

ISSN 2686-9667

ВЕСТНИК  
РОССИЙСКИХ  
УНИВЕРСИТЕТОВ  
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN  
UNIVERSITIES  
REPORTS  
MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 25  
№ 132  
2020



# ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический  
журнал

Том 25, № 132,  
2020

Издается с 14 июня 1996 года  
Выходит 4 раза в год

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых  
Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов  
диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук,  
на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам  
(распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

---

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                            |                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| CONTENTS                                                   | 343                                                                                                                                                   |
| НАУЧНЫЕ СТАТЬИ                                             |                                                                                                                                                       |
| <i>Т.В. Жуковская,<br/>Е.С. Жуковский,<br/>И.Д. Серова</i> | Некоторые вопросы анализа отображений метрических<br>и частично упорядоченных пространств 345                                                         |
| <i>А.В. Ким, Г.А. Бочаров</i>                              | Минимаксные дифференциальные игры систем<br>с последствием 359                                                                                        |
| <i>П.Д. Лебедев, А.А. Успенский</i>                        | Элементы аналитического конструктора решений в классе<br>задач управления по быстродействию с целевым множеством<br>с разрывной кривизной границы 370 |
| <i>С. Лемита, Х. Геббай,<br/>И. Седка, М.З. Аиссауи</i>    | Новый метод численного решения линейного интегрального<br>уравнения Фредгольма на большом интервале 387                                               |
| <i>М.Ш. Маматов,<br/>Х.Н. Алимов</i>                       | Дифференциальные игры преследования дробного порядка<br>с нелинейными управлениями 401                                                                |
| <i>А.И. Перов, И.Д. Коструб</i>                            | О дифференциальных уравнениях в банаховых алгебрах 410                                                                                                |
| <i>В.И. Сумин</i>                                          | Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме<br>устойчивости существования глобальных решений<br>распределенных управляемых систем 422             |
| <i>О.В. Филиппова</i>                                      | Управляемые дифференциальные уравнения с параметром<br>и с многозначными импульсными воздействиями 441                                                |

Выпуск содержит статьи участников Международной научной конференции «Колмогоровские чтения – IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)», посвященной 70-летию со дня рождения А.И. Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина. Конференция проводится при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием  
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»  
(ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Б.А. Пасынков (г. Москва, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), член-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: [vestnik1@tsu.tmb.ru](mailto:vestnik1@tsu.tmb.ru); [ilina@tsutmb.ru](mailto:ilina@tsutmb.ru)

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html>

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Редактор М.И. Филатова

Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Сенина

Компьютерное макетирование Т.Ю. Молчановой

Технический редактор Ю.А. Бирюкова

Технический секретарь М.В. Борзова

Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. – 2020. – Т. 25, № 132. – 108 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132

Подписано в печать 27.11.2020. Дата выхода в свет 24.12.2020

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 13,5. Усл. печ. л. 12,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 20316. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: [izdat\\_tsu09@mail.ru](mailto:izdat_tsu09@mail.ru)

Материалы журнала доступны по лицензии [Creative Commons Attribution \(«Атрибуция»\) 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) Всемирная



© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2020

© Журнал «Вестник российских университетов. Математика», 2020

При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

# RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical  
journal

**Volume 25, no. 132,  
2020**

Published since June 14, 1996  
Issued 4 times a year

The journal is on the List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission for publication of principal scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF no. 90-p of December 28, 2018)

---

## CONTENTS

### SCIENTIFIC ARTICLES

|                                                           |                                                                                                                                |     |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>T.V. Zhukovskaia,<br/>E.S. Zhukovskiy, I.D. Serova</i> | Some questions of the analysis of mappings of metric and partially ordered spaces                                              | 345 |
| <i>A.V. Kim, G.A. Bocharov</i>                            | Minimax differential game with delay                                                                                           | 359 |
| <i>P.D. Lebedev, A.A. Uspenskii</i>                       | Elements of analytical solutions constructor in a class of velocity problems with the break of curvature of a target set       | 370 |
| <i>S. Lemita, H. Guebbai,<br/>I. Sedka, M.Z. Aissaoui</i> | New method for the numerical solution of the Fredholm linear integral equation on a large interval                             | 387 |
| <i>M.Sh. Mamatov, Kh.N. Alimov</i>                        | Fractional order differential pursuit games with nonlinear controls                                                            | 401 |
| <i>A.I. Perov, I.D. Kostrub</i>                           | On differential equations in Banach algebras                                                                                   | 410 |
| <i>V.I. Sumin</i>                                         | Volterra functional equations in the stability problem for the existence of global solutions of distributed controlled systems | 422 |
| <i>O.V. Filippova</i>                                     | Controlled differential equations with a parameter and with multivalued impulse actions                                        | 441 |

### IN MATHEMATICS COMMUNITY

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| Boris Alekseevich Pasyukov (29.06.1937 – 20.11.2020) | 448 |
|------------------------------------------------------|-----|

The issue contains articles of the participants of the International scientific conference “Kolmogorov Readings – IX. General Control Problems and their Applications (GCP-2020)”, dedicated to the 70-th birth anniversary of A.I. Bulgakov and to the 90-th anniversary of the Institute of Mathematics, Physics and Information Technologies of Derzhavin Tambov State University. The conference is organized with the financial support of the FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name  
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”.

---

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education  
“Derzhavin Tambov State University”  
(OGPH 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

---

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Tambov, Russian Federation)

---

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Assoc. Prof., Cand. E.A. Panasenko (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), I.V. Ilyina (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. L.M. Berezanskiy (Beer-Sheva, Israel), Prof., Dr. G. van Dijk (Leiden, Netherlands), Prof., Dr. V.F. Molchanov (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. B.A. Pasyukov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. M. Pevzner (Reims, French Republic), Prof., Dr. F.L. Pereira (Porto, Portuguese Republic), Prof., Dr. A.V. Ponomarev (Ås, Kingdom of Norway), Corresponding Member of RAS, Prof., Dr. A.G. Chentsov (Ekaterinburg, Russian Federation), Prof., Dr. G. Helminck (Amsterdam, Netherlands)

---

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440

E-mail: [vestnik1@tsu.tmb.ru](mailto:vestnik1@tsu.tmb.ru); [ilina@tsutmb.ru](mailto:ilina@tsutmb.ru)

Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html>

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). Extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019

ПИИ no. ФС77-76133

Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency “Rospechat” is 83372

---

Editor M.I. Filatova

English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina

Computer layout by T.Y. Molchanova

Technical editor Y.A. Biryukova

Technical secretary M.V. Borzova

Web-site administrator M.I. Filatova

*For citation:*

Russian Universities Reports. Mathematics. – 2020. – Vol. 25, no. 132. – 108 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132

Podpisano v pechat' 27.11.2020. Data vykhoda v svet 24.12.2020

Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizostrate.

Pech. list 13,5. Usl. pech. list 12,6. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 20316. Tsena svobodnaya

---

Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region,

FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.

190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: [izdat\\_tsu09@mail.ru](mailto:izdat_tsu09@mail.ru)

Content of the journal is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



© FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”, 2020  
© The journal “Russian Universities Reports. Mathematics”, 2020  
The reference is obligatory while reprinting and citation of materials.  
The author is responsible for the contents of publications

© Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Серова И.Д., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-345-358

УДК 517.988.38, 515.126.4

## Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ<sup>1</sup>, Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ<sup>2</sup>,  
Ирина Дмитриевна СЕРОВА<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

<sup>2</sup> ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

## Some questions of the analysis of mappings of metric and partially ordered spaces

Tatiana V. ZHUKOVSKAYA<sup>1</sup>, Evgeny S. ZHUKOVSKIY<sup>2</sup>, Irina D. SEROVA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Tambov State Technical University

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

<sup>2</sup> Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы существования решений уравнений и достижимости минимальных значений функций. Все полученные утверждения объединены идеей существования для любого приближения к искомому решению или к точке минимума улучшенного приближения. Установлена взаимосвязь между рассматриваемыми задачами в метрических и частично упорядоченных пространствах. Также демонстрируется, как из полученных утверждений выводятся некоторые известные результаты о неподвижных точках и точках совпадения отображений метрических и частично упорядоченных пространств. Далее на основании аналогий в доказательствах всех полученных утверждений предлагается способ получения подобных результатов из доказываемой теоремы о выполнимости предиката следующего вида. Пусть  $(X, \preceq)$  — частично упорядоченное пространство, отображение  $\Phi : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$  удовлетворяет следующему условию: для любого  $x \in X$  существует  $x' \in X$  такой, что  $x' \preceq x$  и  $\Phi(x', x) = 1$ . Рассматривается предикат  $F(x) = \Phi(x, x)$ , получены достаточные условия его выполнимости, т. е. существования решения уравнения  $F(x) = 1$ . Этот результат был анонсирован в [Жуковская Т.В., Жуковский Е.С. О выполнимости предикатов, заданных на частично упорядоченных // Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020). Тамбов, 2020, 34–36].

**Ключевые слова:** неподвижная точка; точка совпадения; минимум функции; частично упорядоченное пространство; выполнимый предикат

**Благодарности:** Раздел 1 написан первым автором, раздел 2 — третьим автором при поддержке РНФ (проект № 20-11-20131), раздел 3 — вторым автором при поддержке РФФИ (проект № 20-04-60524\_Вирусы).

**Для цитирования:** Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Серова И.Д. Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 345–358. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-345-358.

**Abstract.** The questions of existence of solutions of equations and attainability of minimum values of functions are considered. All the obtained statements are united by the idea of existence for any approximation to the desired solution or to the minimum point of the improved approximation. The relationship between the considered problems in metric and partially ordered spaces is established. It is also shown how some well-known results on fixed points and coincidence points of mappings of metric and partially ordered spaces are derived from the obtained statements. Further, on the basis of analogies in the proofs of all the obtained statements, we propose a method for obtaining similar results from the theorem being proved on the satisfiability of a predicate of the following form. Let  $(X, \preceq)$  be a partially ordered space, the mapping  $\Phi : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$  satisfies the following condition: for any  $x \in X$  there exists  $x' \in X$  such that  $x' \preceq x$  and  $\Phi(x', x) = 1$ . The predicate  $F(x) = \Phi(x, x)$  is considered, sufficient conditions for its satisfiability, that is, the existence of a solution to the equation  $F(x) = 1$ . This result was announced in [Zhukovskaya T.V., Zhukovsky E.S. Satisfaction of predicates given on partially ordered spaces // Kolmogorov Readings. General Control Problems and their Applications (GCP-2020). Tambov, 2020, 34-36].

**Keywords:** fixed point; coincidence point; minimum of function; partially ordered space; satisfiable predicate

**Acknowledgements:** Section 1 was written by the first author, section 2 by the third author with the support of the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131), section 3 by the second author with the support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-04-60524\_Вирусы).

**For citation:** Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S., Serova I.D. Nekotoryye voprosy analiza otobrazheniy metriceskikh i chastichno uporyadochennykh prostranstv [Some questions of the analysis of mappings of metric and partially ordered spaces]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 345–358. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-345-358. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

При исследовании различных математических задач часто используют приближения к решению. Если любое приближение допускает улучшение, то, как правило, удастся доказать существование точного решения и получить формулу или алгоритм его нахождения. Примерами «улучшения приближений» являются итерационные методы решения и исследования уравнений и включений, в том числе неподвижных точек и точек совпадения. На построении итерационных последовательностей основаны известные результаты о неподвижных точках и точках совпадения: принцип сжимающих отображений Банаха (см. [1]), теорема Арутюнова о точке совпадения накрывающего и липшицева отображений (см. [2]), утверждения о свойствах точек совпадения (см. [3, 4]), многочисленные распространения и обобщения перечисленных результатов (см., например, [5–7] и библиографию этих работ). Рассмотрим, например, уравнение

$$f(x) = \varphi(x), \quad (0.1)$$

определяющее точку совпадения отображений  $f, \varphi : X \rightarrow Y$ , где  $X = (X, \rho)$ ,  $Y = (Y, \rho)$  — метрические пространства. Для «приближения»  $\tilde{x} \in X$  к решению  $x$  уравнения (0.1) «улучшением» естественно считать достаточно «близкий» элемент  $\tilde{x}' \in X$  такой, что  $\rho(f(x'), \varphi(x')) < \rho(f(x), \varphi(x))$ . Несложно проверить, что члены  $x_{i+1}$  итерационных последовательностей в цитированных работах являются в этом смысле «улучшениями приближений»  $x_i$ . Идея использовать подобные «улучшения приближений» была явно сформулирована (как условие типа Каристи) и реализована А. В. Арутюновым в работе [8]

для изучения задачи о минимуме вещественной функции, определенной на метрическом пространстве.

В работах [9–11] при изучении неподвижных точек и точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах выявились аналогии и глубокие связи с результатами для метрических пространств. Применявшиеся в этих работах подходы также были основаны на «улучшении приближений», поясним их на примере уравнения (0.1), где  $f, \varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \preceq)$ ,  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}, \preceq)$  — частично упорядоченные пространства. «Приближением» к решению  $x \in \mathcal{X}$  уравнения (0.1) можно считать элемент  $\tilde{x} \in \mathcal{X}$  такой, что  $f(\tilde{x}) \succeq \varphi(\tilde{x})$ , а его «улучшением» — элемент  $\tilde{x}' \in \mathcal{X}$ , удовлетворяющий неравенствам  $\tilde{x}' \preceq \tilde{x}$ ,  $f(\tilde{x}') \succeq \varphi(\tilde{x}')$  (несколько иная трактовка «приближений» к решению уравнения (0.1) и их «улучшений» предлагается в данной работе). В [12] на аналогичной идее было основано исследование задачи о минимуме отображения, действующего в частично упорядоченных пространствах.

В данной статье для исследования уравнений и минимумов функций предлагается формализация идеи «улучшения приближений» в виде теорем существования решений соответствующих задач. Затем в статье получено общее утверждение о выполнимости предиката в частично упорядоченном пространстве, из которого при выборе подходящего предиката прямо следуют все полученные утверждения.

## 1. Улучшение приближений в метрическом пространстве

Классическим примером реализации идеи «улучшения приближений» является метод итераций в задаче о неподвижной точке сжимающего отображения  $\varphi$ , действующего в метрическом пространстве  $(X, \rho)$ . Напомним, что неподвижной точкой  $\varphi$  называют элемент  $\xi \in X$ , для которого  $\varphi(\xi) = \xi$ , а отображение  $\varphi$  называют сжимающим, если

$$\exists \beta < 1 \quad \forall x, x' \in X \quad \rho(\varphi(x'), \varphi(x)) \leq \beta \rho(x', x). \quad (1.1)$$

Согласно теореме Банаха [1] *сжимающее отображение имеет в полном метрическом пространстве единственную неподвижную точку, к которой сходятся последовательные приближения  $x_i = \varphi(x_{i-1})$  для любой начальной точки  $x_0$ .*

В силу условия (1.1) для любого  $x \in X$  существует  $x' \in X$  такой, что

$$\rho(x', \varphi(x')) \leq \beta \rho(x, \varphi(x)), \quad (1.2)$$

$$\rho(x', x) \leq \rho(x, \varphi(x)). \quad (1.3)$$

Действительно, достаточно положить  $x' = \varphi(x)$ . Таким образом, условие (1.1) позволяет для любого  $x \in X$  определить достаточно «близкий» элемент  $x' \in X$  (в том смысле, что отклонение  $\rho(x', x)$  удовлетворяет неравенству (1.3)), который «предпочтительнее» для задачи о неподвижной точке (поскольку справедливо неравенство (1.2)). Можно считать точку  $x'$  улучшением приближения  $x$  к неподвижной точке  $\xi$  отображения  $\varphi$ .

Такой взгляд на теорему Банаха позволяет получить следующее ее довольно очевидное обобщение.

**Предложение 1.1.** *Пусть метрическое пространство  $(X, \rho)$  является полным, а отображение  $\varphi : X \rightarrow X$  замкнуто и удовлетворяет следующему условию: для некоторых  $\beta \in [0, 1)$ ,  $\lambda > 0$  выполнено*

$$\forall x \in X \quad \exists x' \in X \quad \rho(x', \varphi(x')) \leq \beta \rho(x, \varphi(x)), \quad \rho(x', x) \leq \lambda \rho(x, \varphi(x)). \quad (1.4)$$

Тогда отображение  $\varphi$  имеет неподвижную точку, более того, для любого  $x_0 \in X$  существует неподвижная точка  $\xi$  такая, что

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\lambda}{1-\beta} \rho(x_0, \varphi(x_0)). \quad (1.5)$$

**Доказательство.** Условие (1.4) позволяет для произвольного  $x_0 \in X$  определить итерационную последовательность  $\{x_i\} \subset X$  такую, что

$$\rho(x_{i+1}, \varphi(x_{i+1})) \leq \beta \rho(x_i, \varphi(x_i)), \quad \rho(x_{i+1}, x_i) \leq \lambda \rho(x_i, \varphi(x_i)).$$

В силу этих неравенств при любом  $i = 0, 1, \dots$  имеем

$$\rho(x_i, \varphi(x_i)) \leq \beta^i \rho(x_0, \varphi(x_0)), \quad \rho(x_{i+1}, x_i) \leq \lambda \beta^i \rho(x_0, \varphi(x_0)). \quad (1.6)$$

Из второго в (1.6) неравенства следует, что для любых  $i = 0, 1, \dots$ ,  $m = 1, 2, \dots$  выполнено

$$\rho(x_{i+m}, x_i) \leq \sum_{j=0}^{m-1} \rho(x_{i+j}, x_{i+j+1}) \leq \lambda \sum_{j=0}^{m-1} \beta^{i+j} \rho(x_0, \varphi(x_0)) \leq \frac{\lambda}{1-\beta} \beta^i \rho(x_0, \varphi(x_0)). \quad (1.7)$$

Таким образом, последовательность  $\{x_i\}$  фундаментальная и сходится в  $X$  к некоторому элементу  $\xi$ . Теперь, согласно первому в (1.6) неравенству, получаем  $\rho(x_i, \varphi(x_i)) \rightarrow 0$ . Следовательно,  $\varphi(x_i) \rightarrow \xi$ . А поскольку отображение  $\varphi$  замкнуто, имеем  $\varphi(\xi) = \xi$ .

Из (1.7) при  $i = 0$  и любом натуральном  $m$  получаем оценку

$$\rho(x_m, x_0) \leq \frac{\lambda}{1-\beta} \rho(x_0, \varphi(x_0)).$$

Следовательно, неподвижная точка  $\xi$  отображения  $\varphi$ , являющаяся пределом последовательности  $\{x_i\}$ , удовлетворяет неравенству (1.5).  $\square$

**З а м е ч а н и е 1.1.** В отличие от теоремы Банаха в предложении 1.1 нельзя утверждать единственность неподвижной точки. Для ее единственности достаточно дополнительно потребовать, чтобы

$$\forall x, u \in X \quad u \neq x \Rightarrow \rho(u, x) \neq \rho(\varphi(u), \varphi(x)).$$

Продemonстрируем пример вещественной функции, удовлетворяющей условиям предложения 1.1 и имеющей две неподвижные точки.

**П р и м е р 1.1.** Пусть на  $X = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  определена кубическая функция  $\varphi(x) = x^3$  (очевидно  $\varphi : X \rightarrow X$ ). Проверим для этой функции условие (1.4). Положим  $x' = \sqrt[3]{x}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \rho(x, \varphi(x)) &= |x^3 - x|, \quad \rho(x', \varphi(x')) = |x - x^{1/3}|, \\ \rho(x', \varphi(x')) &= \frac{|x^{1/3}| |x^2 - 1|}{|x^{4/3} + x^{2/3} + 1|} \leq \frac{|x| |x^2 - 1|}{3} = \frac{1}{3} \rho(x, \varphi(x)), \\ \rho(x', x) &= |x - x^{1/3}| = \rho(x', \varphi(x')) \leq \frac{1}{3} \rho(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Итак, условие (1.4) выполнено с константами  $\lambda = \beta = 1/3$ . Согласно предложению 1.1 для любого  $x_0 \in X$  существует неподвижная точка  $\xi$  рассматриваемой функции, для которой справедливо неравенство

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{1}{2}|x_0^3 - x_0|.$$

При этом функция  $\varphi$  имеет две неподвижные точки  $-1$  и  $1$ .

Используемая в предложении 1.1 идея аналогичная идее, предложенной А. В. Арутюновым в [8] к задаче о минимуме ограниченной функции  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  (т. е. удовлетворяющей для некоторого  $\gamma \in \mathbb{R}$  неравенству  $U(x) \geq \gamma$  при всех  $x \in X$ ). В этой работе ведено следующее условие типа Каристи:

(к) существует  $k > 0$  такое, что для любого  $x \in X$ , если  $U(x) \neq \gamma$ , то существует  $x' \in X$ ,  $x' \neq x$ , который удовлетворяет неравенству

$$U(x') \leq U(x) - k\rho(x, x').$$

Согласно [8, теорема 3]), если пространство  $X$  полное, функция  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  полунепрерывна снизу и удовлетворяет условию (к), то для любого  $x_0 \in X$  существует  $\xi \in X$  такой, что

$$U(\xi) = \gamma, \quad \rho(x_0, \xi) \leq \frac{1}{k}(U(x_0) - \gamma). \quad (1.8)$$

Следующее предложение 1.2 показывает, что условие (к) можно трактовать, как возможность улучшить любое приближение  $x$  к точке минимума функции  $U$ .

**Предложение 1.2.** Если для некоторых  $\beta \in [0, 1)$ ,  $\lambda > 0$  справедливо соотношение

$$\forall x \in X \quad \exists x' \in X \quad U(x') - \gamma \leq \beta(U(x) - \gamma), \quad \rho(x', x) \leq \lambda(U(x) - \gamma), \quad (1.9)$$

то выполнено условие (к), где  $k = \lambda^{-1}(1 - \beta)$ .

**Доказательство.** Пусть выполнено (1.9). Тогда для любого  $x \in X$  существует  $x' \in x$  такой, что

$$\begin{aligned} U(x) - \gamma &= \beta(U(x) - \gamma) + (1 - \beta)(U(x) - \gamma) \\ &\geq U(x') - \gamma + \frac{1 - \beta}{\lambda}\rho(x', x) = U(x') - \gamma + k\rho(x', x), \end{aligned}$$

т. е. выполнено условие (к). □

Из [8, теорема 3], используя предложение 1.2, получаем следующее утверждение.

**Следствие 1.1.** Если пространство  $X$  полное, функция  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  полунепрерывна снизу и для некоторых  $\beta \in [0, 1)$ ,  $\lambda > 0$  удовлетворяет условию (1.9), то для любого  $x_0 \in X$  существует  $\xi \in X$  такой, что

$$U(\xi) = \gamma, \quad \rho(x_0, \xi) \leq \frac{1 - \beta}{\lambda}(U(x_0) - \gamma).$$

**З а м е ч а н и е 1.2.** Обратное утверждение к предложению 1.2 имеет место лишь в тривиальном случае, когда в соотношении (1.9)  $\beta = 0$ ,  $\lambda = k^{-1}(1 - \beta) = k^{-1}$ . Точнее, справедливо следующее: *если пространство  $X$  полное, функция  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  полунепрерывна снизу и выполнено условие (к), то выполнено соотношение (1.9) с константами  $\beta = 0$ ,  $\lambda = k^{-1}$ .*

Это утверждение прямо следует из [8, теорема 3]), если для произвольного  $x \in X$  положить элемент  $x'$  равным элементу  $\xi$ , определяемому соотношениями (1.8).

Следующий пример показывает, что обратное утверждение к предложению 1.2 при других константах  $\beta \neq 0$ ,  $\lambda = k^{-1}(1 - \beta)$  не верно.

**П р и м е р 1.2.** Пусть  $X = [0, 1]$ ,  $U(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$  Заданная здесь функция  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  полунепрерывна снизу,  $\gamma = 0$  и выполнено условие (к) с константой  $k \geq 1$ . Для  $x = 1$  неравенство  $U(x') < U(x)$  имеет место только при  $x' = 0$ . Поэтому для справедливости второго в (1.9) неравенства

$$1 = \rho(x', x) \leq \lambda(U(x) - \gamma) = \lambda$$

необходимо, чтобы выполнялось  $\lambda \geq 1$ . А так как еще должно выполняться равенство  $\lambda = k^{-1}(1 - \beta) \leq 1 - \beta$ , то возможен лишь один набор коэффициентов:  $\beta = 0$ ,  $\lambda = k^{-1}$ .

В [8] показано, что результаты о минимуме функции  $U$  позволяют исследовать неподвижные точки и точки совпадения отображений. Действительно, точки совпадения отображения  $\varphi : X \rightarrow X$  являются точками, в которых функция

$$U : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(x) = \rho(x, \varphi(x)),$$

достигает своего минимального значения, равного 0. Легко заметить, что условие (1.9), примененное к такой функции  $U$ , равносильно условию (1.4).

Применим еще условие (1.9) к исследованию разрешимости уравнений. Пусть заданы метрические пространства  $X, Y$  и определены отображения  $f, \varphi : X \rightarrow Y$ . Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \varphi(x) \tag{1.10}$$

относительно неизвестного  $x \in X$ . Решение этого уравнения называют *точкой совпадения отображений  $f, \varphi$* .

Очевидно, множество решений уравнения (1.10) совпадает с множеством точек, в которых функция

$$U : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(x) = \rho(f(x), \varphi(x)), \tag{1.11}$$

достигает своего минимального значения, равного 0. Для этой функции справедливо соотношение (1.9) в том и только том случае, если

$$\forall x \in X \quad \exists x' \in X \quad \rho(f(x'), \varphi(x')) \leq \beta \rho(f(x), \varphi(x)), \quad \rho(x', x) \leq \lambda \rho(f(x), \varphi(x)). \tag{1.12}$$

**П р е д л о ж е н и е 1.3.** Пусть метрическое пространство  $(X, \rho)$  является полным, отображения  $f, \varphi : X \rightarrow Y$  для некоторых  $\beta \in [0, 1)$ ,  $\lambda > 0$  удовлетворяет условию (1.12), определенная формулой (1.11) функция  $U$  полунепрерывна снизу. Тогда

уравнение (1.10) разрешимо, более того, для любого  $x_0 \in X$  существует решение  $x = \xi$  уравнения (1.10) такое, что

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\lambda}{1 - \beta} \rho(f(x_0), \varphi(x_0)).$$

**Доказательство.** Это утверждение вытекает из следствия 1.1.  $\square$

Частным случаем уравнения (1.10) является уравнение

$$f(x) = y, \quad (1.13)$$

в котором правая часть — заданный элемент  $y \in Y$ . Если в предложении 1.3 положить функцию  $\varphi$  постоянной:  $\varphi(x) \equiv y$ , то получим следующие условия разрешимости уравнения (1.13)

**Следствие 1.2.** Пусть метрическое пространство  $(X, \rho)$  является полным, отображение  $f : X \rightarrow Y$  для некоторых  $\beta \in [0, 1)$ ,  $\lambda > 0$  удовлетворяет условию

$$\forall x \in X \quad \exists x' \in X \quad \rho(f(x'), y) \leq \beta \rho(f(x), y), \quad \rho(x', x) \leq \lambda \rho(f(x), y),$$

функция  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U(x) = \rho(f(x), y)$  полунепрерывна снизу. Тогда уравнение (1.13) разрешимо, более того, для любого  $x_0 \in X$  существует решение  $x = \xi$  уравнения (1.13) такое, что

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\lambda}{1 - \beta} \rho(f(x_0), y).$$

## 2. Улучшение приближений в частично упорядоченном пространстве

К исследованию различных задач в частично упорядоченных пространствах также применимы идеи улучшения приближений к решению, аналогичные описанным в разделе 1. Здесь мы сформулируем основанные на этой идее результаты о разрешимости уравнений, о минимуме отображений в частично упорядоченном пространстве. Также мы покажем, что из этих результатов выводятся соответствующие предложения для метрических пространств, полученные в разделе 1.

Пусть  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \preceq)$ ,  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}, \preceq)$ , — частично упорядоченные пространства. Вначале рассмотрим задачу о минимуме отображения  $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Для множества  $\Omega \subset \mathcal{Y}$  определим множество минимальных элементов

$$\text{Min}_{\mathcal{Y}} \Omega = \{\bar{y} \in \mathcal{Y} : \forall \omega \in \Omega \quad \omega \not\prec \bar{y}\}.$$

В случае  $\Omega = \mathcal{Y}$  будем обозначать это множество через  $\text{Min } \mathcal{Y}$ .

Определим аналог условия (к) для отображений частично упорядоченных пространств — условие

(К) для любого  $x \in \mathcal{X}$ , если  $U(x) \notin \text{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$ , то существует  $x' \in \mathcal{X}$  такой, что

$$x' \prec x, \quad U(x') \prec U(x). \quad (2.1)$$

Близкое определение было дано в работе [12], в нем предполагалось существование элемента  $x'$ , удовлетворяющего (2.1), если  $U(x) \notin \text{Min } \mathcal{Y}$  (в сформулированном здесь условии (К) предполагается, что такой  $x'$  существует, если  $U(x) \notin \text{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$ ).

**Теорема 2.1.** Пусть отображение  $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  удовлетворяет условию (К) и выполнено условие

(S) для произвольной бесконечной цепи  $S \subset \mathcal{X}$ , сужение на которую отображения  $U$  является строго изотонным, существует  $z \in \mathcal{X}$  такой, что

$$z \prec x \text{ и } U(z) \prec U(x) \text{ при всех } x \in S, x \neq z.$$

Тогда для любого  $x_0 \in \mathcal{X}$  существует  $\xi \in \mathcal{X}$  такой, что

$$\xi \preceq x_0, \quad U(\xi) \in \text{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X}), \quad U(\xi) \preceq U(x_0). \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \in \mathcal{X}$ . В случае  $U(x_0) \in \text{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$  утверждение теоремы очевидно справедливо, искомым элемент  $\xi = x_0$ .

Рассмотрим нетривиальную ситуацию, когда  $U(x_0) \notin \text{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$ . Определим в  $\mathcal{X}$  следующее бинарное отношение

$$\forall x, u \in \mathcal{X} \quad u \triangleleft x \Leftrightarrow u \prec x \text{ и } U(u) \prec U(x).$$

Это отношение задает в  $\mathcal{X}$  частичный порядок. Относительно этого порядка, согласно теореме Хаусдорфа, существует максимальная цепь  $S \subset \mathcal{X}$ , содержащая точку  $x_0$ . Если эта цепь конечна:  $S = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ , где  $x_i \triangleleft x_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , то положим  $\xi := x_k$ . Имеем  $\xi \in S$  и  $\xi \triangleleft x$  при остальных  $x \in S$ . Если цепь  $S$  бесконечна, то из предположения (S) следует, что относительно исходного порядка  $\preceq$  эта цепь имеет нижнюю границу  $\xi$  такую, что  $\xi \triangleleft x$  при всех  $x \in S$ .

Для определенного таким образом элемента  $\xi$  (и в случае конечной, и в случае бесконечной цепи  $S$ ) выполнено следующее. Если  $U(\xi) \notin \text{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$ , то из предположения (К) следует существование элемента  $\bar{x} \triangleleft \xi$ . Для любого  $x \in S$  имеем  $\bar{x} \triangleleft x$ , а это противоречит максимальной цепи  $S$ . Итак, нижняя граница  $\xi$  максимальной цепи  $S$  удовлетворяет требуемому соотношению (2.2).  $\square$

Теорема 2.1 близка результату [12, Theorem 3.1] о достижении функцией  $U$  минимальной точки всего пространства  $\mathcal{Y}$ , а приведенное здесь доказательство теоремы 2.1 аналогично доказательству [12, Theorem 3.1].

Теперь продемонстрируем, как из теоремы 2.1 можно вывести утверждения о минимуме функции, о разрешимости уравнений в метрическом пространстве, приведенные в разделе 1. Вначале докажем [8, теорема 3]).

Пусть метрическое пространство  $X = (X, \rho)$  полное, функция  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  полунепрерывна снизу и удовлетворяет условию (к). Покажем, что для любого  $x_0 \in X$  существует  $\xi \in X$ , удовлетворяющий соотношениям (1.8).

Определим на метрическом пространстве  $X$  отношение порядка

$$\forall x, u \in X \quad u \preceq x \Leftrightarrow U(u) \leq U(x) - k\rho(x, u)$$

(такой порядок предложен А. Брондстедом в [13], о его применении к нахождению условий существования в метрическом пространстве минимума функции см., например, [12, §3.2]). Теперь полагаем  $\mathcal{X} := (X, \preceq)$ ,  $\mathcal{Y} := (\mathbb{R}, \leq)$ . Рассматриваемое в этих пространствах отображение  $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  очевидно удовлетворяет условию (К). Проверим справедливость условия (S). Пусть задана бесконечная цепь  $S \subset \mathcal{X}$ , сужение на которую отображения  $U$

является строго изотонным. Тогда  $U(S)$  является ограниченной снизу цепью в  $\mathbb{R}$ . Пусть  $c := \inf U(S)$ , определим убывающую последовательность  $\{c_i\} \subset U(S)$ , сходящуюся к  $c$ , и соответствующую последовательность  $\{x_i\} \subset S$ ,  $U(x_i) = c_i$ . Так как для любых натуральных  $i < j$  выполнено

$$x_i \prec x_j \Leftrightarrow \rho(x_i, x_j) \leq U(x_i) - U(x_j),$$

последовательность  $\{x_i\}$  является фундаментальной. Пусть  $z$  — ее предел. В силу полунепрерывности снизу функции  $U$  выполнено  $U(z) \leq c$ . Поэтому

$$\forall i < j \quad \rho(x_i, x_j) \leq U(x_i) - U(z) \Rightarrow \rho(x_i, z) \leq U(x_i) - U(z).$$

Итак,  $z$  — нижняя граница последовательности  $\{x_i\}$ , а следовательно и цепи  $S$ , причем для любого  $x \in S$ ,  $x \neq z$  выполнено  $U(z) < U(x)$ .

Поскольку выполнены условия (К) и (S), согласно теореме 2.1 существует элемент  $\xi$ , удовлетворяющий соотношениям (2.2), которые для определенных здесь упорядоченных пространств равносильны соотношениям (1.8).

Из теоремы 2.1 выводится не только [8, теорема 3], но, очевидно, и ее следствия о разрешимости уравнений в метрических пространствах (в частности, предложение 1.3).

В заключение этого раздела сформулируем еще утверждения об уравнении (1.10) (определяющем точку совпадения отображений) и его частном случае — уравнении (1.13), которые теперь рассмотрим не в метрических, а в частично упорядоченных пространствах. Как и выше, наш подход основан на возможности получить улучшения приближений к решениям этих уравнений.

Итак, пусть  $f, \varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Определим отображение

$$U : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}^2, \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad U(x) = (f(x), \varphi(x)). \quad (2.3)$$

Определим в произведении  $\mathcal{Y}^2$  отношение порядка, полагая для  $y = (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}^2$  и  $y' = (y'_1, y'_2)$ ,  $y \neq y'$  выполненным неравенство  $(y'_1, y'_2) \prec (y_1, y_2)$ , если

$$y_2 \neq y'_1, \quad y'_1 \preceq y_1, \quad y'_2 \preceq y_2$$

(так как  $y \neq y'$ , по крайней мере одно из этих двух неравенств должно быть строгим).

Применяя к отображению (2.3) теорему 2.1, получаем следующее утверждение.

**Следствие 2.1.** Пусть для любого  $x \in \mathcal{X}$  такого, что  $f(x) \neq \varphi(x)$  существует  $x' \in \mathcal{X}$ , для которого  $U(x') \prec U(x)$ , т. е.  $f(x') \preceq f(x)$  и  $\varphi(x') \preceq \varphi(x)$ , причем хотя бы одно из этих двух неравенств строгое. Пусть также выполнено условие (S). Тогда для любого  $x_0 \in \mathcal{X}$  существует решение  $x = \xi \in \mathcal{X}$  уравнения (1.10), удовлетворяющее неравенствам

$$\xi \preceq x_0, \quad f(\xi) \preceq f(x_0), \quad \varphi(\xi) \preceq \varphi(x_0).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Проверим условие (К) для отображения  $U$ , определенного соотношением (2.3). Пусть  $U(x) \notin \text{Min}_{\mathcal{Y}^2} U(\mathcal{X})$ . Тогда в силу определения порядка в  $\mathcal{Y}^2$  выполнено  $f(x) \neq \varphi(x)$ . Согласно принятым предположениям существует  $x'$  такой, что  $x' \prec x$  и  $U(x') \prec U(x)$ , т. е. условие (К) выполнено. Согласно теореме 2.1 для любого  $x_0 \in \mathcal{X}$  существует элемент  $\xi \in \mathcal{X}$ ,  $\xi \prec x_0$  такой, что  $U(\xi) \in \text{Min}_{\mathcal{Y}} U(\mathcal{X})$  и  $U(\xi) \preceq U(x_0)$ .

Очевидно,  $f(\xi) = \varphi(\xi)$ , иначе бы существовал элемент  $\xi' \in \mathcal{X}$ ,  $\xi' \prec \xi$ , для которого  $U(\xi') \prec U(\xi)$ , т. е. значение  $U(\xi)$  не было бы минимальным.  $\square$

Из следствия 2.1 выводятся условия разрешимости уравнения (1.13), так как это уравнение — частный случай уравнения (1.10), в котором  $\varphi(x) \equiv y$ .

**Следствие 2.2.** Пусть для любого  $x \in \mathcal{X}$  такого, что  $f(x) \neq y$  существует  $x' \in \mathcal{X}$ , для которого  $f(x') \prec f(x)$ . Пусть также для произвольной бесконечной цепи  $S \subset \mathcal{X}$ , обладающей свойствами:

$$\forall x \in S \quad f(x) \neq y \quad \text{и} \quad \forall x, u \in S \quad u \prec x \Rightarrow f(u) \prec f(x),$$

существует  $z \in \mathcal{X}$  такой, что  $z \prec x$  и  $f(z) \prec f(x)$  при всех  $x \in S$ ,  $x \neq z$ . Тогда для любого  $x_0 \in \mathcal{X}$  существует решение  $x = \xi \in \mathcal{X}$  уравнения (1.13), удовлетворяющее неравенствам  $\xi \preceq x_0$ ,  $f(\xi) \preceq f(x_0)$ .

### 3. Выполнимость предикатов

Сформулированные выше и некоторые другие утверждения можно записать в виде следующего утверждения о выполнимости предиката, определенного на частично упорядоченном пространстве.

Пусть  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \preceq)$  — частично упорядоченное пространство, и на этом пространстве задан двухместный предикат — отображение  $\Phi : \mathcal{X}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  (где 1 означает «истину», а 0 — «ложь»). Будем предполагать выполненным следующее условие

$$\forall x, x', x'' \in \mathcal{X} \quad \Phi(x', x) = 1, \quad \Phi(x'', x') = 1 \Rightarrow \Phi(x'', x) = 1. \quad (3.1)$$

Определим предикат  $F : \mathcal{X} \rightarrow \{0, 1\}$  соотношением  $F(x) = \Phi(x, x)$ ,  $x \in \mathcal{X}$ . Следующее утверждение о выполнимости предиката  $F$  сформулировано без доказательства в [14]. Мы приведем это утверждение с полным доказательством и покажем, что из него следуют полученные выше и некоторые другие утверждения о разрешимости уравнений и достижении минимума отображений.

**Теорема 3.1.** Пусть для предиката  $\Phi$  справедливы соотношения (3.1) и выполнены следующие условия:

- (i) для любого  $x \in \mathcal{X}$  существует  $x' \in \mathcal{X}$  такой, что  $x' \preceq x$  и  $\Phi(x', x) = 1$ ;
- (ii) любая бесконечная цепь  $S \subset \mathcal{X}$ , для любых двух элементов которой  $x, x' \in S$ ,  $x' \prec x$ , справедливо  $\Phi(x', x) = 1$ , имеет нижнюю границу  $w \in \mathcal{X}$ , удовлетворяющую соотношениям  $\Phi(w, x) = 1$  при всех  $x \in S$ ,  $x \neq w$ .

Тогда множество  $F^{-1}(1) = \{x \in \mathcal{X} : F(x) = 1\}$  не пусто, и более того, для любого  $x_0 \in \mathcal{X}$  существует  $\xi \in \mathcal{X}$  такой, что

$$\xi \preceq x_0 \quad \text{и} \quad F(\xi) = 1. \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \in \mathcal{X}$ . Если  $F(x_0) = 1$ , то утверждение теоремы справедливо,  $\xi = x_0$ . Поэтому полагаем, что  $F(x_0) \neq 1$ .

