(x(\cdot)) > \varepsilon_*). \end{aligned} \quad (15.35)$$

2) Пусть теперь у нас

$$(t_*, x_*) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \quad (15.36)$$

Тогда по выбору (t_*, x_*) имеем, что

$$(t_*, x_*) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \quad (15.37)$$

В силу (5.3) и (15.37) имеем, что

$$\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) > \kappa\varepsilon_*. \quad (15.38)$$

Дальнейшее рассуждение, использующее непрерывность траекторий, приводит к импликациям

$$\begin{aligned} & ((t_*, x_*) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \\ \Rightarrow & (\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] \quad \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) > \varepsilon_*). \end{aligned} \quad (15.39)$$

Из (15.24), (15.35) и (15.39) имеем во всех возможных случаях, что

$$\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \quad \exists k \in \mathbb{N} : \varepsilon_* < \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]. \quad (15.40)$$

Тем самым установлено (15.22); предложение доказано. $\square$

Из предложения 15.2 вытекает, что $\forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)] \quad \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \quad \exists k \in \mathbb{N} :$

$$\varepsilon \leq \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \quad (15.41)$$

(мы учли (14.5) и предложение 15.2).

Напомним свойство [29, предложение 7.5].

Предложение 15.3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$, то

$$\exists x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] : \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.42)$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (14.5) для $\tilde{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ имеем, что $\tilde{x}(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$. Согласно (15.1) имеем, что $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\tilde{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}_+$. При этом согласно (8.1) получаем, что

$$\omega_\kappa(t_*, \tilde{x}(\cdot), \vartheta) = \sup(\{\rho((\vartheta, \tilde{x}(\vartheta)); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, \tilde{x}(t)); \mathbf{N})\}) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (15.43)$$

С учетом (10.1) и (15.43) имеем, что

$$\omega_\kappa(t_*, \tilde{x}(\cdot), \vartheta) = \sup(\{\Psi(\vartheta, \tilde{x}(\vartheta)); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, \tilde{x}(t)); \mathbf{N})\}) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

Поскольку выбор $\tilde{x}(\cdot)$ был произвольным, имеем, что

$$\begin{aligned} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) &= \sup(\{\Psi(\vartheta, x(\vartheta)); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, x(t)); \mathbf{N})\}) \\ &\quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]. \end{aligned} \quad (15.44)$$

Отметим, что согласно предложению 6.3

$$\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.45)$$

Это означает, что (см. (6.25)) реализуется включение

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)), \quad (15.46)$$

где $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*) \in \mathcal{F}$ и $S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \in \mathcal{F}$. Тогда в силу (13.8) и (15.46)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \quad (15.47)$$

Из (13.6) и (15.47) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0. \quad (15.48)$$

В частности, имеем, что (см. (15.48))

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \quad (15.49)$$

Тогда согласно (15.49) и [29, предложения 7.5] для некоторых $\bar{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \& ((t, \bar{x}(t)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}]. \quad (15.50)$$

При этом в силу (15.50) имеем, что (см. (5.3))

$$(\rho((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})); \mathbf{M}) \leq \varepsilon_*) \& (\rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_* \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}]). \quad (15.51)$$

Отметим, что $\bar{x}(t_*) = x_*$ и, как следствие,

$$(t_*, \bar{x}(t_*)) = (t_*, x_*). \quad (15.52)$$

Кроме того, из (15.49), (13.5) и (13.7) имеем, что

$$\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \subset S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*),$$

а тогда в силу (15.49)

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \quad (15.53)$$

Из (15.52), (15.53) имеем, что $(t_*, \bar{x}(t_*)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$, т. е.

$$\rho((t_*, \bar{x}(t_*)); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_*. \quad (15.54)$$

Из (15.51), (15.54) имеем по непрерывности функции $\rho(\cdot, \mathbf{N})$, что

$$\rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_* \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}]. \quad (15.55)$$

Заметим, что согласно (15.43)

$$\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) = \sup(\{\rho((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \bar{\vartheta}]} \rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N})\}). \quad (15.56)$$

При этом из (15.55) следует, что $\max_{t \in [t_*, \bar{\vartheta}]} \rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_*$, а потому имеем неравенство

$$\frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \bar{\vartheta}]} \rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N}) \leq \varepsilon_*. \quad (15.57)$$

В итоге из (15.51), (15.57) и (15.56) получаем неравенство,

$$\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leq \varepsilon_*. \quad (15.58)$$

Из (8.5) и (15.58) теперь следует цепочка неравенств

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leq \omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leq \varepsilon_*. \quad (15.59)$$

По выбору $\bar{x}(\cdot)$ имеем, следовательно, что (см. (15.45)) $\exists x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$:

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_* = \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa).$$

□

Следствие 15.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$, то

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.60)$$

Доказательство очевидно.