Определим в  $\mathcal{X}$  следующее бинарное отношение

$$\forall x, u \in \mathcal{X} \quad u \triangleleft x \Leftrightarrow u \prec x \quad \text{и} \quad \Phi(u, x) = 1.$$

Это отношение, очевидно, антисимметрично и, в силу (3.1) еще и транзитивно, т. е. является в  $\mathcal{X}$  отношением порядка. Относительно этого порядка, согласно теореме Хаусдорфа, существует максимальная цепь  $S \subset X$ , содержащая заданную точку  $x_0$ . В случае, если эта цепь конечна:  $S = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ , где  $x_i \triangleleft x_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ , положим  $\xi := x_k$ . При таком определении имеем  $\xi \in S$  и  $\xi \trianglelefteq x$  при остальных  $x \in S$ . Пусть цепь  $S$  бесконечна. Относительно исходного порядка  $\trianglelefteq$  множество  $S$  также является цепью, и из предположения (ii) следует, что она имеет относительно порядка  $\trianglelefteq$  нижнюю границу  $\xi$ , такую, что  $\Phi(\xi, x) = 1$  при всех  $x \in S$ ,  $x \neq \xi$ . Следовательно,  $\xi \trianglelefteq x$  при всех  $x \in S$ .

Для определенного таким образом элемента  $\xi$  (и в случае конечной, и в случае бесконечной цепи  $S$ ) выполнено следующее. Если  $F(\xi) \neq 1$ , то из предположения (i) следует существование элемента  $\bar{x} \triangleleft \xi$ . Для любого  $x \in S$  имеем  $\bar{x} \trianglelefteq x$ , а это противоречит максимальной цепи  $S$ . Итак, нижняя граница  $\xi$  максимальной цепи  $S$  удовлетворяет требуемому соотношению (3.2).  $\square$

Покажем, что из теоремы 3.1 выводится теорема 2.1 о минимуме отображения  $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  (а следовательно, и все другие полученные выше утверждения об отображениях частично упорядоченных пространств и об отображениях метрических пространств).

Итак, пусть выполнены предположения теоремы 2.1, т. е. отображение  $U$  удовлетворяет условиям (K) и (S). Определим предикат  $\Phi : X^2 \rightarrow \{0, 1\}$ , полагая выполненным  $\Phi(x', x) = 1$  тогда и только тогда, когда  $x \notin \text{Min}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ ,  $U(x') \prec U(x)$  или  $x \in \text{Min}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ ,  $x' = x$ . Очевидно, что определенный здесь предикат  $\Phi$  удовлетворяет соотношениям (3.1), а условие (K) для отображения  $U$  равносильно условию (i) для предиката  $\Phi$ . Также, несложно проверить, что при таком определении предиката  $\Phi$  он удовлетворяет условию (ii) тогда и только тогда, когда для отображения  $U$  выполнено условие (S). Итак, согласно теореме 3.1 существует  $\xi \trianglelefteq x_0$  такой, что  $F(\xi) = 1$ . Полученное равенство по определению предиката  $\Phi$  означает, что  $\xi \in \text{Min}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ . Утверждение теоремы 2.1 получено.

Так как из теоремы 2.1 выводятся все другие полученные выше утверждения, то они становятся следствием и более общей теоремы 3.1. Конечно, можно эти утверждения получить прямо из теоремы 3.1. Продемонстрируем такой прямой вывод из теоремы 3.1 предложения 1.1.

Пусть выполнены предположения предложения 1.1. Определим в метрическом пространстве  $(X, \rho)$  отношение порядка

$$\forall u, x \in X \quad u \triangleleft x \Leftrightarrow \rho(x, \varphi(x)) > 0, \quad \rho(u, \varphi(u)) \leq \beta \rho(x, \varphi(x)).$$

Полученное таким образом частично упорядоченное пространство обозначим символом  $\mathcal{X}$ . Теперь, если определить предикат  $\Phi : \mathcal{X}^2 \rightarrow \{0, 1\}$  соотношениями

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \Phi(x, x) &= 1 \Leftrightarrow x = \varphi(x), \\ \forall u, x \in X \quad u \neq x, \quad \Phi(u, x) &= 1 \Leftrightarrow \rho(u, x) \leq \frac{\lambda}{1 - \beta} \left( \rho(x, \varphi(x)) - \rho(u, \varphi(u)) \right), \end{aligned}$$

то в такой конкретной ситуации теорема 3.1 становится равносильной предложению 1.1. Докажем это.

В силу (1.4) для любого  $x \in X$  существует  $x' \in X$  такой, что

$$\rho(x', x) \leq \frac{\lambda}{1 - \beta} \left( \rho(x, \varphi(x)) - \beta \rho(x, \varphi(x)) \right) \leq \frac{\lambda}{1 - \beta} \left( \rho(x, \varphi(x)) - \rho(x', \varphi(x')) \right),$$

т. е.  $\Phi(x', x) = 1$ . Условие (i) выполнено.

С целью проверки условия (ii) рассмотрим бесконечную цепь  $S \subset \mathcal{X}$ , для любых двух элементов которой  $x, x' \in S$ ,  $x' \prec x$  справедливо  $\Phi(x', x) = 1$ . Если в  $S$  есть наименьший элемент, то условие (ii) очевидно выполнено. Поэтому полагаем, что в  $S$  нет наименьшего элемента. Покажем, что для любого элемента  $x$  цепи  $S$  существует *соседний элемент*  $x' \in S$ , т. е. такой, что  $x' \prec x$  и для любого  $u \in S$ , если  $u \prec x$ , то  $u \preceq x'$ . В противном случае существуют  $u_i \in S$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , удовлетворяющие неравенствам  $u_1 \prec u_2 \prec \dots \prec x$ . Следовательно, при любом  $i = 1, 2, \dots$  справедливо

$$\rho(u_1, \varphi(u_1)) \leq \beta \rho(u_2, \varphi(u_2)) \leq \beta^{i-1} \rho(u_i, \varphi(u_i)) \leq \beta^i \rho(x, \varphi(x)),$$

поэтому  $\rho(u_1, \varphi(u_1)) = 0$ . Аналогично получаем  $\rho(u_2, \varphi(u_2)) = 0$ , но это противоречит неравенству  $u_1 \prec u_2$ .

Зафиксируем любой  $x_0 \in S$ . Как показано выше, у этого элемента существует соседний элемент, обозначим его через  $x_1$ , и цепь  $S$  не содержит элементов из интервала  $\{x \in X : x_1 < x < x_0\}$ . Затем определим элемент  $x_2 \in S$ , соседний с  $x_1$ . Продолжая такие построения, определим убывающую последовательность  $\{x_i\} \subset S$ . Этой последовательностью исчерпывается вся цепь  $\hat{S} = \{x \in S : x \preceq x_0\}$ . Действительно, в противном случае, существует  $\bar{x} \in S$ , для которого  $\bar{x} \leq x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . В силу определения порядка, выполнено

$$\rho(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \leq \rho(x_i, \varphi(x_i)) \leq \beta \rho(x_{i-1}, \varphi(x_{i-1})) \leq \beta^i \rho(x_0, \varphi(x_0)),$$

следовательно,  $\rho(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$ . Элемент меньший чем  $\bar{x} \in S$  в пространстве  $\mathcal{X}$  не существует, а это противоречит тому, что в  $S$  нет наименьшего элемента.

Так как для последовательности  $\hat{S} = \{x_i\}$  выполнены неравенства (1.7), эта последовательность является фундаментальной и сходится в полном пространстве  $X$  к некоторому элементу  $w$ . Вследствие неравенства  $\rho(x_i, \varphi(x_i)) \leq \beta^i \rho(x_0, \varphi(x_0))$  последовательность  $\{\varphi(x_i)\}$  также сходится к  $w$ . А поскольку отображение  $\varphi$  замкнуто, имеем  $\varphi(w) = w$ .

Так как  $\rho(w, \varphi(w)) = 0$ , в силу определения порядка, выполнено  $x_i \prec w$  при любом натуральном  $i$ . Из (1.7) получаем

$$\forall i \quad \rho(x_i, x_0) \leq \frac{\lambda}{1-\beta} \rho(x_0, \varphi(x_0)) \Rightarrow \rho(w, x_0) \leq \frac{\lambda}{1-\beta} \rho(x_0, \varphi(x_0)).$$

Следовательно,  $\Phi(z, x_0) = 1$ . Аналогично доказывается, что  $\Phi(z, x_i) = 1$  при всех  $i$ . Итак, условие (ii) выполнено.

## References

- [1] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales", *Fund. Math.*, 1922, № 3, 133–181.
- [2] А. В. Арутюнов, "Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки", *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.: A. V. Arutyunov, "Covering mappings in metric spaces and fixed points", *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.
- [3] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "Точки совпадения и обобщенные точки совпадения двух многозначных отображений", *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **308**, МИАН, М., 2020, 42–49; англ. пер.: A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence Points and Generalized Coincidence Points of Two Set-Valued Mappings", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **308** (2020), 35–41.

- [4] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the stability of fixed points and coincidence points of mappings in the generalized Kantorovichs theorem”, *Topology and its Applications*, **275** (2020), Article ID 107030.
- [5] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45** (2009), 613–634; англ. пер.: E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations not solved with respect to the derivative”, *Differential Equations*, **45** (2009), 627–649.
- [6] Т. В. Жуковская, В. Мерчела, А. И. Шиндяпин, “О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 18–24. [T. V. Zhukovskaia, W. Merchela, A. I. Shindiapin, “On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 18–24 (In Russian)].
- [7] В. Мерчела, “К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, “About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].
- [8] А. В. Арутюнов, “Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 30–44; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Caristi’s condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 24–37.
- [9] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.
- [10] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **201** (2016), 330–343.
- [11] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:11 (2020), 1471–1482. [S. Benarab, Z. T. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “O funktsional’nyh i differentsial’nyh neravenstvah i ih prilozhenijah k zadacham upravlenija”, *Differential Equations*, **56**:11 (2020), 1471–1482 (In Russian)].
- [12] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-Like Condition and the Existence of Minima of Mappings in Partially Ordered Spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**:1 (2019), 48–61.
- [13] A. Brøndsted, “On a lemma of Bishop and Phelps”, *Pasif. J. Math*, **55** (1974), 335–341.
- [14] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, “О выполнимости предикатов, заданных на частично упорядоченных пространствах”, *Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)*, Материалы IX Международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения Александра Ивановича Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета имени Г. Р. Державина (Тамбов, 12–16 октября 2020 г.), Тезисы докладов, Издательский дом «Державинский», Тамбов, 2020, 34–36. [T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy, “Satisfaction of predicates given on partially ordered spaces”, *Kolmogorov Readings. General Control Problems and their Applications (GCP-2020)*, Proceedings of the IX International Scientific Conference, dedicated to the 70th anniversary of the birth of Alexander Ivanovich Bulgakov and the 90th anniversary of the Institute of mathematics, physics and information technologies of Tambov state University named after G. R. Derzhavin (Tambov, October 12–16, 2020), Abstracts, Derzhavinsky Publishing House, Tambov, 2020, 34–36 (In Russian)].

**Информация об авторах**

**Жуковская Татьяна Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t\_zhukovskaia@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

**Жуковский Евгений Семенович**, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: zukovskys@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

**Серова Ирина Дмитриевна**, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: irinka\_36@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4224-1502>

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**

Жуковский Евгений Семенович  
E-mail: zukovskys@mail.ru

Поступила в редакцию 27.08.2020 г.

Поступила после рецензирования 17.11.2020 г.

Принята к публикации 19.11.2020 г.

**Information about the authors**

**Tatiana V. Zhukovskaia**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t\_zhukovskaia@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

**Evgeny S. Zhukovskiy**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

**Irina D. Serova**, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: irinka\_36@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4224-1502>

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**

Evgeny S. Zhukovskiy  
E-mail: zukovskys@mail.ru

Received 27.08.2020

Reviewed 17.11.2020

Accepted for press 19.11.2020

© Ким А.В., Бочаров Г.А., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-359-369

УДК 517.977.8

## Минимаксные дифференциальные игры с последствием

Аркадий Владимирович КИМ<sup>1</sup>, Геннадий Алексеевич БОЧАРОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

<sup>2</sup> ФГБУН «Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука» Российской академии наук

119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Губкина, 8

## Minimax differential game with delay

Arkadii V. KIM<sup>1</sup>, Gennady A. Bocharov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics

of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

<sup>2</sup> Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences

8 Gubkin St., Moscow 119333, Russian Federation

**Аннотация.** В статье на основе методологии  $i$ -гладкого анализа рассматривается минимаксная позиционная дифференциальная игра с последствием. В конечномерном (ОДУ) случае для минимаксной дифференциальной игры разрешающие смешанные стратегии могут быть построены с использованием метода динамического программирования. В статье показано, что методология  $i$ -гладкого анализа позволяет полностью аналогично конечномерному случаю строить контрстратегии. Причем, как характерно для применения  $i$ -гладкого анализа, в случае отсутствия последствия, все результаты статьи переходят с точностью до обозначений в соответствующие результаты конечномерной теории позиционных дифференциальных игр.

**Ключевые слова:** дифференциальные игры; системы с последствием

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00352\_a).

**Для цитирования:** Ким А.В., Бочаров Г.А. Минимаксные дифференциальные игры с последствием // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 359–369. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-359-369.

**Abstract.** The paper considers a minimax positional differential game with aftereffect based on the  $i$ -smooth analysis methodology. In the finite-dimensional (ODE) case for a minimax differential game, resolving mixed strategies can be constructed using the dynamic programming method. The report shows that the  $i$ -smooth analysis methodology allows one to construct counterstrategies in a completely similar way to the finite-dimensional case. Moreover as it is typical for the use of  $i$ -smooth analysis, in the absence of an aftereffect, all the results of the article pass to the corresponding results of the finite-dimensional theory of positional differential games.

**Keywords:** differential games; systems with delays

**Acknowledgements:** The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00352\_a).

**For citation:** Kim A.V., Bocharov G.A. Minimaksnyye differentsial'nyye igry s posledeystviyem [Minimax differential game with delay]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 359–369.  
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-359-369. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Как известно, при постановке задач, составляющих минимаксную игру, игроки-союзники из противоположных задач наделяются неравными информационными возможностями (см. [1]). Отметим, что основы теории игр с последствием заложены в работах [2–4]. В данной статье рассматриваются аналогичные постановки и конструкции для минимаксной игры в системе с последствием. Систематически используются терминология и конструкции  $i$ -гладкого анализа (см. [5–7]).

### 1. Постановка задачи

Пусть  $\tau > 0$ . Обозначим  $Q[-\tau, 0)$  — пространство кусочно-непрерывных функций  $y(s) : [-\tau, 0) \rightarrow R^n$ , положим  $H = R^n \times Q[-\tau, 0)$ .

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, y(\cdot), u, v),$$

где  $f(t, x, y(\cdot), u, v) : T \times R^n \times Q[-\tau, 0) \times P \times Q \rightarrow R^n$ ,  $u \in P \subset R^r$ ,  $v \in Q \subset R^q$ .

Обозначим  $h = \{x, y(\cdot)\} \in H$ ,  $x(t + \cdot) = \{x(t + s), s \in [-\tau, 0)\}$ ,  $x_t = \{x(t), x(t + \cdot)\} \in H$ .

Игра сближения–уклонения состоит из задачи сближения для первого игрока-союзника, которая будет решаться им в классе контрстратегий  $U^v = u(t, x, y(\cdot), v)$  при условии дискриминации второго игрока-противника. Задача об уклонении для второго игрока-союзника должна решаться в классе чистых стратегий  $V = v(t, x, y(\cdot))$ . В соответствии с этим минимаксной называется такая игра, в которой объединяются противоположные задачи, каждая из которых в соответствии с общим правилом ставится для игрока-союзника [1]. Но одна из задач ставится в классе стратегий, а другая — ей противоположная — в классе контрстратегий.

Таким образом, при постановке задач, составляющих минимаксную игру, игроки-союзники из противоположных задач наделяются неравными информационными возможностями.

Первой задачей будет задача о сближении, решение которой требуется определить в классе чистых стратегий  $U \div u(t, x, y(\cdot))$ . Наряду с задачей сближения, естественно, рассматривается и задача об уклонении, решение которой ищется в классе контрстратегий  $V^u \div v(t, x, y(\cdot))$ . Определим соответствующие понятия контрстратегий и движений, которые порождаются этими контрстратегиями.

Контрстратегии второго игрока  $V \div v(t, x, y(\cdot))$  будем отождествлять с функциями  $v = v(t, x, y(\cdot), u)$ , которые определены для всех позиций и векторов  $u \in P$  и удовлетворяют условию  $v(t, x, y(\cdot), u) \in Q$ .

Пусть  $\Delta$  — система полуинтервалов  $[\xi_i, \xi_{i+1})$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), покрывающих полуось  $[t_*, \infty)$  и  $V \div v(t, x, y(\cdot))$  — некоторая контрстратегия второго игрока. Назовем ломаной Эйлера  $x_\Delta[t] = x_\Delta[t_*, h^*, V^u]$  абсолютно непрерывное решение дифференциального

уравнения в контингенциях

$$\begin{aligned}\dot{x}_\Delta[t] &= F_u(t, x_\Delta[t], x_\Delta[t + \cdot], v(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], \cdot)), \quad \xi_i \leq t < \xi_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots; \\ x_\Delta[t_*] &= x^*, \quad x_\Delta[t_* + \cdot] = y^*(\cdot),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F_u(t, x_\Delta[t], x_\Delta[t + \cdot], v(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], \cdot)) &= \\ &= co[f : f(t, x, y(\cdot), u, v(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], x_\Delta[\xi_i + \cdot], u)), \quad u \in P].\end{aligned}$$

Движением  $x[t] = x[t, t_*, h^*, V^u]$ , порожденным контрстратегией  $V^u \div v(t, h, u)$ , из позиции  $\{t_*, h^*\}$  называется функция  $x[t]$  ( $x_{t_*} = h^*$ ), для которой существует последовательность ломаных Эйлера  $x_{\Delta(k)}[t] = x_{\Delta(k)}[t, t_*, h^{(k)}, V^u]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), сходящаяся равномерно к  $x[t]$  на каждом конечном отрезке  $[t_0, \theta]$  при условии  $\sup_i (\xi_{i+1}^{(k)} - \xi_i^{(k)}) \rightarrow 0$ , ( $k \rightarrow \infty$ ).

Для любой позиции  $\{t_*, h^*\}$  и для любой пары  $U \div u(t, x, y(\cdot))$  — чистой стратегии первого игрока и  $V^u \div u(t, x, y(\cdot), u)$  — контрстратегии второго игрока все движения  $x[t, t_*, h^*, U, V^u]$  содержатся как во множестве всех движений  $x[t] = x[t, t_*, h^*, U]$ , так и во множестве всех движений  $x[t] = x[t, t_*, h^*, U, V^u]$ . Это положение позволяет объединять задачу для первого игрока в классе стратегий и задачу для второго игрока в классе контрстратегий в одну игру. Контрстратегии первого игрока  $U \div (t, x, y(\cdot))$  будем отождествлять с функционалами  $u = u(t, x, y(\cdot), v)$ , определенными при всех  $(t, x, y(\cdot))$  и  $v \in Q$  и удовлетворяющими условию  $u(t, x, y(\cdot), v) \in P$ . Ломаные Эйлера  $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_*, h^*, U, V^u]$  при этом определяются как абсолютно непрерывные решения дифференциальных уравнений в контингенциях

$$\begin{aligned}\dot{x}_\Delta[t] &= F_u(t, x_\Delta[t], x_\Delta[t + \cdot], u(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], x_\Delta[\xi_i + \cdot], \cdot)), \quad \xi_i \leq t < \xi_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots; \\ x_\Delta[t_*] &= x^*, \quad x_\Delta[t + \cdot] = y^*(\cdot),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F_u(t, x, u(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], x_\Delta[\xi_i + \cdot], \cdot)) &= \\ &= co[f : f = f(t, x, y(\cdot), u(\xi_i, x_\Delta[\xi_i], x_\Delta[\xi_i + \cdot], v), v), \quad v \in Q].\end{aligned}$$

Для каждой пары  $\{U^v, V\}$  можно определить движения  $x[t] = x[t, t_*, h^*, U^v, V]$ , которые содержатся во множестве всех движений  $x[t] = x[t, t_*, h^*, U^v]$ . Это положение позволяет объединить задачу первого игрока в классе контрстратегий и задачу второго игрока в классе стратегий в одну игру.

Задача о сближении, рассматриваемая в классе контрстратегий  $U^v \div u(t, h, v)$ , формулируется следующим образом.

**Задача 1.** Требуется найти контрстратегию  $U_c^v \div u_c(t, h, v)$  для которой всякое движение  $x[t] = x[t, t_0, h^0, U_c^v]$  ( $x_{t_*} = h^*$ ) удовлетворяет условию встречи

$$\{\mu, x[\mu]\} \in M, \quad \{t, x[t]\} \in N_c \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \mu,$$

где  $\mu$  — момент времени, когда точка  $\{t, x[t]\}$  впервые попадает на множество  $M_c$ .

Далее рассматривается случай, когда контрстратегия обеспечивает сближение к заданному моменту  $t = \theta$ , т. е. для любого движения  $x[t] = x[t, t_0, h^0, U_c^v]$  момент  $\mu$  удовлетворяет оценке  $\mu \leq \theta$ .

Задача об уклонении, рассматриваемая в классе контрстратегий  $V^u \div v(t, x, y(\cdot), u)$ , формулируется следующим образом.

**Задача 2.** Требуется найти контрстратегию  $V_c^u$ , которая на заданном отрезке времени  $[t_0, \theta]$  исключает встречу, т.е. для которой всякое движение  $x[t] = x[t, t_0, h^0, V_c^u]$  удовлетворяет условию

$$\{t, x[t]\} \notin G(M_c) \text{ при } t_0 \leq t \leq \mu,$$

где  $\mu = \theta$ , если при всех  $t \in [t_0, \theta]$  выполняется условие  $\{t, x[t]\} \in H(N_c)$ , а в противном случае  $\mu$  есть первый момент времени, когда позиция  $\{t, x[t]\}$  покидает открытую область  $H(N_c)$ . Здесь  $M_c, N_c$  — замкнутые множества,  $G(M_c)$  и  $H(N_c)$  — некоторые открытые окрестности этих множеств.

Задача 1 будет рассматриваться в одной игре вместе с задачей об уклонении, решение которой требуется определить в классе чистых стратегий  $V \div v(t, h)$ .

## 2. Дифференциальная игра с заданным моментом окончания.

Далее рассмотрим к наиболее удобную для исследования дифференциальную игру с заданным моментом  $\mu = \theta$  окончания. В этой игре функционал, минимизируемый первым и максимизируемый вторым игроком, имеет вид

$$\phi(x[t], t_0 \leq t \leq \theta) = \sigma(x[\theta]),$$

т.е. отождествляется с некоторой заданной функцией  $\sigma(x[\theta])$  от конечного состояния  $x[\theta]$  рассматриваемой системы. Функция  $\sigma(\cdot)$  предполагается непрерывной.

**Теорема 2.1.** *Предположим, что удалось найти инвариантно непрерывный в области  $t_0 \leq t \leq \theta$  функционал  $\varepsilon(t, x, y(\cdot))$ , который удовлетворяет краевому условию*

$$\varepsilon(\theta, x, y(\cdot)) = \sigma(x, y(\cdot)),$$

*имеет инвариантно непрерывные частные  $\partial\varepsilon/\partial x_i$  и коинвариантную производные  $\partial_t\varepsilon$  в области*

$$\sigma_0 < \varepsilon(\theta, x, y(\cdot)) < \sigma^0; \quad t_0 \leq t < \theta, \quad (2.1)$$

*причем*

$$\sigma_0 = \inf_h \sigma(h), \quad \sigma^0 = \sup_h \sigma(h); \quad (2.2)$$

*и удовлетворяет в этой области (2.1) условию*

$$\min_u \max_v ([\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u, v) + \partial_t\varepsilon) = 0. \quad (2.3)$$

Пусть далее стратегия  $U^0 \div u^0(t, h)$  и контрстратегия  $V_0^u \div v^0(t, h, u)$  определены в области (2.1) условиями

$$\begin{aligned} \max_v ([\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u^0(t, h), v)) &= \min_u \max_v ([\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u, v)), \\ [\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u, v^0(t, h, u)) &= \max_v ([\partial\varepsilon/\partial x]' f(t, h, u, v)), \end{aligned}$$

*а в областях  $\varepsilon(t, x, y(\cdot)) \leq \sigma_0$ ,  $\varepsilon(t, x, y(\cdot)) \geq \sigma^0$  — любыми допустимыми функционалами  $u^0(t, x, y(\cdot))$  и  $v^0(t, x, y(\cdot))$ .*

Тогда пара  $\{U^0, V_0^u\}$  образует седловую точку дифференциальной игры на минимакс-максимин функционала  $\phi$ . При этом цена данной дифференциальной игры определяется равенством

$$\gamma_0 = \gamma_0^u = \varepsilon(t_0, h^0).$$

### 3. Программные конструкции

Дадим определение программы второго игрока для случая минимаксной игры сближения с множеством  $M_c$ . Будем называть такой программой на полуинтервале  $(t_0, \theta]$  всякое слабо замкнутое множество  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}$  программных управлений  $\eta_t(du, dv)$ ,  $t_* < t < \theta$ , удовлетворяющее следующим условиям.

1) Какова бы ни была слабо измеримая функция  $\mu_t(du)$ , среди элементов  $\eta_{(\cdot)}$  из  $\eta_{(\cdot)}[t_*, \theta)$  найдется по крайней мере одно управление  $\eta_t(du, dv)$ , согласованное с  $\mu_t(du)$ ,  $t_* \leq t < \theta$ , условием

$$\int_Q \eta_t(du, dv) = \mu_t(du) \quad (3.1)$$

при почти всех  $t \in [t_*, \theta)$ .

2) Пусть  $\mu_t^{(i)}$  — некоторая слабо измеримая по  $t$  функция-мера, согласованная с мерой  $\eta_t^{(i)}(du)$  условием (3.1),  $T$  — измеримое множество из полуинтервала  $[t_*, \theta)$  и  $\{\eta_{(\cdot)}[t_*, \theta)\}_{\text{п}}$  — программа второго игрока, содержащая  $\eta_{(\cdot)}^{(i)}(du, dv)$ . Обозначим символом  $\{\eta_{(\cdot)}(du, dv)\}^{[i], T}$  — множество слабо измеримых функций-мер  $\eta_t(du, dv)$  ( $t \in T$ ), каждая из которых согласована с мерой  $\mu_t^{(i)}(du)$  условием (3.1) и является отрезком для  $t \in T$  управления  $\eta_{(\cdot)}(du, dv) \in \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_{\text{п}}$ , совпадающим с  $\eta_t^{(i)}(du, dv)$  при  $t \notin T$ . Каковы бы ни были слабо измеримые функции  $\mu_t^{(1)}d(u)$  и  $\mu_t^{(2)}d(u)$  ( $t_* \leq t < \theta$ ), совпадающие на некотором измеримом множестве  $T \subset [t_*, \theta)$ , и каковы бы ни были управления  $\eta_t^{(1)}(du, dv)$  и  $\eta_t^{(2)}(du, dv)$  ( $t_* \leq t < \theta$ ) из  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_{\text{п}}$ , согласованные с  $\mu_t^{(1)}d(u)$  и  $\mu_t^{(2)}d(u)$  соответственно условием (3.1), множества  $\{\eta_{(\cdot)}(du, dv)\}^{[1], T}$  и  $\{\eta_{(\cdot)}(du, dv)\}^{[2], T}$ , будут совпадать.

Элементарные программы  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta)\}_{\text{п}}$  конструируются аналогично конечномерному случаю [1].

### 4. Вспомогательные программные задачи

Пусть  $\omega(t, x, y(\cdot), m)$  — некоторый функционал, непрерывный по позиции  $\{t, x, y(\cdot)\}$  и параметру  $m$ , может быть векторному, из какого-то векторного пространства  $\{m\}$ . Будем предполагать, что функционал  $\omega(t, x, y(\cdot), m)$  в области  $\omega(t, x, y(\cdot), m) > c$  имеет непрерывные частные  $\partial\omega/\partial x_i$  и коинвариантную  $\partial_t\omega$  производные. Пусть, далее, в пространстве  $\{t, m\}$  задано ограниченное замкнутое множество  $M$ , сечения которого гиперплоскостью  $t = \text{const}$  будем, как обычно, обозначать  $M(t)$ . Пусть далее

$$\rho(t, x, y(\cdot)) = \min_{v \in M(t)} \omega(t, x, y(\cdot), m). \quad (4.1)$$

В частности, может быть, что пространство  $\{m\}$  совпадает с пространством  $\{x\}$ , тогда роль множества  $M$  может играть часть множества  $M_c$ , содержащаяся в какой-нибудь сфере  $\|x\| \leq R$  достаточно большого радиуса, а роль функции  $\omega(t, x, y(\cdot), m)$  — величина

$$\omega(t, x, y(\cdot), m) = \|x - m\| + c. \quad (4.2)$$

Тогда

$$\rho(\theta, x) = \rho_\theta(x, M_c) \quad \text{при} \quad \|x\| + \rho_\theta(x, M_c) \leq R. \quad (4.3)$$

Здесь, как и раньше, символ  $\rho(x, M_c)$  обозначает евклидово расстояние от точки  $(\theta, x)$  до сечения  $M_c(\theta)$  множества  $M_c$  гиперплоскостью  $t = \theta$ .

Первая из вспомогательных программных задач формулируется следующим образом.

**Задача 3.** Задано значение  $\theta$ , при котором множество  $M(\theta)$  не пусто. Задана начальная позиция  $\{t_*, h^*\}$  ( $t_* \leq \theta$ ) и выбрана программа  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta]\}_{\Pi}$ . Среди программных управлений  $\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta]\}_{\Pi}$  требуется найти оптимальное минимизирующее управление  $\eta_t^0$  ( $t_* \leq t < \theta$ ), которое удовлетворяет следующему условию:

$$\rho(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}^0)) = \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}} \rho(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}).$$

Если предполагать, что в данной вспомогательной задаче право выбора программы  $\{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}$  предоставляется второму игроку, а право выбора программного управления  $\eta_t$  ( $t_* \leq t < \theta$ ) из выбранной таким образом программы  $\{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}$  — первому игроку, то эту Задачу 3 мы можем трактовать как вспомогательную задачу, которая ставится перед первым игроком в той или иной реализовавшейся позиции  $\{t_*, h^*\}$ , при условии, что ему сообщается программа  $\{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}$ , выбранная вторым игроком.

Задача 3 имеет решение при всяком задании начальной позиции  $\{t_*, h^*\}$  и при всяком выборе программы  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta]\}_{\Pi}$ . В самом деле, величина

$$\rho = (\theta, x) = \min_{m \in M(\theta)} \omega(\theta, x, m)$$

есть непрерывная функция  $x$ , а переменная  $x = x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)})$  зависит непрерывно от управления  $\eta_t$  ( $t_* \leq t < \theta$ ), если близость программных управлений  $\eta_t$  друг к другу оценивать в слабой топологии. Но такой функционал  $\rho(\theta, x\{\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}\})$  на слабо компактном множестве  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta]\}_{\Pi}$  своих аргументов обязательно достигает минимума на каком-то программном управлении  $\{\eta_{(\cdot)}^0\}$ , который и доставляет, стало быть, решение  $\{\eta_{(\cdot)}^0\}$  Задачи 3.

Вторая вспомогательная программная задача формулируется следующим образом.

**Задача 4.** Дана начальная позиция  $\{t_*, h^*\}$  и отрезок времени  $[t_*, \theta]$ , причем множество  $M(\theta)$  не пусто. Требуется найти максиминное программное управление  $\eta_t^{00}$ ,  $t_* \leq t < \theta$ , которое удовлетворяет условию максимина:

$$\rho(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}^{00})) = \max_{\{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}} \min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}} \rho(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)})) = \varepsilon_0(t_*, h^*, \theta). \quad (4.4)$$

Программу  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta]\}_{\Pi}^0$ , на которой достигается максимум в правой части (4.4) и в которой по условию Задачи 4 должно содержаться искомое управление  $\eta_{(\cdot)}^{00}$ , будем именовать *максимизирующей* программой, отвечающей данной начальной позиции  $\{t_*, h^*\}$  и данному отрезку времени  $[t_*, \theta]$ .

Задачу 4 можно трактовать как вспомогательную задачу, которая ставится в реализовавшейся позиции  $\{t_*, h^{**}\}$  перед обоими игроками при следующих информационных условиях: второй игрок выбирает программу  $\{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}$  и сообщает ее первому игроку, после этого первый игрок выбирает в указанной ему программе  $\{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}$  управление  $\eta_{(\cdot)}^0$ . У второго игрока, таким образом, остается только право заранее так распорядиться выбором программы  $\{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}$ , чтобы обеспечить наибольший возможный результат  $\varepsilon(t_*, h^*, \theta)$  (4.4) при самом неблагоприятном для второго игрока выборе управления  $\eta_{(\cdot)}$  первым игроком.

## 5. Принцип минимума

В этом разделе мы покажем, что решающее Задачу 3 оптимальное программное управление  $\eta_t^0$ ,  $t_* \leq t < \theta$ , удовлетворяет некоторому условию, которое будем называть принципом минимума (по сути дела, это условие есть не что иное, как известный принцип

максимума Л.С. Понтрягина). Принцип минимума, характеризующий оптимальное программное управление  $\eta_t^0$  ( $t_* \leq t < \theta$ ) и соответствующее ему оптимальное программное движение  $x^0(t) = x(t, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}^0)$  из Задачи 3 при условии

$$\min_{\eta_{(\cdot)} \in \{\eta_{(\cdot)}\}_{\Pi}} \rho(\theta, x(\theta)) > \varepsilon \quad (5.1)$$

формулируется следующим образом.

**Лемма 5.1.** *Оптимальное управление  $\eta_t^0$  ( $t_* \leq t < \theta$ ), разрешающее Задачу 4, и порожденное им оптимальное программное движение  $x^0(t) = x(t, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}^0)$  при условии (5.1) удовлетворяют при почти всех значениях  $t \in [t_*, \theta]$  равенству*

$$\int_P \int_Q s'(t) f(t, x_t^0, u, v) \eta_t^0(du, dv) = \int_Q \min_{u \in P} [s'(t) f(t, x_t^0, u, v)] \nu_t(dv). \quad (5.2)$$

Здесь  $s(t)$  — решение дифференциального уравнения

$$\dot{s}(t) = -L'(t)s(t) \quad (5.3)$$

при краевом условии

$$s(\theta)[\partial\omega/\partial x]_{\{\theta, x_\theta^0, m^0\}} = -L'(\theta)s(\theta), \quad (5.4)$$

причем  $m^0$  — точка из  $M(\theta)$ , на которой достигается минимум (6.1) при  $t = \theta$ ,  $x = x^0(\theta)$ . Матрица  $L(t)$  в уравнении (5.3) определена равенством

$$L(t) = \int_P \int_Q [\partial f / \partial x]_{x^0(t)} \eta_t^0(du, dv).$$

В частности, если  $M = M_c$  и величины  $\omega$  и  $\rho$  определены равенствами (4.2) и (4.3), краевое условие (5.3) принимает вид равенства

$$s(\theta) = \frac{x^0(\theta) - m^0}{\|x^0(\theta) - m^0\|}, \quad (5.5)$$

где  $\{\theta, m^0\}$  — точка из  $M_c(\theta)$ , ближайшая в евклидовой метрике к точке  $\{\theta, x^0(\theta)\}$ . И в общем случае функции  $\omega(t, h, m)$ , и в частном случае, при задании  $\omega(t, h, m)$  формулой (4.2), точка  $m^0$  может быть не единственной. Условие (5.2) будет выполняться при всяком выборе минимизирующей точки  $m^0$ , отвечающей данному оптимальному движению  $x^0(t)$  Задачи 3.

## 6. Правило максимина

При определенных условиях оптимальное программное управление  $\eta_t^{00}$  ( $t_* \leq t < \theta$ ), решающее Задачу 4 на максимин (4.4), удовлетворяет условию, которое называется правилом максимина. Будем говорить, что элементарная программа  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta]; \nu_{(\cdot)}\}_{\Pi}$  регулярна для данной позиции  $\{t_*, h^*\}$ , ( $t_* \leq \theta$ ,  $\varepsilon(t_*, h^*, \theta) > c$ ), если задача для данной позиции  $\{t_*, h^*\}$  при выборе этой программы  $\{\eta_{(\cdot)}, [t_*, \theta]; \nu_{(\cdot)}\}_{\Pi}$  имеет единственное по существу (т. е. до значений на множестве точек  $t$  меры нуль) решение  $\eta_{(\cdot)}^0$ , и значение  $m^0$ , минимизирующее величину  $\omega$  в условии

$$\rho(t, h) = \min_{m \in M(t)} \omega(t, h, m) \quad (6.1)$$

при  $t = \theta$  и  $x = x^0(\theta)$ , также единственно.

**Лемма 6.1.** Пусть оптимальная минимизирующая элементарная программа из задачи (4.4)  $\{\eta(\cdot), [t_*, \theta]; \nu(\cdot)\}_\Pi$  для данной позиции  $\{t_*, h^*\}$ , где  $\varepsilon(t_*, h^*, \theta) > c$ , регулярна. Пусть  $\eta_t^{00}$  и  $x^{00}(t)$  ( $t_* \leq t < \theta$ ) суть оптимальное управление и порожденное им оптимальное движение, разрешающее эту Задачу 4.

Тогда при почти всех значениях  $t \in [t_*, \theta]$  выполняется следующее условие максимина

$$\int_P \int_Q s'(t) f(t, x_t^{00}, u, v) \eta_t^{00}(du, dv) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'(t) f(t, x_t^{00}, u, v) s(\theta) = \frac{x^0(\theta) - m^0}{\|x^0(\theta) - m^0\|}.$$

Здесь  $s(t)$  — решение уравнения (5.3), с краевым условием (5.4), в котором  $x_\theta^0$  заменено на  $x_\theta^{00}$ .

## 7. Регулярная игра сближения

В этом разделе рассматривается метод построения решений позиционной дифференциальной игры сближения, который базируется на вспомогательных программных конструкциях. Начнем со случая игры сближения в момент  $\theta$ , когда заданный соотношением (4.4) функционал  $\varepsilon_0(t, x, y(\cdot), \theta)$  оказывается функционалом инвариантно дифференцируемым в области  $\varepsilon_0(t, x, y(\cdot), \theta) > 0$ . Для выбранных значений  $c$  и  $\beta$  ситуация при выборе  $\sigma(h) = \rho(\theta, h)$  называется *регулярной*, если для всякой позиции  $\{t_*, h^*\}$  из области

$$G = [\{t_*, h^*\} : t \leq \theta, c < \varepsilon_0(t_*, h^*, \theta) < c + \beta] \quad (7.1)$$

Задача 4 имеет единственное по существу решение  $\eta_{(\cdot)}^{00}$  (т. е. решение  $\eta_{(\cdot)}^{00}$  ( $t_* \leq t < \theta$ ) единственное с точностью до значений на множестве нулевой меры), и значение  $m^{00}$ , минимизирующее  $\omega(t, h, m)$  в (6.1) при  $t = \theta$  и при  $x = x^{00}(\theta)$ , тоже единственно (здесь может быть  $c = -\infty$  или  $c + \beta = \infty$ ). В частности, будем называть игру сближения с множеством  $M_c$  в момент  $\theta$  *регулярной*, если Задача 4 при выборе  $\rho(t, h)$  из условия (4.3) будет иметь единственное по существу решение  $\eta_{(\cdot)}^{00}$  и точка  $\{\theta, m^{00}\}$  из  $M_c$ , ближайшая к точке  $\{\theta, x_\theta^{00}\}$ , тоже будет единственной для всякой позиции  $\{t_*, h^*\}$  из области (7.1), где  $\beta$  — достаточно малое положительное число.

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 7.1.** Если при выбранных  $c$  и  $\beta$  ситуация для задачи при

$$\sigma(x) = \rho(\theta, x) = \min_{m \in M(\theta)} \omega(\theta, x, m)$$

является регулярной, то в области (7.1) функционал  $\varepsilon_0(t, h, \theta)$ , заданный соотношением (4.4), имеет инвариантно непрерывные частные производные  $\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и коинвариантную производную  $\partial_t \varepsilon_0$ , и эти производные определяются равенствами

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} \right]_{\{t_*, h^*\}} &= \left\{ \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n \right\}_{\{t_*, h^*\}} = s(\theta, t_*), \\ (\partial_t \varepsilon_0)_{\{t_*, h^*\}} &= - \max_{v \in Q} \min_{u \in P} [s'(\theta, t_*) f(t_*, h^*, u, v)]. \end{aligned}$$

Здесь  $s(\theta, t)$  — решение дифференциального уравнения

$$ds/dt = -L'(t)s \quad (7.2)$$

при краевом условии

$$s(\theta, \theta) = \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x} \right]_{\{\theta, x_\theta^{00}, m^{00}\}},$$

причем

$$L'(t) = \int_P \int_Q \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\}_{x^{00}(t)} \eta_t^{00}(du, dv).$$

Теперь мы можем рассмотреть специальную вспомогательную программную задачу.

**Задача 5.** Дана начальная позиция  $\{t_*, h^*\}$ , отрезок времени  $[t_*, \theta]$  и непустое множество  $M(\theta)$ . Требуется найти максимизирующую программу  $\{\eta(\cdot), [t_*, \theta]\}_{\Pi}^0 = \{\eta(\cdot)\}_{\Pi}^0$  и в ней максиминное управление  $\eta_{(\cdot)}^0$ , которое удовлетворяет следующему условию

$$\begin{aligned} \rho(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta_{(\cdot)}^{00})) &= \min_{\eta(\cdot) \in \{\eta(\cdot)\}_{\Pi}^0} \rho(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta(\cdot))) = \\ &= \max_{\{\eta(\cdot)\}} \min_{\eta(\cdot) \in \{\eta(\cdot)\}_{\Pi}^0} \rho(\theta, x(\theta, t_*, h^*, \eta(\cdot))) = \varepsilon^0(t_*, h^*, \theta). \end{aligned} \quad (7.3)$$

При выбранных значениях  $c$  и  $\beta > 0$  и при выборе  $\sigma(x) = \rho(\theta, x)$  ситуация в минимаксной игре называется *регулярной*, если для всякой позиции  $\{t_*, h^*\}$  из области

$$t_0 < t < \theta, \quad c < \varepsilon^0(t_*, h^*, \theta) < c + \beta \quad (7.4)$$

задача имеет единственное по существу решение — оптимальное максиминное управление  $\eta_t^{00}$  ( $t_* \leq t < \theta$ ) и точка  $m^{00}$ , минимизирующая  $\omega(t, x, m)$  в (6.1) при  $t = \theta$  и  $x = x^{00}(\theta)$ , также единственна.

В регулярном случае оптимальное управление  $\eta_t^{00}$  ( $t_* \leq t < \theta$ ) и оптимальное движение  $x^{00}(t)$ , разрешающие Задачу 5, удовлетворяют следующему условию минимакса:

$$\int_P \int_Q s'(t) f(t, x_t^{00}, u, v) \eta_t^{00}(du, dv) = \min_u \max_v [s'(t) f(t, x_t^{00}, u, v)]$$

при почти всех  $t \in [t_*, \theta]$ . Здесь  $s(t)$  — решение уравнения вида (5.5), в котором  $\eta_t^{00}$  и  $x^{00}(t)$  суть решения Задачи 5 (а не решения Задачи 4).

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 7.2.** Если при выбранных значениях  $c$  и  $\beta > 0$  ситуация в минимаксной игре при выборе

$$\sigma(x) = \rho(\theta, x)$$

является регулярной, то в соответствующей области (7.4) функционал  $\varepsilon^0(t_*, h^*, \theta)$ , заданный соотношением (7.3), имеет инвариантно непрерывные частные производные  $\frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и коинвариантную производную  $\partial_t \varepsilon^0$ , и эти производные в каждой позиции  $\{t_*, h^*\}$  из области (7.4) определяются равенствами

$$\left[ \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial x_i} \right] = s(\theta, t_*), \quad (7.5)$$

$$\partial_t \varepsilon^0 = \min_u \max_v [s'(\theta, t_*) f(t_*, h^*, u, v)] \quad (7.6)$$

где  $s'(\theta, t_*)$  — решение дифференциального уравнения (7.2), в котором  $\eta_t^{00}$  и  $x^{00}(t)$  суть решения Задачи 5 (а не Задачи 4).

Из (7.5) и (7.6) следует, что при выполнении условия регулярности минимаксной игры в области (7.4) функционал  $\varepsilon^0(t_*, h, \theta)$  удовлетворяет условию (2.3). Стало быть, в частности, если  $c = \sigma_0$  и  $c + \beta = \sigma^0$  из (2.2), то этот функционал  $\varepsilon^0(t_*, h, \theta)$  будет в регулярном случае удовлетворять условиям Теоремы 2.1. Следовательно, в таком случае рассматриваемая игра будет иметь седловую точку, определяемую парой стратегия–контрстратегия  $\{U^0, V_c^u\}$ , где  $U^0$  и  $V_c^u$  определены соответственно функционалами  $u^0(t, h)$  и  $v^0(t, h, u)$ , которые в области (2.1) находятся из условий

$$\begin{aligned}\min_v [s'(\theta, t)f(t, h, u^0(t, h), v)] &= \min_u \max_v [s'(\theta, t)f(t, h, u, v)], \\ s'(\theta, t)f(t, h, u, v^0(t, h)) &= \max_v [s'(\theta, t)f(t, h, u, v)],\end{aligned}$$

а вне этой области могут быть произвольными. Цена этой игры определяется равенством

$$\gamma_0 = \gamma_u^0 = \varepsilon(t, h, \theta).$$

### References

- [1] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974; англ. пер.: N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, *Game-theoretical Control Problems*, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1976.
- [2] Ю. С. Осипов, “Дифференциальные игры систем с последействием”, *Доклады Академии наук*, **198**:4 (1971), 475–478; англ. пер.: Yu. S. Osipov, “Differential games of systems with delays”, *Doklady Mathematics*, **198**:4 (1971), 710–713.
- [3] А. В. Кряжжмский, Ю. С. Осипов, “Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством”, *ПММ*, **37**:1 (1973), 3–13. [A. V. Kryazhinskii, Yu. S. Osipov, “Differential-difference Game of Approaching with a Functional Target Set Ordered Spaces”, *PMM*, **37**:1 (1973), 3–13].
- [4] А. В. Кряжжмский, “Дифференциально-разностная игра уклонения от функциональной цели”, *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1973, № 4, 71–79. [A. V. Kryazhinskii, “Differential-difference Game of Evation from a Functional Target Set”, *Izv ANSSSR. Technical cybernetics*, 1973, № 4, 71–79].
- [5] N. A. Andryushechkina, A. V. Ivanov, A. V. Kim, “Application of  $i$ -Smooth Analysis to Differential Games with Delays”, *Control Applications of Optimization*, Proceedings of the 17th IFAC Workshop (Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018), Krasovskii Inst. of Mathematics and Mechanics, UB of RAS, Yekaterinburg, 2018, 19e.
- [6] A. V. Kim,  *$i$ -Smooth Analysis. Theory and Applications*, Wiley, New Jersey, 2015.
- [7] A. V. Kim, A. V. Ivanov, *Systems with Delays. Analysis, Control, Computations*, Wiley, New Jersey, 2015.

### Информация об авторах

**Ким Аркадий Владимирович**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: avkim@imm.uran.ru

### Information about the authors

**Arkadii V. Kim**, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Scientific Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: avkim@imm.uran.ru

**Бочаров Геннадий Алексеевич**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: bocharov@inm.ras

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**

Ким Аркадий Владимирович  
E-mail: avkim@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.  
Поступила после рецензирования 19.07.2020 г.  
Принята к публикации 19.11.2020 г.

**Gennady A. Bocharov**, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Scientific Researcher. Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation. E-mail: bocharov@inm.ras

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**

Arkadii V. Kim  
E-mail: avkim@imm.uran.ru

Received 28.05.2020  
Reviewed 19.07.2020  
Accepted for press 19.11.2020

© Успенский А.А., Лебедев П.Д., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-370-386

УДК 517.977

## Элементы аналитического конструктора решений в классе задач управления по быстродействию с целевым множеством с разрывной кривизной границы

Павел Дмитриевич ЛЕБЕДЕВ, Александр Александрович УСПЕНСКИЙ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

## Elements of analytical solutions constructor in a class of time-optimal control problems with the break of curvature of a target set

Pavel D. LEBEDEV, Alexander A. USPENSKII

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics

of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

**Аннотация.** Рассмотрена плоская задача управления по быстродействию с круговой индикатрисой и целевым множеством с гладкой границей, имеющей конечные разрывы производных второго порядка от координатных функций. Изучены псевдовершины — особые точки границы цели, порождающие сингулярность у функции оптимального результата. Для нестационарных псевдовершин с разрывной кривизной найдены односторонние маркеры, значения которых нужны при аналитическом и численном построении ветвей сингулярного множества. Доказано, что маркеры лежат на границе спектра — области возможных значений. Один из них равен нулю, другой принимает несобственное значение  $-\infty$ . При их вычислении применены асимптотические разложения нелинейного уравнения, выражающего условие трансверсальности. На основе маркеров также получены точные формулы крайних точек ветвей сингулярного множества. Предъявлен пример задачи управления, в котором найденных с помощью развиваемых методов конструктивных элементов (псевдовершины, ее маркеров и крайней точки сингулярного множества) оказывается достаточно, чтобы на всей области рассмотрения построить в явном аналитическом виде сингулярное множество и функцию оптимального результата.

**Ключевые слова:** быстродействие; функция оптимального результата; сингулярное множество; трансверсальность; уравнение Гамильтона–Якоби; биссектриса; минимаксное решение; диффеоморфизм

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00264\_а).

**Для цитирования:** Лебедев П.Д., Успенский А.А. Элементы аналитического конструктора решений в классе задач управления по быстродействию с целевым множеством с разрывной кривизной границы // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 370–386. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-370-386.

**Abstract.** A planar velocity control problem with a disc indicatrix and a target set with a smooth boundary having finite discontinuities of second-order derivatives of coordinate functions is considered. We have studied pseudo-vertices-special points of the goal boundary that generate

a singularity for the optimal control function. For non-stationary pseudo-vertices with discontinuous curvature, one-way markers are found, the values of which are necessary for analytical and numerical construction of branches of a singular set. It is proved that the markers lie on the border of the spectrum—the region of possible values. One of them is equal to zero, the other takes an invalid value  $-\infty$ . In their calculation, asymptotic expansions of a nonlinear equation expressing the transversality condition are applied. Exact formulas for the extreme points of branches of a singular set are also obtained based on markers. An example of a control problem is presented, in which the constructive elements are obtained using the developed methods (pseudo-vertex, its markers, and the extreme point of a singular set), are sufficient to construct a singular set and an optimal result function in an explicit analytical form over the entire area of consideration.

**Keywords:** velocity; optimal result function; singular set; transversality; Hamilton–Jacobi equation; bisector; minimax solution; diffeomorphism

**Acknowledgements:** The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00264\_a).

**For citation:** Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Elementy analiticheskogo konstruktora resheniy v klasse zadach upravleniya po bystrodeystviyu s tselevym mnozhestvom s razryvnoy kriviznoy granitsy [Elements of analytical solutions constructor in a class of velocity problems with the break of curvature of a target set]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 370–386. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-370-386. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Задача управления по быстродействию относится к классическим задачам математической теории управления, становление которой проходило во второй половине XX века [1–3]. Построение решений задач быстродействия опирается на принцип максимума Л. С. Понтрягина (см., например, [4]), на метод динамического программирования [5], на концепцию управления по принципу обратной связи [6], на теорию минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка (УЧППП) [7], на вязкостный подход к определению обобщенного решения УЧППП [8]. Современные подходы к решению задач управления привлекают результаты теории дифференциальных включений, многозначный анализ, идемпотентный анализ, конструкции теории особенностей дифференцируемых отображений и другие подходы. Для вывода основных утверждений широко используются геометрические представления.

В настоящей работе рассмотрена плоская задача управления по быстродействию с простой динамикой. Особенностью задачи, которая существенным образом влияет на ее решение, является геометрия целевого множества. Это множество является невыпуклым и имеет гладкую границу с разрывной кривизной. Ранее выявлен класс в общем случае недифференцируемых функций, к которому принадлежит функция оптимального результата [9]. При ее построении, как в точном, так и аппроксимационном виде, требуется найти сингулярное множество, которое в данном случае относится к множествам симметрии [10]. Гладкие ветви этого множества определяются псевдовершинами границы целевого множества, отвечающими за зарождение сингулярности.

Для рассматриваемого случая, опираясь на условия трансверсальности, найдены формулы для односторонних маркеров псевдовершин. Маркеры характеризуют особенности геометрии краевого множества с точки зрения его меры невыпуклости [11]. Применительно к задаче управления маркеры позволяют сформировать динамику обыкновенного

дифференциального уравнения, интегральные кривые которого содержат ветви сингулярного множества (см., например, [12, 13]). Вывод основных соотношений осуществлен путем анализа ключевого для этих конструкций уравнения типа золотого сечения с помощью односторонних разложений Тейлора. По существу здесь используется аппроксимативная техника струй [14], широко применяемая в теории особенностей гладких отображений, в том числе при анализе задач управления [15].

В работе приведен пример задачи управления по быстродействию, демонстрирующий, что развиваемая техника исследования динамических задач позволяет в ряде случаев построить негладкое решение в явном аналитическом виде.

## 1. Постановка задачи. Определения, основные понятия

Рассматривается задача управления по быстродействию с простой динамикой

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \nu, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  — фазовый вектор, зависящий от времени  $\tau \in \mathbb{R}$ , управление  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  стеснено ограничением  $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \leq 1$ , а целью является замкнутое множество  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Класс функций, которому принадлежит функция оптимального результата  $u = u(\mathbf{x})$ , известен [9]. Здесь  $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ , где  $\rho(\mathbf{x}, M) = \inf_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$  — евклидово расстояние от точки  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  до множества  $M$ . Важно отметить, что евклидово расстояние в общем случае не является гладкой функцией, при этом в точках  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$  она супердифференцируема [16], а ее дифференциальные свойства на границе  $\Gamma = \partial M$  определяются дифференциальными свойствами этой кривой [17]. При построении  $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$  в аналитическом или численном виде требуется выявить сингулярное множество — множество точек нарушения гладкости функции. Ранее показано, что сингулярное множество решения  $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$  задачи быстродействия с динамикой (1.1), названное биссектрисой [9], относится к множествам симметрии [18]. Оно определяется геометрическими свойствами целевого множества, дифференциальными свойствами его границы и ее особыми точками — псевдовершинами [19]. Выявление псевдовершин позволяет строить аналитически или численно гладкие ветви сингулярного множества.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением частного случая, когда граница  $\Gamma = \partial M$  является графиком скалярной функции, т. е.  $\Gamma = \text{gr } f = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = (t, f(t)), t \in T\}$ , где  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^2$  — отображение числового интервала  $T = (\hat{t}, \check{t})$ ,  $-\infty < \hat{t} < \check{t} < \infty$ , на плоскость. Будем полагать, что  $y = f(t)$  является один раз непрерывно дифференцируемой функцией и имеет конечное число точек, в которых существуют односторонние не равные друг другу производные второго порядка.

Приведем необходимые определения (подробнее см. [19]).

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Скалярный локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$  непрерывен слева в точке  $t_1 = t_0 \in T$  и отображает левую полуокрестность этой точки в ее правую полуокрестность, если выполняются условия:

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Заметим, что условие (A1) влечет строгое неравенство  $t_2'(t_1) < 0$  для всех  $(t_0 - \delta_1, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$ .

О п р е д е л е н и е 1.2. Псевдовершиной кривой  $\Gamma = \text{gr } f$  будем называть точку

$$(t_0, y_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} (t_*, y_*),$$

где  $(t_*, y_*) = (t_*(t_1), y_*(t_1)) \triangleq (t_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1)))$  — однопараметрическое подмножество решений системы уравнений

$$\begin{cases} y_* = f'(t_1)(t_* - t_1) + f(t_1), \\ y_* = f'(t_2)(t_* - t_2) + f(t_2), \end{cases} \quad (1.2)$$

определяемое локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$  со свойствами (A1), (A2), который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) \triangleq \rho^2(((t_1), f(t_1)), (x_*, y_*)) - \rho^2(((t_2), f(t_2)), (x_*, y_*)) = 0. \quad (1.3)$$

О п р е д е л е н и е 1.3. Ветвью  $L(t_0, f(t_0))$  биссектрисы  $L(\Gamma)$  кривой  $\Gamma = \text{gr } f$ , где  $(t_0, y_0) = (t_0, f(t_0))$  — псевдовершина  $\Gamma = \text{gr } f$ , будем называть множество точек  $(t, y)$  на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} -t + t_1 - f'(t_1)(y - f(t_1)) = 0, \\ -t + t_2 - f'(t_2)(y - f(t_2)) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $t_2 = t_2(t_1)$  — локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$  со свойствами (A1), (A2), который задается уравнением (1.3).

О п р е д е л е н и е 1.4. Конечный односторонний предел  $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} (t_1, f(t_1))$  решений системы (1.4) будем называть крайней точкой биссектрисы. Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то будем говорить, что псевдовершина  $(t_0, y_0) = (t_0, f(t_0))$  не порождает крайнюю точку биссектрисы.

О п р е д е л е н и е 1.5. Левая односторонняя производная

$$t'_2(t_0 - 0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} \quad (1.5)$$

называется левым маркером псевдовершины  $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma$ , здесь  $t_2 = t_2(t_1)$  удовлетворяет (A1), (A2).

Локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$  имеет обратный локальный диффеоморфизм  $t_1 = t_1(t_2)$ ,  $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$ , со свойствами, аналогичными свойствам (A1), (A2), а именно, выполняются соотношения:

$$(A3) \quad t_1((t_0, t_0 + \delta_2)) = (t_0 - \delta_1, t_0), \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_1 > 0,$$

$$(A4) \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} t_1(t_2) = t_0.$$

О п р е д е л е н и е 1.6. Правая односторонняя производная

$$t'_1(t_0 + 0) \triangleq \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \frac{t_1(t_2) - t_0}{t_2 - t_0} \quad (1.6)$$

называется правым маркером псевдовершины  $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma$ , здесь  $t_1 = t_1(t_2)$  — локальное решение (1.4) со свойствами (A3), (A4).

**З а м е ч а н и е 1.1.** Левый и правый маркеры псевдовершины образуют пару взаимнообратных величин  $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = (t'_1(t_0 + 0), \frac{1}{t'_1(t_0 + 0)}) = (\frac{1}{t'_2(t_0 - 0)}, t'_2(t_0 - 0))$ . При этом общее для односторонних маркеров множество возможных значений (спектр) есть «отрезок»  $[-\infty, 0]$ .

Теоретически не исключен случай пар маркеров с несобственным значением, т. е. пар вида  $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = (0, -\infty)$  и  $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = (-\infty, 0)$ . Ниже покажем, что при рассматриваемых в рамках настоящего исследования условиях реализуется именно этот случай.

Диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$ , удовлетворяющий набору условий (A1), (A2), и определяющий псевдовершину  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}(t_0)$ , кривой  $\Gamma$  является локальным решением уравнения типа уравнения гармонической пропорции с двухпараметрическими коэффициентами (формула (3.5) из [19]), к которому сводится уравнение (1.4). Для скалярных функций редуцированное уравнение принимает вид [20]:

$$Q(t_1, t_2) \triangleq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} = 0. \quad (1.7)$$

Здесь  $s(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$  — длина касательного вектора.

Задача нахождения функций со свойствами (A1), (A2) связана с преодолением неединственности множества локальных решений уравнения (1.7), стягивающихся в общую предельную точку вследствие вырождения каустики (подробнее см. [21]). Здесь изучение указанной проблемы проводится не только средствами классического анализа. Выявление свойств локального диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$  осуществляем с помощью предельного соотношения

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left( \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} + t'_2 \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \right) = 0, \quad (1.8)$$

которое выражает условие трансверсального («протыкающего») пересечения замыкания графика локального диффеоморфизма  $t_2 = t_2(t_1)$  с графиком тождественного диффеоморфизма  $t_2 = t_1$  в общей предельной точке  $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$ . Если левый маркер существует, то из (1.8) следует формула его вычисления:

$$t'_2(t_0 - 0) = - \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left( \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} \cdot \left( \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \right)^{-1} \right). \quad (1.9)$$

Далее найдем ряд свойств псевдовершин, маркеров, крайних точек биссектрисы — основных конструктивных элементов теории, знание которых позволяет в ряде случаев сформировать сингулярное множество задачи быстрогодействия в явном аналитическом виде.

## 2. Основной результат

**Теорема 2.1.** Если  $\mathbf{x}^{(0)} = (t_0, f(t_0))$  — псевдовершина плоской регулярной кривой  $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (t, f(t)), t \in T\}$ , ограничивающей целевое множество  $M$  в задаче управления по быстродействию с динамикой (1.1), где локальный диффеоморфизм  $t_2 = t_2(t_1)$  является решением уравнения (1.7), удовлетворяет условиям (A1), (A2) и имеет конечный левый маркер  $\lambda = t'_2(t_0 - 0) \leq 0$ , а скалярная функция  $y = f(t)$  такова, что

$$f'(t_0) \neq 0, \quad (2.1)$$

у нее существуют конечные односторонние производные второго порядка  $f''(t_0 - 0)$  и  $f''(t_0 + 0)$ , причем

$$f''(t_0 - 0) \neq f''(t_0 + 0), \quad (2.2)$$

то левый маркер

$$\lambda = 0. \quad (2.3)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Найдем асимптотические разложения частных производных функции  $Q(t_1, t_2)$  вдоль решения  $t_2 = t_2(t_1)$  в левой полуокрестности точки  $t_1 = t_0$  и перейдем к пределу, воспользовавшись соотношением (1.9). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t_1} &= \left( \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} \right)'_{t_1} = \\ &= \frac{-f'(t_1)(t_2 - t_1) + (f(t_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} - \\ &- \frac{f''(t_1)((f'(t_1))^2 - s(t_1)s(t_2)) + s'(t_1)s(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1)) + f''(t_1)}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для краткости изложения результатов примем ряд соглашений по обозначениям. Для упорядоченной тройки точек  $t_0, t_1, t_2$  из  $T$ , таких, что  $t_1 < t_0 < t_2$ , где центральный узел  $t_0$  — аргумент псевдовершины кривой  $\Gamma$ , введем в рассмотрение приращения  $\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0$ ,  $\Delta_2 = t_2 - t_0 > 0$ ,  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 > 0$ . В том случае, когда тройка точек связана локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ , приращение  $\Delta_2 = \Delta_2(\Delta_1) = t_2(t_1) - t_1$ , т. е.  $\Delta_2$  зависит от  $\Delta_1$ , причем

$$\Delta_2 = \Delta_2(\Delta_1) = t_2(t_1) - t_0 = t'_2(t_0 - 0)(t_1 - t_0) + o_0(t_1 - t_0) = -\lambda\Delta_1 + o_0(\Delta_1). \quad (2.5)$$

Обозначение  $o_0(\Delta_1)$  использовано для функции, имеющей более высокий порядок малости по отношению к аргументу слева от точки рассмотрения, т. е. здесь  $\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{o_0(\Delta_1)}{\Delta_1} = 0$ . Всюду ниже «о малое» с нижним индексом имеет аналогичный смысл. Обозначение  $\varepsilon_0(\Delta_1)$ , где  $\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \varepsilon_0(\Delta_1) = 0$ , и аналогичные обозначения с другими индексами используются для бесконечно малых величин.

Для рассматриваемой функции  $y = f(t)$  и ее производных, вычисленных в центральном узле  $t_0$ , будем опускать обозначение аргумента. При этом для односторонних производных уберем обозначения  $t_0 - 0$  и  $t_0 + 0$  в аргументах функций, опуская соответствующий знак минус или плюс в нижний индекс:

$$\begin{aligned} f' &= f'(t_0), \quad f''_- = f''(t_0 - 0), \quad f''_+ = f''(t_0 + 0), \\ s'_- &= \frac{f'(t_0)f''(t_0 - 0)}{s(t_0)}, \quad s'_+ = \frac{f'(t_0)f''(t_0 + 0)}{s(t_0)}. \end{aligned}$$

Отметим, что частные производные функции  $Q(t_1, t_2)$  зависят от скалярных функций одного переменного. К каждой из них применим формулу Тейлора в окрестностях соответствующих точек  $t_1 = t_0$  и  $t_2 = t_0$ . Определим следующий порядок вычислений. Сначала строим разложения с независимыми приращениями  $\Delta_1 > 0$  и  $\Delta_2 > 0$ , получая аппроксимации с порядком малости относительно  $\Delta_{12} = \max\{\Delta_1, \Delta_2\} > 0$ . Затем, связывая точки

$t_1, t_2$  локальным диффеоморфизмом  $t_2 = t_2(t_1)$ , учитывая (2.5), формируем аппроксимации вдоль этого диффеоморфизма с соответствующим порядком малости относительно  $\Delta_1 > 0$ .

Начнем с аппроксимации уменьшаемой дроби в (2.4) до членов второго порядка включительно в числителе, пренебрегая членами более высокого порядка малости по отношению к  $\Delta_{12}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{-f'(t_1)(t_2 - t_1) + (f(t_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} = \\ & = \left( -(f' - \Delta_1 f'' + o_1(\Delta_{12}))(\Delta_2 + \Delta_2) + f + \Delta_2 f' + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ - f + \Delta_1 f' - \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_2(\Delta_{12}^2) \right) / \Delta^2 = \\ & = \frac{\Delta_1 f''_-(\Delta_2 + \Delta_1) + \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_3(\Delta_{12}^2)}{\Delta^2} = \\ & = \frac{\Delta_1}{\Delta} f''_- + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta^2} f''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta_2} f''_- + \varepsilon_3(\Delta_{12}), \varepsilon_3(\Delta_{12}) = \frac{o_3(\Delta_{12}^2)}{\Delta^2}, \Delta_{12} \downarrow 0. \end{aligned}$$

Перейдем к аппроксимации вычитающей дроби в (2.4):

$$\begin{aligned} & \frac{f''(t_1)((f'(t_2))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2)) + s'(t_1)s(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\ & = \frac{f''(t_1)((f'(t_2))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2) + s'(t_1)s(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1))))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\ & = \frac{(s_2 + \Delta_2 s'_-)[f''_-(\Delta_2 s'_+ + \Delta_1 s'_-) + s'_-(f' + \Delta_2 f''_+ f' - \Delta_1 f''_-)]}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})} = \\ & = \frac{2f' s'_- s + 2\Delta_2 f'(s'_-)^2 + \Delta_2 f''_+ s'_+ s + \Delta_2 f''_- s'_- s + \varepsilon_1(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})}. \end{aligned}$$

Получили

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial t_1}(t_1, t_2) = \frac{\Delta_1}{\Delta} f''_- + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta^2} f''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta_2} f''_- + \varepsilon_3(\Delta_{12}) - \\ & - \frac{2f' s'_- s + 2\Delta_2 f'(s'_-)^2 + \Delta_2 f''_+ s'_+ s + \Delta_2 f''_- s'_- s + \varepsilon_1(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})} = \\ & \left( 4\frac{\Delta_1}{\Delta} f''_- + (f')^2 + 2\frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} f''_+(f')^2 - 2\frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} f''_-(f')^2 + 4\frac{\Delta_1\Delta_1}{\Delta} f''_- f' f''_+ + \frac{2\Delta_2^3}{\Delta^2} f'(f''_+)^2 - \right. \\ & \left. + \frac{2\Delta_2^3}{\Delta^2} f'(f''_-)^2 - \frac{2\Delta_1^2\Delta_2}{\Delta^2} f' f''_- f''_+ - \frac{4\Delta_1^2}{\Delta} f'(f''_-)^2 - \frac{2\Delta_2^2\Delta_1}{\Delta^2} f' f''_+ f''_- + \frac{4\Delta_1^3}{\Delta} f'(f''_-)^2 - \right. \\ & \left. - 2f' s'_- s - 2\Delta_2 f'(s'_-)^2 - \Delta^2 f''_+ s'_+ s - \Delta^2 f''_- s'_- s + \varepsilon_2(\Delta_{12}) \right) / \\ & / \left( 4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12}) \right). \end{aligned}$$

Вычислим

$$\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2) = \left( \frac{f(f_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} \right)'_{t_2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f'(t_2)(t_2 - t_1) - (f(f_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} - \\
&- \frac{f''(t_2)((f'(t_1))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2)) + s(t_1)s'(t_1)(f(t_2) - f(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Найдем аппроксимацию уменьшаемой дроби в (2.6):

$$\begin{aligned}
\frac{f'(t_2)(t_2 - t_1) - (f(f_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} &= \left[ (f' + \Delta_2 f''_+ + o_5(\Delta_{12}))(\Delta_2 + \Delta_1) - \right. \\
&- \left( f + \Delta_2 f' + \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ - f + \Delta_1 f' - \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_6(\Delta_{12}^2) \right) \Big] / \Delta^2 = \\
&= \frac{(f' + \Delta_2 f''_+ + o_5(\Delta_{12}))\Delta - \left( \Delta f' + \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_6(\Delta_{12}^2) \right)}{\Delta^2} = \\
&= \frac{\Delta \Delta_2 f''_+ - \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ + \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_7(\Delta_{12}^2)}{\Delta^2} = \\
&= \frac{\Delta_2}{\Delta} f''_+ - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta^2} f''_+ + \frac{\Delta_1^2}{2\Delta^2} f''_- + \varepsilon_7(\Delta_{12}), \quad \varepsilon_7(\Delta_{12}) = \frac{o_7(\Delta_{12}^2)}{\Delta^2}, \Delta_{12} \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Аппроксимируем вычитающую дробь в (2.6):

$$\begin{aligned}
&\frac{f''(t_2)((f'(t_1))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2)) + s(t_1)s'(t_1)(f(t_2) - f(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\
&= \frac{s(t_1)[f''(t_2)(s(t_1) - s(t_2)) + s'(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1))]}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\
&= \left[ (s - \Delta_1 s'_-)[f''_+(s - \Delta_1 s'_- - s - \Delta_2 s'_+) + s'_+(f' + \Delta_2 f''_+ + f' - \Delta_1 f''_-)] + \varepsilon_6(\Delta_{12}) \right] / \\
&\quad / \left( 4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12}) \right) = \\
&= \frac{(s - \Delta_1 s'_-)[- \Delta_1 f''_+ s'_- - \Delta_2 f''_+ s'_+ + 2f' s'_+ + \Delta_2 f''_+ s'_+ - \Delta_1 f''_- s'_+] + \varepsilon_6(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})} = \\
&= \left( -2\Delta_1 f' s'_- s'_+ - \Delta_1 f''_+ s'_- s - \Delta_2 f''_+ s'_+ s + 2f' s'_+ s + \Delta_2 f''_+ s'_+ s - \right. \\
&\quad \left. - \Delta_1 f''_- s'_+ s + \varepsilon_6(\Delta_{12}) \right) / \left( 4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12}) \right) = \\
&= \frac{2f' s'_+ s - 2\Delta_1 f' s'_- s'_+ - \Delta_1 f''_+ s'_- s - \Delta_1 f''_- s'_+ s + \varepsilon_6(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} f''_+ - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta^2} f''_+ + \frac{\Delta_1^2}{2\Delta^2} f''_- + \varepsilon_7(\Delta_{12}) = \\
&= \frac{2f' s'_+ s - 2\Delta_1 f' s'_- s'_+ - \Delta_1 f''_+ s'_- s - \Delta_1 f''_- s'_+ s + \varepsilon_6(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})} = \\
&= \left( 4\frac{\Delta_2}{\Delta} f''_+ (f')^2 - 2\frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} f''_+ (f')^2 + 2\frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} f''_- (f')^2 + 4\frac{\Delta_2^2}{\Delta} f' (f''_+)^2 - 2\frac{\Delta_2^3}{\Delta^2} f' (f''_+)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\Delta_1^2 \Delta_2}{\Delta^2} f' f'' f''_+ - 4 \frac{\Delta_2 \Delta_1}{\Delta} f' f'' f''_- + 2 \frac{\Delta_2^2 \Delta_1}{\Delta^2} f' f'' f''_- - 2 \frac{\Delta_1^3}{\Delta^2} f' (f''_-)^2 - \\
& - 2 f' s'_+ s + 2 \Delta_1 f' s'_- s'_+ + \Delta_1 f''_+ s'_- s + \Delta_1 f''_- s'_+ s + \varepsilon_6 (\Delta_{12}) \Big) / \\
& / (4 (f')^2 + 4 \Delta_2 f' f''_+ - 4 \Delta_1 f' f''_- + o_8 (\Delta_{12})) .
\end{aligned}$$

Реализуя намеченный план, привлечем разложение первого порядка для левого маркера (2.5) и найдем аппроксимации частных производных вдоль диффеоморфизма. Учтем также, что в этом случае члены разложений, стоящие в числителях дробей, содержащие  $\frac{\Delta_2^3}{\Delta^2}$ ,  $\frac{\Delta_1^3}{\Delta^2}$ ,  $\frac{\Delta_1^2 \Delta_2}{\Delta^2}$ ,  $\frac{\Delta_2^2 \Delta_1}{\Delta^2}$ ,  $\frac{\Delta_2 \Delta_1}{\Delta}$ , имеют порядок малости  $o(\Delta_1)$  и, стало быть, ими можно пренебречь. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} &= \left( 4 \frac{\Delta_1}{\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1)} f''_-(f')^2 + 2 \frac{(-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1))^2}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1))^2} f''_+(f')^2 - \right. \\
& - 2 \frac{\Delta_1^2}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1))^2} f''_-(f')^2 - 2 f' s'_- s - 2 (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f' (s'_-)^2 - \\
& \left. - (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f''_- s'_+ s - (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f''_+ s'_- s + \varepsilon_2(\Delta_1) \right) / \\
& / \left( 4 (f')^2 + 4 (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f' f''_+ - 4 \Delta_1 f' f''_- + o_9(\Delta_1) \right) .
\end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned}
\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} &= \\
&= \left( 4 \frac{1}{(1-\lambda)} f''_-(f')^2 + 2 \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} f''_+(f')^2 - 2 \frac{1}{(1-\lambda)^2} f''_-(f')^2 - 2 f' s'_- s \right) / (4 (f')^2) .
\end{aligned}$$

Здесь существенно условие нестационарности (2.1), благодаря которому этот предел конечен.

Поскольку

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2(t_1)) &= \frac{4 \frac{(-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1))}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1))} f''_+(f')^2 - 2 \frac{(-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1))^2}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1))^2} f''_+(f')^2}{4 (f')^2 + 4 (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f' f''_+ - 4 \Delta_1 f' f''_- + o_9(\Delta_1)} + \\
& + \frac{2 \frac{\Delta_1^2}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1))^2} f''_-(f')^2 - 2 f' s'_+ s + \varepsilon_9(\Delta_1)}{4 (f')^2 + 4 (-\lambda \Delta_1 + o_1(\Delta_1)) f' f''_+ - 4 \Delta_1 f' f''_- + o_9(\Delta_1)} ,
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} &= \\
&= \left( 4 \frac{-\lambda}{(1-\lambda)} f''_+(f')^2 - 2 \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} f''_+(f')^2 + 2 \frac{1}{(1-\lambda)^2} f''_-(f')^2 - 2 f' s'_+ s \right) / (4 (f')^2) .
\end{aligned}$$

Здесь также важно, что в силу (1.2) выполняется неравенство  $f'(t_0) \neq 0$ , которое влечет конечность предела. Тогда вследствие условия (1.9)

$$\lambda = -\frac{4\frac{1}{(1-\lambda)}f''_-(f')^2 + 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+(f')^2 - 2\frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_-(f')^2 - 2f's'_-s}{4\frac{-\lambda}{(1-\lambda)}f''_+(f')^2 - 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+(f')^2 + 2\frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_-(f')^2 - 2f's'_+s}.$$

Преобразуем это равенство, воспользовавшись тем, что  $s'_-s = f'f''_-$ ,  $s'_+s = f'f''_+$ :

$$\lambda = -\frac{\frac{4}{(1-\lambda)}f''_-(f')^2 + 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+(f')^2 - 2\frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_-(f')^2 - 2(f')^2f''_-}{4\frac{-\lambda}{(1-\lambda)}f''_+(f')^2 - 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+(f')^2 + 2\frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_-(f')^2 - 2(f')^2f''_+}.$$

Сократим на  $(f')^2 \neq 0$ , после чего равенство упростим:

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{2\frac{1}{(1-\lambda)}f''_- + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+ - \frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_- - f''_+}{2\frac{-\lambda}{(1-\lambda)}f''_+ - \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+ + \frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_- - f''_+}, \\ \frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)}f''_+ - \frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^2}f''_+ + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}f''_- + \frac{2}{(1-\lambda)}f''_- + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+ - \frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_- &= \lambda f''_+ + f''_-, \\ -2\lambda^2(1-\lambda)f''_+ - \lambda^3f''_+ + \lambda f''_- + 2(1-\lambda)f''_- + \lambda^2f''_+ - f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda)^2, \\ (-2\lambda^2 + 2\lambda^3 - \lambda^3 + \lambda^2)f''_+ + (\lambda + 2 - 2\lambda - 1)f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda)^2, \\ (\lambda^3 - \lambda^2)f''_+ + (1-\lambda)f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda)^2, \\ \lambda^2(\lambda - 1)f''_+ + (1-\lambda)f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda)^2, \\ -\lambda^2f''_+ + f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda), \\ -\lambda^2f''_+ + f''_- &= \lambda f''_+ + f''_- - \lambda^2f''_+ - \lambda f''_-, \\ -\lambda^2f''_+ + f''_- - \lambda f''_+ - f''_- + \lambda^2f''_+ + \lambda f''_- &= 0, \\ \lambda(f''_- - f''_+) &= 0.\end{aligned}$$

Согласно условию (2.2)  $f''_+ - f''_- \neq 0$ , поэтому  $\lambda = 0$ . Равенство (2.3) обосновано.  $\square$

**Следствие 2.1.** В условиях теоремы 2.1 для правого маркера  $\mu \triangleq t'_1(t_0 + 0)$  справедливо равенство

$$\mu = -\infty. \quad (2.7)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу свойства обратимости локальных диффеоморфизмов, отрицательности  $t'_2(t_1)$ , когда  $t_1 \in (t_0 - \delta, t_0)$ ,  $\delta_1 > 0$  и Замечания 1.1 имеем:

$$\mu \triangleq t'_1(t_0 + 0) = \frac{1}{t'_2(t_0 - 0)} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{1}{t'_2(t_1)} = \frac{1}{\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t'_2(t_1)} = -\infty.$$

$\square$

**Следствие 2.2.** В условиях теоремы 2.1 крайняя точка ветви  $L(t_0, f(t_0))$  биссектрисы  $L(\Gamma)$  при  $f''(t_0 - 0) \neq 0$  вычисляется по формуле

$$(\bar{t}_0, \bar{y}_0) = \left( t_0 - \frac{f'(t_0)(1 + (f'(t_0))^2)}{f''(t_0 - 0)}, f(t_0) + \frac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0 - 0)} \right). \quad (2.8)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Воспользуемся известным результатом [22], согласно которому в рамках условий доказанной теоремы координаты крайней точки  $(\bar{t}_0, \bar{y}_0)$  биссектрисы  $L(\Gamma)$  (т. е. сингулярного множества решения задачи управления по быстродействию) вычисляется по формулам:

$$\bar{t}_0 = t_0 - \frac{f'(t_0)(1 + (f'(t_0))^2)}{\beta_1 f''(t_0 - 0) + \beta_2 f''(t_0 + 0)}, \quad \bar{y}_0 = f(t_0) + \frac{1 + (f'(t_0))^2}{\beta_1 f''(t_0 - 0) + \beta_2 f''(t_0 + 0)}.$$

Здесь  $\beta_1 = \frac{1}{1-\lambda}$ ,  $\beta_2 = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$ ,  $\beta_1 + \beta_2 = 0$ . Поскольку левый маркер  $\lambda = 0$ , то весовые коэффициенты  $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ . Подставив их в равенства, получим (2.8).  $\square$

**З а м е ч а н и е 2.2.** Крайняя точка ветви биссектрисы определяет начальные условия задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в нормальной форме при построении этой ветви в виде интегральной кривой. Процедуры формирования правой части уравнения, методы его численного решения приведены в [12].

### 3. Пример задачи управления по быстродействию

Рассмотрим пример задачи управления по быстродействию с динамикой (1.1), в которой определенный выше перечень структурных элементов является достаточным для аналитического конструирования сингулярного множества решения не только локально, в окрестности цели, но и на всей области рассмотрения.

**П р и м е р 3.1.** Примем в качестве целевого множества  $M$  подграфик функции

$$f(t) = \begin{cases} 1/t, & t \in (0, 1], \\ -t + 2, & t \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (3.1)$$

Заметим, что  $M$  является невыпуклым множеством. Построим функцию оптимального результата на множестве  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \in (0, +\infty), x_2 > f(x_1)\}$ . Анализ показывает, что кривая  $\Gamma = \text{gr } f$  имеет одну псевдовершину  $\mathbf{x}^{(0)} = (t_0, t_2(t_0)) = (1, 1)$ , причем ею является единственная точка кривой, в которой кривизна разрывна.

Докажем, что  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$  — псевдовершина  $\Gamma = \text{gr } f$ . Выберем в окрестности  $t_0 \in \mathbb{R}$  произвольно точки  $t_1$  и  $t_2$  так, чтобы выполнялось тройное неравенство  $0 < t_1 < t_0 < t_2$ . Система уравнений касательных (1.2) при  $0 < t_1 < t_0 = 1$  имеет вид

$$\begin{cases} y_* = -\frac{1}{t_1^2}(t_* - t_1) + \frac{1}{t_1}, \\ y_* = (t_* - t_2) - t_2 + 2. \end{cases}$$

Ее решением является полупрямая  $\Pi = \{(t_*, y_*) \in \mathbb{R}^2: t_* = \frac{2t_1}{t_1+1}, y_* = \frac{2}{t_1+1}, t_1 \in (0, 1)\}$ , лежащая в подграфике функции (3.1).