Получаем в силу свойств непустоты $\mathfrak{V}_{\text{pos}} \neq \emptyset$ и $\mathbf{G}_{t_*}^* \neq \emptyset$ (см. [29, раздел 7]), что

$$\left\{ \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) : (V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)])$$

$$\forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n.$$

Тогда при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено (конечное) значение

$$\sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]. \quad (15.61)$$

Теорема 15.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то справедливо равенство

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \quad (15.62)$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \mathbb{R}_+$. При этом согласно следствию 15.2 имеем

$$\mathbf{b}(V, \beta, k) \triangleq \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)] \quad \forall (V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}. \quad (15.63)$$

С учетом (15.63) получаем, что

$$\mathbf{B} \triangleq \{\mathbf{b}(V, \beta, k) : (V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]) \quad (15.64)$$

(учитываем, что $\mathfrak{V}_{\text{pos}} \neq \emptyset$ и $\mathbf{G}_{t_*}^* \neq \emptyset$). В силу (15.64) имеем свойства

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}} &\triangleq \sup(\mathbf{B}) = \sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \mathbf{b}(V, \beta, k) \\ &= \sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]. \end{aligned} \quad (15.65)$$

В частности, $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}_+$ и, кроме того,

$$\tilde{\mathbf{b}} \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.66)$$

Вместе с тем, из (15.41) и (15.63) следует, что $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)[\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \gamma \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon \leq \mathbf{b}(V, \gamma, k). \quad (15.67)$$

Из (15.66), (15.67) легко следует свойство (15.62). $\square$

16. Заключение

Теоремы 9.1 и 15.1 характеризуют $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ как функцию цены при использовании (8.4) в качестве функционала платы. Таким образом, анализируя проблему определения наименьшего размера окрестностей, для которых (при заданной позиции) игрок I гарантированно осуществляет сближение в релаксированной задаче, мы пришли к новой игре, обладающей ценой, и установили совпадение этой цены с вышеупомянутым наименьшим размером окрестностей для каждой позиции игры. Важно и то, что данное отождествление удалось получить при учете соображений приоритетности, касающихся сближения с ЦМ и соблюдения ФО. Упомянутый учет осуществлялся посредством введения параметра κ , $\kappa > 0$. Влияние данного параметра отражено, в частности, в заключительной части раздела 11. Отметим, наконец важное представление в терминах неподвижной точки (см. теоремы 11.1 и 11.2), что характерно для конструкций на основе МПИ.

References

- [1] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, М., 1967. [R. Ayzeks, *Differentsial'nyye igry*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].
- [2] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, “Альтернатива для игровой задачи сближения”, *Прикладная математика и механика*, **34**:6 (1970), 1005–1022. [N. N. Krasovskiy, A. I. Subbotin, “Al'ternativa dlya igrovoy zadachi sblizheniya”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **34**:6 (1970), 1005–1022 (In Russian)].

- [3] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, М., Наука, 1974. [N. N. Krasovskiy, A. I. Subbotin, *Pozitsionnyye differentsial'nyye igrы*, Moscow, Nauka Publ., 1974 (In Russian)].
- [4] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Физматлит, М., 1970. [N. N. Krasovskii, *Game Problems About Meeting Motions*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].
- [5] А. В. Кряжжимский, “К теории позиционных дифференциальных игр сближения – уклонения”, *Докл. АН СССР*, **239**:4 (1978), 779–782. [A. V. Kryazhimskiy, “On the theory of positional differential games of convergence-evasion”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **239**:4 (1978), 779–782 (In Russian)].
- [6] А. И. Субботин, *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби*, Наука, М., 1991. [A. I. Subbotin, *Minimaksnyye neravenstva i uravneniya Gamil'tona-Yakobi*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (In Russian)].
- [7] A. I. Subbotin, *Generalized Solutions of First-Order PDES. The Dynamical Optimization Perspective*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1995.
- [8] А. И. Субботин, *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2003. [A. I. Subbotin, *Obobshchennyye resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo por'yadka. Perspektivy dinamicheskoy optimizatsii*, Institut komp'yuternykh isledovaniy, Moscow-Izhevsk, 2003 (In Russian)].
- [9] А. И. Субботин, “Об одном свойстве субдифференциала”, *Матем. сб.*, **182**:9 (1991), 1315–1330; англ. пер.: A. I. Subbotin, “On a property of the subdifferential”, *Math. USSR-Sb.*, **74**:1 (1993), 63–78.
- [10] А. Г. Ченцов, “О структуре одной игровой задачи сближения”, *Докл. АН СССР*, **224**:6 (1975), 1272–1275. [A. G. Chentsov, “The structure of a certain game-theoretic approach problem”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **224**:6 (1975), 1272–1275 (In Russian)].
- [11] А. Г. Ченцов, “К игровой задаче наведения с информационной памятью”, *Докл. АН СССР*, **227**:2 (1976), 306–308. [A. G. Chentsov, “On a game problem of guidance with information memory”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **227**:2 (1976), 306–308 (In Russian)].
- [12] А. Г. Ченцов, “Об игровой задаче сближения в заданный момент времени”, *Матем. сб.*, **99**(141):3 (1976), 394–420; англ. пер.: A. G. Chentsov, “On a game problem of converging at a given instant of time”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:3 (1976), 353–376.
- [13] А. Г. Ченцов, “Об игровой задаче сближения к заданному моменту времени”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 455–467; англ. пер.: A. G. Chentsov, “On the game problem of convergence at a given moment of time”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:2 (1978), 426–437.
- [14] В. И. Ухоботов, “Построение стабильного моста для одного класса линейных игр”, *Прикладная математика и механика*, **41**:2 (1977), 358–364. [V. I. Ukhobotov, “Postroyeniye stabil'nogo mosta dlya odnogo klassa lineynykh igr”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **41**:2 (1977), 358–364 (In Russian)].
- [15] С. В. Чистяков, “К решению игровых задач преследования”, *Прикладная математика и механика*, **41**:5 (1977), 825–832. [S. V. Chistyakov, “K resheniyu igrovykh zadach presledovaniya”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **41**:5 (1977), 825–832 (In Russian)].
- [16] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, “Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений”, *Доклады Академии наук*, **348**:6 (1996), 736–739. [A. I. Subbotin, A. G. Chentsov, “Iteratsionnaya protsedura postroyeniya minimaksnykh i vyazkostnykh resheniy”, *Doklady Akademii nauk*, **348**:6 (1996), 736–739 (In Russian)].
- [17] А. Г. Ченцов, Д. М. Хачай, “Релаксация дифференциальной игры сближения-уклонения и методы итераций”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **24**, 2018, 246–269. [A. G. Chentsov, D. M. Khachai, “Relaxation of a differential game of approach-evasion and iterative methods”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **24**, 2018, 246–269 (In Russian)].
- [18] A. G. Chentsov, D. M. Khachay, “Program Iterations Method and Relaxation of a Pursuit-Evasion Differential Game”, *Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems: Theory and Applications. V. 203: Studies in Systems, Decision and Control*, 2019, 129–161.