Уравнение (1.3) для длин подкасательных здесь

$$\left(t_1 - \frac{2t_1}{t_1+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{2}{t_1+1}\right)^2 = \left(t_2 - \frac{2t_1}{t_1+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{2}{t_1+1}\right)^2.$$

Откуда после преобразований получаем

$$2t_2^2 - 8\frac{t_1 t_2}{t_1+1} - \frac{t_1^5 - 3t_1^4 - 4t_1^3 + 4t_1^2 - 3t_1 + 1}{2t_1^2(t_1+1)} = 0.$$

Среди двух ветвей вида  $t_2 = t_2(t_1)$  решения этого уравнения выделяем ту, что удовлетворяет условиям (A1), (A2), а именно

$$t_2(t_1) = \frac{1}{1+t_1} \left( 2t_1 + \left( \frac{1}{t_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right), t_1 < t_0 = 1. \quad (3.2)$$

Непосредственным счетом убеждаемся, что левый маркер

$$\begin{aligned} \lambda = \lim_{t_1 \rightarrow 1-0} t_2' &= \left[ -\frac{1}{(1+t_1)^2} \left( 2t_1 + \left( \frac{1}{t_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{1+t_1} \left( 2 - \frac{1}{t_1^2} \sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} + \left( \frac{1}{t_1} - 1 \right) t_1^3 / \sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right) \right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2-1) = 0, \end{aligned}$$

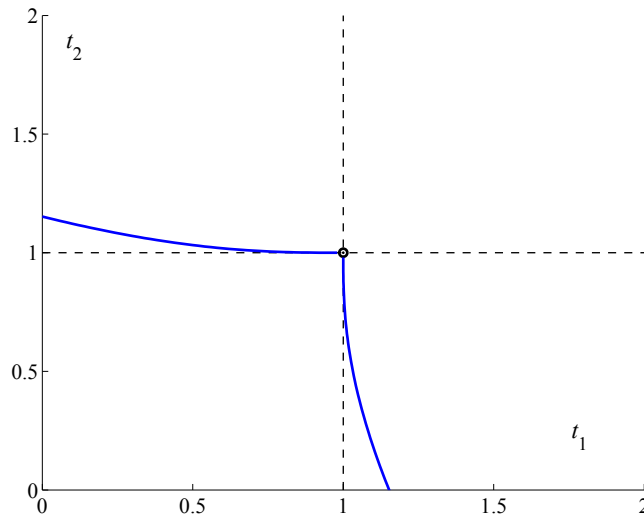
что соответствует доказанной теореме 2.1.

Средствами классического анализа не трудно установить ряд свойств этой функции. Ее график (в плоскости параметров  $t_1, t_2$ ) представлен на Рис. 1. Очевидно, что  $\lim_{t_1 \rightarrow 1-0} t_2(t_1) = 1 = t_0$ . При этом  $t_2(t_1)$  отображает интервал  $(0, 1)$  на интервал  $(1, +\infty)$ . Таким образом,  $t_2(t_1)$  параметризует всю область рассмотрения исходной функции (3.1). Это важное свойство диффеоморфизма, которое позволяет построить разбиение области рассмотрения функции (3.1). Примем

$$\Gamma_0 \triangleq \{ \mathbf{x}^{(0)} = (t_0, t_2(t_0)) = (1, 1) \}, \quad \Gamma_1 \triangleq \{ \mathbf{x}^{(0)} = (x_1, x_1) \in \Gamma, x_1 \in (0, 1) \},$$

$$\Gamma_2 \triangleq \{ \mathbf{x}^{(0)} = (x_1, x_1) \in \Gamma, x_1 \in (1, +\infty) \}.$$

Таким образом,  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , причем эти фрагменты границы целевого множества попарно не пересекаются. Поскольку, производная  $t_2'(t_1) < 0$  для всех  $t_1 \in (0, 1)$ , то  $t_2(t_1)$  является не локальным, а «глобальным» диффеоморфизмом, что дает возможность построить сингулярное множество не только в окрестности цели, но в целом на всей области рассмотрения задачи управления.



**Рис. 1.** Негладкая склейка графиков локальных диффеоморфизмов  $t_2 = t_2(t_1)$  и  $t_1 = t_1(t_2)$ .

Построим ветвь  $L(t_0, f(t_0))$  биссектрисы  $L(\Gamma)$ , заметив, что в силу единственности псевдовершины  $(t_0, f(t_0)) \in \Gamma$  здесь  $L(\Gamma) = L(t_0, f(t_0))$ . Другими словами, биссектриса подграфика функции (3.1) состоит из одной ветви. Ее крайняя точка  $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) = (2, 2)$  находится по формулам (2.8). Система (1.4), определяющая биссектрису, т. е. сингулярное множество рассматриваемой задачи, имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + t_1 - f'(t_1)(x_2 - f(t_1)) = 0, \\ -x_1 + t_2 - f'(t_2)(x_2 - f(t_2)) = 0. \end{cases}$$

В нестационарном случае, когда  $f'(t_0) \neq 0$ , она локально (в нашем случае – глобально) разрешима. Действительно, поскольку система линейная, то

$$\begin{cases} x_2 = f(t_1) + \frac{t_1 - x_1}{f'(t_1)}, \\ x_2 = f(t_2) + \frac{t_2 - x_1}{f'(t_2)}. \end{cases}$$

Тогда ее решением является

$$\begin{cases} x_1 = \frac{f'(t_1)f'(t_2)(f(t_1) - f(t_2)) + t_1f'(t_2) - t_2f'(t_1)}{f'(t_2) - f'(t_1)}, \\ x_2 = \frac{t_2 - t_1 + f'(t_2)f(t_2) - f'(t_1)f(t_1)}{f'(t_2) - f'(t_1)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

В рассматриваемом примере формулы (3.3) позволяют построить сингулярное множество (см. Рис. 2) в явном виде:

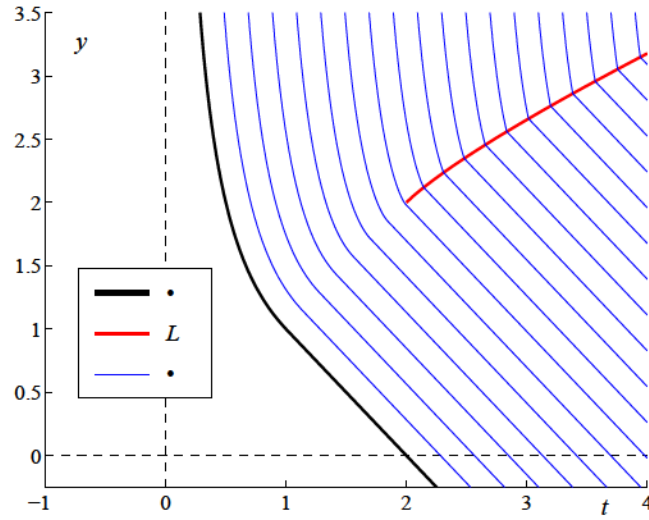
$$\begin{aligned} L(t_0, f(t_0)) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{1}{1 - t_1^2}(2t_2 - 2 - t_1^3 + t_1^{-1}), \right. \\ &\quad \left. x_2 = \frac{1}{1 - t_1^2}(2t_1^2(t_2 - 1) - t_1^3 + t_1^{-1}), t_2 = \frac{1}{t_1 + 1} \left( 2t_1 + (t_1^{-1} - 1)\sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right), t_1 \in (0, 1) \right\} = \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{2}{(1 + t_1)^2} \left( -1 + t_1^{-1}\sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right) + t_1 + t_1^{-1}, \right. \\ &\quad \left. x_2 = \frac{2}{(1 + t_1)^2} \left( -1 + t_1^{-1}\sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right) + t_1 + t_1^{-1}, t_1 \in (0, 1) \right\}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что по построению сингулярное множество  $L(t_0, f(t_0))$  решения задачи управления состоит из точек, имеющих ровно две проекции (ближайшие точки) на целевое множество  $M$ . Тогда множество  $\check{D} = D \setminus L(t_0, f(t_0))$ , т. е. область определения функции оптимального результата за вычетом сингулярного множества, состоит из точек, имеющих ровно одну проекцию на  $M$ .

Здесь  $\check{D}$  не удовлетворяет строгому определению «солнца» [23, 24], тем не менее является множеством, на котором оператор проецирования  $P_M(\mathbf{x})$  точек  $\mathbf{x} \in \check{D}$  на  $M$  имеет сугубо одноэлементные значения.

Найденная перепараметризация (3.2) границы  $\Gamma = \partial M$  и осуществленное на ее основе разбиение такое, что  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , позволяют разбить область  $\check{D}$  на подобласти, в каждой из которых ближайшая точка находится по своей формуле. Примем  $\check{D}_0 = ((t_0, f(t_0)), (\bar{t}_0, \bar{y}_0)]$  — «полуотрезок» прямой, соединяющий псевдовершину  $(t_0, f(t_0)) =$

$(1, 1)$  с крайней точкой  $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) = (2, 2)$  биссектрисы, здесь  $(1, 1) \notin \check{D}_0$ ,  $(2, 2) \in \check{D}_0$ . Составная кривая  $\check{L} = L(t_0, f(t_0)) \cup \check{D}$  делит область рассмотрения  $D$  решения задачи на две подобласти — условно верхнюю  $\check{D}_1$ , состоящую из точек, лежащих выше  $\check{L}$ , и условно нижнюю  $\check{D}_2$ , состоящую из точек, лежащих ниже  $\check{L}$ . По построению  $\check{D} = \check{D}_0 \cup \check{D}_1 \cup \check{D}_2$ . При этом для точек  $x \in \check{D}_0$  ближайшей на  $M$  является псевдовершина  $(t_0, f(t_0)) = (1, 1)$  кривой  $\Gamma$ , для точек  $x \in \check{D}_1$  ближайшей на  $M$  является точка на дуге  $\Gamma_1$ , наконец для точек  $x \in \check{D}_2$  ближайшей на  $M$  является точка на дуге  $\Gamma_2$ .



**Рис. 2.** Сингулярное множество  $L$ , линии уровня  $\Phi$  функции оптимального результата и кривая  $\Gamma$ .

В каждой из выделенных подобластей, расстояние до  $M$  вычисляется по своей формуле, а именно:

$$u(x) = \begin{cases} u_0(x) \triangleq \rho(x, \Gamma_0), & x \in \check{D}_0, \\ u_1(x) \triangleq \rho(x, \Gamma_1), & x \in \check{D}_1, \\ u_2(x) \triangleq \rho(x, \Gamma_2), & x \in \check{D}_2. \end{cases}$$

т. е.

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2}, & x \in \check{D}_0, \\ \inf \{ \rho((x_1, x_2), (t_1, t_1^{-1})) : t_1 \in (0, 1) \}, & x \in \check{D}_1, \\ \inf \{ \rho((x_1, x_2), (t_1, 2 - t_1)) : t_1 \in (1, +\infty) \}, & x \in \check{D}_2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Замыкая по непрерывности оператором минимума, получаем формулу функции оптимального результата на всей области  $D$ :

$$u(x) = \min \{ u_0(x), u_1(x), u_2(x) \}, \quad x \in D.$$

График решения представлен на Рис. 3. Отметим, что заключенные в формуле (3.4) две оптимизационные задачи допускают аналитическое решение. Тривиальными рассуждениями можно показать, что

$$u_2(x) = \inf \{ \rho((x_1, x_2), (t_1, 2 - t_1)) : t_1 \in (1, +\infty) \} = |x_1 + x_2 - 2|/\sqrt{2}.$$

Отыскание значений функции  $u_1(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \check{D}_1$  требует существенно больших усилий, связанных с поиском корней многочлена четвертого порядка. Принципиально это задача решается методом Феррари на основе кубической резольвенты. Имеем

$$\inf \left\{ \rho \left( (x_1, x_2), (t_1, t_1^{-1}) \right) : t_1 \in (0, 1) \right\} = \rho \left( (x_1, x_2), \left( t_1^{(0)}, \frac{1}{t_1^{(0)}} \right) \right).$$

Здесь  $t_1 = t_1^{(0)}$  — корень уравнения

$$t_1^4 - x_1 t_1^3 + x_2 t_1 - 1 = 0. \quad (3.5)$$

При этом  $t_1^{(0)} = y^{(0)} + x_1/4$ , где  $y = y^{(0)}$  — максимальный отрицательный корень алгебраического уравнения 4-го порядка, полученного из (3.5) с помощью преобразования Чирнгауэна (см. [10, с. 119]). На практике  $y = y^{(0)}$  выбирается перебором действительных корней двух квадратичных уравнений:

$$y^2 - \sqrt{2s_0 + \frac{3}{8}x_1^2} \cdot y + \frac{x_2 - x_1^3/8}{2\sqrt{2s_0 + \frac{3}{8}x_1^2}} + s_0 = 0,$$

$$y^2 + \sqrt{2s_0 + \frac{3}{8}x_1^2} \cdot y - \frac{x_2 - x_1^3/8}{2\sqrt{2s_0 + \frac{3}{8}x_1^2}} + s_0 = 0.$$

В этих уравнениях  $s = s_0$  — любой (например, действительный) корень резольвенты уравнения 4-го порядка, полученного из (3.5) преобразованием Чирнгауэна. В рассматриваемом примере резольвента — алгебраическое уравнение третьего порядка

$$s^3 + \frac{3x_1^2 s^2}{16} - \left( \frac{x_1 x_2}{4} - \frac{3x_1^4}{256} - 1 \right) s + \frac{x_1^8}{4096} - \frac{x_1^3 x_2}{64} + \frac{3x_1^2}{16} - \frac{x_2^2}{8} = 0.$$

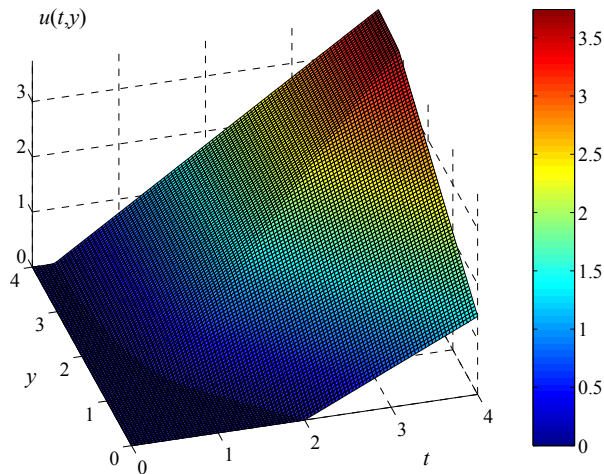


Рис. 3. График функции оптимального результата  $u(\mathbf{x})$ .

## References

- [1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М., 1961. [L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mischenko, *Matematicheskaya Teoriya Optimal'nyh Protsessov*, Fizmatgiz, Moscow, 1961 (In Russian)].
- [2] G. Leitmann, *An Introduction to Optimal Control*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [3] А. Брайсон, Ю.-ши. Хо, *Прикладная теория оптимального управления*, Мир, М., 1972; англ. пер.: A. E. Bryson, Yu-Chi. Ho, *Applied Optimal Control Optimization, Estimation and Control*, Blaisdell Publishing Company, Ocland, 1969.
- [4] В. Г. Болтянский, *Математические методы оптимального управления*, Наука, М., 1969. [V. G. Boltyansky, *Matematicheskie Metody Optimal'nogo Upravleniya*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].
- [5] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton univ. press, New Jersey, 1957.
- [6] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, *Pozicionnye Differencialnye Iгры*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].
- [7] А. И. Субботин, *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации*, Институт компьютерных технологий, Москва-Ижевск, 2003; англ. пер.: A. I. Subbotin, *Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective*, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [8] M. G. Crandall, P. L. Lions, "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations", *em Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**:1 (1983), 1–42.
- [9] P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, V. N. Ushakov, "Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **263**:S2 (2008), 191–201.
- [10] J. W. Bruce, P. J. Giblin, *Curves and singularities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [11] В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, "Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.*, **26**:1 (2016), 95–120. [V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii, " $\alpha$ -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **26**:1 (2016), 95–120 (In Russian)].
- [12] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, "Построение решения задачи управления по быстродействию при нарушении гладкости кривизны границы целевого множества", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **53** (2019), 98–114. [P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, "Construction of a solution of a velocity problem in case of violation of the smoothness of the curvature of the target set boarder", *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, **53** (2019), 98–114 (In Russian)].
- [13] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, "Конструирование негладкого решения задачи управления по быстродействию при низком порядке гладкости границы целевого множества", *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 108–119. [P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, "Construction of a nonsmooth solution in a time-optimal problem with a low order of smoothness of the boundary of the target set", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **25**:1 (2019), 108–119 (In Russian)].
- [14] Th. Bröcker, L. Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambrifge University Press, Cambridge, 1975.
- [15] В. М. Закалюкин, "Огибающие семейств волновых фронтов и теория управления", *Тр. МИ-АН*, **209** (1995.), 133–142. [V. M. Zakalyukin, "Envelopes of wave front families, and control theory", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, **209** (1995), 132–142 (In Russian)].
- [16] В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Наука, М., 1990. [V. F. Dem'yanov, A. M. Rubinov, *Foundations of Nonsmooth Analysis and Quasi-Differential Calculus*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russian)].
- [17] С. И. Дудов, "Дифференцируемость по направлениям функции расстояния", *Матем. Сборник*, **186**:3 (1995), 29–52; англ. пер.: S. I. Dudov, "Directional differentiability of the distance function", *Sbornik: Mathematics*, **186**:3 (1995), 337–358.

- [18] A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev, “Construction of the optimal outcome function for a time-optimal problem on the basis of a symmetry set”, *Automation and Remote Control*, **70:7** (2009), 1132–1139.
- [19] А. А. Успенский, “Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала”, *Труды Института математики и механики*, **21:1** (2015), 250–263. [A. A. Uspenskii, “Necessary conditions for the existence of pseudovertrices of the boundary set in the Dirichet problem for the eikonal equation”, *Tr. Inst. Mat. Mekh*, **21:1** (2015), 250–263 (In Russian)].
- [20] А. А. Успенский, П. Д. Лебедев, “Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества”, *Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. Ижевск*, **28:1** (2018), 59–73. [A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev, “Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **28:1** (2018), 59–73 (In Russian)].
- [21] A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev, “On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **272:S1** (2011), 255–270.
- [22] A. A. Uspenskii, “Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **291:S1** (2015), 239–254.
- [23] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Некоторые свойства чебышёвских множеств”, *Докл. АН СССР*, **118:1** (1958), 17–19. [N. V. Efimov, S. B. Stečkin, “Some properties of Čebyšev sets”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, **118** (1958), 17–19 (In Russian)].
- [24] А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, “Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения”, *УМН*, **71:1** (2016), 3–84; англ. пер.: A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov, “Connectedness and solarly in problems of best and near-best approximation”, *Russian Mathematical Surveys*, **71:1** (2016), 1–77.

#### Информация об авторах

**Лебедев Павел Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: pleb@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

**Успенский Александр Александрович**, доктор физико-математических наук, зав. сектором. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: uspen@imm.uran.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

Конфликт интересов отсутствует.

#### Для контактов:

Успенский Александр Александрович  
 E-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 30.04.2020 г.  
 Поступила после рецензирования 25.06.2020 г.  
 Принята к публикации 19.11.2020 г.

#### Information about the authors

**Pavel D. Lebedev**, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: pleb@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

**Alexander A. Uspenskii**, Doctor of Physics and Mathematics, Chief of a Sector. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation. E-mail: uspen@imm.uran.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

There is no conflict of interests.

#### Corresponding author:

Alexander A. Uspenskii  
 E-mail: uspen@imm.uran.ru

Received 30.04.2020  
 Reviewed 25.06.2020  
 Accepted for press 19.11.2020

© Lemita S., Guebbai H., Sedka I., Aissaoui M.Z., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-387-400

UDC 519.642.4

## New method for the numerical solution of the Fredholm linear integral equation on a large interval

Samir LEMITA<sup>1</sup>, Hamza GUEBBAI<sup>2</sup>, Ilyes SEDKA<sup>2</sup>, Mohamed Zine AISSAOUI<sup>2</sup><sup>1</sup> Higher Normal School of Ouargla

B.P. 398, Ennacer St., Ouargla 30000, Algeria

<sup>2</sup> University May 8, 1945 – Guelma

B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

## Новый метод численного решения линейного интегрального уравнения Фредгольма на большом интервале

Самир ЛЕМИТА<sup>1</sup>, Хамза ГЕББАЙ<sup>2</sup>, Ильес СЕДКА<sup>2</sup>, Мохамед Зин АИССАУИ<sup>2</sup><sup>1</sup> Высшая нормальная школа Уаргла

30000, Алжир, Уаргла, ул. Еннасер, П.Я. 398

<sup>2</sup> Университет 8 мая 1945 г. – Гельма

24000, Алжир, Гельма, П.Я. 401

**Abstract.** The traditional numerical process to tackle a linear Fredholm integral equation on a large interval is divided into two parts, the first is discretization, and the second is the use of the iterative scheme to approach the solutions of the huge algebraic system. In this paper we propose a new method based on constructing a generalization of the iterative scheme, which is adapted to the system of linear bounded operators. Then we don't discretize the whole system, but only the diagonal part of the system. This system is built by transforming our integral equation. As discretization we consider the product integration method and the Gauss–Seidel iterative method as iterative scheme. We also prove the convergence of this new method. The numerical tests developed show its effectiveness.

**Keywords:** Fredholm equation of the second kind; weakly singular kernel; large integration interval; Gauss–Seidel method; bounded operators matrix; product integration method

**For citation:** Lemita S., Guebbai H., Sedka I., Aissaoui M.Z. Novyy metod chislennoy resheniya lineynogo integral'nogo uravneniya Fredgol'ma na bol'shom intervale [New method for the numerical solution of the Fredholm linear integral equation on a large interval]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 387–400. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-387-400.

**Аннотация.** Традиционное численное решение линейного интегрального уравнения Фредгольма на большом интервале делится на два этапа: первый — дискретизация, второй — использование итерационной схемы для приближения к решению алгебраической системы большой размерности (полученной на первом этапе). В этой статье мы предлагаем новый метод, основанный на построении обобщения итерационной схемы, которая адаптирована к системе линейных ограниченных операторов, при этом мы не дискретизируем всю систему, а только ее диагональную часть. Рассматриваемая система строится путем преобразования исходного интегрального уравнения. В качестве дискретизации мы рассматриваем метод интегрирования произведения, а в качестве итерационной схемы — итерационный метод Гаусса–Зейделя. Мы также анализируем сходимость этого нового метода. Численные тесты показывают его эффективность.

**Ключевые слова:** уравнение Фредгольма второго рода; слабо сингулярное ядро; большой интервал интегрирования; метод Гаусса–Зейделя; матрица ограниченных операторов; метод интегрирования произведений

**Для цитирования:** Лемита С., Геббай Х., Седка И., Аиссауи М.З. Новый метод численного решения линейного интегрального уравнения Фредгольма на большом интервале // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 387–400. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-387-400. (In Engl., Abstr. in Russian)

## Introduction

Numerical approximation of linear Fredholm integral equations leads to linear algebraic systems. The size of the matrices obtained in the linear systems depends on the order of convergence. So, we have to solve a huge system to get a small error. However, this system can not be solved directly, so we use the Gauss–Seidel iterative scheme to approach its solutions. For this iterative method, many variants have been developed [1–6].

In this paper we propose a new method. First we make our integral equation into a system of the following form:

$$\begin{cases} \lambda u_1 = T_{11}u_1 + T_{12}u_2 + \dots + T_{1N}u_N + f_1, \\ \lambda u_2 = T_{21}u_1 + T_{22}u_2 + \dots + T_{2N}u_N + f_2, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ \lambda u_N = T_{N1}u_1 + T_{N2}u_2 + \dots + T_{NN}u_N + f_N, \end{cases} \quad (0.1)$$

where  $\{T_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$  is a family of bounded operators. Next we construct a generalization of the Gauss–Seidel method adapted to (0.1), after that we discretize only the diagonal part of this system to approach a solution of the initial equation.

In [7] and [8], a generalization of Jacobi’s method adapted to the same system (0.1) has been constructed in order to approach a regular and a weakly singular Fredholm integral equation, respectively. The numerical study of those papers presents very good results. In this paper, in a similar way, we construct a generalization of Gauss–Seidel method to approach a linear Fredholm integral equation of the second kind with weakly singular kernel defined on a large interval.

Let  $X = C([0, \tau])$  be the Banach space of continuous functions equipped with the norm

$$\forall x \in X \quad \|x\|_X = \max_{0 \leq t \leq \tau} |x(t)|,$$

where  $[0, \tau]$  is a large interval of  $\mathbb{R}$ , i.e.  $\tau \gg 0$ . Let  $T : X \rightarrow X$  be the integral operator defined by

$$\forall x \in X \quad Tx(t) = \int_0^\tau g(|s - t|)x(s)ds, \quad t \in [0, \tau],$$

where  $g : (0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$  is a weakly singular function in the following sense:

( $\mathcal{H}$ ) the function  $g$  is continuous and decreasing on  $(0, \tau]$ , summable on  $[0, \tau]$ ,  $g(s) \geq 0$  for all  $s \in (0, \tau]$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0+} g(s) = +\infty$ .

Then  $T : X \rightarrow X$  is a bounded operator [9], and the norm of  $T$  is given by

$$\|T\|_{BL(X)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_X = \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_0^\tau g(|s - t|)ds = 2 \int_0^{\tau/2} g(s)ds,$$

where  $BL(X)$  is the Banach space of all bounded operators from  $X$  to itself. Let  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  be such that

$$|\lambda| = 2\mu \int_0^{\tau/2} g(s)ds, \quad \mu > 1,$$

then  $\lambda$  is in the resolvent set of  $T$ . By Neumann's theorem, we obtain that  $(\lambda I - T)^{-1}$  exists, and

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\|_{BL(X)} \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{BL(X)}},$$

where  $I$  is the identity operator on  $X$ . Then the integral equation

$$\lambda u(t) = \int_0^\tau g(|s - t|)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0, \tau], \quad (0.2)$$

has a unique solution  $u \in X$  for every  $f \in X$ . Equation (0.2) is of great interest to mathematicians [9–11]. Our goal is to research this equation.

The paper is organized as follows. In Section 2, we introduce some notation and preliminary results. In Section 3, by using the previous results, we show how to formulate system (0.1). In Section 4, we treat our method of generalization of the Gauss–Seidel method in collocation with the product integration method. Finally, we give numerical results developed and compare our method with the conventional Gauss–Seidel method.

## 1. Notions and preliminary results

For  $N \geq 2$ , we define a subdivision of the interval  $[0, \tau]$  by:

$$H = \frac{\tau}{N}, \quad t_j = (j - 1)H, \quad 1 \leq j \leq N + 1.$$

Let  $\left\{ \left( X_j, \|\cdot\|_j \right) \right\}_{j=1}^N$ ,  $N \geq 2$ , be a family of Banach spaces, where  $X_j = C([t_j, t_{j+1}])$  is associated with the following norm:

$$\forall x \in X_j \quad \|x\|_j = \max_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |x(t)|.$$

For  $1 \leq i, j \leq N$ , we specify the Banach space  $\mathbb{B}_{ij} = BL(X_j, X_i)$  of all bounded operators from  $X_j$  to  $X_i$  with the operator norm

$$\forall S \in \mathbb{B}_{ij} \quad \|S\|_{ij} = \sup_{\|x\|_j=1} \|Sx\|_i.$$

Let  $\tilde{X}_N = \prod_{j=1}^N X_j$  be the product Banach space equipped with the norm

$$\forall Z = (z_1, \dots, z_N) \in \tilde{X}_N \quad \|Z\|_{\tilde{X}_N} = \max_{1 \leq j \leq N} \|z_j\|_j.$$

Let  $\tilde{\mathbb{B}}_N = BL(\tilde{X}_N)$  be the Banach space of all bounded operators from  $\tilde{X}_N$  to itself associated with the operator norm

$$\forall S \in \tilde{\mathbb{B}}_N \quad \|S\| = \sup_{\|x\|_{\tilde{X}_N}=1} \|Sx\|_{\tilde{X}_N}.$$

Let  $\{T_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$  be a family of operators defined by:

$$T_{ij} : C([t_j, t_{j+1}]) \rightarrow C([t_i, t_{i+1}]), \quad x \mapsto T_{ij}x(t) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(|s - t|)x(s)ds, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

It is clear that  $T_{ij} \in \mathbb{B}_{ij}$  for all  $1 \leq i, j \leq N$ , and

$$\|T_{ij}\|_{ij} = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(|s - t|)ds.$$

For all  $1 \leq i \leq N$ ,  $\|T_{ii}\|_{ii} < |\lambda|$ , then  $(\lambda I_{ii} - T_{ii})$  is a bijection on  $X_i$ , its inverse is a bounded linear operator (see [11]), and

$$\|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}},$$

where  $I_{ii}$  is the identity operator on  $X_i$ .

**Lemma 1.1.** *For all  $1 \leq i, j \leq N$ , we have:*

$$\|T_{ij}\|_{ij} = \begin{cases} 2 \int_0^{H/2} g(s)ds, & \text{if } i = j, \\ \int_{t_j - t_{i+1}}^{t_{j+1} - t_{i+1}} g(s)ds, & \text{if } i < j, \\ \int_{t_i - t_{j+1}}^{t_i - t_j} g(s)ds, & \text{if } i > j. \end{cases}$$

**P r o o f.** Consider the following function  $G : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$  that will play an important role in the proof:

$$G(t) := \int_0^t g(s)ds.$$

**Case 1:  $i=j$ .** Let  $y(t) : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by

$$y(t) := \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(|s - t|)ds = \int_{t_i}^t g(t - s)ds + \int_t^{t_{i+1}} g(s - t)ds = G(t - t_i) + G(t_{i+1} - t).$$

The function  $y(t)$  is symmetric with respect to  $\frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ , and

$$y'(t) = g(t - t_i) - g(t_{i+1} - t).$$

Obviously,  $y'(t) > 0$  if  $t_i < t < \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ , and  $y'(t) < 0$  if  $\frac{t_i + t_{i+1}}{2} < t < t_{i+1}$ . Hence

$$\|T_{ii}\|_{ii} = \max_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} y(t) = y\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) = 2 \int_0^{H/2} g(s)ds.$$

**Case 2:  $i < j$ .** Let  $y(t) : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by

$$y(t) := \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(s - t)ds = G(t_{j+1} - t) - G(t_j - t).$$

Then

$$y'(t) = g(t_j - t) - g(t_{j+1} - t) > 0 \quad \text{for all } t_i < t < t_{i+1}.$$

Hence

$$\|T_{ij}\|_{ij} = \max_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} y(t) = y(t_{i+1}) = \int_{t_j - t_{i+1}}^{t_{j+1} - t_{i+1}} g(s) ds.$$

**Case 3:  $i > j$ .** Let  $y(t) : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  be defined by

$$y(t) := \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(t - s) ds = G(t - t_j) - G(t - t_{j+1}).$$

Then

$$y'(t) = g(t - t_j) - g(t - t_{j+1}) < 0 \quad \text{for all } t_i < t < t_{i+1}.$$

Hence

$$\|T_{ij}\|_{ij} = \max_{t_i \leq t \leq t_{i+1}} y(t) = y(t_i) = \int_{t_i - t_{j+1}}^{t_i - t_j} g(s) ds.$$

□

**Theorem 1.1.** For integers  $N \geq 2$ ,  $1 \leq i \leq N$ , consider the positive parameters  $\underline{\gamma}_i$ ,  $\bar{\gamma}_i$ ,  $\beta_H(i, N)$  and  $\beta_*$  given by:

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_i &= \frac{\sum_{j < i} \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}}, & \bar{\gamma}_i &= \frac{\sum_{j > i} \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}}, \\ \beta_H(i, N) &= \underline{\gamma}_i + \bar{\gamma}_i, & \beta_* &= \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\bar{\gamma}_i}{1 - \underline{\gamma}_i}. \end{aligned}$$

We have

$$\beta_H(i, N) < 1 \quad \text{and} \quad \beta_* < 1.$$

**P r o o f.** Using the formulae obtained in Lemma 1.1, we get

$$\begin{aligned} \beta_H(i, N) &= \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \|T_{ij}\|_{ij} + \sum_{j=i+1}^N \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_i - t_{j+1}}^{t_i - t_j} g(s) ds + \sum_{j=i+1}^N \int_{t_j - t_{i+1}}^{t_{j+1} - t_{i+1}} g(s) ds}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} \\ &= \frac{\int_0^{t_i} g(s) ds + \int_0^{\tau - t_{i+1}} g(s) ds}{2\mu \int_0^{\tau/2} g(s) ds - 2 \int_0^{H/2} g(s) ds} = \frac{y_H(t_i)}{2\mu \int_0^{\tau/2} g(s) ds - 2 \int_0^{H/2} g(s) ds}, \end{aligned}$$

where

$$y_H(t_i) := \int_0^{t_i} g(s) ds + \int_0^{\tau - t_{i+1}} g(s) ds = G(t_i) + G(\tau - t_{i+1}), \quad 1 \leq i \leq N.$$

The sequence  $y_H(t_i)$  is symmetric with respect to  $\frac{\tau}{2}$  or  $\frac{\tau}{2} - H$ , and

$$y'_H(t_i) = g(t_i) - g(\tau - t_{i+1}).$$

It is obvious, that  $y'_H(t) > 0$  if  $0 < t_i < \frac{\tau}{2} - H$ , and  $y'_H(t) < 0$  if  $\frac{\tau}{2} < t_i < \tau$ . Hence

$$\max_{1 \leq i \leq N} y_H(t_i) = y_H\left(\frac{\tau}{2} - H\right) = y_H\left(\frac{\tau}{2}\right) = \int_0^{\tau/2} g(s)ds + \int_0^{\tau/2 - H} g(s)ds.$$

As  $N \geq 2$  then  $H \leq \frac{\tau}{2}$ , so we obtain

$$\begin{aligned} \beta_H(i, N) &\leq \frac{\max_{1 \leq i \leq N} y_H(t_i)}{2\mu \int_0^{\tau/2} g(s)ds - 2 \int_0^{H/2} g(s)ds}, \\ &\leq \frac{\int_0^{\tau/2} g(s)ds + \int_0^{\tau/2 - H} g(s)ds}{2\mu \int_0^{\tau/2} g(s)ds - 2 \int_0^{H/2} g(s)ds} \leq \frac{1}{\mu} < 1. \end{aligned}$$

Finally, since  $\beta_H(i, N) < 1$ , it is clear that  $\beta_* < 1$ .  $\square$

## 2. Formulation of system (0.1)

In this section, we see how to formulate system (0.1) according to our integral equation. Let  $\{u_j\}_{1 \leq j \leq N}$  be a family of continuous functions such that

$$u_j \in X_j, \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad u_j(t) = u(t).$$

We have

$$\lambda u(t) = \int_0^\tau g(|s - t|)u(s)ds + f(t) = \sum_{j=1}^N \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(|s - t|)u_j(s)ds + f(t), \quad t \in [0, \tau],$$

which is equivalent to the same system (0.1) described in the introduction:

$$\begin{cases} \lambda u_1(t) = T_{11}u_1(t) + T_{12}u_2(t) + \dots + T_{1N}u_N(t) + f_1(t), & t \in [t_1, t_2], \\ \lambda u_2(t) = T_{21}u_1(t) + T_{22}u_2(t) + \dots + T_{2N}u_N(t) + f_2(t), & t \in [t_2, t_3], \\ \vdots & \vdots \\ \lambda u_N(t) = T_{N1}u_1(t) + T_{N2}u_2(t) + \dots + T_{NN}u_N(t) + f_N(t), & t \in [t_N, t_{N+1}], \end{cases}$$

where

$$f_j \in X_j, \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad f_j(t) = f(t).$$

This system is equivalent to the following linear equation:

$$\lambda U = M_T U + F,$$

where  $M_T : \tilde{X}_N \rightarrow \tilde{X}_N$  is the operator matrix defined by

$$M_T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1N} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{N1} & T_{N2} & \dots & T_{NN} \end{pmatrix},$$

$F = (f_1, \dots, f_N)$  is given in  $\tilde{X}_N$  and  $U = (u_1, \dots, u_N)$  is to be found in the same space. It is clear that  $M_T$  is a bounded operator. We have

$$\begin{aligned} \|M_T\| &= \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \|T_{ij}\|_{ij} = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(|s-t|) ds \\ &= \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_0^\tau g(|s-t|) ds < |\lambda|. \end{aligned}$$

We use Neumann's theorem [12] to conclude that  $(\lambda I_N - M_T)^{-1}$  exists and

$$\|(\lambda I_N - M_T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|M_T\|},$$

where  $I_N$  is the identity operator on  $\tilde{X}_N$ . This assures the existence and uniqueness of the solution  $U = (u_1, \dots, u_N)$  of the system (0.1) for all  $F = (f_1, \dots, f_N)$  in  $\tilde{X}_N$ .

### 3. Generalized Gauss–Seidel method

In this section, we construct a generalization of the Gauss–Seidel method suitable for our system (0.1).

#### 3.1. Definition of an iterative sequence and its convergence

Consider the following iterative scheme:

$$\begin{cases} \lambda U^k = L_T U^k + (M_T - L_T) U^{k-1} + F, & k \geq 1, \\ U^0 \in \tilde{X}_N, \end{cases}$$

where  $L_T$  is the lower triangular matrix part of  $M_T$  defined by

$$L_T = \begin{pmatrix} T_{11} & O_{12} & \dots & O_{1N} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & O_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_{N1} & T_{N2} & \dots & T_{NN} \end{pmatrix}.$$

For  $1 \leq i, j \leq N$ ,  $O_{ij} : X_j \rightarrow X_i$  is the null operator, i.e.  $\forall x \in X_j$ ,  $O_{ij}x = 0_{X_i}$ . We can write the precedent iterative scheme in a simple and clear formula: for  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\begin{cases} \lambda u_i^k(t) = T_{ii}u_i^k(t) + \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}u_j^k(t) + \sum_{j=i+1}^N T_{ij}u_j^{k-1}(t) + f_i(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \quad k \geq 1, \\ u_i^0 \in X_i, \end{cases}$$

with

$$\sum_{j=1}^0 T_{ij}u_j^k = \sum_{j=N+1}^N T_{ij}u_j^k = 0_{X_i}.$$

Our goal is to prove that  $U^k \rightarrow U$  for  $k \rightarrow \infty$ .

**Theorem 3.1.** *We have*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} = 0.$$

P r o o f. For all  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\begin{aligned}\lambda u_i &= T_{ii}u_i + \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}u_j + \sum_{j=i+1}^N T_{ij}u_j + f_i, \\ (\lambda I_{ii} - T_{ii})u_i &= \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}u_j + \sum_{j=i+1}^N T_{ij}u_j + f_i, \\ u_i &= (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}u_j + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N T_{ij}u_j + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} f_i.\end{aligned}$$

In the same way, we get

$$u_i^k = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}u_j^k + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N T_{ij}u_j^{k-1} + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} f_i.$$

Then

$$(u_i^k - u_i) = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}(u_j^k - u_j) + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N T_{ij}(u_j^{k-1} - u_j).$$

Therefore

$$\begin{aligned}\|u_i^k - u_i\|_i &\leq \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \sum_{j=1}^{i-1} \|T_{ij}\|_{ij} \|u_j^k - u_j\|_j + \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \sum_{j=i+1}^N \|T_{ij}\|_{ij} \|u_j^{k-1} - u_j\|_j \\ &\leq \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} \|u_j^k - u_j\|_j + \frac{\sum_{j=i+1}^N \|T_{ij}\|_{ij}}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} \|u_j^{k-1} - u_j\|_j \\ &\leq \underline{\gamma}_i \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\gamma}_i \|U^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}.\end{aligned}$$

Let  $i_m \in \mathbb{N}$  be such that

$$\|u_{i_m}^k - u_{i_m}\|_{X_{i_m}} = \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

We obtain

$$\begin{aligned}\|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \underline{\gamma}_{i_m} \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\gamma}_{i_m} \|U^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ (1 - \underline{\gamma}_{i_m}) \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \bar{\gamma}_{i_m} \|U^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \frac{\bar{\gamma}_{i_m}}{1 - \underline{\gamma}_{i_m}} \|U^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ \|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \beta_* \|U^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}.\end{aligned}$$

Repeating this operation  $k$  times, we find that

$$\|U^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \beta_*^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

Now we use the fact that  $\beta_* < 1$  to conclude the proof.  $\square$

To get an approximation of the solution  $u$ , we construct it, for the  $k$ -th iteration, using the following formula:

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}) \quad u(t) \approx u_i^k(t), \quad 1 \leq i \leq N,$$

and  $u(b) = u_N^k(b)$ .

### 3.2. Product integration method

In practice, for  $1 \leq i \leq N$ ,  $(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}$  can not be found exactly. For that, we need to approximate it using product integration method [10]. It will be easy, because, for  $1 \leq i \leq N$ ,  $[t_i, t_{i+1}]$  is not very large compared to  $[0, \tau]$ .

First of all, we study the following equation in order to explain the product integration method: for  $1 \leq i \leq N$

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}] \quad \lambda u_i(t) = T_{ii}u_i(t) + g_i(t).$$

It is clear that  $u_i \in X_i$  exists and is unique for all  $g_i \in X_i$ . For  $n \geq 2$ ,  $1 \leq i \leq N$ , we define a subdivision of  $[t_i, t_{i+1}]$  by

$$h_n = \frac{H}{n-1}, \quad s_{i,p} = t_i + (p-1)h_n, \quad 1 \leq p \leq n.$$

For  $1 \leq i \leq N$ , let  $\{e_{i,p}(s)\}_{p=1}^n \subset X_i$  be such that for  $2 \leq p \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} e_{i,p}(s) &= \begin{cases} 1 - \frac{|s - s_{i,p}|}{h_n}, & s_{i,p-1} \leq s \leq s_{i,p+1} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ e_{i,1}(s) &= \begin{cases} \frac{s_{i,2} - s}{h_n}, & s_{i,1} \leq s \leq s_{i,2} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ e_{i,n}(s) &= \begin{cases} \frac{s - s_{i,n-1}}{h_n}, & s_{i,n-1} \leq s \leq s_{i,n} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Let  $T_{ii,n} : X_i \rightarrow X_i$  be a linear operator defined by

$$\forall x \in X_i \quad T_{ii,n}x(t) = \sum_{p=1}^n w_{i,p}(t)x(s_{i,p}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

with weights

$$w_{i,p}(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(|s - t|)e_{i,p}(s)ds.$$

From [10], it follows that for  $1 \leq i \leq N$ ,  $T_{ii,n} \in \mathbb{B}_{ii}$  and

$$\|T_{ii,n}\|_{ii} \leq 2 \int_0^{H/2} g(s)ds.$$

Let us denote

$$\delta_H := 2 \int_0^{H/2} g(s)ds.$$

**Theorem 3.1.** *For all  $1 \leq i \leq N$ , for  $n$  large enough,  $(\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1}$  exists and*

$$\|(\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1}\|_{ii} \leq \kappa,$$

where  $\kappa$  is a positive constant independent of  $i$  and  $n$ .

P r o o f. For all  $1 \leq i \leq N$ , using Lemma 4.1.2 [10], we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_{ii} - T_{ii,n})T_{ii,n}\|_{ii} = 0.$$

From Theorem 4.1.2 [10], we obtain that  $(\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1}$  exists for  $n$  large enough and

$$\|(\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1}\|_{ii} \leq \frac{1 + \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \|T_{ii,n}\|_{ii}}{|\lambda| - \|(T_{ii} - T_{ii,n})T_{ii,n}\|_{ii}}.$$

But

$$\|T_{ii,n}\|_{ii} \leq \delta_H, \quad \|(\lambda I - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T_{ii}\|_{ii}} = \frac{1}{|\lambda| - \delta_H}.$$

Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \|T_{ii,n}\|_{ii}}{|\lambda| - \|(T_{ii} - T_{ii,n})T_{ii,n}\|_{ii}} \leq |\lambda|^{-1} (1 + (|\lambda| - \delta_H)^{-1} \delta_H).$$

To conclude the proof, we take

$$\kappa = 1 + |\lambda|^{-1} (1 + (|\lambda| - \delta_H)^{-1} \delta_H).$$

□

For  $1 \leq i \leq N$ , for  $n$  large enough, let  $u_{i,n} \in X_i$  be a unique solution of the following equation:

$$\lambda u_{i,n}(t) = T_{ii,n}u_{i,n}(t) + g_i(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

**Theorem 3.2.** For  $1 \leq i \leq N$ , for  $n$  large enough,

$$\|u_i - u_{i,n}\|_i \leq \delta_H \kappa \omega(h_n, u_i),$$

where  $\omega(h_n, u_i)$  is the modulus of continuity of  $u_i(t)$  on  $[t_i, t_{i+1}]$  defined by

$$\omega(h_n, u_i) = \max_{|s-t| \leq h_n} |u_i(t) - u_i(s)|.$$

P r o o f. Follows from Theorem 4.2.1 in [10] and the fact that

$$u_i - u_{i,n} = (\lambda I_{ii} - T_{ii,n})^{-1} (T_{ii} - T_{ii,n}) u_i.$$

□

For  $1 \leq i \leq N$ ,  $u_{i,n}$  is calculated by the formula

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}] \quad u_{i,n}(t) = \frac{1}{\lambda} \left( \sum_{p=1}^n w_{i,p}(t) x_p + g_i(t) \right),$$

where  $x = (x_1, \dots, x_p)$  is a unique solution of the system

$$\lambda x = Ax + b, \quad A_{qp} = w_{i,p}(s_{i,q}), \quad b_q = g_i(s_{i,q}), \quad 1 \leq q, p \leq n.$$

We define the iterative scheme of the product integration version of the generalized Gauss–Seidel method corresponding to our integral equation by

$$\begin{cases} \lambda u_{i,n}^k(t) = T_{ii,n}u_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}u_{j,n}^k(t) + \sum_{j=i+1}^N T_{ij}u_{j,n}^{k-1}(t) + f_i(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \quad k \geq 1, \\ u_i^0 \in X_i, \end{cases}$$

for  $1 \leq i \leq N$  and  $n \geq 2$ . For  $k \geq 0$ , we define  $U_n^k = (u_{1,n}^k, u_{2,n}^k, \dots, u_{N,n}^k) \in \tilde{X}_N$ . For technical reasons, we need to define  $\hat{U}_n^k = (\hat{u}_{1,n}^k, \hat{u}_{2,n}^k, \dots, \hat{u}_{N,n}^k) \in \tilde{X}_N$ : let for  $1 \leq i \leq N$  and  $n \geq 2$ ,

$$\begin{cases} \lambda \hat{u}_{i,n}^k(t) = T_{ii}\hat{u}_{i,n}^k(t) + \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}u_{j,n}^k(t) + \sum_{j=i+1}^N T_{ij}u_{j,n}^{k-1} + f_i(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \quad k \geq 1, \\ u_i^0 \in X_i. \end{cases}$$

**Theorem 3.3.** For  $k \geq 1$ ,  $n \geq 2$ , we have

$$\|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \frac{\vartheta \delta_H \kappa}{1 - \beta_*} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq l \leq k}} \omega(h_n, \hat{u}_{i,n}^l) + \beta_*^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N},$$

where  $\vartheta := \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|M_T\|}$ .

**P r o o f.** We have, for  $n \geq 2$ ,

$$\|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \|U_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \|\hat{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

But, for  $1 \leq i \leq N$ ,

$$(\hat{u}_{i,n}^k - u_i) = (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} T_{ij}(u_{j,n}^k - u_j) + (\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1} \sum_{j=i+1}^N T_{ij}(u_{j,n}^{k-1} - u_j).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_{i,n}^k - u_i\|_i &\leq \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \sum_{j=1}^{i-1} \|T_{ij}\|_{ij} \|u_{j,n}^k - u_j\|_j \\ &\quad + \|(\lambda I_{ii} - T_{ii})^{-1}\|_{ii} \sum_{j=i+1}^N \|T_{ij}\|_{ij} \|u_{j,n}^{k-1} - u_j\|_j \\ &\leq \underline{\gamma}_i \|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\gamma}_i \|U_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}. \end{aligned}$$

Let  $i_m \in \mathbb{N}$  be such that

$$\|\hat{u}_{i_m,n}^k - u_{i_m}^k\|_{X_{i_m}} = \|\hat{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

We obtain

$$\|\hat{U}_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} \leq \underline{\gamma}_{i_m} \|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\gamma}_{i_m} \|U_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}.$$

Then

$$\begin{aligned}\|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \|U_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \underline{\gamma}_{i_m} \|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} + \bar{\gamma}_{i_m} \|U_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}, \\ \|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \frac{1}{1 - \underline{\gamma}_{i_m}} \|U_n^k - \hat{U}_n^k\|_{\tilde{X}_N} + \frac{\bar{\gamma}_{i_m}}{1 - \underline{\gamma}_{i_m}} \|U_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N} \\ &\leq \vartheta \delta_H \kappa \max_{1 \leq i \leq N} \omega(h_n, \hat{u}_{i,n}^k) + \beta_* \|U_n^{k-1} - U\|_{\tilde{X}_N}.\end{aligned}$$

Repeating the last inequality,

$$\begin{aligned}\|U_n^k - U\|_{\tilde{X}_N} &\leq \vartheta \delta_H \kappa \max_{1 \leq i \leq N} \omega(h_n, \hat{u}_{i,n}^k) + \beta_* \left( \vartheta \delta_H \kappa \max_{1 \leq i \leq N} \omega(h_n, \hat{u}_{i,n}^{k-1}) + \beta_* \|U_n^{k-2} - U\|_{\tilde{X}_N} \right) \\ &\leq \vartheta \delta_H \kappa \sum_{l=0}^{k-1} \beta_*^l \max_{1 \leq i \leq N} \omega(h_n, \hat{u}_{i,n}^{k-l}) + \beta_*^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N} \\ &\leq \frac{\vartheta \delta_H \kappa}{1 - \beta_*} \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq l \leq k}} \omega(h_n, \hat{u}_{i,n}^l) + \beta_*^k \|U^0 - U\|_{\tilde{X}_N}.\end{aligned}$$

□

#### 4. Numerical Results

We illustrate the application of our numerical method by considering the following Fredholm integral equation of the second kind:

$$\lambda u(t) = \int_0^{100} \frac{u(s)}{\sqrt{|s-t|}} ds + f(t), \quad \lambda = 40\sqrt{2}, \quad t \in [0, 100],$$

where

$$f(t) = \lambda t^2 - \frac{2(3 \times 10^4 + 400t + 8t^2)\sqrt{100-t}}{15} - \frac{16}{15} t^{5/2},$$

and the exact solution is  $u(t) = t^2$  on  $[0, 100]$ . The kernel  $g(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$  satisfies the hypothesis  $(\mathcal{H})$ . We mention that this equation is the same studied in [8].

In order to give a comprehensive view of the procedure of the generalized versions, we study this example by applying the following methods:

1. Generalized Gauss–Seidel method, our method described in this paper.
2. Conventional Gauss–Seidel method, the method described in [2], the latter applies the Gauss–Seidel iterative scheme to approach the huge matrix obtained after using the product integration method.
3. Generalized Jacobi method, the method described in [8].

We fix  $H = 1$  and we take the null function as a starting point for our method and the null vector for the conventional Gauss–Seidel method. The stopping condition on the parameter  $k$  is fixed by

$$\|U_{new} - U_{old}\| \leq 10^{-8}.$$

$E_{GGS}(h_n)$ ,  $E_{CGS}(h_n)$  and  $E_{GJ}(h_n)$  denote the absolute error obtained by using the Generalized Gauss–Seidel method, Conventional Gauss–Seidel method and Generalized Jacobi method, respectively. We vary now  $h_n$  to compare the results of the methods.

Table 1. Numerical results

| $h_n$ | $E_{CGS}$ | $E_{GGS}$ |
|-------|-----------|-----------|
| 0.250 | 9.86E-3   | 1.20E-3   |
| 0.125 | 2.47E-3   | 3.12E-4   |
| 0.050 | 3.97E-4   | 5.15E-5   |
| 0.025 | 1.01E-4   | 1.38E-5   |

Table 2. Numerical results

| $h_n$ | $E_{GJ}$ (Results of [8]) | $k$ | $E_{GGS}$ | $k$ |
|-------|---------------------------|-----|-----------|-----|
| 0.250 | 1.20E-3                   | 34  | 1.20E-3   | 20  |
| 0.125 | 3.12E-4                   | 34  | 3.12E-4   | 20  |
| 0.050 | 5.15E-5                   | 34  | 5.15E-5   | 20  |
| 0.025 | 1.38E-5                   | 34  | 1.38E-5   | 20  |

Table (1) shows that the error committed by the two methods decreases with the decrease of  $h_n$ , but the error order of the generalized version of Gauss–Seidel method is smaller than the error order of the conventional version of Gauss–Seidel method. Furthermore, in Table (2) we can also see that the both generalized methods (Gauss-Seidel and Jacobi) give the same results, but the generalized Gauss-Seidel method is faster than the generalized Jacobi method. So, we confirm that our vision of generalization is reasonable.

## 5. Concluding remarks

We have constructed a generalization of the Gauss–Seidel iterative method for a system of linear operators. We used this new technique, in collocation with the product integration method, to approximate a solution of the Fredholm linear integral equation of the second kind with a weakly singular kernel on a large interval. The numerical tests show the efficiency of our new method compared to the classical Gauss–Seidel method.

## References

- [1] W. Li, W. Sun, “Modified Gauss–Seidel type methods and Jacobi type methods for  $Z$ -matrices”, *Linear Algebra and Its Applications*, **317**:1 (2000), 227–240.
- [2] M.S. Muthuvalu, “The preconditioned Gauss-Seidel iterative methods for solving Fredholm integral equations of the second kind”, *AIP Conference Proceedings*, **1751** (2016), 020001.
- [3] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2-nd ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Siam, 2003, 567 pp.
- [4] D.K. Salkuyeh, “Generalized Jacobi and Gauss–Seidel methods for solving linear system of equations”, *Numer. Math. J. Chinese Univ.*, **16**:2 (2007), 164–170
- [5] Y. Zhang, T.Z. Huang, X.P. Liu, “Modified iterative methods for nonnegative matrices and M-matrices linear systems”, *Computers & Mathematics with Applications*, **50**:10 (2005), 1587–1602
- [6] L. Zou, Y. Jiang, “Convergence of The Gauss-Seidel Iterative Method”, *Procedia Engineering*, **15** (2011), 1647–1650

- [7] S. Lemita, H. Guebbai, “New process to approach linear Fredholm integral equations defined on large interval”, *Asian Eur. J. Math.*, **12**:01 (2019), 1950009
- [8] S. Lemita, H. Guebbai, M.Z. Aissaoui, “Generalized Jacobi method for linear bounded operators system”, *Comput. Appl. Math.*, **37**:3 (2018), 3967–3980
- [9] M. Ahues, A. Largillier, O. Titaud, “The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds”, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **22** (2001), 789–814
- [10] K.E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, United Kingdom, 1997
- [11] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Approach*, Springer, New York, 2009
- [12] M. Ahues, A. Largillier, B.V. Limaye, *Spectral Computations for Bounded Operators*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2001

#### Information about the authors

**Samir Lemita**, PhD, Assistant Professor.  
Higher Normal School of Ouargla, Ouargla,  
Algeria. E-mail: lem.samir@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-2568-2493>

**Hamza Guebbai**, Full Professor. University  
May 8, 1945 – Guelma, Guelma, Algeria. E-mail:  
guebbaihamza@yahoo.fr  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8119-2881>

**Ilyes Sedka**, Post-Graduate Student.  
University May 8, 1945 – Guelma, Guelma,  
Algeria. E-mail: di\_sedka@esi.dz

**Mohamed Zine Aissaoui**, Full Professor.  
University May 8, 1945 – Guelma, Guelma,  
Algeria. E-mail: aissaouizine@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5253-9671>

There is no conflict of interests.

#### Corresponding author:

Samir Lemita  
E-mail : lem.samir@gmail.com

Received 18.07.2020

Reviewed 15.09.2020

Accepted for press 19.11.2020

#### Информация об авторах

**Лемита Самир**, PhD, доцент. Высшая нор-  
мальная школа Уаргла, г. Уаргла, Алжир. E-mail:  
lem.samir@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-2568-2493>

**Геббай Хамза**, профессор. Университет 8 мая  
1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир.  
E-mail:guebbaihamza@yahoo.fr  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8119-2881>

**Седка Ильес**, аспирант. Университет 8 мая  
1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир.  
E-mail:di\_sedka@esi.dz

**Аиссауи Мохамед Зин**, профессор. Универ-  
ситет 8 мая 1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир.  
E-mail: aissaouizine@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5253-9671>

Конфликт интересов отсутствует.

#### Для контактов:

Лемита Самир  
E-mail: lem.samir@gmail.com

Поступила в редакцию 18.07.2020 г.

Поступила после рецензирования 15.09.2020 г.

Принята к публикации 19.11.2020 г.

© Маматов М.Ш., Алимов Х.Н., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-401-409

УДК 517.977.8

## Дифференциальные игры преследования дробного порядка с нелинейными управлениями

Машрабжон Шахабутдинович МАМАТОВ<sup>1</sup>, Хаким Нематович АЛИМОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека

100174, Республика Узбекистан, г. Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4

<sup>2</sup> Джизакский государственный педагогический институт

130100, Республика Узбекистан, г. Джизак, ул. Ш. Рашидова, 4

## Fractional order differential pursuit games with nonlinear controls

Mashrabjon Sh. MAMATOV<sup>1</sup>, Khakim N. ALIMOV<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

4 University St., Tashkent 100174, Republic of Uzbekistan

<sup>2</sup> Jizzakh State Pedagogical Institute

4 Sh. Rashidov St., Jizzakh 130100, Republic of Uzbekistan

**Аннотация.** Статья посвящена проблемам распространения результатов и методов теории дифференциальных игр и оптимального управления на системы дробного порядка. Исследование мотивировано многочисленными применениями дробного исчисления в задачах управления промышленными объектами, химическими и биохимическими установками и др. В статье рассматривается задача преследования в играх, представленных нелинейными дифференциальными уравнениями произвольного дробного порядка в смысле Капуто. Для исследования данной задачи преследования мы используем подход, аналогичный методу Л.С. Понтрягина, разработанному для линейных дифференциальных игр целых порядков. В работе получены новые достаточные условия для решения задачи преследования в изучаемом классе игр. Доказано, что при выполнении этих условий можно завершить игру в течение определенного ограниченного промежутка времени. При решении задачи преследования нами также использовалось представление решения дифференциального уравнения через обобщенные матричные функции.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение дробного порядка; убегающий игрок; преследующий игрок; терминальное множество; производная в смысле Капуто

**Для цитирования:** Маматов М.Ш., Алимов Х.Н. Дифференциальные игры преследования дробного порядка с нелинейными управлениями // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 401–409. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-401-409.

**Abstract.** The article is devoted to the problems of extending the results and methods of the theory of differential games and optimal control to systems of fractional order. The research is motivated by numerous applications of fractional calculus in control problems of industrial facilities, chemical and biochemical plants, etc. The article considers the problem of pursuit in games represented by nonlinear differential equations of arbitrary fractional order in the sense of Caputo. To study this pursuit problem, we use an approach similar to the method of L. S. Pontryagin, developed for linear differential games of integer orders. In this paper, new sufficient conditions are obtained for solving the pursuit problem in the class of games under study. It has been proven that if these conditions are met, the game can be completed

within a certain limited period of time. When solving the pursuit problem, we also used the representation of the solution to a differential equation in terms of generalized matrix functions.

**Keywords:** fractional differential equation; escaping player; pursuing player; terminal set; derivative in the sense of Caputo

**For citation:** Mamatov M.Sh., Alimov Kh.N. Differentsial'nyye igry presledovaniya drobnogo poryadka s nelineynymi upravleniyami [Fractional order differential pursuit games with non-linear controls]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 401–409. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-401-409. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

В настоящее время дифференциальные уравнения дробного порядка представляют собой быстрорастущую область исследований (см. [1, 2]). В многочисленных публикациях предложены дробные аналоги традиционных моделей управляемых процессов, которые успешно применялись к управлению промышленными системами. Известны применения дробного исчисления в исследованиях диффузии, в задаче идентификации процессов, для контроля химических процессов и в других областях (см., например, [3, 4]). Благодаря дополнительной гибкости модели дробного порядка и контроллеры дробного порядка получили популярность в сообществе инженеров по контролю различных процессов. Дробный контроль был успешно применен к механическим и электромеханическим системам. В них управление использовалось только как альтернативный инструмент для настройки дробного регулятора [2]. Системы управления играют ключевую роль в работе химических и биохимических установок, необходимы в высокотехнологичном производстве, обеспечивая контроль качества продукции, безопасность и экологичность.

Целью данной работы является применение дробного исчисления для решения дифференциальных игр преследования дробного порядка типа Л. С. Понтрягина. Теории управления и дифференциальных игр посвящены многочисленные публикации (см. [5, 6, 7] и библиографию этих работ). Решения задач преследования для различных классов дифференциальных игр рассмотрены, например, в [8, 9, 10, 11]). В настоящей работе на основе аналогов метода [3] изучен новый класс дифференциальных игр дробного порядка с нелинейными управлениями.

## 1. Постановка задачи

Пусть движение точки  $z$  в  $m$ -мерном евклидовом векторном пространстве описывается дифференциальным уравнением

$$D^\alpha z = Az + f(u, v), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

где  $D^\alpha$  — оператор дробного дифференцирования порядка  $\alpha$ ,  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A$  — постоянная  $m \times m$  матрица,  $u, v$  — управляющие параметры,  $u \in P \subset \mathbb{R}^m$  — управляющий параметр преследующего игрока,  $v \in Q \subset \mathbb{R}^m$  — управляющий параметр убегающего игрока,  $P$  и  $Q$  — непустые компактные множества;  $f$  — непрерывное отображение множества  $P \times Q$  в  $\mathbb{R}^m$ . Дробную производную будем понимать в смысле, Капуто. Далее в  $\mathbb{R}^m$  выделено непустое замкнутое терминальное множество  $M$  — множество окончания игры.

Предложим, что в игре (1.1) терминальное множество имеет вид  $M = M_0 + M_1$ , где  $M_0$  — линейное подпространство  $\mathbb{R}^m$ ,  $M_1$  — подмножество подпространства  $L$  — ортогонального дополнения к  $M_0$  в  $\mathbb{R}^m$ . Далее, через  $\Pi$  обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из  $\mathbb{R}^m$  на  $L$ .

Игра считается оконченной, если выполнено условие  $z \in M$ . Цель преследующего игрока вывести  $z$  на множества  $M$ , убегающий игрок стремится этому помешать.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Будем говорить, что дифференциальная игра (1.1) может быть закончена из начального положения  $z^0 = (z_0^0, z_1^0, \dots, z_{m-1}^0)$  за время  $T = T(z^0)$ , если существует такая измеримая функция  $u(t) = u(z^0, t, v(t)) \in P$ ,  $t \in [0, T]$ , что решение уравнений

$$D^\alpha z = Az + f(u(t), v(t)), \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad n-1 < \alpha < n, \quad z(0) = z^0 \quad (1.2)$$

удовлетворяет условию  $z \in M$ , т. е.  $\Pi z$  принадлежит множеству  $M_1$  в момент  $t = T$  при любых измеримых функциях  $v(\cdot)$ ,  $v(t) \in Q$ ,  $t \in [0, T]$ .

Пусть

$$E_\eta(G; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^k}{(k\eta^{-1} + \mu)}$$

обобщенная матричная функция Миттаг-Лефлера, где  $\eta > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$  ( $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел) а  $G$  — произвольная квадратная матрица порядка  $m$ . Рассмотрим динамическую систему (1.1) с начальными условиями

$$z^{(k)}(0) = z_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.3)$$

Решение уравнений (1.2) с начальными условиями (1.3) имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; k+1) z_k^0 + \int_0^t (t-r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-r)^\alpha; \alpha) f(u(t), v(t)) dr. \quad (1.4)$$

Для  $r \geq 0$  определим

$$\widehat{w}(r) = \bigcap_{v \in Q} \Pi r^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^\alpha; \alpha) f(p, v),$$

$$W(t) = \int_0^t \widehat{w}(r) dr, \quad t > 0, \quad W_1(t) = -M_1 + W(t). \quad (1.5)$$

Для удобства введем обозначение

$$h_z(z^0, t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; k+1) z_k^0.$$

## 2. Полученные результаты и их доказательство

**Теорема 2.1.** Если в игре (1.1) при некотором значении  $t = t_1$  выполняется включение

$$-\Pi h_z(z^0, t) \in W_1(t), \quad (2.1)$$

то из начального положения  $z^0$  можно завершить преследование за время  $T = t_1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Возможны два случая: 1)  $t_1 = 0$  и 2)  $t_1 > 0$ . Случай 1) тривиальный, так как при  $t_1 = 0$  из (1.5) следует, что включение (2.1) принимает вид  $-\Pi h_z(z^0, t) \in -M_1$  или  $\Pi z_0^0 \in M_1$ , что эквивалентно включению  $z^0 \in M$ .

Рассмотрим теперь случай 2)  $t_1 > 0$ . Имеем  $-\Pi h_z(z^0, t_1) \in W_1(t_1)$ . Следовательно, найдутся векторы  $d \in M_1$  и  $w \in \int_0^{t_1} \widehat{w}(r)dr$  такие, что  $-\Pi h_z(z^0, t_1) = -d + w$  (см. (1.5), (2.1)). Далее, в соответствии с определением интеграла  $\int_0^{t_1} \widehat{w}(r)dr$  существует суммируемая функция  $w(\cdot)$ ,  $w(r) \in \widehat{w}(r)$ ,  $0 \leq r \leq t_1$  такая, что выполнено равенство  $w = \int_0^{t_1} w(r)dr$ . Учитывая это равенство, рассмотрим уравнение

$$\Pi(t_1 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t_1 - r)^{\alpha}; \alpha) f(u, v) = w(t_1 - r), \quad (2.2)$$

относительно  $u \in P$  при фиксированных  $r \in [0, t_1]$  и  $v \in Q$ . Так как  $w(r) \in \widehat{w}(r)$ , то уравнение (2.2) имеет решение. Из всех решений уравнения (2.2) выберем наименьшее в лексикографическом смысле и обозначим его через  $u(r, v)$ . В силу леммы Филиппова функция  $u(r, v(r))$ ,  $0 \leq r \leq t_1$ ,  $v \in Q$ , является измеримой функцией для любой измеримой функции  $v = v(r)$ ,  $0 \leq r < \infty$ ,  $v(r) \in Q$ . Положим  $u(r) = u(r, v(r))$ ,  $0 \leq r \leq t_1$ , и покажем, что при таком способе управления параметром  $u$  траектория  $z(t)$  попадает на множество  $M$  за время, не превосходящее  $T = t_1$ .

Действительно, согласно (2.2) для решения  $z(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , уравнений

$$D^{\alpha} z = Az + f(u(t), v(t)), \quad z^{(k)}(0) = z_k^0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

на основании представления (1.4) получаем

$$\begin{aligned} \Pi z(t_1) &= \Pi h_z(z^0, t_1) + \int_0^{t_1} \Pi(t_1 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t_1 - r)^{\alpha}; \alpha) f(u(r), v(r)) dr \\ &= \Pi h_z(z^0, t_1) + \int_0^{t_1} w(t_1 - r) dr = d - w + \int_0^{t_1} w(t_1 - r) dr \\ &= d - \int_0^{t_1} w(r) dr - \int_{t_1}^0 w(r) dr = d - \int_0^{t_1} w(r) dr + \int_0^{t_1} w(r) dr = d \in M_1. \end{aligned}$$

Итак,  $\Pi z(t_1) = d \in M_1$ , и отсюда получим, что  $z(t_1) \in M$ . □

Пусть  $w$  — произвольное разбиение отрезка  $[0, t]$ ,  $w = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = t\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \tau_i$ . Определим индуктивно множество  $A_{i+1}$ , положив

$$A_i = \bigcap_{v(r)} [A_{i-1} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Pi r^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(p, v(r)) dr], \quad A_0 = -M_1,$$

$$W_2(t) = \bigcap_w A_i(M_1, t). \quad (2.3)$$

**Теорема 2.2.** Если в игре (1.1) при некотором значении  $t = t_2$  выполняется включение

$$-\Pi h_z(z^0, t) \in W_2(t), \quad (2.4)$$

то из начального положения  $z^0$  можно завершить преследование за время  $T = t_2$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $\varepsilon \leq \tau$  имеет место включение

$$A(\tau) \subset \bigcap_{v(r)} \left[ A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} e^{rC} f(P, v(r)) dr \right] \quad (2.5)$$

Рассмотрим следующим специальным класс разбиений отрезка  $[0, \tau]$ : одна из точек разбиения совпадает с точкой  $\tau - \varepsilon$ , остальные точки разбиения произвольны. Пусть для некоторого разбиения из этого класса  $\tau_i = \tau - \varepsilon$ . Тогда

$$A_{i+2} \subset \bigcap_{\tilde{v}(r)} \left( \left\{ \bigcap_{\tilde{v}(r)} \left[ A_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right] \right\} + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+2}} \Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right),$$

и так как, очевидно, для произвольной функции  $\tilde{v}(r)$ ,  $\tau_{i+1} \leq r \leq \tau_{i+2}$  выполнено

$$\begin{aligned} & \left\{ \bigcap_{\tilde{v}(r)} \left[ A_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right] \right\} \\ & + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+2}} \Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \subseteq \\ & \subseteq \bigcap_{\tilde{v}(r)} \left[ A_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right. \\ & \left. + \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+2}} \Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, \tilde{v}(r)) dr \right], \end{aligned}$$

то

$$A_{i+2} \subset \bigcap_{v(r)} \left[ A_i + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+2}} \Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(r)) dr \right].$$

Аналогично рассуждая, получим

$$A_h \subset \bigcap_{v(r)} \left[ A_i + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} \Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(r)) dr \right]. \quad (2.6)$$

Переходя в соотношении (2.6) к пределу, получим включение (2.5).

Пусть  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j, \dots$ ,  $0 \leq \tau_{j+1} < \tau_j \leq \tau$  — последовательность чисел, сходящаяся к некоторому числу  $\tau_0$ . Предположим, что

$$-Ph_z(z_0; t)z_0 \in A(\tau_i), \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$Ph_z(z_0; t)z_0 \in A(\tau_0). \quad (2.7)$$

Действительно, из компактности множества

$$\Pr^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, Q), \quad 0 \leq r \leq \tau,$$

и из включения (2.5) вытекает, что

$$-Ph_z(z_0; t)z_0 \in A(\tau_0) + \eta \varepsilon_j J, \quad \varepsilon_j = \tau_j - \tau_0. \quad (2.8)$$

Так как множество  $A(\tau_0)$  замкнуто, то отсюда сразу следует включение (2.7). Таким образом, и наименьшее число  $\tau_0$ , участвующее в формулировке 2.1, удовлетворяет включению (2.1), если последнее имеет место хотя бы для одного момента  $\tau$ .

Пусть  $F(t, u, v)$  — определенная на множестве  $[\delta, \gamma] \times P \times Q$  и непрерывная на нем по совокупности  $(t, u, v)$  вектор-функция, причем,  $v(t) \in Q$  и  $y(t) \in F(t, U, v(t))$  при  $t \in [\delta, \gamma]$ . Тогда существует такая измеримая функция  $u(\cdot)$ ,  $u(t) \in P$ ,  $t \in [\delta, \gamma]$ , что для почти всех  $t \in [\delta, \gamma]$  справедливо  $F(t, u(t), v(t)) = y(t)$ .

Пусть  $v_0(\cdot)$  — произвольное измеримое управление со значениями  $v_0(t) \in Q$ ,  $0 \leq t \leq \varepsilon$ . Тогда

$$\begin{aligned} A(\tau) &\subset \bigcap_{v(r)} \left[ A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(r)) dr \right] \\ &\subset A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(\tau - r)) dr. \end{aligned}$$

Через  $\tau_1$  обозначим наименьшее из тех  $\tau$ ,  $\tau \leq \varepsilon$ , для которых

$$-\text{Ph}_z(z_0; t) \subset A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} A(\tau - \varepsilon) + \int_{\tau - \varepsilon}^{\tau} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(\tau - r)) dr.$$

Ясно, что  $\tau_1 \leq \tau_0$ .

Из (2.8) следует существование точки  $a \in R^n$  и суммируемой функции  $y(\cdot)$ , со значениями  $y(t)$ ,  $t \in [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1]$ , из множества  $\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v_0(\tau_1 - r))$  таких, что

$$-\text{Ph}_z(z_0; t) = a + \int_{\tau_1 - \varepsilon}^{\tau_1} y(\tau_1 - r) dr, \quad a \in A(\tau_1 - \varepsilon).$$

Рассмотрим функцию  $\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u, v)$  аргументов  $t \in [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1]$ ,  $v \in Q$ ,  $u \in P$ . Очевидно, эта функция удовлетворяет всем требуемым выше условиям, и поэтому существует измеримое решение уравнения

$$\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u, v_0(\tau_1 - t)) = y(\tau_1 - t), \quad \tau_1 - \varepsilon \leq t \leq \tau_1, \quad u \in P.$$

Имеем  $\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u_0(\tau_1 - t), v_0(\tau_1 - t)) = y(\tau_1 - t)$  при почти всех  $t \in [\tau_1 - \varepsilon, \tau_1]$ . Следовательно,

$$-\text{Ph}_z(z_0; t) = a + \int_{\tau_1 - \varepsilon}^{\tau_1} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u_0(\tau_1 - r), v_0(\tau_1 - r)) dr$$

или, после элементарных преобразований,

$$-\text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) z(\varepsilon) = a \in A(\tau_1 - \varepsilon), \quad (2.9)$$

где

$$z(\varepsilon) = \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) z_0 + \int_0^{\varepsilon} \text{Pr}^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(u_0(r), v_0(r)) dr.$$

Из включения (2.9) следует, что

$$T(z(\varepsilon)) \leq \tau_1 - \varepsilon \leq \tau_0 - \varepsilon = T(z_0) - \varepsilon.$$

Поэтому

$$T(z_0) - T(z(\varepsilon)) \geq \varepsilon. \quad (2.10)$$

Неравенство (2.10) показывает, что при указанном выше выборе управления преследующего игрока величина  $T(z(t))$  убывает не медленнее, чем время  $t$ , и, следовательно, обратится в нуль не позднее, чем по прошествии времени, равного  $T(z_0)$ .  $\square$

Обозначим через  $\widehat{w}(r, t)$  множество

$$\bigcap_{v(r)} \left[ -\frac{1}{t} M_1 + \Pi r^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(Ar^{\alpha}; \alpha) f(P, v(r)) \right],$$

определенное при всех  $r \geq 0$ ,  $t > 0$ . Рассмотрим интеграл

$$W_3(t) = \int_0^t \widehat{w}(r, t) dr. \quad (2.11)$$

**Теорема 2.3.** Если в игре (1.1) при некотором значении  $t = t_3$  выполняется включение

$$-\Pi h_z(z^0, t) \in W_3(t), \quad (2.12)$$

то из начального положения  $z^0$  можно завершить преследование за время  $T = t_3$ .

**Доказательство.** В силу условия (2.12) теоремы имеем  $-\Pi h_z(z^0, \tau_3) \in W_3(\tau_3)$ . Следовательно, существует такая измеримая функция  $w(\cdot)$ ,  $w(r) \in \widehat{w}(r, \tau_3)$ ,  $0 \leq r \leq \tau_3$ , что

$$-\Pi h_z(z; \tau) = \int_0^{\tau_3} w(r) dr, \quad w(r) \in \widehat{w}(r, \tau_3). \quad (2.13)$$

Пусть  $v(\cdot)$  — произвольная измеримая функция со значениями  $v(t) \in Q$ ,  $0 \leq t \leq \tau_3$ . По определению операции вычитания  $*$ , учитывая определение множества  $\widehat{w}(r, \tau)$ , из (2.13) получаем

$$w(r) + \Pi(\tau_3 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - r)^{\alpha}; \alpha) v(r) \in -\frac{1}{\tau_3} M_1 + \widehat{u}(\tau_3 - r), \quad 0 \leq r \leq \tau_3.$$

Отсюда в силу условия измеримости вытекает существование измеримых функций  $dr$ ,  $u(r)$ , определенных на отрезке  $0 \leq r \leq \tau_3$ , удовлетворяющих соотношениям

$$d(r) \in -\frac{1}{\tau_3} M_1, \quad \Pi(\tau_3 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - r)^{\alpha}; \alpha) u(r) \in \widehat{u}(\tau_3 - r),$$

$$\begin{aligned} w(r) + \Pi(\tau_3 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - r)^{\alpha}; \alpha) v(r) \\ = d(r) + \Pi(\tau_3 - r)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - r)^{\alpha}; \alpha) u(r), \quad 0 \leq r \leq \tau_3. \end{aligned}$$

Измеримую функцию  $u(r)$  определим как решение уравнения (18). Тогда для решений  $z(t)$ ,  $0 \leq r \leq \tau_3$ , соответствующих функциям  $u(t), v(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} -\Pi_1 x(\tau_3) &= -\Pi h_z(z^0, \tau_3) - \int_0^{\tau_3} \Pi(\tau_3 - s)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - s)^{\alpha}; \alpha) u(s) ds \\ &+ \int_0^{\tau_3} \Pi(\tau_3 - s)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(\tau_3 - s)^{\alpha}; \alpha) \tilde{v}(s) ds = \int_0^{\tau_3} d(s) ds \in -M_1. \end{aligned}$$

Отсюда,  $\Pi_1 z(\tau_3) \in M_1$ ,  $z(\tau_3) \in M$ , т. е. траектория, вышедшая из положения  $z^0$  в момент времени  $t = \tau_3$  оказывается на множестве  $M$ .  $\square$

## References

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [2] O. P. Agrawal, “A Formulation and Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems”, *J. Vibr. Control.*, **14**:9-10 (2008), 1291–1299.
- [3] Л. С. Понтрягин, “Линейные дифференциальные игры преследования”, *Матем. сб.*, **112(154)**:3(7) (1980), 307–330; англ. пер.: L. S. Pontryagin, “Linear differential games of pursuit”, *Math. USSR-Sb.*, **40**:3 (1981), 285–303.
- [4] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с. [S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Integraly i Proizvodnyye Drobного Poryadka i Nekotoryye ikh Prilozheniya*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (In Russian), 688 pp.]
- [5] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, М., 1967. [R. Isaaks, *Differential Games*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].
- [6] M. Sh. Mamatov, H. N. Alimov, “By solving the problem of harassment described by differential equations of fractional order”, *Theoretical and Applied Sciences in the USA*, Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Scientific Conference, CIBUNET Publishing, New York, 2016, 6–10.
- [7] М. Ш. Маматов, Е. В. Ташманов, Х. Н. Алимов, *Теория управления с распределенными параметрами и геометрическими ограничениями*, Fan va texnologiya, Tashkent, 2013, 181 с. [M. Sh. Mamatov, E. V. Tashmanov, Kh. N. Alimov, *Teoriya Upravleniya s Raspredelemnymi Parametrami i Geometricheskimi Ogranicheniyami*, Fan va texnologiya, Tashkent, 2013, 181 pp.]
- [8] M. Sh. Mamatov, E. V. Tashmanov, H. N. Alimov, “Differential games of pursuing in the systems with distributed parameters and geometrical restrictions”, *American Journal of Computational Mathematics*, 2013, № 3, 56–61.
- [9] М. Ш. Маматов, Х. Н. Алимов, “К решению задачи преследования в управляемых распределенных системах высокого порядка”, *Математические труды*, **16**:2 (2013), 95–110. [by M. Sh. Mamatov, Kh. N. Alimov, “K resheniyu zadachi presledovaniya v upravlyayemykh raspredelemnnykh sistemakh vysokogo poryadka”, *Matematicheskiye Trudy*, **16**:2 (2013), 95–110 (In Russian)].
- [10] Х. Н. Алимов, М. Ш. Маматов, “О задаче преследования, описываемой дробными дифференциальными уравнениями”, *Научный вестник СамГУ. Самарканд*, 2016, № 1, 5–8. [Kh. N. Alimov, M. Sh. Mamatov, “O zadache presledovaniya, opisyyvayemoy drobnymi differentsial'nymi uravneniyami”, *Nauchnyy Vestnik SamGU. Samarkand*, 2016, № 1, 5–8 (In Russian)].
- [11] Х. Н. Алимов, “Дифференциальные игры преследования, описываемые уравнениями дробного порядка”, *Оптимальное управление и дифференциальные игры*, Труды конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина (Москва, 12–14 декабря 2018), МАКС Пресс, Москва, 2018, 21–23; англ. пер.: Kh. N. Alimov, “Pursuit Differential Games Described by Equations of Fractional Order”, *Optimal Control and Differential Games*, Materials of the International Conference, dedicated to the 110th anniversary of Lev Semenovich Pontryagin (Moscow, December 12–14, 2018), MAKSS Press Publ., Moscow, 2018, 21–23.