- [19] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, *Оптимизация гарантии в задачах управления*, М., Наука, 1977. [A. I. Subbotin, A. G. Chentsov, *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1977 (In Russian)].
- [20] А. Г. Ченцов, “Метод программных итераций в игровой задаче наведения”, Тр. ИММ УрО РАН, **22**, 2016, 304–321; англ. пер.: A. G. Chentsov, “The program iteration method in a game problem of guidance”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **297**:suppl. 1 (2017), 43–61.
- [21] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, М., Мир, 1970. [K. Kuratovskiy, A. Mostovskiy, *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970 (In Russian)].
- [22] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1977.
- [23] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 2002.
- [24] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Изд-во иностр. лит., М., 1962. [N. Danford, Dzh. T. Shvarts, *Lineynyye Operatory. Obshchaya Teoriya*, Izd-vo inostr. lit., Moscow, 1962 (In Russian)].
- [25] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, М., Наука, 1977. [P. Billingsli, *Skhodimost' Veroyatnostnykh Mer*, Moscow, Nauka Publ., 1977 (In Russian)].
- [26] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engel'king, *Obshchaya Topologiya*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].
- [27] В. И. Богачев, *Основы теории меры*. Т. 2, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М.-Ижевск, 2003. [V. I. Bogachev, *Osnovy teorii mery*. V. 2, NITS “Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika”, Moscow–Izhevsk, 2003 (In Russian)].
- [28] В. И. Богачев, *Слабая сходимость мер*, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2016. [V. I. Bogachev, *Slabaya Skhodimost' mer*, Institut komp'yuternykh issledovaniy, Moscow–Izhevsk, 2016 (In Russian)].
- [29] А. Г. Ченцов, “Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений”, Тр. ИММ УрО РАН, **23**, 2017, 285–302. [A. G. Chentsov, “Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **23**, 2017, 285–302 (In Russian)].
- [30] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа*, Мир, М., 1964. [Zh. D'yedonne, *Osnovy Sovremennogo Analiza*, Mir Publ., Moscow, 1964 (In Russian)].
- [31] А. Г. Ченцов, *Деп. в ВИНТИ, 1933-79*, Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова, Свердловск, 1979. [A. G. Chentsov, *Dep. v VINITI, 1933-79*, Ural'skiy politekhnicheskii institut im. S. M. Kirova, Sverdlovsk, 1979 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 23 марта 2020 г.
Поступила после рецензирования 18 мая 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Received 23 March 2020
Reviewed 18 May 2020
Accepted for press 8 June 2020

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \dots$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$H^2(\Pi, M^\Pi) \rightarrow \dots$$

$$L_v(E, 1)$$

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow \dots$$

$$(p-1) \times (p-1)$$

$$\frac{q}{q} \text{ other entries } \sim 2$$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \\ \alpha & \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma \cdot G \times E \in \dots$$

$$L(E, \varphi, K)$$

$$x \leq y^x (1 + \frac{1}{y})$$

$$A \frac{4}{\pi} \dots \sigma = -1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$| \dots | \rightarrow$$

$$\pi \approx \dots$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$\psi = \frac{1}{\mu} \dots$$

$$(E, \rho, \varphi)$$

$$\Pi; \int x$$

$$\lambda + \mu$$

$$\lambda' + \mu' = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$K, 0/X, 0 \text{ Ind } 2/\dots$$

$$\det(X, \dots)$$