## Информация об авторах

**Маматов Машрабжон Шахабудинович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии и топологии. Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Республика Узбекистан.  
E-mail: mamatovmsh@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8455-7495>

## Information about the authors

**Mashrabjon Sh. Mamatov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Geometry and Topology Department. National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Republic of Uzbekistan.  
E-mail: mamatovmsh@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8455-7495>

**Алимов Хаким Нематович**, PhD, преподаватель кафедры методики преподавания математики. Джизакский государственный педагогический институт, г. Джизак, Республика Узбекистан. E-mail: [xakim-alimov@mail.ru](mailto:xakim-alimov@mail.ru)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-8387-5624>

**Khakim N. Alimov**, PhD, Lecturer of the Methods of Teaching Mathematics Department. Jizzakh. Jizzakh State Pedagogical Institute, Republic of Uzbekistan.  
E-mail: [xakim-alimov@mail.ru](mailto:xakim-alimov@mail.ru)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-8387-5624>

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

**Для контактов:**

Маматов Машрабжон Шахабутдинович  
E-mail: [mamatovmsh@mail.ru](mailto:mamatovmsh@mail.ru)

**Corresponding author:**

Mashrabjon Sh. Mamatov  
E-mail: [mamatovmsh@mail.ru](mailto:mamatovmsh@mail.ru)

Поступила в редакцию 29.05.2020 г.  
Поступила после рецензирования 15.07.2020 г.  
Принята к публикации 19.11.2020 г.

Received 29.05.2020  
Reviewed 15.07.2020  
Accepted for press 19.11.2020

© Перов А.И., Коструб И.Д., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-410-421

УДК 517.925

## О дифференциальных уравнениях в банаховых алгебрах

**Анатолий Иванович ПЕРОВ, Ирина Дмитриевна КОСТРУБ**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

## On differential equations in Banach algebras

**Anatoly I. PEROV, Irina D. KOSTRUB**

Voronezh State University

1 University Sq., Voronezh 394018, Russian Federation

**Аннотация.** Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами в банаховых алгебрах (это есть прямое обобщение матричных дифференциальных уравнений высшего порядка). Изложение опирается на высшую алгебру, дифференциальные уравнения и функциональный анализ. Полученные результаты могут быть использованы при изучении матричных уравнений, в теории малых колебаний в физике и теории возмущений в квантовой механике. Изложение основано на оригинальных исследованиях авторов.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения высшего порядка; банаховы алгебры; теорема Сильвестра; тождество Гильберта; функция Коши; нерезонансное условие и частотные постоянные; ограниченная функция Грина и интегральные постоянные; некоммутативная формула Вьета

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732\_a).

**Для цитирования:** Перов А.И., Коструб И.Д. О дифференциальных уравнениях в банаховых алгебрах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 410–421. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-410-421.

**Abstract.** We consider higher-order linear differential equations with constant coefficients in Banach algebras (this is a direct generalization of higher-order matrix differential equations). The presentation is based on higher algebra, differential equations and functional analysis. The results obtained can be used in the study of matrix equations, in the theory of small oscillations in physics, and in the theory of perturbations in quantum mechanics. The presentation is based on the original research of the authors.

**Keywords:** higher-order differential equations; Banach algebras; Sylvester's theorem; Hilbert identity; Cauchy function; non-resonant condition and frequency constants; bounded green function and integral constants; non-commutative Viet formula

**Acknowledgements:** The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00732\_a).

**For citation:** Perov A.I., Kostrub I.D. O differentsial'nykh uravneniyakh v banakhovykh algebrakh [On differential equations in Banach algebras]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 410–421. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-410-421. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## 1. Однородные уравнения

В комплексной банаховой алгебре  $\mathbb{B}$  [1] рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_n \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n$  из  $\mathbb{B}$ , причем  $\mathbf{a}_0$  обратим. Такие уравнения возникают при изучении векторно-матричных дифференциальных уравнений [2] или дифференциальных уравнений высшего порядка в банаховых пространствах с ограниченными операторными коэффициентами [3]. Можно показать, что при любых  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{n-1}, \mathbf{c}_n$  из  $\mathbb{B}$  уравнение (1.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_1, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n-2)}(0) = \mathbf{c}_{n-1}, \quad \mathbf{x}^{(n-1)}(0) = \mathbf{c}_n,$$

и это решение определено при всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Поставим в соответствие уравнению (1.1) скалярный характеристический многочлен

$$\mathbf{l}_n(\lambda) = \mathbf{a}_0 \lambda^n + \mathbf{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \lambda + \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{l}_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}. \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем скалярные (числовые) величины набираются обычным шрифтом, а элементы банаховой алгебры — полужирным.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Те  $\lambda \in \mathbb{C}$ , для которых многочлен (1.2) обратим, образуют непустое неограниченное открытое множество  $R \subseteq \mathbb{C}$ ; оно называется резольвентным множеством, а возникающая при этом функция  $\mathbf{r}_n(\lambda) = \mathbf{l}_n^{-1}(\lambda)$ ,  $\mathbf{r}_n : R \rightarrow \mathbb{B}$  — резольвентой  $n$ -го порядка [4].

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Дополнение  $S = \mathbb{C} \setminus R$  является непустым, ограниченным, замкнутым множеством и называется спектром многочлена.

Если по методу Эйлера искать решение уравнения (1.1) в виде  $\exp(t\mathbf{\Lambda})$ , где  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{B}$ , то мы приходим к уравнению

$$\mathbf{l}_n(\mathbf{\Lambda}) = \mathbf{a}_0 \mathbf{\Lambda}^n + \mathbf{a}_1 \mathbf{\Lambda}^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{\Lambda} + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

Отметим, что здесь  $\mathbf{l}_n : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Уравнение (1.3) называется характеристическим уравнением.

## 2. Теорема Сильвестра

**Теорема 2.1.** Спектр любого корня  $\mathbf{\Lambda}$  уравнения (1.3) содержится в спектре скалярного характеристического многочлена

$$S(\mathbf{\Lambda}) \subseteq S. \quad (2.1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство проведем для коммутативного случая. Пусть  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{B}$  корень уравнения (1.3) и  $\mu$  из резольвентного множества  $R$ . Выпишем

$$\mathbf{l}_n(\mathbf{\Lambda}) - \mathbf{l}_n(\mu) = \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{n-j} \mathbf{\Lambda}^j - \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{n-j} \mu^j = \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{n-j} (\mathbf{\Lambda}^j - \mu^j).$$

Так как  $\Lambda$  и  $\mu$  коммутируют, то

$$\mathbf{l}_n(\Lambda) - \mathbf{l}_n(\mu) = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{n-j}(\Lambda^j - \mu^j) = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{n-j}(\Lambda^{j-1} + \Lambda^{j-2}\mu + \dots + \Lambda\mu^{n-2} + \mu^{n-1})(\Lambda - \mu).$$

Поскольку левая часть является обратимой, ибо  $\mathbf{l}_n(\Lambda) = 0$ , а  $\mu \in R$ , то элемент  $(\Lambda - \mu)$  обратим, и значит,  $R \subseteq R(\Lambda)$  (в коммутативном случае из обратимости произведения вытекает обратимость его сомножителей). Поэтому  $S(\Lambda) \subseteq S$ , и включение (2.1) установлено. Здесь  $S(\Lambda)$  — это спектр элемента  $\Lambda$ , а  $R(\Lambda) = \mathbb{C} \setminus S(\Lambda)$ .  $\square$

Доказательство теоремы в общем случае сопряжено с некоторыми дополнительными трудностями и будет опубликовано позже. Для матричного уравнения теорема 2.1 была доказана Сильвестром.

### 3. Тождество Гильберта

Пусть  $\lambda, \mu \in R$ . Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n(\lambda) - \mathbf{r}_n(\mu) &= \mathbf{r}_n(\lambda) \{ \mathbf{r}_n^{-1}(\mu) - \mathbf{r}_n^{-1}(\lambda) \} \mathbf{r}_n(\mu) \\ &= \mathbf{r}_n(\lambda) \left\{ \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{n-j} \mu^j - \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{n-j} \lambda^j \right\} \mathbf{r}_n(\mu) = \mathbf{r}_n(\lambda) \left\{ \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{n-j} (\mu^j - \lambda^j) \right\} \mathbf{r}_n(\mu) \\ &= \mathbf{r}_n(\lambda) \left\{ \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{n-j} (\mu - \lambda) (\mu^{j-1} + \mu^{j-2} \lambda + \dots + \mu \lambda^{j-2} + \lambda^{j-1}) \right\} \mathbf{r}_n(\mu), \end{aligned}$$

то

$$\mathbf{r}_n(\lambda) - \mathbf{r}_n(\mu) = (\mu - \lambda) \mathbf{r}_n(\lambda) \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{n-j} (\mu^{j-1} + \mu^{j-2} \lambda + \dots + \mu \lambda^{j-2} + \lambda^{j-1}) \mathbf{r}_n(\mu). \quad (3.1)$$

При  $n = 1$  соотношение (3.1) хорошо известно и называется *тождеством Гильберта* [5]; мы сохраним за ним это название и в случае произвольного  $n$ .

Из (3.1) вытекает, что резольвента  $\mathbf{r}_n(\lambda)$  является на  $R$  аналитической функцией, причем, она представляет собой решение нелинейного дифференциального уравнения типа Риккати

$$\mathbf{r}'_n(\lambda) = -\mathbf{r}_n(\lambda) \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{n-j} j \lambda^{j-1} \right) \mathbf{r}_n(\lambda) \quad (\lambda \in R).$$

### 4. Функция Коши

**О п р е д е л е н и е** 4.1. Решение  $\mathbf{k}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$  уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{k}}(0) = \mathbf{0}, \quad \dots, \quad \mathbf{k}^{(n-2)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k}^{(n-1)}(0) = \mathbf{a}_0^{-1}, \quad (4.1)$$

называется функцией Коши.

Приведем различные формулы этого решения. Прежде всего отметим, что имеет место формула разложения в степенной ряд

$$(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mu + \dots + \mathbf{a}_{n-1}\mu^{n-1} + \mathbf{a}_n\mu^n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k \mu^k \quad (|\mu| < \rho), \quad (4.2)$$

где  $\rho$  ( $0 < \rho < \infty$ ) радиус сходимости написанного степенного ряда. При  $\mu = 0$  мы получаем, что  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0^{-1}$ . Приведем формулу для остальных коэффициентов этого разложения.

$$\mathbf{c}_k = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n, \dots, 1 \leq i_p \leq n, \\ k_1 \geq 0, \dots, k_p \geq 0, \\ i_1 k_1 + \dots + i_p k_p = k}} (-1)^{k_1 + \dots + k_p} (\mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{a}_{i_1})^{k_1} \dots (\mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{a}_{i_p})^{k_p} \mathbf{a}_0^{-1}. \quad (4.3)$$

Здесь порядок сомножителей весьма важен (среди чисел  $i_1, \dots, i_p$  могут быть повторяющиеся). Имеем

$$\mathbf{c}_1 = -\mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_0^{-1}, \quad \mathbf{c}_2 = (\mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{a}_1)^2 \mathbf{a}_0^{-1} - \mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0^{-1}.$$

Если банахова алгебра  $\mathbb{B}$  является коммутативной, то формула (4.3) принимает более прозрачный вид

$$\mathbf{c}_k = \sum_{\substack{0 \leq k_1, \dots, 0 \leq k_n, \\ 1k_1 + \dots + nk_n = k}} (-1)^{k_1 + \dots + k_n} \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!} (\mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{a}_1)^{k_1} \dots (\mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{a}_n)^{k_n} \mathbf{a}_0^{-1}.$$

Важность разложения (4.2) заключается в том, что оно позволяет написать разложение для резольвенты  $n$ -го порядка в ряд по обратным степеням параметра  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n(\lambda) &= (\mathbf{a}_0 \lambda^n + \mathbf{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_n)^{-1} = \lambda^{-n} (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \mu + \dots + \mathbf{a}_n \mu^n)^{-1} \\ &= \lambda^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k \mu^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k \lambda^{-(n+k)}. \end{aligned}$$

Мы считаем, что  $\lambda \neq 0$  и  $\mu = 1/\lambda$ . Поэтому

$$\mathbf{r}_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k \lambda^{-(n+k)} \quad (|\lambda| > 1/\rho). \quad (4.4)$$

Нетрудно убедиться в том, что функция Коши допускает представление в виде степенного ряда

$$\mathbf{k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k \frac{t^{n+k-1}}{(n+k-1)!} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Начальные условия (4.1) выполнены очевидным образом, а для проверки того, что  $\mathbf{k}(t)$  удовлетворяет (1.1), нужно использовать соотношения:

$$\sum_{j=0}^p \mathbf{a}_j \mathbf{c}_{p-j} = 0 \quad (p = 0, 1, \dots)$$

(считая, что  $\mathbf{a}_j = 0$  при  $p > n$ ), которые вытекают из тождества в силу (4.2)

$$\mathbf{1} = (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mu + \dots + \mathbf{a}_n\mu^n) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k\mu^k \quad (|\mu| < \rho).$$

Функция Коши может быть представлена в виде контурного интеграла

$$\mathbf{k}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} e^{t\lambda} \mathbf{r}_n(\lambda) d\lambda. \quad (4.5)$$

Здесь контур  $\partial\sigma$  лежит в некотором открытом множестве, целиком содержащимся в резольвентном множестве  $R$  и окружающим спектр  $S$  скалярного характеристического многочлена  $\mathbf{l}_n(\lambda)$  [1].

Проверим справедливость формулы (4.5). Так как

$$\mathbf{k}^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} e^{t\lambda} \lambda^j \mathbf{r}_n(\lambda) d\lambda \quad (0 \leq j \leq n),$$

то

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{n-j} \mathbf{k}^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} e^{t\lambda} \mathbf{l}_n(\lambda) \mathbf{r}_n(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} e^{t\lambda} \mathbf{1} d\lambda = \mathbf{0},$$

и  $\mathbf{k}(t)$  является решением дифференциального уравнения (1.1). Так как

$$\mathbf{k}^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} \lambda^j \mathbf{r}_n(\lambda) d\lambda \quad (0 \leq j \leq n-1),$$

то согласно формуле (4.4) для резольвенты  $n$ -го порядка выполнены начальные условия (4.1) (мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} \lambda^{j-n} d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq j \leq n-2, \\ 1 & \text{при } j = n-1, \end{cases}$$

если контур  $\partial\sigma$  окружает 0).

В простейшем случае, когда в роли банаховой алгебры  $\mathbb{B}$  выступает поле  $\mathbb{C}$ , формула (4.5) принимает вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} \frac{e^{t\lambda}}{a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n} d\lambda. \quad (4.6)$$

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  корни характеристического уравнения (1.3), которые по предположению попарно различные. Тогда формула (4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{1}{a_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma} \frac{e^{t\lambda}}{(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)} d\lambda \\ &= \frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^n \frac{e^{t\lambda_j}}{(\lambda_j - \lambda_1) \dots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \dots (\lambda_j - \lambda_n)}. \end{aligned}$$

Последняя сумма представляет собой разделенную разность порядка  $(n-1)$ , построенную для функции  $\exp(t\lambda)$  по узлам  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  [6].

Вернемся к общему случаю. Пусть  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$  попарно различные корни характеристического уравнения (1.3), причем разности  $(\Lambda_j - \Lambda_k)$  обратимы при  $j \neq k$ . Предполагая, что банахова алгебра  $\mathbb{B}$  коммутативна, приведем еще одну формулу для функции Коши

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{a}_0^{-1} \sum_{j=1}^n e^{t\Lambda_j} \prod_{\substack{k \neq j, \\ 1 \leq k \leq n}} (\Lambda_j - \Lambda_k)^{-1}.$$

## 5. Неоднородные уравнения

В комплексной банаховой алгебре  $\mathbb{B}$  рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{a}_1 \mathbf{x}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_n \mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (5.1)$$

при прежних предположениях относительно коэффициентов, где  $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$  есть непрерывная ограниченная функция; последнее означает, что

$$\|\mathbf{f}(t)\| \leq \mathbf{c}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Можно показать, что уравнение (5.1) при любых начальных условиях

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_1, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{c}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n-2)}(0) = \mathbf{c}_{n-1}, \quad \mathbf{x}^{(n-1)}(0) = \mathbf{c}_n,$$

имеет единственное решение, и это решение определено при всех  $t$ . Нас интересуют условия, при выполнении которых уравнение (5.1) при любой непрерывной ограниченной функции  $\mathbf{f}(t)$  имеет единственное ограниченное решение  $\mathbf{x}(t)$ . В этом случае согласно лемме Эсклангона [7] все производные  $\mathbf{x}^{(j)}(t)$  вплоть до  $n$ -го порядка включительно будут ограниченными.

## 6. Нерезонансное условие и частотные постоянные

**О п р е д е л е н и е 6.1.** Мы скажем, что выполнено нерезонансное условие, если  $\mathbf{l}_n(i\theta)$  обратим при всех вещественных  $\theta$  ( $-\infty < \theta < +\infty$ ), т. е. спектр  $S$  скалярного характеристического многочлена  $\mathbf{l}_n(\lambda)$  не пересекается с мнимой осью

$$S \cap i\mathbb{R} = \emptyset. \quad (6.1)$$

**О п р е д е л е н и е 6.2.** При выполнении нерезонансного условия резольвента  $n$ -го порядка  $\mathbf{r}_n(i\theta)$  определяется при всех  $\theta$  ( $-\infty < \theta < +\infty$ ) и называется частотной характеристикой.

В силу формулы (4.4) имеем

$$\|\mathbf{r}_n(i\theta)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{c}_k\| |\theta|^{-(n+k)} \left( |\theta| > \frac{1}{\rho} \right).$$

Мы видим, что

$$\|\mathbf{r}_n(i\theta)\| = O(|\theta|^{-n}). \quad (6.2)$$

**О п р е д е л е н и е 6.3.** Введем частотные постоянные, положив

$$\begin{cases} \sigma_j = \max_{-\infty < \theta < +\infty} \|(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta)\|, & 0 \leq j \leq n-1, \\ \sigma_n = \sup_{-\infty < \theta < +\infty} \|(i\theta)^n \mathbf{r}_n(i\theta)\|, & j = n. \end{cases} \quad (6.3)$$

**О п р е д е л е н и е 6.4.** Функция  $(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$  называется  $j$ -й частотной характеристикой  $(0 \leq j \leq n)$ .

Из формулы (6.3) вытекает, что

$$\|(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta)\| \leq \sigma_j \quad (-\infty < \theta < +\infty, \quad 0 \leq j \leq n), \quad (6.4)$$

причем выписанные константы являются наилучшими.

Последовательность положительных частотных постоянных является логарифмически выпуклой, т. е.

$$\sigma_j^2 \leq \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j+1} \quad (1 \leq j \leq n-1). \quad (6.5)$$

Действительно, так как в силу (6.4)

$$\|(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta)\|^2 = \|(i\theta)^{j-1} \mathbf{r}_n(i\theta)\| \cdot \|(i\theta)^{j+1} \mathbf{r}_n(i\theta)\| \leq \sigma_{j-1} \cdot \sigma_{j+1},$$

то переходя к максимуму по  $\theta$  в левой части этой оценки, получаем неравенство (6.5).

Роль нерезонансного условия демонстрирует приводимая ниже теорема.

**Теорема 6.1.** Для того, чтобы уравнение (5.1) при любой непрерывной ограниченной функции  $\mathbf{f}(t)$  имело единственное ограниченное решение  $\mathbf{x}(t)$ , необходимо и достаточно чтобы выполнялось нерезонансное условие (6.1).

## 7. Ограниченная функция Грина и интегральные постоянные

**О п р е д е л е н и е 7.1.** Функция  $\mathbf{g}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$  называется функцией Грина задачи об ограниченных решениях для уравнения (5.1), если она позволяет записывать единственное ограниченное решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t-s) \mathbf{f}(s) ds.$$

Известно, что  $\mathbf{g}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$  является ограниченной функцией Грина в том и только в том случае, если выполнены условия (см., например, [2]):

1) при  $t \neq 0$  она является решением однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка

$$\mathbf{a}_0 \mathbf{g}^{(n)} + \mathbf{a}_1 \mathbf{g}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{a}_n \mathbf{g} = 0;$$

2) производные  $\mathbf{g}(t), \dot{\mathbf{g}}(t), \dots, \mathbf{g}^{(n-2)}(t)$  непрерывны в нуле, а производная  $\mathbf{g}^{(n-1)}(t)$  терпит разрыв

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(j)}(+0) - \mathbf{g}^{(j)}(-0) &= 0, & 0 \leq j \leq n-2; \\ \mathbf{g}^{(n-1)}(+0) - \mathbf{g}^{(n-1)}(-0) &= \mathbf{a}_0^{-1}; \end{aligned}$$

3) существуют такие постоянные  $M > 0$  и  $\gamma > 0$ , что справедливы оценки

$$\|\mathbf{g}^{(j)}(t)\| \leq M e^{-\gamma|t|}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (7.1)$$

С помощью ограниченной функции Грина ограниченное решение уравнения (5.1) и его производные допускают представление в виде несобственных интегралов типа свертки

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(j)}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(j)}(t-s) \mathbf{f}(s) ds, & 0 \leq j \leq n-1; \\ \mathbf{x}^{(n)}(t) &= \mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(n)}(t-s) \mathbf{f}(s) ds. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Оценки (7.1) говорят о том, что все написанные интегралы абсолютно сходятся.

**О п р е д е л е н и е 7.2.** Введем интегральные постоянные, положив

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(j)}(t)\| dt, & 0 \leq j \leq n-1; \\ \mathfrak{a}_n = \|\mathbf{a}_0^{-1}\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(n)}(t)\| dt. \end{cases}$$

Значение интегральных постоянных заключается в том, что они позволяют оценивать норму ограниченного решения и его производных

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_C \leq \mathfrak{a}_j \|\mathbf{f}\|_C, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (7.3)$$

Пусть  $0 \leq j \leq n-1$ . Тогда согласно (7.2) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(j)}(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(j)}(t-s) \mathbf{f}(s) ds \right\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(j)}(t-s)\| \|\mathbf{f}(s)\| ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(j)}(t-s)\| ds \|\mathbf{f}\|_C = \mathfrak{a}_j \|\mathbf{f}\|_C. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(j)}(t-s)\| ds = \left| \begin{array}{l} t-s=\sigma \\ -ds=d\sigma \end{array} \right| = \int_{+\infty}^{-\infty} \|\mathbf{g}^{(j)}(\sigma)\| (-d\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(j)}(\sigma)\| d\sigma = \mathfrak{a}_j.$$

Оценка (7.3) при  $0 \leq j \leq n-1$  установлена.

При  $j = n$  согласно (7.2) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(n)}(t)\| &= \|\mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(n)}(t-s) \mathbf{f}(s) ds\| \\ &\leq \|\mathbf{a}_0^{-1} \mathbf{f}(t)\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(n)}(t-s)\| \|\mathbf{f}(s)\| ds \leq \|\mathbf{a}_0^{-1}\| \|\mathbf{f}\|_C + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(n)}(t-s)\| ds \|\mathbf{f}\|_C \\ &= \left( \|\mathbf{a}_0^{-1}\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(n)}(t-s)\| ds \right) \|\mathbf{f}\|_C. \end{aligned}$$

Оценка (7.3) установлена при  $j = n$ .

Для ограниченной функции Грина можно дать представление в виде контурного интеграла [8]

$$\mathbf{g}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma_-} e^{t\lambda} \mathbf{r}_n(\lambda) d\lambda, & t > 0, \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\sigma_+} e^{t\lambda} \mathbf{r}_n(\lambda) d\lambda, & t < 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Здесь  $\partial\sigma_-$  ( $\partial\sigma_+$ ) есть контур, лежащий в левой (правой) открытой полуплоскости в резольвентном множестве  $R$  и окружающий часть спектра многочлена  $\mathbf{l}_n(\lambda)$ , лежащую в открытой левой (правой) полуплоскости. Если многочлен  $\mathbf{l}_n(\lambda)$  гурвицев, т. е. весь его спектр лежит в открытой левой полуплоскости, то интеграл во второй строке формулы (7.4) должен быть заменен нулем. Аналогично поступаем, если спектр лежит в открытой правой полуплоскости.

## 8. Сравнение частотных и интегральных постоянных

**Теорема 8.1.** *Справедлива формула*

$$\sigma_j \leq \mathfrak{x}_j, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (8.1)$$

**Доказательство.** В основе доказательства лежат формулы

$$\begin{aligned} (i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(j)}(t) e^{-i\theta t} dt, & 0 \leq j \leq n-1, \\ (i\theta)^n \mathbf{r}_n(i\theta) &= \mathbf{a}_0^{-1} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(n)}(t) e^{-i\theta t} dt, & j = n, \end{aligned} \quad (8.2)$$

означающие, что преобразование Фурье  $j$ -й производной ограниченной функции Грина совпадает с  $j$ -й частотной характеристикой.

Пусть  $0 \leq j \leq n-1$ . Тогда согласно первой строке формулы (8.2) имеем

$$\|(i\theta)^j \mathbf{r}_n(i\theta)\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(j)}(t) e^{-i\theta t} dt \right\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(j)}(t)\| dt = \mathfrak{x}_j.$$

Переходя к максимуму в левой части неравенства, получаем

$$\sigma_j \leq \mathfrak{x}_j, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Пусть  $j = n$ . Тогда согласно второй строке формулы (8.2) имеем

$$\|(i\theta)^n \mathbf{r}_n(i\theta)\| = \left\| \mathbf{a}_0^{-1} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}^{(n)}(t) e^{-i\theta t} dt \right\| \leq \|\mathbf{a}_0^{-1}\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{g}^{(n)}(t)\| dt = \mathfrak{x}_n.$$

Переходя к супремуму в левой части неравенства, получаем

$$\sigma_n \leq \mathfrak{x}_n.$$

□

Формула (8.2) при  $j = 0$  принимает вид

$$\mathbf{r}_n(i\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t) e^{-i\theta t} dt. \quad (8.3)$$

Эта формула легко устанавливается. Она означает, что преобразование Фурье ограниченной функции Грина совпадает с частотной характеристикой. Поэтому сама ограниченная функция Грина в свою очередь является обратным преобразованием Фурье [9]

$$\mathbf{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{r}_n(i\theta) e^{it\theta} d\theta.$$

В силу написанной выше оценки (6.2) для резольвенты  $n$ -го все написанные оценки для интегралов сходятся при  $n \geq 2$ . Из (8.3) интегрированием по частям (при  $\theta \neq 0$ ) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n(i\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t) e^{-i\theta t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t) d\left(\frac{e^{-i\theta t}}{-i\theta}\right) \\ &= \mathbf{g}(t) \frac{e^{-i\theta t}}{-i\theta} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{g}}(t) \frac{e^{-i\theta t}}{-i\theta} dt = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{g}}_n(t) \frac{e^{-i\theta t}}{i\theta} dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(i\theta) \mathbf{r}_n(i\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{g}}(t) e^{-i\theta t} dt.$$

Повторяя высказанные выше рассуждения, получаем, что  $j$ -я производная ограниченной функции Грина является обратным преобразованием Фурье  $j$ -й частотной характеристики

$$\mathbf{g}^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{r}_n(i\theta) (i\theta)^j e^{it\theta} d\theta, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

с гарантией это верно при  $0 \leq j \leq n-2$ .

Для конечномерной банаховой алгебры  $\mathbb{B}$  оценки (8.1) могут быть уточнены, а именно (см. [2]):

$$\sigma_0 \leq \mathfrak{a}_0 \text{ и } \sigma_j < \mathfrak{a}_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Мы ввели интегральные постоянные  $\mathfrak{a}_j$  и показали как они участвуют в оценке ограниченного решения и его производных (7.3). Теперь посмотрим, как в аналогичной ситуации используются частотные постоянные  $\sigma_j$ .

Рассмотрим почти периодическую функцию  $\mathbf{f}(t)$  с абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$\mathbf{f}(t) \sim \sum_j \mathbf{f}_j e^{i\theta_j t}$$

( $\mathbf{f}_j$  из банаховой алгебры  $\mathbb{B}$ ). Если ввести норму

$$\|\mathbf{f}\| = \sum_k \|\mathbf{f}_k\|,$$

то получим банахово пространство  $P$ . В описываемой нами ситуации уравнение (5.1) имеет единственное почти периодическое решение  $\mathbf{x}(t)$ , и ряд Фурье этого решения абсолютно сходится

$$\mathbf{x}(t) = \sum_k \mathbf{x}_k e^{i\theta_k t}, \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{r}(i\theta_k) \mathbf{f}_k,$$

поэтому

$$\|\mathbf{x}\| \leq \sigma_0 \|\mathbf{f}\|.$$

Аналогично, так как

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \sum_k \mathbf{x}_k e^{i\theta_k t} (i\theta_k)^j,$$

то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{(j)}\| &= \sum_k \|\mathbf{x}_k (i\theta_k)^j\| = \sum_k \|\mathbf{r}_n(i\theta_k) (i\theta_k)^j \mathbf{f}_k\| \\ &\leq \sum_k \|\mathbf{r}_n(i\theta_k) (i\theta_k)^j\| \|\mathbf{f}_k\| \leq \sigma_j \|\mathbf{f}\|, \quad \text{где } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

## References

- [1] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975; англ. пер.: W. Rudin, *Functional Analysis*, McGRAW-HILL book company, New York–San-Francisco–Toronto–London, 1973.
- [2] А. И. Перов, И. Д. Коструб, “Об ограниченных решениях слабо нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:4 (2016), 830–849; англ. пер.: A. I. Perov, I. D. Kostруб, “On bounded solutions to weakly nonlinear vector-matrix differential equations of order  $n$ ”, *Siberian Math. J.*, **57**:4 (2016), 650–665.
- [3] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, М., Наука, 1970. [Yu. L. Daletsky, M. G. Crane, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*, Nauka publ., Moscow, 1970 (In Russian)].
- [4] V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova, “Computation of Green’s Function of the Bounded Solutions Problem”, *Comput. Methods Appl. Math.*, 2017.
- [5] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, М., ИЛ, 1962; англ. пер.: E. Hille, R. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, American Mathematical Society, USA, 1957.
- [6] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, М., Физматлит, 1959. [A. O. Gel’fond, *Calculus of Finite Differences*, Moscow, Fizmatlit, 1959 (In Russian)].
- [7] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, М., Наука, 1970. [M. A. Krasnoselsky, V. Sh. Burd, Yu. S. Kolesov, *Nonlinear Almost Periodic Oscillations*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].
- [8] В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова, “Вычислительные методы спектральной теории”, *Comput. Methods Appl. Math.*, 2019. [V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova, *Computational Methods of Spectral Theory*, Publishing House of VSU, Voronezh, 2019 (In Russian)].
- [9] С. Бохнер, *Лекции об интегралах Фурье*, М., Физматлит, 1962; англ. пер.: S. Bochner, *Lectures on Fourier Integrals*, Princeton University Press, Princeton, 1959.

## Информация об авторах

**Перов Анатолий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: anperov@mail.ru

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-5198-1115>

## Information about the authors

**Anatoly I. Perov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the System Analysis and Management Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: anperov@mail.ru

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-5198-1115>

**Коструб Ирина Дмитриевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: [ikostrub@yandex.ru](mailto:ikostrub@yandex.ru)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-5636-5071>

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**

Коструб Ирина Дмитриевна  
E-mail: [ikostrub@yandex.ru](mailto:ikostrub@yandex.ru)

Поступила в редакцию 21.05.2020 г.  
Поступила после рецензирования 18.07.2020 г.  
Принята к публикации 19.11.2020 г.

**Irina D. Kostrub**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the System Analysis and Management Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: [ikostrub@yandex.ru](mailto:ikostrub@yandex.ru)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-5636-5071>

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**

Irina D. Kostrub  
E-mail: [ikostrub@yandex.ru](mailto:ikostrub@yandex.ru)

Received 21.05.2020  
Reviewed 18.07.2020  
Accepted for press 19.11.2020

© Сумин В.И., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-422-440

УДК 517.95

## Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем

Владимир Иосифович СУМИН

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

## Volterra functional equations in the stability problem for the existence of global solutions of distributed controlled systems

Vladimir I. SUMIN

Nizhny Novgorod State University

23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

**Аннотация.** Ранее автором была предложена довольно общая форма описания *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \equiv \{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m,$$

где  $f(., ., .) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$ ;  $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$  — управление;  $A : L_p^m \rightarrow L_q^l$  — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе  $T$  подмножеств  $\Pi$  в том смысле, что для любого  $H \in T$  сужение  $A[z]|_H$  не зависит от значений  $z|_{\Pi \setminus H}$ ;  $p, q, k \in [1, +\infty]$ . Это определение вольтерровости — многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра. К подобным уравнениям естественным образом (обращением главной части) приводятся разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с разного рода запаздываниями и др.). Переход к эквивалентному ВФУ-описанию УНКЗ адекватен многим проблемам распределенной оптимизации. В частности, автором была предложена опирающаяся на это описание схема получения конструктивных достаточных условий *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) УНКЗ. Схема использует продолжение локальных решений ВФУ (то есть решений на множествах  $H \in T$ ) вдоль упорядоченной по вложению конечной цепочки множеств  $\{H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_{k-1} \subset H_k \equiv \Pi\}$  системы  $T$ . При этом используется опирающаяся на принцип сжимающих отображений специальная теорема существования локальных решений. В случае  $p = q = k = \infty$  при естественных предположениях возможность применения этого принципа обеспечивается тем, что оператор правой части  $F_v[z](t) \equiv f(t, A[z](t), v(t))$  удовлетворяет операторному условию Липшица с квазинильпотентным «оператором Липшица». Это позволяет, пользуясь хорошо известными результатами функционального анализа, ввести в пространстве  $L_\infty^m(H)$  такую эквивалентную обычной норму, в которой оператор правой части будет сжимающим. В общем

случае  $1 \leq p, q, k \leq \infty$ , охватывающем существенно более широкий круг УНКЗ, оператор правой части подобному операторному условию Липшица, вообще говоря, не удовлетворяет. В этом случае введение требуемой для применения принципа сжимающих отображений эквивалентной нормы пространства  $L_p^m(H)$  обеспечивает доказанная ранее автором *теорема об эквивалентной норме*, опирающаяся на введенное им понятие *суперравностепенной квазинильпотентности* семейства линейных операторов, действующих в банаховом пространстве. В данной статье показано, как эта теорема может быть применена для получения достаточных условий УСГР ВФУ в указанном случае.

**Ключевые слова:** вольтеррово функциональное уравнение; распределенная управляемая система; устойчивость существования глобальных решений; суперравностепенно квазинильпотентное семейство операторов; теорема об эквивалентной норме

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00199\_a).

**Для цитирования:** Сумин В.И. Вольтерровы функциональные уравнения в проблеме устойчивости существования глобальных решений распределенных управляемых систем // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 422–440. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-422-440.

**Abstract.** Earlier the author proposed a rather general form of describing *controlled initial-boundary value problems* (CIBVPs) by means of *Volterra functional equations* (VFE)

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \equiv \{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \quad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m,$$

where  $f(., ., .) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$ ;  $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$  — control function;  $A : L_p^m(\Pi) \rightarrow L_q^l(\Pi)$  — linear operator; the operator  $A$  is a *Volterra operator for some system  $T$*  of subsets of the set  $\Pi$  in the following sense: for any  $H \in T$ , the restriction  $A[z]|_H$  does not depend on the values of  $z|_{\Pi \setminus H}$  (this definition of the Volterra operator is a direct multidimensional generalization of the well-known Tikhonov definition of a functional Volterra type operator). Various CIBVP (for nonlinear hyperbolic and parabolic equations, integro-differential equations, equations with delay, etc.) are reduced by the method of conversion the main part to such functional equations. The transition to equivalent VFE-description of CIBVP is adequate to many problems of distributed optimization. In particular, the author proposed (using such description) a scheme for obtaining sufficient stability conditions (under perturbations of control) of the existence of global solutions for CIBVP. The scheme uses continuation local solutions of functional equation (that is, solutions on the sets  $H \in T$ ). This continuation is realized with the help of the chain  $\{H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_{k-1} \subset H_k \equiv \Pi\}$ , where  $H_i \in T, i = \overline{1, k}$ . A special local existence theorem is applied. This theorem is based on the principle of contraction mappings. In the case  $p = q = k = \infty$  under natural assumptions, the possibility of applying this principle is provided by the following: the right-hand side operator  $F_v[z](t) \equiv f(t, A[z](t), v(t))$  satisfies the Lipschitz condition in the operator form with the quasi-nilpotent «Lipschitz operator». This allows (using well-known results of functional analysis) to introduce in the space  $L_\infty^m(H)$  such an equivalent norm in which the operator of the right-hand side will be contractive. In the general case  $1 \leq p, q, k \leq \infty$  (this case covers a much wider class of CIBVP), the operator  $F_v$ , as a rule, does not satisfy such Lipschitz condition. From the results obtained by the author earlier, it follows that in this case there also exists an equivalent norm of the space  $L_p^m(H)$ , for which the operator  $F_v$  is a contraction operator. The corresponding basic theorem (*equivalent norm theorem*) is based on the notion of *equipotential quasi-nilpotency* of a family of linear operators, acting in a Banach space. This article shows how this theorem can be applied to obtain sufficient stability conditions (under perturbations of control) of the existence of global solutions of VFE.

**Keywords:** functional Volterra equation; controlled distributed system; stability of the existence of global solutions; equipotential quasiniptent family of the operators; equivalent norm theorem

**Acknowledgements:** The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00199\_a).

**For citation:** Sumin V.I. Vol'terrovyy funktsional'nyye uravneniya v probleme ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy raspredelennykh upravlyayemykh sistem [Volterra functional equations in the stability problem for the existence of global solutions of distributed controlled systems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 422–440. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-422-440. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

В [1] была предложена довольно общая форма описания *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ)

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \equiv \{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m(\Pi) \equiv (L_p(\Pi))^m, \quad (0.1)$$

где  $\Pi \subset \mathbf{R}^n$  ограничено и измеримо по Лебегу,  $f(., ., .) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$  — функция типа Каратеодори;  $v(.)$  — управление из некоторого  $\mathcal{D} \subset L_k^s$ ;  $A : L_p^m \rightarrow L_q^l$  — *линейный ограниченный оператор* (ЛОО), вольтерров на некоторой системе  $T$  измеримых подмножеств  $\Pi$  в том смысле, что для любого  $H \in T$  сужение  $A[z]|_H$  не зависит от значений  $z|_{\Pi \setminus H}$ ;  $p, q, k \in [1, +\infty]$ . Это определение вольтерровости — многомерное обобщение хорошо известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра. К подобным уравнениям естественным образом (обращением главной части) приводятся разнообразные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с разного рода запаздываниями и др.). Способ обращения главной части УНКЗ в достаточно общем виде описан в [2, §2]; многочисленные и разнообразные конкретные примеры применения способа см., в частности, в [3, 4], [5, гл.2], [6, 7] (краткие обзоры см. в [6, 8–11]). Переход к эквивалентному ВФУ-описанию УНКЗ вида (0.1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации, позволяя, возможно, достичь разумного компромисса между естественным стремлением к общности теоретических построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием иметь удобные для приложений формулировки — с другой (см. обзоры в [6, 8–11]).

В частности, автором была предложена опирающаяся на это описание схема получения конструктивных достаточных условий *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) УНКЗ. Заметим, что понятие локального решения (0.1) как решения этого уравнения на некотором множестве  $H$  системы  $T$  — естественное следствие вольтерровости оператора  $A$  в указанном выше смысле; для каждого множества  $H \in T$  «естественным образом» определяется действие оператора  $A$  на функции  $y \in L_p^m(H)$  (и следовательно, как оператора из  $L_p^m(H)$  в  $L_q^l(H)$ ) формулой  $A[\tilde{y}](t), t \in H$ , где  $\tilde{y}$  — любое принадлежащее  $L_p^m$  продолжение функции  $y$  с множества  $H$  на  $\Pi$ ; ниже мы систематически пользуемся этим замечанием. Указанная схема использует продолжение локальных решений ВФУ вдоль некоторой цепочки множеств системы  $T$  (*цепочкой множеств* называем конечную систему множеств  $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \dots, H_k\}$ , линейно упорядоченную по вложению ( $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k$ ) и такую, что  $H_0 = \emptyset, H_k = \Pi$ ; мы без ограничения общности считаем, что  $\emptyset \in T, \Pi \in T$ ). При этом используется опирающаяся на принцип сжимающих отображений специальная теорема существования локальных решений. В случае  $p = q = k = \infty$  при естественных предположениях возможность

применения этого принципа обеспечивается тем, что оператор правой части

$$F_v[z(\cdot)](t) \equiv f(t, A[z](t), v(t))$$

удовлетворяет операторному условию Липшица с квазинильпотентным «оператором Липшица». Это позволяет, пользуясь хорошо известными результатами функционального анализа, ввести в пространстве  $L_\infty^m(H)$  такую эквивалентную обычной норму, в которой оператор правой части будет сжимающим (см., например, конкретные реализации в [3, 4], [5, гл.2], краткие обзоры в [6, 8, 9, 11]). В общем случае  $1 \leq p, q, k \leq \infty$ , охватывающем существенно более широкий круг УНКЗ, оператор правой части (0.1) подобному операторному условию Липшица, вообще говоря, не удовлетворяет (это хорошо видно на примере рассматриваемой в [7] нелинейной управляемой системы Гурса-Дарбу). В этом случае введение требуемой для применения принципа сжимающих отображений эквивалентной нормы пространства  $L_p^m(H)$  обеспечивает доказанная в [11] теорема об эквивалентной норме, опирающаяся на введенное в [12, 13] понятие *суперравностепенной квазинильпотентности* семейства линейных операторов, действующих в банаховом пространстве. Сформулируем эту теорему. Пусть  $\mathbf{B}$  — вещественное банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|$ ,  $\Gamma$  — некоторое множество,  $\{G(\gamma)[\cdot] : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}\}_{\gamma \in \Gamma}$  — семейство зависящих от параметра  $\gamma \in \Gamma$  квазинильпотентных ЛОО. Достаточно естественно назвать семейство  $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  *равностепенно квазинильпотентным*, если  $\sqrt[k]{\sup_{\gamma \in \Gamma} \| \{G(\gamma)\}^k \|} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  [12, 13]. Но нам требуется следующее определение [12, 13]: семейство  $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  *суперравностепенно квазинильпотентно*, если

$$\sqrt[k]{\sup_{\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2) \cdot \dots \cdot G(\gamma_k)\|} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (0.2)$$

**З а м е ч а н и е 0.1.** Число, равное  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\sup_{\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Gamma} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2) \cdot \dots \cdot G(\gamma_k)\|}$ , называется *совместным спектральным радиусом* (joint spectral radius) семейства  $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  [14]. Если совместный спектральный радиус семейства операторов равен нулю, то такое семейство часто называют *квазинильпотентным* (см., например, [15]). Мы для обозначения свойства (0.2) семейства  $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  используем название *суперравностепенная квазинильпотентность*, придерживаясь терминологии, предложенной в [12, 13].

**Теорема 0.1** (теорема об эквивалентной норме [11–13]). Пусть норма  $\|\cdot\|$  пространства  $\mathbf{B}$  монотонна относительно полуупорядоченности  $\mathbf{B}$  по некоторому конусу  $K$ . Пусть семейство  $\{G(\gamma)[\cdot] : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}\}_{\gamma \in \Gamma}$  квазинильпотентных ЛОО, для каждого из которых конус  $K$  является инвариантным, равномерно ограничено, то есть

$$\nu_G \equiv \sup_{\gamma \in \Gamma} \|G(\gamma)\| < \infty,$$

и суперравностепенно квазинильпотентно. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует эквивалентная норме  $\|\cdot\|$  норма  $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$  пространства  $\mathbf{B}$ , монотонная относительно полуупорядоченности  $\mathbf{B}$  по конусу  $K$  такая, что для каждого  $\gamma \in \Gamma$  соответствующая норма оператора  $G(\gamma)$  не превосходит числа  $\varepsilon$  (множество  $K \subset \mathbf{B}$  называем конусом, если оно замкнуто, любая неотрицательная комбинация элементов  $K$  лежит в  $K$ , никакой ненулевой вектор не принадлежит  $K$  вместе со своим обратным).

Цель данной статьи — показать, как теорема 0.1 позволяет получить условия УСГР ВФУ (0.1) при конечных  $p, q, k$  в важном для приложений случае регулярного оператора  $A$ . Основные ее утверждения были в несколько иной форме депонированы в [13] и без доказательств анонсированы в [12], их доказательства не публиковались.

Примем следующие соглашения: считаем упомянутые выше множества  $\Pi$ ,  $\mathcal{D}$ , функцию  $f$ , оператор  $A$ , систему  $T$ , числа  $p, q \in [1, +\infty)$  ( $q \geq p$ ),  $k \in [1, +\infty]$ ,  $m, l, s, n \in \mathbb{N}$  фиксированными;  $r = pq/(q - p)$  при  $p < q$ ,  $r = +\infty$  при  $p = q$ ; модуль вектора (матрицы) равен сумме модулей его (соотв. ее) компонент; норма в  $L_p^m(H)$  задается формулой  $\|z\|_{p,m,H} \equiv \| |z| \|_{p,H}$ , где  $\| \cdot \|_{p,H}$  — стандартная норма  $L_p(H)$  (при  $H = \Pi$  и/или  $m = 1$  соответствующие значки в обозначениях, как правило, опускаем);  $L_r^{m \times l}(H)$  — пространство  $(m \times l)$ -матриц-функций с  $L_r(H)$ -компонентами,  $\| \cdot \|_{r,m \times l,H} \equiv \| | \cdot | \|_{r,H}$  — норма в  $L_r^{m \times l}(H)$ ;  $V(T)$  — семейство всех операторов (как линейных, так и нелинейных), действующих из одного в другое пространство вектор-функций на  $\Pi$  и вольтерровых на системе  $T$  в указанном выше смысле; для любых  $H \in T$ ,  $M \in \mathbf{R}_+$ ,  $\hat{z} \in L_p^m(H)$  положим

$$UA_{M,H}(\hat{z}) \equiv \{z \in L_p^m(H) : \|A[z - \hat{z}]\|_{q,l,H} \leq M\};$$

$$T^{(-)} \equiv \{h : h = H_1 \setminus H_2 : H_1, H_2 \in T, H_2 \subset H_1\};$$

$P_H$  — оператор умножения на характеристическую функцию множества  $H \subset \Pi$ ;  $S_H$  — оператор сужения на множество  $H \subset \Pi$  функции, определенной на  $\Pi$ ,  $S_H[y](t) \equiv y(t)$ ,  $t \in H$ ;  $Q_H$  — оператор продолжения нулем на множество  $\Pi$  функции, определенной на  $H \subset \Pi$ ,  $Q_H[y](t) \equiv \{y(t), t \in H; 0, t \in \Pi \setminus H\}$ ; для функции  $y$ , определенной на  $\Pi$ , пишем  $Q_H[y]$  вместо  $Q_H S_H[y]$ ;  $L(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$  — класс всех ЛОО, определенных на банаховом пространстве  $\mathbf{B}_1$  и действующих в банахово пространство  $\mathbf{B}_2$ ;  $\|G\|_{p,m,H \rightarrow q,l,H}$  — норма ЛОО  $G \in L(L_p^m(H), L_q^l(H))$ ;  $\Sigma \equiv \Sigma_\Pi$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых подмножеств  $\Pi$ .

## 1. Основные формулировки

Требования к уравнению (0.1) формулируем в виде выписываемых ниже условий  $\mathbf{K}_0$ ),  $\mathbf{K}_1$ ),  $\mathbf{K}_2$ ),  $\mathbf{K}_3$ ), а), б), в), г), д), е), ф).

$\mathbf{K}_0$ ) Функция  $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v})$  дифференцируема по  $\mathbf{p}$  на  $\mathbf{R}^l$  для каждого  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^s$  при почти всех (п.в.)  $t \in \Pi$ , вместе с производной  $f'_p(t, \mathbf{p}, \mathbf{v})$  измерима по  $t$  на  $\Pi$  для любой пары  $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\} \in \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s$  и непрерывна по  $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$  при п.в.  $t \in \Pi$ .

$\mathbf{K}_1$ ) Формула  $\mathbf{f}[y, v](t) \equiv f(t, y(t), v(t))$ ,  $t \in \Pi$ ,  $y \in L_q^l$ ,  $v \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ , определяет оператор  $\mathbf{f}[\cdot, \cdot] : L_q^l \times \mathcal{D} \rightarrow L_p^m$ .

$\mathbf{K}_2$ ) Формула  $\mathbf{f}_1[y, v](t) \equiv f'_p(t, y(t), v(t))$ ,  $t \in \Pi$ ,  $y \in L_q^l$ ,  $v \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ , определяет ограниченный оператор  $\mathbf{f}_1[\cdot, \cdot] : L_q^l \times \mathcal{D} \rightarrow L_r^{m \times l}$ . То есть существует неубывающая функция  $\mathcal{N}(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  такая, что  $\|\mathbf{f}_1[y, v](\cdot)\|_{r,m \times l} \leq \mathcal{N}(\max\{\|y\|_{q,l}, \|v\|_{k,s}\})$  при  $y \in L_q^l$ ,  $v \in \mathcal{D}$ .

а) Существует ЛОО  $B : L_p \rightarrow L_q$  такой, что  $|A[z](t)| \leq B[|z|](t)$ ,  $t \in \Pi$ ,  $z \in L_p^m$ .

Далее мажоранту  $B$  считаем фиксированной и удовлетворяющей условию

б)  $B \in V(T)$  (а следовательно и  $A \in V(T)$ ).

В силу  $\mathbf{K}_1$ ) формула

$$F[z, v](t) \equiv f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m, \quad v \in \mathcal{D},$$

определяет оператор  $F[.,.] : L_p^m \times \mathcal{D} \rightarrow L_p^m$ . Положим

$$I(t, x, y, \mathbf{v}) \equiv \int_0^1 f_{\mathbf{p}}'(t, x + \theta y, \mathbf{v}) d\theta, \quad t \in \Pi, \quad x \in \mathbf{R}^l, \quad y \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^s.$$

В силу **K<sub>2</sub>**) формула

$$J[x, y, v](t) \equiv I(t, A[y](t), A[x - y](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad x, y \in L_p^m, \quad v \in \mathcal{D},$$

задает ограниченный оператор  $J[.,.,.] : L_p^m \times L_p^m \times \mathcal{D} \rightarrow L_r^{m \times l}$  и, каковы бы ни были  $x \in L_p^m$ ,  $y \in L_p^m$ ,  $v \in \mathcal{D}$ , формула

$$G(x, y, v)[z](t) \equiv |J[x, y, v](t)| \cdot B[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p,$$

задает ЛОО  $G(x, y, v)[.] : L_p \rightarrow L_p$ . Так как  $F, J, G \in V(T)$  ввиду **b**), то в силу **K<sub>2</sub>**)

$$\begin{aligned} |||J[x, y, v](.)|||_{r,H} &\leq \mathcal{N}(\max\{\|A[y]\|_{q,l,H} + \|A[x - y]\|_{q,l,H}, \|v\|_{k,s,H}\}), \\ t \in H, \quad x, y &\in L_p^m(H), \quad v \in L_k^s(H), \quad H \in T. \end{aligned} \quad (1.1)$$

По теореме о конечных приращениях для любых  $H \in T$ ,  $x, y \in L_p^m(H)$ ,  $v \in L_k^s(H)$

$$F[x, v](t) - F[y, v](t) = \{J[x, y, v](t)\} \cdot A[x - y](t), \quad t \in H. \quad (1.2)$$

Пусть в  $L_r = L_r(\Pi)$  выделен некоторый класс функций  $\Gamma \equiv \Gamma(\Pi)$  такой, что для любого  $h \in T^{(-)}$ ,  $mes h > 0$ , справедливо следующее:  $P_h \Gamma \subset \Gamma$ ; формальная замена в определении класса  $\Gamma(\Pi)$  множества  $\Pi$  на множество  $h$  корректна и приводит к некоторому классу заданных на  $h$  функций, который мы обозначим  $\Gamma(h)$ ; элементами класса  $\Gamma(h)$  являются те и только те определенные на  $h$  функции, каждая из которых есть сужение на  $h$  некоторой функции класса  $\Gamma(\Pi)$  (в приложениях роль  $\Gamma$  может играть, например, весь класс  $L_r$ , некоторый класс  $L_\nu$ ,  $\nu > r$ , класс функций, пересечение которого с каждым шаром из  $L_r$  есть множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными  $L_r$ -нормами и др.).

**K<sub>3</sub>)**  $|J[x, y, v](.)| \in \Gamma(\Pi)$  для любых  $x, y \in L_p^m$  и  $v \in \mathcal{D}$ .

**с)** Семейство операторов

$$W(B, \Pi, \nu) \equiv \{(\alpha B) \in L(L_p, L_p) : \alpha \in \Gamma(\Pi), \|\alpha\|_r \leq \nu\}$$

суперравностепенно квазинильпотентно при любом  $\nu > 0$ .

Приведем некоторые следствия сформулированных условий.

**Лемма 1.1.** Если  $\Gamma(\Pi) = L_\nu(\Pi)$ ,  $r \leq \nu < \infty$ , то **K<sub>3</sub>)** есть следствие условия: для любых  $y \in L_p^m$  и  $v \in \mathcal{D}$  функция  $|f_1[A[y], v](.)|$  принадлежит  $\Gamma(\Pi)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточно заметить, что  $|J[x, y, v](t)|$ ,  $t \in \Pi$ , мажорируется интегралом Бохнера по отрезку  $[0, 1]$  от непрерывной функции со значениями в  $\Gamma(\Pi)$ .  $\square$

При выполнении условия **с)**, для любой  $\alpha \in \Gamma(\Pi)$  существуют операторы

$$R(\alpha B) \equiv (I - \alpha B)^{-1} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha B)^i \in L(L_p, L_p) \quad \text{и} \quad R(B\alpha) \equiv (I - B\alpha)^{-1} \equiv \sum_{i=0}^{\infty} (B\alpha)^i \in L(L_q, L_q).$$

Получаем  $R(B\alpha) \equiv I + B \cdot R(\alpha B)\alpha$  и следующее утверждение.

**Лемма 1.2.** Ввиду условия **с)** справедливы оценки

$$\|R(\alpha B)\|_{p \rightarrow p} \leq \Phi_1(\nu) \equiv 2 \left( 1 + \sum_{i=1}^{N(\nu)} (\nu \|B\|)^i \right), \quad \alpha \in \Gamma, \quad \|\alpha\|_r \leq \nu, \quad (1.3)$$

$$\|R(B\alpha)\|_{q \rightarrow q} \leq \Phi_2(\nu) \equiv 1 + \|B\| \cdot \nu \cdot \Phi_1(\nu), \quad \alpha \in \Gamma, \quad \|\alpha\|_r \leq \nu, \quad (1.4)$$

где  $N(\nu)$  — некоторое зависящее от  $\nu$  число,  $\|B\| = \|B\|_{p \rightarrow q}$ .

**Лемма 1.3.** Семейство операторов  $\{G(x, y, v) \in L(L_p(H), L_p(H)) : x, y \in UA_{M,H}(\hat{z})\}$  ввиду условий **K<sub>0</sub>) – K<sub>3</sub>)**, **a)**, **b)**, **с)** равномерно ограничено и суперравностепенно квазинильпотентно, каковы бы ни были  $M > 0$ ,  $H \in T$ ,  $v \in \mathcal{D}$ ,  $\hat{z} \in L_p^m(H)$ .

**Доказательство.** Фиксируем произвольно  $H \in T$ ,  $M > 0$ ,  $v \in \mathcal{D}$ ,  $\hat{z} \in L_p^m(H)$ . Так как для любых  $x, y \in UA_{M,H}(\hat{z})$  имеем  $\|A[y]\|_{q,l,H} \leq \|A[\hat{z}]\|_{q,l,H} + M$  и  $\|A[x-y]\|_{q,l,H} \leq 2(\|A[\hat{z}]\|_{q,l,H} + M)$ , то  $\|J[x, y, v]\|_{r,H} \leq \nu(M, H, v)$ , где

$$\nu(M, H, v) \equiv \mathcal{N}(\max\{3(\|A[\hat{z}]\|_{q,l,H} + M), \|v\|_{k,s}\}).$$

Указанное в доказываемой лемме семейство операторов принадлежит  $W(B, H, \nu(M, H, v))$  (см. **K<sub>3</sub>)** и **с)**). Теперь достаточно сослаться на **с)** и лемму 1.2.  $\square$

**Лемма 1.4.** Ввиду условий **b)**, **с)** оператор  $\tilde{B} \equiv S_{\Pi \setminus H} B Q_{\Pi \setminus H} : L_p(\Pi \setminus H) \rightarrow L_q(\Pi \setminus H)$  при каждом  $H \in T$  обладает свойством

**с̃)** Семейство  $\{\alpha \tilde{B} \in L(L_p(\Pi \setminus H), L_p(\Pi \setminus H)) : \alpha \in \Gamma(\Pi \setminus H), \|\alpha\|_{r, \Pi \setminus H} \leq \nu\}$  суперравностепенно квазинильпотентно для любого  $\nu > 0$ .

**Доказательство.** Для  $\alpha \in L_r(\Pi \setminus H)$  через  $\tilde{\alpha}$  обозначим функцию  $Q_{\Pi \setminus H}[\alpha]$ . Заметим, что  $(\alpha_1 S_{\Pi \setminus H} B Q_{\Pi \setminus H}) \cdot \dots \cdot (\alpha_j S_{\Pi \setminus H} B Q_{\Pi \setminus H}) = S_{\Pi \setminus H}(\tilde{\alpha}_1 B) \cdot \dots \cdot (\tilde{\alpha}_j B) Q_{\Pi \setminus H}$  при любых  $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in \Gamma(\Pi \setminus H)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Таким образом,

$$\|(\alpha_1 S_{\Pi \setminus H} B Q_{\Pi \setminus H}) \cdot \dots \cdot (\alpha_j S_{\Pi \setminus H} B Q_{\Pi \setminus H})\|_{p, \Pi \setminus H \rightarrow p, \Pi \setminus H} \leq \|(\tilde{\alpha}_1 B) \cdot \dots \cdot (\tilde{\alpha}_j B)\|_{p \rightarrow p}$$

и так как семейство операторов  $\{(\tilde{\alpha} B) \in L(L_p, L_p) : \alpha \in \Gamma(\Pi \setminus H), \|\alpha\|_{r, \Pi \setminus H} \leq \nu\}$  принадлежит семейству  $W(B, \Pi, \nu)$ , то из **с)** следует **с̃)**.  $\square$

**З а м е ч а н и е 1.1.** Нам потребуется следующее утверждение, являющееся обобщением известной леммы Гронуолла и частным случаем теоремы 1.9.3 из [16].

**Утверждение 1.1** (обобщенная лемма Гронуолла). Пусть:  $\mathbf{B}$  — банахово пространство, полуупорядоченное по некоторому конусу  $K \subset \mathbf{B}$ ;  $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$  — квазинильпотентный ЛОО, для которого конус  $K$  инвариантен. Если для некоторых  $x, y \in \mathbf{B}$  имеем  $x \leq G[x] + y$ , то  $x \leq R(G)[y]$ , где  $R(G) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} G^k$ .

Ниже данное утверждение применяется в случае лебегова пространства и конуса неотрицательных функций в нем.

Условие **b)** позволяет говорить о локальных решениях уравнения (0.1) на множествах  $H \in T$ . В силу условий **K<sub>0</sub>)**, **K<sub>1</sub>)**, **a)** такие решения имеет смысл искать в классах  $L_p^m(H)$ . Функцию  $z(\cdot) \in L_p^m(H)$  назовем отвечающим управлению  $v(\cdot) \in D$  решением уравнения (0.1) на  $H$ , если она вместе с  $v(\cdot)$  обращает (0.1) в тождество п.в. на  $H$ .

**Теорема 1.1** (теорема единственности). *Если выполняются условия  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , **a)**, **b)**, **c)**, то каково бы ни было  $v \in \mathcal{D}$ , уравнение (0.1) не может иметь ни на каком  $H \in T$  более одного решения в классе  $L_p^m(H)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $\Delta z \equiv z_1 - z_2$  — разность решений  $z_1, z_2$ , отвечающих  $v$  на  $H$ , то  $|\Delta z(t)| = |F[z_1, v](t) - F[z_2, v](t)| \leq |J[z_1, z_2, v](t)| B[|\Delta z|](t)$ ,  $t \in H$  (см. (1.2)). Так как функция  $\alpha(\cdot) \equiv |J[z_1, z_2, v](\cdot)|$  принадлежит  $\Gamma(H)$ , то в силу условия **c)** оператор  $B_\alpha[\cdot] : L_p(H) \rightarrow L_p(H)$ , задаваемый формулой  $B_\alpha[x](t) \equiv \alpha(t)B[x](t)$ ,  $t \in H$ , квазинильпотентен. То есть по обобщенной лемме Гронуолла  $\Delta z(t) \equiv 0$ ,  $t \in H$ .  $\square$

Локальное решение  $z(\cdot) \in L_p^m(H)$ , отвечающее управлению  $v \in \mathcal{D}$ , будем обозначать  $z_{v,H}$ . Решение  $z_{v,\Pi}$  будем называть глобальным решением, отвечающим управлению  $v$ ; вместо  $z_{v,\Pi}$  будем писать  $z_v$ .

Теореме существования локального решения предположим лемму об оценочной функции операторов  $F[\cdot, v] : L_p^m(H) \rightarrow L_p^m(H)$  на множествах  $UA_{M,H}(\hat{z})$ . Для  $v \in \mathcal{D}$ ,  $H \in T$ ,  $M \in \mathbf{R}_+$ ,  $\hat{z} \in L_p^m(H)$  положим

$$\Xi(v, H, M, \hat{z}) \equiv M\varphi_B(H)\mathcal{N}(\max\{\|A[\hat{z}]\|_{q,l,H} + M, \|v\|_{k,s}\}) + \|A[F[\hat{z}, v] - \hat{z}]\|_{q,l,H}, \quad (1.5)$$

где использована функция множества  $\varphi_B(h) \equiv \|P_h B P_h\|_{p \rightarrow q} = \|P_h B Q_h\|_{p,h \rightarrow q}$ ,  $h \in \Sigma$ .

**Лемма 1.5.** *Ввиду условий **a)**, **b)** при любых  $v \in \mathcal{D}$ ,  $H \in T$ ,  $M \in \mathbf{R}_+$ ,  $\hat{z} \in L_p^m(H)$  справедлива оценка:*

$$\|A[F[z, v] - \hat{z}]\|_{q,l,H} \leq \Xi(v, H, M, \hat{z}), \quad z \in UA_{M,H}(\hat{z}).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для любого  $z \in L_p^m(H)$

$$\|A[F[z, v] - \hat{z}]\|_{q,l,H} \leq \|A[F[z, v] - F[\hat{z}, v]]\|_{q,l,H} + \|A[F[\hat{z}, v] - \hat{z}]\|_{q,l,H}. \quad (1.6)$$

В силу **a)**, **b)** и (1.2)

$$\begin{aligned} \|A[F[z, v] - F[\hat{z}, v]]\|_{q,l,H} &= \|A[J[z, \hat{z}, v]A[z - \hat{z}]]\|_{q,l,H} \leq \\ &\leq \|B[|J[z, \hat{z}, v]| \cdot |A[z - \hat{z}]]\|_{q,H} = \|P_H B Q_H[|J[z, \hat{z}, v]| \cdot |A[z - \hat{z}]]\|_q. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Так как

$$\|P_H B Q_H[|J[z, \hat{z}, v]| \cdot |A[z - \hat{z}]]\|_q \leq \|P_H B Q_H\|_{p,H \rightarrow q} \cdot \| |J[z, \hat{z}, v]| \|_{r,H} \cdot \| |A[z - \hat{z}] \|_{q,H},$$

а в силу (1.1) для  $z \in UA_{M,H}(\hat{z})$

$$\| |J[z, \hat{z}, v]| \|_{r,H} \leq \mathcal{N}(\max\{\|A[\hat{z}]\|_{q,l,H} + M, \|v\|_{k,s}\}),$$

то из (1.6), (1.7) следует доказываемая оценка.  $\square$

**Теорема 1.2** (теорема существования). *Пусть выполняются условия  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , **a)**, **b)**, **c)**. Если для некоторых  $v \in \mathcal{D}$ ,  $H \in T$ ,  $M \in \mathbf{R}_+$ ,  $\hat{z} \in L_p^m(H)$*

$$\Xi(v, H, M, \hat{z}) < M, \quad (1.8)$$

*то (0.1) имеет единственное в  $L_p^m(H)$  решение  $z_{v,H}$  и  $\|A[z_{v,H} - \hat{z}]\|_{q,l,H} \leq \Xi(v, H, M, \hat{z})$ .*

**Доказательство.** Пусть для набора  $v, H, M, \hat{z}$  выполняется (1.8). В силу (1.8) и леммы 1.5 оператор  $F[., v] : L_p^m(H) \rightarrow L_p^m(H)$  отображает замкнутое множество  $X \equiv UA_{M,H}(\hat{z})$  само в себя. Покажем, что  $F[., v]$  сжимает на  $X$ , что в силу теоремы 1.1 завершит доказательство теоремы 1.2. Имеем (см. а), (1.2))

$$|F[x, v](t) - F[y, v](t)| \leq G(x, y, v) [|x - y|](t), \quad t \in H, \quad x, y \in X. \quad (1.9)$$

Семейство операторов  $\{G(x, y, v) \in L(L_p(H), L_p(H)) : x, y \in X\}$  суперравностепенно квазинильпотентно по лемме 1.3. Положим  $C \equiv 2 \sup_{x, y \in X} \|G(x, y, v)\|_{p, H \rightarrow p, H}$ , что корректно в силу (1.1). Если  $C = 0$ , то в силу (1.9) оператор  $F[., v]$  постоянен на  $X$  и теорема доказана. Пусть  $C \neq 0$ . Применим к семейству  $\{G(x, y, v) \in L(L_p(H), L_p(H)) : x, y \in X\}$  теорему 0.1, взяв в ней  $\Gamma = X \times X$ ,  $\varepsilon = C^{-1}$ . Существует норма  $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ , эквивалентная норме  $\|\cdot\|_{p, H}$ , монотонная относительно полуупорядоченности  $L_p(H)$  по конусу неотрицательных функций и такая, что  $\|G(x, y, v)[z]\|_{(\varepsilon)} \leq \varepsilon \|z\|_{(\varepsilon)}$  для  $z \in L_p(H)$ . Из (1.9) получаем, что в норме  $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ , эквивалентной норме  $\|\cdot\|_{p, m, H}$ , оператор  $F[., v]$  является сжимающим на  $X$  с коэффициентом сжатия  $1/2$ .  $\square$

Для рассмотрения вопроса о достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений уравнения (0.1) нам удобно ввести следующие определения. Если цепочка множеств  $\mathcal{T} = \{H_0, \dots, H_k\}$  принадлежит системе  $T$ , на которой  $B$  вольтерров, то называем  $\mathcal{T}$  *вольтерровой цепочкой оператора  $B$* . Пусть  $\delta > 0$  — некоторое число; говорим, что ЛОО  $B : L_p \rightarrow L_q$  удовлетворяет  $\delta$ -условию на множестве  $H \in \Sigma$ , если  $\|P_H B P_H\|_{p \rightarrow q} < \delta$ . Цепочку  $\mathcal{T} = \{H_0, \dots, H_k\}$  назовем  $\delta$ -цепочкой ЛОО  $B : L_p \rightarrow L_q$ , если  $B$  удовлетворяет  $\delta$ -условию на каждой разности  $H_i \setminus H_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Назовем вольтеррову цепочку  $\mathcal{T} = \{H_0, \dots, H_k\}$  ЛОО  $B : L_p \rightarrow L_q$  *вольтерровой сильной  $\delta$ -цепочкой оператора  $B$* , если  $\|P_{H_i \setminus H_{i-1}} B P_{H_j \setminus H_{j-1}}\|_{p \rightarrow q} \leq \delta$ ,  $k \geq i \geq j \geq 1$ . Назовем цепочку  $\mathcal{T} = \{H_0, \dots, H_k\} \subset \Sigma$   $\delta$ -малой по мере, если  $mes(H_i \setminus H_{i-1}) < \delta$  для всех  $i = 1, \dots, k$ .

Пусть  $\Omega = \Omega(\Pi)$  — класс тех  $v \in \mathcal{D}$ , каждому из которых отвечает единственное глобальное решение  $z_v \in L_p^m$  уравнения (0.1). Предполагаем, что  $\Omega(\Pi) \neq \emptyset$ . Произвольно фиксируем некоторый элемент  $v_0 \in \Omega(\Pi)$  и пусть  $z_0 \equiv z_{v_0}$ . Для  $v \in \mathcal{D}$  положим:

$$\Delta_v f(z_0)(t) \equiv f(t, A[z_0](t), v(t)) - f(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad t \in \Pi; \quad r(v, v_0) \equiv \|A[\Delta_v f(z_0)]\|_{q, l}.$$

Сформулируем основную теорему данной статьи.

**Теорема 1.3** (теорема устойчивости существования глобальных решений). *Пусть выполняются условия  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , а), б), в). Тогда для любых  $d > 0$ ,  $d_0 > 0$ ,  $v_0 \in \Omega(\Pi)$  существуют  $\delta > 0$ ,  $C > 0$  такие, что если некоторое  $v \in \mathcal{D}$  удовлетворяет неравенствам: 1)  $\|v - v_0\|_{k, s} < d_0$ , 2)  $\|\Delta_v f(z_0)\|_{p, m} < d$ , 3)  $r(v, v_0) < \delta$ , причем 4) мажоранта  $B : L_p \rightarrow L_q$  имеет вольтеррову  $\delta$ -цепочку, то  $v \in \Omega(\Pi)$  и*

$$\|z_v - z_0\|_{p, m} \leq C \|\Delta_v f(z_0)\|_{p, m}, \quad (1.10)$$

$$\|A[z_v - z_0]\|_{q, l} \leq C \cdot r(v, v_0). \quad (1.11)$$

Теорема 1.3 имеет условный характер и удобнее применять ее следствие, получающееся из нее заменой условия 4) следующим более сильным условием

**д)** Для любого  $\delta > 0$  оператор  $B : L_p \rightarrow L_q$  имеет вольтеррову  $\delta$ -цепочку.

**Следствие 1.1.** Пусть выполняются условия  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , **a)**, **b)**, **c)**, **d)**. Тогда для любых  $d > 0$ ,  $d_0 > 0$  и  $v_0 \in \Omega(\Pi)$  существуют  $\delta > 0$ ,  $C > 0$  такие, что если  $v \in \mathcal{D}$  удовлетворяет неравенствам 1), 2), 3) теоремы 1.3, то  $v$  принадлежит классу  $\Omega(\Pi)$  и справедливы оценки (1.10), (1.11).

Заменяя в следствии 1.1 условия **c)** и **d)** теми или иными конкретными условиями, достаточными для выполнения **c)** и **d)**, получаем конкретные признаки УСГР уравнения (0.1). Приведем примеры. Воспользуемся достаточными условиями суперравностепенной квазинильпотентности семейства ЛОО  $B_\alpha : L_p \rightarrow L_p$  ( $\alpha \in \Gamma$ ), задаваемых формулой  $B_\alpha[z](t) \equiv \alpha(t)B[z](t)$ ,  $t \in \Pi$ ,  $z \in L_p$ , полученными в [11, §4]. Введем следующие условия **e)** и **f)**.

**e)** Для любого  $\delta > 0$  оператор  $B : L_p \rightarrow L_q$  имеет вольтеррову сильную  $\delta$ -цепочку.

**f)** Для любого  $\delta > 0$  оператор  $B : L_p \rightarrow L_q$  имеет  $\delta$ -малую по мере вольтеррову цепочку.

Непосредственно из следствия 1.1 и [11, Предложение 2] получаем

**Следствие 1.2.** Пусть  $\Gamma$  ограничено в  $L_r$  и выполняются  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , **a)**, **b)**, **e)**. Тогда справедливы все выводы следствия 1.1.

Напомним, что семейство  $\Gamma \subset L_r(\Pi)$  ( $r \in [1, \infty)$ ) называется семейством функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для каждого  $H \in \Sigma$  с мерой  $mesH < \delta$  имеем  $\|\alpha\|_{r,H} < \varepsilon$  при всех  $\alpha \in \Gamma$ . Как следует из неравенства Гельдера, семейством с равностепенно абсолютно непрерывными  $L_r$ -нормами является, например, любое ограниченное в некоторой норме  $L_\nu$ ,  $\nu \in (r, \infty]$ , множество из  $L_r$ . Следующие два следствия получаем непосредственно из следствия 1.1 и предложений [11, Предложения 1 и 3].

**Следствие 1.3.** Пусть  $p < q$ ,  $\Gamma$  — семейство функций с равностепенно абсолютно непрерывными  $L_r$ -нормами и выполняются  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , **a)**, **b)**, **f)**. Тогда справедливы все выводы следствия 1.1.

**Следствие 1.4.** Пусть  $\Gamma$  ограничено в  $L_r$ ,  $B$  как оператор из  $L_p$  в  $L_q$  вполне непрерывен и выполняются  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , **a)**, **b)**, **f)**. Тогда справедливы все выводы следствия 1.1. Условие вполне непрерывности здесь может быть ослаблено до условия:

$$\begin{cases} \text{ЛОО } B : L_p \rightarrow L_q \text{ переводит единичный шар в множество} \\ \text{функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Приведем полезное обобщение следствия 1.2, получающееся «объединением» условий **f)** и (1.12). Пусть  $\mathcal{H} \subset \Sigma$ ,  $\mathcal{M} \subset L_q$ . Будем говорить, что семейство функций  $\mathcal{M}$  обладает  $\mathcal{H}$ -равностепенно абсолютно непрерывными  $L_q$ -нормами, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для каждого  $H \in \mathcal{H}$ ,  $mesH < \delta$  имеем  $\|\alpha\|_{q,H} < \varepsilon$  при всех  $\alpha \in \mathcal{M}$ . Из следствия 1.1 и [11, Предложение 4] вытекает

**Следствие 1.5.** Пусть  $\Gamma$  ограничено в  $L_r$  и выполнены условия  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , **a)**, **b)**, а также **f)**, которое запишем следующим образом: для любого  $\delta > 0$  ЛОО  $B : L_p \rightarrow L_q$  имеет  $\delta$ -малую по мере вольтеррову цепочку  $\mathcal{T}_\delta$ . Пусть  $\mathcal{H} \equiv \bigcup_{\delta > 0} \mathcal{T}_\delta^{(-)}$ . Если ЛОО  $B : L_p \rightarrow L_q$  переводит единичный шар в множество функций с  $\mathcal{H}$ -равностепенно абсолютно непрерывными  $L_q$ -нормами, то справедливы все выводы следствия 1.1.

## 2. Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы 1.3 опирается на доказываемые ниже леммы об оценке разности решений и о продолжении решений. Далее считаем выполненными условия  $\mathbf{K}_0) - \mathbf{K}_3)$ , а), б), в), управление  $v_0 \in \Omega(\Pi)$  фиксированным, примем обозначения

$$z_0 \equiv z_{v_0}, \quad \kappa_0 \equiv \|v_0\|_{k,s}, \quad \kappa \equiv \|z_0\|_{p,m}, \quad \kappa_A \equiv \|A[z_0]\|_{q,l}, \quad \|A\| \equiv \|A\|_{p,m \rightarrow q,l}, \quad \|B\| \equiv \|B\|_{p \rightarrow q}.$$

**Лемма 2.1** (лемма об оценке разности решений). *Существует зависящая лишь от  $v_0$ , оператора  $B$  и функции  $\mathcal{N}(\cdot)$  неубывающая функция  $\gamma(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  такая, что если некоторым  $v \in \mathcal{D}$  и  $H \in T$  отвечает решение  $z = z_{v,H}$  уравнения (0.1), то*

$$\|z - z_0\|_{p,m,H} \leq \gamma(M_0) \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m,H}, \quad (2.1)$$

$$\|A[z - z_0]\|_{q,l,H} \leq \gamma(M_0) r(v, v_0), \quad (2.2)$$

где  $M_0$  — любая постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$M_0 \geq \max \{ \|A[z - z_0]\|_{q,l,H}, \|v - v_0\|_{k,s} \}. \quad (2.3)$$

**Доказательство.** Пусть  $\Delta z(t) \equiv z(t) - z_0(t)$ ,  $t \in H$ . Имеем

$$\Delta z(t) = \{F[z, v](t) - F[z_0, v](t)\} + \Delta_v f(z_0)(t), \quad t \in H,$$

откуда (см. (1.2))

$$\Delta z(t) = \{J[z, z_0, v](t)\} A[\Delta z](t) + \Delta_v f(z_0)(t), \quad t \in H, \quad (2.4)$$

и следовательно,

$$|\Delta z(t)| \leq \alpha(t) B[|\Delta z|](t) + |\Delta_v f(z_0)(t)|, \quad t \in H, \quad (2.5)$$

где принято обозначение  $\alpha(t) \equiv |J[z, z_0, v](t)|$ ,  $t \in H$ . В силу (1.1)

$$\|\alpha\|_{r,H} \leq \mathcal{N} \left( \max \left\{ \kappa_A + \|A[\Delta z]\|_{q,l,H}, \kappa_0 + \|v - v_0\|_{k,s} \right\} \right)$$

и при любой постоянной  $M_0$ , удовлетворяющей (2.3), выполняется неравенство

$$\|\alpha\|_{r,H} \leq \nu(M_0), \quad (2.6)$$

в котором

$$\nu(M) \equiv \mathcal{N} \left( \max \{ \kappa_A + M, \kappa_0 + M \} \right), \quad M \in \mathbf{R}_+. \quad (2.7)$$

Из (2.5) получаем  $|\Delta z(t)| \leq R(\alpha B)[|\Delta_v f(z_0)|](t)$ ,  $t \in H$ , и, следовательно,

$$\|\Delta z\|_{p,m,H} \leq \|R(\alpha B)\|_{p \rightarrow p} \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m,H}. \quad (2.8)$$

Из (2.6), (2.8) и леммы 1.2, получаем

$$\|\Delta z\|_{p,m,H} \leq \Phi_1(\nu(M_0)) \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m,H}. \quad (2.9)$$

Подействовав на (2.4) оператором  $A$ , с учетом **a**) находим

$$|A[\Delta z](t)| \leq B[\alpha |A[\Delta z](.)|] + |A[\Delta_v f(z_0)](t)|, \quad t \in H,$$

откуда  $|A[\Delta z](t)| \leq R(B\alpha) [|A[\Delta_v f(z_0)]|](t)$ ,  $t \in H$ , и, следовательно,

$$\|A[\Delta z]\|_{q,l,H} \leq \|R(B\alpha)\|_{q \rightarrow q} \cdot r(v, v_0). \quad (2.10)$$

Из (2.6), (2.10) и леммы 1.2

$$\|A[\Delta z]\|_{q,l,H} \leq \Phi_2(\nu(M_0)) \cdot r(v, v_0). \quad (2.11)$$

Положив  $\gamma(M) \equiv \max\{\Phi_1(\nu(M)), \Phi_2(\nu(M))\}$ ,  $M \in \mathbf{R}_+$ , из (2.9) получаем неравенство (2.1), а из (2.11) — неравенство (2.2).  $\square$

Пусть теперь управлению  $v \in D$  отвечает на некотором  $\bar{H} \in T$ ,  $0 < \text{mes} \bar{H} < \text{mes} \Pi$ , решение  $z_{v,\bar{H}}$  уравнения (0.1). Если для некоторого  $H \in T$ ,  $H \supset \bar{H}$ , существует решение  $z_{v,H}$ , то его сужение  $z_{v,H}|_{\bar{H}}$  есть отвечающее управлению  $v$  решение уравнения (0.1) на  $\bar{H}$  и по теореме 1.1  $z_{v,H}(t) = z_{v,\bar{H}}(t)$ ,  $t \in \bar{H}$ . Такое решение  $z_{v,H}$  назовем *продолжением решения  $z_{v,\bar{H}}$  с множества  $\bar{H}$  на множество  $H$* . Рассмотрим задачу о возможности продолжения решения  $z_{v,\bar{H}}$  с множества  $\bar{H}$  на более широкое множество системы  $T$ . Она эквивалентна задаче о существовании локального решения уравнения

$$z(t) = \tilde{f}(t, \tilde{A}[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi \setminus \bar{H}, \quad z \in L_p^m(\Pi \setminus \bar{H}), \quad (2.12)$$

где  $\tilde{f}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : (\Pi \setminus \bar{H}) \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$  — функция, задаваемая формулой

$$\tilde{f}(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) \equiv f(t, \mathbf{p} + AQ_{\bar{H}}[z_{v,\bar{H}}](t), \mathbf{v}), \quad t \in \Pi \setminus \bar{H}, \quad \mathbf{p} \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^s,$$

$\tilde{A}[\cdot] : L_p^m(\Pi \setminus \bar{H}) \rightarrow L_q^l(\Pi \setminus \bar{H})$  — оператор, задаваемый формулой

$$\tilde{A}[x](t) \equiv AQ_{\Pi \setminus \bar{H}}[x](t), \quad t \in \Pi \setminus \bar{H}, \quad x \in L_p^m(\Pi \setminus \bar{H}),$$

и имеющий мажоранту  $\tilde{B}[\cdot] : L_p(\Pi \setminus \bar{H}) \rightarrow L_q(\Pi \setminus \bar{H})$ , задаваемую формулой

$$\tilde{B}[x](t) \equiv BQ_{\Pi \setminus \bar{H}}[x](t), \quad t \in \Pi \setminus \bar{H}, \quad x \in L_p(\Pi \setminus \bar{H}).$$

Очевидно, оператор  $\tilde{B}$  удовлетворяет условию

$$\tilde{B} \in V(T_{-\bar{H}}), \quad (2.13)$$

где  $T_{-\bar{H}} \equiv \{H \setminus \bar{H} : H \in T\}$ , являющемуся аналогом условия **b**). По лемме 1.4 для оператора  $\tilde{B}$  выполняется условие  $\tilde{\mathbf{c}}$ ), аналог условия **c**). Для функции  $\tilde{f}$  выполняются точные аналоги условий **K**<sub>0</sub>) — **K**<sub>3</sub>). При этом роль функции  $\mathcal{N}(\cdot)$  играет функция

$$\tilde{\mathcal{N}}(M) \equiv \mathcal{N}\left(M + \|AQ_{\bar{H}}[z_{v,\bar{H}}]\|_{q,l,\Pi \setminus \bar{H}}\right), \quad M \in \mathbf{R}_+. \quad (2.14)$$

Последнее утверждение вытекает из следующей леммы.

**Лемма 2.2.** Для любого  $h \in \Sigma$  и любых  $y(\cdot) \in L_p^m(h)$ ,  $v(\cdot) \in L_k^s(h)$  справедливо неравенство  $\|f'_{\mathbf{p}}(\cdot, y(\cdot), v(\cdot))\|_{r,m \times l,h} \leq \mathcal{N}(\max\{\|y\|_{q,l,h}, \|v\|_{k,s,h}\})$ .

Доказательство. В силу  $\mathbf{K}_2$ ) имеем

$$\begin{aligned} & \|f'_p(\cdot, y(\cdot), v(\cdot))\|_{r,m \times l,h} = \\ & = \|Q_h[f'_p(\cdot, Q_h[y](\cdot), Q_h[v](\cdot))]\|_{r,m \times l} \leq \|f'_p(\cdot, Q_h[y](\cdot), Q_h[v](\cdot))\|_{r,m \times l} \leq \\ & \leq \mathcal{N}(\max\{\|Q_h[y]\|_{q,l}, \|Q_h[v]\|_{k,s}\}) = \mathcal{N}(\max\{\|y\|_{q,l,h}, \|v\|_{k,s,h}\}). \end{aligned}$$

□

Из леммы 2.2 при  $h = \Pi \setminus \overline{H}$  получаем для любых  $y(\cdot) \in L_p^m(\Pi \setminus \overline{H})$ ,  $v(\cdot) \in L_k^s(\Pi \setminus \overline{H})$ :

$$\begin{aligned} & \|f'_p(\cdot, y(\cdot) + AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}}](\cdot), v(\cdot))\|_{r,m \times l, \Pi \setminus \overline{H}} \leq \\ & \leq \mathcal{N}(\max\{\|y\|_{q,l, \Pi \setminus \overline{H}} + \|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}}]\|_{q,l, \Pi \setminus \overline{H}}, \|v\|_{k,s, \Pi \setminus \overline{H}}\}) \leq \tilde{\mathcal{N}}(\max\{\|y\|_{q,l, \Pi \setminus \overline{H}}, \|v\|_{k,s, \Pi \setminus \overline{H}}\}), \end{aligned}$$

что означает справедливость высказанного выше утверждения относительно функции (2.14).

Таким образом, уравнение (2.12) подобно уравнению (0.1) и задачу о продолжении решений уравнения (0.1) можно решать, применяя к (2.12) теорему 1.2, взяв в этой теореме вместо  $\Pi, T, f, \mathcal{D}, v$  соответственно  $\Pi \setminus \overline{H}$ ,  $T_{-\overline{H}}$ ,  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{\mathcal{D}} \equiv \{v|_{\Pi \setminus \overline{H}} : v \in \mathcal{D}\}$ ,  $\tilde{v} \equiv v|_{\Pi \setminus \overline{H}}$ . Для уравнения (2.12) аналогом функции  $\Xi$  из (1.5) является функция

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}(\tilde{v}, h, M, \hat{z}) & \equiv M \cdot \varphi_{\tilde{B}}(h) \cdot \tilde{\mathcal{N}}(\max\{\|\tilde{A}[\hat{z}]\|_{q,l,h} + M, \|\tilde{v}\|_{k,s, \Pi \setminus \overline{H}}\}) + \|\tilde{A}[\tilde{F}[\hat{z}, \tilde{v}] - \hat{z}]\|_{q,l,h} \equiv \\ & \equiv \tilde{\Xi}_1(\tilde{v}, h, M, \hat{z}) + \tilde{\Xi}_2(\tilde{v}, h, M, \hat{z}), \quad \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad h \in T_{-\overline{H}}, \quad M \in \mathbf{R}_+, \quad \hat{z} \in L_p^m(h), \end{aligned}$$

где  $\varphi_{\tilde{B}}(h) \equiv \|\tilde{P}_h \tilde{B} \tilde{P}_h\|_{p, \Pi \setminus \overline{H} \rightarrow q, \Pi \setminus \overline{H}}$  ( $h \in \Sigma_{\Pi \setminus \overline{H}}$ ),  $\tilde{P}_h$  — оператор умножения на характеристическую функцию  $\tilde{\chi}_h(t) \equiv \{1, t \in h; 0, t \notin h\}$ ,  $t \in \Pi \setminus \overline{H}$ ,

$$\tilde{F}[\hat{z}, \tilde{v}](t) \equiv \tilde{f}(t, \tilde{A}[\hat{z}](t), \tilde{v}(t)), \quad t \in \Pi \setminus \overline{H}, \quad \hat{z} \in L_p^m(\Pi \setminus \overline{H}), \quad \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{D}}.$$

Оценим величину  $\tilde{\Xi}(\tilde{v}, h, M, z_0)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{B}}(h) & = \|\tilde{P}_h S_{\Pi \setminus \overline{H}} B Q_{\Pi \setminus \overline{H}} \tilde{P}_h\|_{p, \Pi \setminus \overline{H} \rightarrow q, \Pi \setminus \overline{H}} = \\ & = \|\tilde{P}_h S_{\Pi \setminus \overline{H}} B P_h\|_{p \rightarrow q, \Pi \setminus \overline{H}} = \|P_h B P_h\|_{p \rightarrow q} = \varphi_B(h), \quad h \in \Sigma_{\Pi \setminus \overline{H}}; \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\|\tilde{A}[z_0]\|_{q,l,h} \leq \|A\| \cdot \kappa; \quad (2.16)$$

$$\|\tilde{v}\|_{k,s, \Pi \setminus \overline{H}} \leq \kappa_0 + \|v - v_0\|_{k,s}; \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}}]\|_{q,l, \Pi \setminus \overline{H}} & \leq \|AQ_{\overline{H}}[z_0]\|_{q,l, \Pi \setminus \overline{H}} + \|AQ_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0]\|_{q,l, \Pi \setminus \overline{H}} \leq \\ & \leq \|A\| \cdot \kappa + \|A\| \cdot \|z_{v,\overline{H}} - z_0\|_{p,m, \overline{H}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из (2.14)–(2.18) получаем

$$\tilde{\Xi}_1(\tilde{v}, h, M, z_0) \leq M \varphi_B(h) \cdot \sigma\left(\|z_{v,\overline{H}} - z_0\|_{p,m, \overline{H}}, \|v - v_0\|_{k,s}, M\right), \quad (2.19)$$

где принято обозначение

$$\sigma(\xi, \eta, M) \equiv \mathcal{N}(\sigma_1(\eta, M) + \|A\|(\kappa + \xi)), \quad (2.20)$$

$$\sigma_1(\eta, M) \equiv \max\{\|A\| \cdot \kappa + M, \kappa_0 + \eta\}, \quad \xi, \eta, M \in \mathbf{R}_+. \quad (2.21)$$

Оценим величину  $\tilde{\Xi}_2(\tilde{v}, h, M, z_0)$ . Имеем

$$\left\| \tilde{A} \left[ \tilde{F}[z_0, \tilde{v}] - z_0 \right] \right\|_{q,l,h} \leq \left\| \tilde{A} \left[ \tilde{F}[z_0, \tilde{v}] - F[z_0, \tilde{v}] \right] \right\|_{q,l,h} + \left\| \tilde{A}[\Delta_v f(z_0)] \right\|_{q,l,h}, \quad (2.22)$$

$$\left\| \tilde{A}[\Delta_v f(z_0)] \right\|_{q,l,h} = \left\| A Q_{\Pi \setminus \overline{H}}[\Delta_v f(z_0)] \right\|_{q,l,h} \leq \|B\| \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m}. \quad (2.23)$$

По теореме о конечных приращениях при  $t \in \Pi \setminus \overline{H}$  имеем

$$\tilde{F}[z_0, \tilde{v}](t) - F[z_0, \tilde{v}](t) = I(t, A[z_0](t), A Q_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0](t), v(t)) \cdot A Q_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0](t),$$

что вместе с (2.13), (2.15) дает

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{A} \left[ \tilde{F}[z_0, \tilde{v}] - F[z_0, \tilde{v}] \right] \right\|_{q,l,h} &\leq \varphi_B(h) \cdot \left\| A Q_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0] \right\|_{q,l,h} \cdot \\ &\cdot \left\| I(\cdot, A[z_0](\cdot), A Q_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0](\cdot), v(\cdot)) \right\|_{r,m \times l,h}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

По лемме 2.2

$$\begin{aligned} &\left\| I(\cdot, A[z_0](\cdot), A Q_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0](\cdot), v(\cdot)) \right\|_{r,m \times l,h} \leq \\ &\leq \mathcal{N} \left( \max \left\{ \|A[z_0]\|_{q,l,h} + \|A Q_{\overline{H}}[z_{v,\overline{H}} - z_0]\|_{q,l,h}, \|v\|_{k,s} \right\} \right) \leq \\ &\leq \mathcal{N} \left( \max \left\{ \|A\| \cdot \left( \kappa + \|z_{v,\overline{H}} - z_0\|_{p,m,\overline{H}} \right), \kappa_0 + \|v - v_0\|_{k,s} \right\} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Из (2.22)–(2.25) получаем

$$\tilde{\Xi}_2(\tilde{v}, h, M, z_0) \leq \|B\| \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} + \varphi_B(h) \cdot \sigma_2 \left( \|z_{v,\overline{H}} - z_0\|_{p,m,\overline{H}}, \|v - v_0\|_{k,s} \right), \quad (2.26)$$

где

$$\sigma_2(\xi, \eta) \equiv \|A\| \cdot \xi \cdot \mathcal{N}(\max \{ \|A\|(\kappa + \xi), \kappa_0 + \eta \}), \quad \xi, \eta \in \mathbf{R}_+. \quad (2.27)$$

Из (2.19), (2.26) окончательно находим

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}(\tilde{v}, h, M, z_0) &\leq \|B\| \cdot \|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} + \varphi_B(h) \cdot \Phi \left( \|z_{v,\overline{H}} - z_0\|_{p,m,\overline{H}}, \|v - v_0\|_{k,s}, M \right), \\ &\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad h \in T_{-\overline{H}}, \quad M \in \mathbf{R}_+, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где принято обозначение

$$\Phi(\xi, \eta, M) \equiv M \cdot \sigma(\xi, \eta, M) + \sigma_2(\xi, \eta), \quad \xi, \eta, M \in \mathbf{R}_+. \quad (2.29)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

**Лемма 2.3.** *Существует зависящая лишь от управления  $v_0$  и функции  $\mathcal{N}(\cdot)$  неубывающая по каждому из своих аргументов (при фиксированных остальных) функция  $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  такая, что если для некоторых  $v \in \mathcal{D}$ ,  $\overline{H} \in T$  уравнение (0.1) имеет решение  $z_{v,\overline{H}}$ , то для любых  $h \in T_{-\overline{H}}$ ,  $M \in \mathbf{R}_+$  справедлива оценка (2.28). Такой функцией является, например, функция, определяемая формулами (2.29), (2.20), (2.21), (2.27).*

Лемма 2.3 позволяет доказать следующий результат.

**Лемма 2.4** (лемма о продолжении решений). Пусть заданы числа  $d > 0$ ,  $d_0 > 0$ . Для любого числа  $M_0 > 0$  и любого достаточно большого числа  $M_1 > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что если управлению  $v \in \mathcal{D}$ , удовлетворяющему неравенствам

$$\|v - v_0\|_{k,s} < d_0, \quad (2.30)$$

$$\|\Delta_v f(z_0)\|_{p,m} < d, \quad (2.31)$$

на множестве  $\bar{H} \in T$ ,  $0 < \text{mes } \bar{H} < \text{mes } \Pi$ , отвечает локальное решение  $z_{v,\bar{H}}$  уравнения (0.1), подчиняющееся неравенству

$$\|A[z_{v,\bar{H}} - z_0]\|_{q,l,\bar{H}} < M_0, \quad (2.32)$$

то это решение продолжимо с множества  $\bar{H}$  на множество  $H = \bar{H} \cup h$  при

$$h \in T_{-\bar{H}}, \quad \varphi_B(h) < \delta, \quad (2.33)$$

причем

$$\|AQ_{\Pi \setminus \bar{H}}[z_{v,H} - z_0]\|_{q,l,h} < M_1. \quad (2.34)$$

Указанными свойствами для любой пары чисел  $M_0 > 0$ ,

$$M_1 > \|B\| \cdot d \quad (2.35)$$

обладает число  $\delta > 0$  такое, что

$$\delta \cdot \Phi(d \cdot \gamma(\max\{M_0, d_0\}), d_0, M_1) < M_1 - \|B\| \cdot d, \quad (2.36)$$

где  $\gamma(\cdot)$  и  $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$  — функции из лемм 2.1 и 2.3 соответственно.

**Доказательство.** Воспользуемся, как указано выше, теоремой 1.2. Фиксируем произвольно  $M_0 > 0$ ,  $M_1$ , удовлетворяющее неравенству (2.35), и некоторое  $\delta > 0$ , удовлетворяющее неравенству (2.36). Достаточно применить теорему 1.2 к уравнению (2.12), проверив выполнение неравенства

$$\tilde{\Xi}(\tilde{v}, h, M_1, z_0) < M_1, \quad (2.37)$$

аналог неравенства (1.8). Докажем, что из (2.30)–(2.33), (2.35), (2.36) следует (2.37). В силу (2.30)–(2.31) и оценки (2.1) леммы 2.1

$$\|z_{v,\bar{H}} - z_0\|_{p,m,\bar{H}} \leq \gamma(\max\{M_0, d_0\}) \cdot d. \quad (2.38)$$

Из (2.38), (2.28), (2.30), (2.33) получаем неравенство

$$\tilde{\Xi}(\tilde{v}, h, M_1, z_0) \leq d \cdot \|B\| + \delta \cdot \Phi(d \cdot \gamma(\max\{M_0, d_0\}), d_0, M_1),$$

которое вместе с (2.36) дает (2.37).  $\square$

Переходим к доказательству теоремы 1.3. Произвольно фиксируем  $d > 0$ ,  $d_0 > 0$ . Выберем  $M_0 > 0$  так, что

$$M_0 > \|B\| \cdot d, \quad M_0 > d_0. \quad (2.39)$$

Пусть  $\gamma(\cdot)$  — некоторая функция, существующая по лемме 2.1,  $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$  — функция (2.29) из леммы 2.3, а  $\delta > 0$  — некоторое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\delta \cdot \Phi(d \cdot \gamma(M_0), d_0, M_0) < M_0 - \|B\| \cdot d, \quad (2.40)$$

$$\delta \cdot \gamma(M_0 + \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d) < M_0, \quad (2.41)$$

а также условию 4) теоремы 1.3: оператор  $B$  имеет вольтеррову  $\delta$ -цепочку. Докажем, что указанное число  $\delta$  обладает требуемыми свойствами, то есть при условиях 1), 2), 3) теоремы 1.3 управление  $v \in \mathcal{D}$  принадлежит классу  $\Omega(\Pi)$  (условие 4) теоремы 1.3 выполняется по предположению).

Пусть  $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \dots, H_k\}$  —  $\delta$ -цепочка оператора  $B$ , существующая по условию 4). Будем считать, что  $\text{mes}(H_i \setminus H_{i-1}) > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . В силу теоремы 1.2 существует решение  $z_{v, H_1}$  и  $\|A[z_{v, H_1} - z_0]\|_{q, l, H_1} < M_0$ . Действительно, по определению  $\delta$ -цепочки и в силу (1.5), условий 1) и 2) имеем

$$\Xi(v, H_1, M_0, z_0) \leq M_0 \cdot \delta \cdot \mathcal{N}(\max\{\|A\| \cdot \kappa + M_0, d_0 + \kappa_0\}) + d \cdot \|B\|. \quad (2.42)$$

Так как  $M_0 \cdot \mathcal{N}(\max\{\|A\| \cdot \kappa + M_0, d_0 + \kappa_0\}) \leq \Phi(d \cdot \gamma(M_0), d_0, M_0)$  (см. (2.20), (2.21), (2.29)), то из (2.40), (2.42) получаем неравенство  $\Xi(v, H_1, M_0, z_0) < M_0$ , означающее выполнение для уравнения (0.1) условий теоремы 1.2 при  $H = H_1$ ,  $M = M_0$ ,  $\hat{z} = z_0$ .

Докажем, что решение  $z_{v, H_1}$  можно последовательными продолжениями с  $H_1$  на  $H_2$ , с  $H_2$  на  $H_3, \dots$  распространить на все  $\Pi = H_k$ , причем для глобального решения  $z_v$  будет

$$\|A[z_v - z_0]\|_{q, l} < M_0. \quad (2.43)$$

Действуя по индукции, предположим, что для некоторого  $i = \overline{2, k}$  уже доказано существование решения  $z_{v, H_{i-1}}$ , причем

$$\|A[z_{v, H_{i-1}} - z_0]\|_{q, l, H_{i-1}} < M_0; \quad (2.44)$$

для  $i = 2$  это доказано. Применим лемму 2.4, взяв в ней  $\overline{H} = H_{i-1}$ ,  $h = H_i \setminus H_{i-1}$ , фиксированное нами число  $M_0$  и число  $M_1 = M_0$ . Лемма 2.4 применима, так как в данном случае выполняются условия (2.30)–(2.33), (2.35), (2.36). Действительно: условия 1) и 2) теоремы 1.3 тождественны условиям (2.30) и (2.31) леммы 2.4; предположение (2.44) эквивалентно условию (2.32); (2.33) выполняется по свойству вольтерровой  $\delta$ -цепочки  $\mathcal{T}$  оператора  $B$ ; условие (2.35) выполняется в силу (2.39) и выбора  $M_1 = M_0$ ; условие (2.36) выполняется в силу (2.39), (2.40) и выбора  $M_1 = M_0$ . По лемме 2.4 решение  $z_{v, H_{i-1}}$  продолжимо на  $H_i = H_{i-1} \cup h$ , причем продолженное решение  $z_{v, H_i}$  удовлетворяет неравенству

$$\|AQ_{\Pi \setminus H_{i-1}}[z_{v, H_i} - z_0]\|_{q, l, h} < M_0. \quad (2.45)$$

Покажем, что

$$\|A[z_{v, H_i} - z_0]\|_{q, l, H_i} < M_0. \quad (2.46)$$

В соответствии с методом индукции это и будет означать, что решение  $z_{v, H_1}$  продолжимо на все  $\Pi = H_k$  и выполняется (2.43). Имеем

$$\|A[z_{v, H_i} - z_0]\|_{q, l, H_i} \leq \|AQ_{H_{i-1}}[z_{v, H_i} - z_0]\|_{q, l, H_i} + \|AQ_h[z_{v, H_i} - z_0]\|_{q, l, H_i}. \quad (2.47)$$

Так как  $B \in V(\mathcal{T})$ , то  $A \in V(\mathcal{T})$  и  $AQ_h[x](t) = 0$ ,  $t \in H_{i-1}$ ,  $x \in L_p^m(H_i)$ . Следовательно, для любого  $x \in L_p^m(H_i)$  имеем  $\|AQ_h[x]\|_{q,l,H_i} = \|AQ_h[x]\|_{q,l,h} = \|AQ_{\Pi \setminus H_{i-1}}[x]\|_{q,l,h}$ . Беря теперь  $x = z_{v,H_i} - z_0$ , из (2.45) получаем для второго слагаемого правой части (2.47)

$$\|AQ_h[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} < M_0. \quad (2.48)$$

Для первого слагаемого правой части (2.47) имеем

$$\|AQ_{H_{i-1}}[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} \leq \|A\| \cdot \|z_{v,H_i} - z_0\|_{p,m,H_{i-1}}. \quad (2.49)$$

Так как  $z_{v,H_i}(t) = z_{v,H_{i-1}}(t)$ ,  $t \in H_{i-1}$ , то

$$\|z_{v,H_i} - z_0\|_{p,m,H_{i-1}} = \|z_{v,H_{i-1}} - z_0\|_{p,m,H_{i-1}}. \quad (2.50)$$

Оценка (2.1) леммы 2.1, взятая при  $H = H_{i-1}$ ,  $z = z_{v,H_{i-1}}$ , дает вместе с (2.44), (2.39) и условиями 1), 2) теоремы 1.3

$$\|z_{v,H_i} - z_0\|_{p,m,H_{i-1}} \leq \gamma(M_0) \cdot d. \quad (2.51)$$

Из (2.49)–(2.51) получаем

$$\|AQ_{H_{i-1}}[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} \leq \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d. \quad (2.52)$$

Неравенства (2.47)–(2.49), (2.52) дают оценку

$$\|A[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} < M_0 + \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d. \quad (2.53)$$

Применим еще раз лемму 2.1, взяв теперь  $H = H_i$ ,  $z = z_{v,H_i}$  и заменив число  $M_0$  на число  $(M_0 + \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d)$ , что можно сделать ввиду неравенства (2.53). Оценка (2.2) леммы 2.1 дает

$$\|A[z_{v,H_i} - z_0]\|_{q,l,H_i} < \gamma(M_0 + \|A\| \cdot \gamma(M_0) \cdot d) \cdot r(v, v_0). \quad (2.54)$$

Неравенства (2.54), (2.41) вместе с условием 3) теоремы 1.3 и дают доказываемое неравенство (2.46).

С учетом (2.43) из оценок (2.1), (2.2) леммы 2.1, взятых при  $H = \Pi$ ,  $z = z_v$ , получаем оценки (1.10), (1.11), в которых  $C = \gamma(M_0)$ .  $\square$

## References

- [1] В. И. Сумин, “Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами”, *Доклады Академии наук*, **305**:5 (1989), 1056–1059; англ. пер.: V. I. Sumin, “Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **39**:2 (1989), 374–378.
- [2] В. И. Сумин, “Равностепенная квазинильпотентность: определения, признаки, примеры применения”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **15**:1 (2010), 453–466. [V. I. Sumin, “Equiquasinilpotency: definitions, conditions, examples of application”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **15**:1 (2010), 453–466 (In Russian)].
- [3] В. И. Сумин, “Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **30**:1 (1990), 3–21; англ. пер.: V. I. Sumin, “The Features of Gradient Methods for Distributed Optimal-Control Problems”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **30**:1 (1990), 1–15.

- [4] В. И. Сумин, “О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач”, *Дифференциальные уравнения*, **26**:12 (1990), 2097–2109; англ. пер.: V. I. Sumin, “Sufficient conditions for stable existence of solutions to global problems in control theory”, *Differential Equations*, **26**:12 (1990), 1579–1590.
- [5] В. И. Сумин, *Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами*, Издательство ННГУ, Нижний Новгород, 1992. [V. I. Sumin, *Funktsional’nye Volterrovyy Uravneniya v Teorii Optimal’nogo Upravleniya Raspredelennymi Sistemami*, Nizhny Novgorod State University Publ., Nizhny Novgorod, 1992 (In Russian)].
- [6] В. И. Сумин, “Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения”, *Вестник Нижегородского университета. Серия Математика.*, 2003, №1, 91–107. [V. I. Sumin, “The problem of sustainability of existence global solutions of controlled boundary value problems and Volterra functional equations”, *Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematics*, 2003, №1, 91–107 (In Russian)].
- [7] И. В. Лисаченко, В. И. Сумин, “Нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:6 (2011), 858–870; англ. пер.: I. V. Lisachenko, V. I. Sumin, “Nonlinear Goursat-Darboux Control Problem: Conditions for the Preservation of Global Solvability”, *Differential Equations*, **47**:6 (2011), 863–876.
- [8] В. И. Сумин, А. В. Чернов, “Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем”, *Динамика систем и процессы управления*, Труды Международной конференции, Международная конференция «Динамика систем и процессы управления», посвященная 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 2014 г.), 2015, 293–300. [V. I. Sumin, A. V. Chernov, “Volterra functional-operator equations in the theory of optimization of distributed systems”, *Systems Dynamics and Control Processes (SDCP’2014)*, Proceedings International Conference, International Conference “Systems Dynamics and Control Processes”, dedicated to the 90th Anniversary of the birth of Acad. N. N. Krasovskiy (Ekaterinburg, 2014), 2015, 293–300 (In Russian)].
- [9] V. Sumin, “Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems”, *IFAC PapersOnLine*, **51**:32 (2018), 759–764.
- [10] А. В. Чернов, “О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **58**:12 (2018), 2095–2111; англ. пер.: A. V. Chernov, “Preservation of the solvability of a semilinear Global Electric Circuit Equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:12 (2018), 2018–2030.
- [11] В. И. Сумин, “Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений”, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 262–278. [V. I. Sumin, “Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle”, *Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki URO RAN*, **25**:1 (2019), 262–278 (In Russian)].
- [12] В. И. Сумин, “Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах”, *Вестник Нижегородского университета. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление*, 1998, №2(19), 138–151. [V. I. Sumin, “Controlled functional Volterra equations in Lebesgue space”, *Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 1998, №2(19), 138–151 (In Russian)].
- [13] В. И. Сумин, “Об управляемых функциональных вольтерровых уравнениях в лебеговых пространствах”, *Депонировано в ВИНТИ*, 03.09.98, №2742-B98, 92 с. [V. I. Sumin, “On Controlled Functional Volterra Equations in Lebesgue spaces”, *Deposited in VINITI*, 03.09.98, №2742-B98 (In Russian), 92 pp.].
- [14] G. C. Rota, G. Strang, “A note on the joint spectral radius”, *Indag. Math.*, **22** (1960), 379–381.
- [15] V. S. Shulman, Y. V. Turovskii, “Joint Spectral Radius, operator semigroups, and a problem of W. Wojtyński”, *Journal of Functional Analysis*, **177**:2 (2000), 383–441.
- [16] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970. [YU. L. Daletskiy, M. G. Kreyn, *Ustoychivost’ Resheniy Differentsial’nykh Uravneniy v Banakhovom Prostranstve*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

**Информация об авторе**

**Сумин Владимир Иосифович**, доктор физико-математических наук, профессор. Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; профессор. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: v\_sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 03.05.2020 г.

Поступила после рецензирования 28.06.2020 г.

Принята к публикации 19.11.2020 г.

**Information about the author**

**Vladimir I. Sumin**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor. Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: v\_sumin@mail.ru

Received 03.05.2020

Reviewed 28.06.2020

Accepted for press 19.11.2020

© Филиппова О.В., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-441-447

УДК 517.911, 517.968

## Управляемые дифференциальные уравнения с параметром и с многозначными импульсными воздействиями

Ольга Викторовна ФИЛИППОВА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

## Controlled differential equations with a parameter and with multivalued impulses

Olga V. FILIPPOVA

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

**Аннотация.** Исследуется задача Коши для управляемой дифференциальной системы с параметром — элементом некоторого метрического пространства  $\Xi$ , содержащей фазовые ограничения на управление. Предполагается, что в заданные моменты времени  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , решение  $x$  непрерывно слева и терпит разрыв, величина которого  $x(t_k + 0) - x(t_k)$  принадлежит некоторому непустому компакту пространства  $\mathbb{R}^n$ . Введены понятия допустимой пары этой управляемой импульсной системы. Рассмотрены вопросы продолжаемости допустимых пар. Даны определения априорной ограниченности и априорной ограниченности в совокупности на заданном множестве  $S \times K$  ( $S \subset \mathbb{R}^n$  — множество начальных значений,  $K \subset \Xi$  — множество значений параметра) множества фазовых траекторий. Доказано, что если в какой-то точке  $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$  множество фазовых траекторий априорно ограничено, то оно будет априорно ограничено и в некоторой окрестности этой точки.

**Ключевые слова:** управляемая дифференциальная система; задача Коши; многозначные импульсные воздействия; дифференциальное включение; априорная ограниченность

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00080\_а).

**Для цитирования:** Филиппова О.В. Управляемые дифференциальные уравнения с параметром и с многозначными импульсными воздействиями // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 441–447. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-441-447.

**Abstract.** We study the Cauchy problem for a controlled differential system with a parameter which is an element of some metric space  $\Xi$  containing phase constraints on the control. It is assumed that at the given time instants  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , the solution  $x$  is continuous from the left and suffers a discontinuity, the value of which is  $x(t_k + 0) - x(t_k)$ , belongs to some non-empty compact set of the space  $\mathbb{R}^n$ . The notions of an admissible pair of this controlled impulsive system are introduced. The questions of continuity of admissible pairs are considered. Definitions of a priori boundedness and a priori collective boundedness on a given set  $S \times K$  (where  $S \subset \mathbb{R}^n$  is a set of initial values,  $K \subset \Xi$  is a set of parameter values) of the set of phase trajectories are considered. It is proved that if at some point  $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$  the set of phase trajectories is a priori bounded, then it will be a priori bounded in some neighborhood of this point.

**Keywords:** controlled differential system; Cauchy problem; multivalued impulses; differential inclusion; a priori boundedness

**Acknowledgements:** The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00080\_a).

**For citation:** Filippova O.V. Upravlyayemye differentsial'nyye uravneniya s parametrom i s mnogoznachnymi impul'snymi vozdeystviyami [Controlled differential equations with a parameter and with multivalued impulse actions]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 441–447. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-441–447. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Дифференциальные уравнения с многозначными импульсными воздействиями возникают при исследовании явлений, подчиняющихся физическим законам, которые выражаются разрывными функциями (например, при разрывной зависимости силы трения от скорости в случае сухого трения в модели Прагера–Ишлинского упруго-пластического элемента), или технических систем, когда в связи с отказом тех или иных приборов и устройств объекты мгновенно «перескакивают» с одной фазовой траектории на другую. Ряд процессов в механике, электротехнике характеризуются тем, что правые части дифференциальных уравнений, которые описывают их динамику, претерпевают мгновенные разрывы, значения которых могут варьироваться в некоторой замкнутой области, которая в свою очередь также может меняться в зависимости от текущего состояния процесса. В случае, когда подобными физическими процессами нужно управлять, возникает необходимость в применении математической модели, которая сводится к дифференциальным уравнениям или включениям с многозначными импульсными воздействиями. Эти модели могут найти приложения в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, в экономических моделях долгосрочного прогнозирования, в задачах биологии, медицины, социологии, во многих других областях науки и техники. Изучение дифференциальных уравнений и включений с многозначными импульсными воздействиями представляет не только теоретический интерес, но и важное практическое значение.

В работе рассмотрены вопросы существования, продолжаемости и априорной ограниченности множества допустимых пар управляемой дифференциальной системы, содержащий параметр, с многозначными импульсными воздействиями.

## 1. Основные понятия

Пусть  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное пространство с нормой  $|\cdot|$ ,  $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$  — множество непустых компактов пространства  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $\text{co } A$  выпуклую замкнутую оболочку множества  $A \subset \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ . Пусть  $\Xi$  — метрическое пространство;  $B_\Xi(y, \delta)$  — открытый шар в пространстве  $\Xi$  с центром в точке  $y \in \Xi$  радиуса  $\delta > 0$ .

Пусть  $t_k \in [a, b]$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ ,  $(a < t_1 < \dots < t_p < b)$  — конечный набор точек. Обозначим через  $\tilde{C}^n[a, b]$  банахово пространство всех непрерывных на каждом из интервалов  $[a, t_1]$ ,  $(t_1, t_2]$ ,  $\dots$ ,  $(t_p, b]$  ограниченных функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , имеющих пределы справа в точках  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , с нормой  $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$ . Для  $\tau > a$  обозначим через  $\tilde{C}^n[a, \tau]$  множество сужений на отрезок  $[a, \tau]$  функций, принадлежащих пространству  $\tilde{C}^n[a, b]$ . Это множество является линейным пространством, а

снабженное нормой  $\|x\|_{\tilde{C}^n[a,\tau]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, \tau]\}$ , очевидно, становится банаховым пространством.

Пусть отображение  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет условиям:

- 1) при каждом фиксированном  $(x, u, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi$  функция  $f(\cdot, x, u, \xi)$  измерима по Лебегу;
- 2) при почти всех  $t \in [a, b]$  отображение  $f(t, \cdot, \cdot, \cdot)$  непрерывно;
- 3) для каждого ограниченного множества  $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \Xi$  существует суммируемая функция  $m_W : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  такая, что при почти всех  $t \in [a, b]$  и всех  $(x, u, \xi) \in W$  выполняется неравенство  $|f(t, x, u, \xi)| \leq m_W(t)$ .

Далее, пусть задано многозначное отображение  $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^m]$ , обладающее следующими свойствами:

- 4) при каждом  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$  отображение  $U(\cdot, x, \xi)$  измеримо (определение измеримости многозначного отображения см., например, в [1, с. 65] или [2, с. 300]);
- 5) при почти всех  $t \in [a, b]$  отображение  $U(t, \cdot, \cdot)$  непрерывно по Хаусдорфу (определение см., например, в [3, с. 117]);
- 6) для каждого ограниченного множества  $V \subset \mathbb{R}^n \times \Xi$  существует  $c_V \in [0, \infty)$  такое, что при почти всех  $t \in [a, b]$  и всех  $(x, \xi) \in V$  выполняется неравенство  $|U(t, x, \xi)| \leq c_V$ .

Будем также предполагать, что заданы локально ограниченные и непрерывные по Хаусдорфу многозначные отображения  $I_k : \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с параметром  $\xi \in \Xi$ , управлением и многозначными импульсными воздействиями:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \xi), \quad (1.1)$$

$$u(t) \in U(t, x(t), \xi), \quad (1.2)$$

$$x(t_k + 0) - x(t_k) \in I_k(x(t_k), \xi), \quad k = 1, \dots, p, \quad (1.3)$$

$$x(a) = x_0. \quad (1.4)$$

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Пусть  $\tau \in (a, b]$ . Под *допустимым управлением на отрезке*  $[a, \tau]$  системы (1.1)–(1.4) будем понимать измеримую по Лебегу функцию  $u : [a, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , для которой существует функция  $x \in \tilde{C}^n[a, \tau]$  такая, что при почти всех  $t \in [a, \tau]$  выполняется включение (1.2) и при всех  $t \in [a, \tau]$  имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s), u(s), \xi) ds + \sum_{k: t_k \in [a, \tau]} \Delta_k \chi_{(t_k, \tau]}(t), \quad (1.5)$$

где векторы  $\Delta_k = x(t_k + 0) - x(t_k)$  удовлетворяют включениям (1.3),  $\chi_{(t_k, \tau]}$  — характеристическая функция интервала  $(t_k, \tau]$  ( $k$  такие, что  $t_k \leq \tau$ ). Пару  $(u, x)$  будем называть *допустимой на отрезке*  $[a, \tau]$ , а функцию  $x \in \tilde{C}^n[a, \tau]$  — *фазовой траекторией отрезка*  $[a, \tau]$ .

Систему (1.1)–(1.4) будем называть *управляемой системой с фазовыми ограничениями на управление*, поскольку выбор управления зависит от состояния управляемого объекта, и с *многозначными импульсными воздействиями* (или коротко — *управляемой импульсной системой*).

Определим отображение  $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Xi \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$  равенством

$$F(t, x, \xi) = f(t, x, U(t, x, \xi), \xi).$$

В силу теоремы об измеримом выборе (см., например, [3, с. 127]), система (1.1)–(1.4) эквивалентна задаче Коши для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), \xi) \quad (1.6)$$

с многозначными импульсными воздействиями (1.3) и начальным условием (1.4).

**З а м е ч а н и е 1.1.** Множество решений задачи (1.6), (1.3), (1.4) совпадает с множеством всех фазовых траекторий управляемой импульсной системы (1.1)–(1.4).

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Допустимую пару  $(u_0, x_0)$  на отрезке  $[a, \tau_0]$  ( $\tau_0 \in (a, b)$ ) будем называть *продолжаемой*, если найдется такая допустимая пара  $(u_1, x_1)$  на отрезке  $[a, \tau_1]$  ( $\tau_1 \in (\tau_0, b]$ ), что  $u_1(t) = u_0(t)$  при почти всех  $t \in [a, \tau_0]$  и  $x_1(t) = x_0(t)$  при всех  $t \in [a, \tau_0]$ .

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Будем говорить, что  $(u, x)$  — *допустимая пара на интервале*  $[a, c]$  ( $c \in (a, b)$ ), если для любого  $\tau \in (a, c)$  сужения на  $[a, \tau]$  функций  $u, x$  образуют допустимую пару на  $[a, \tau]$ .

**О п р е д е л е н и е 1.4.** Будем говорить, что допустимая пара  $(u, x)$  на интервале  $[a, c]$  ( $c \in (a, b)$ ) *непродолжаема*, если не существует такой допустимой пары  $(u_1, x_1)$  на интервале  $[a, c_1]$  ( $c_1 \in (c, b]$ ), что  $u_1(t) = u(t)$  и  $x_1(t) = x(t)$  на  $[a, c]$ . Допустимую пару на всем  $[a, b]$  будем также считать непродолжаемой.

Для управляемой импульсной системы (1.1)–(1.4) обозначим  $H(x_0, \tau, \xi)$  — множество всех допустимых пар на отрезке  $[a, \tau]$  ( $\tau \in (a, b]$ );  $H(x_0, \xi)$  — множество всех непродолжаемых допустимых пар;  $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$  — множество всех фазовых траекторий на отрезке  $[a, \tau]$  ( $\tau \in (a, b]$ );  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  — множество всех непродолжаемых фазовых траекторий (см. [4, Определение 2.3]).

Согласно замечанию 1.1, при любом  $\tau \in (a, b]$  множество  $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$  совпадает с множеством определенных на  $[a, \tau]$  решений включения (1.6) с импульсными воздействиями (1.3) и начальным условием (1.4).

**О п р е д е л е н и е 1.5.** [5, Определение 2] Будем говорить, что множество непродолжаемых фазовых траекторий *априорно ограничено в точке*  $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$  (или, что множество  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  *априорно ограничено*), если найдется такое число  $\mathbf{r} > 0$ , что для всякого  $\tau \in (a, b]$  не существует  $x \in \tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$ , для которого выполняется неравенство  $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, \tau]} > \mathbf{r}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.6.** [5, Определение 3] Пусть  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K \subset \Xi$ . Будем говорить, что множество непродолжаемых фазовых траекторий *априорно ограничено в совокупности на множестве*  $S \times K$  (или, что множество  $\tilde{H}(S, K)$  *априорно ограничено*), если оно априорно ограничено в каждой точке  $(x_0, \xi) \in S \times K$  и константа  $\mathbf{r} > 0$  в определении 1.5 является общей для всех точек из множества  $S \times K$ .

Рассмотрим для дифференциального включения (1.6) «овыпукленное» включение:

$$\dot{x}(t) \in \text{co } F(t, x(t), \xi), \quad t \in [a, b]. \quad (1.7)$$

Обозначим через  $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \tau, \xi)$  множество решений задачи (1.7), (1.3), (1.4) на отрезке  $[a, \tau]$  ( $\tau \in (a, b]$ ), а через  $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \xi)$  — множество всех непродолжаемых решений этой же задачи (1.7), (1.3), (1.4).

**Лемма 1.1** (см. [4]). Пусть множество  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  априорно ограничено. Тогда найдется такой выпуклый компакт  $\mathbb{K} \subset \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ , что для любого  $\tau \in (a, b]$  выполнено  $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \tau, \xi) \subset \mathbb{K}|_{\tau}$ , где  $\mathbb{K}|_{\tau}$  — множество сужений функций из множества  $\mathbb{K}$  на отрезок  $[a, \tau]$ .

**Следствие 1.1** (см. [4], [5]). Если множество  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  априорно ограничено, то множество  $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \xi)$  также априорно ограничено.

## 2. Основные результаты

**Теорема 2.1.** Пусть множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в точке  $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ . Тогда для любого  $\tau \in (a, b]$  множество  $H(x_0, \tau, \xi)$  допустимых пар на отрезке  $[a, \tau]$  не пусто.

**Доказательство.** Так как множество  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  априорно ограничено, то, согласно [4, теорема 2.1], для всякого  $\tau \in (a, b]$  множество  $\tilde{H}(x_0, \tau, \xi)$  не пусто, а значит и множество  $H(x_0, \tau, \xi)$  также не пусто.  $\square$

**Замечание 2.2.** Согласно теореме 2.1 из априорной ограниченности множества  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  следует, что для любого  $\tau \in [a, b]$  существует фазовая траектория управляемой импульсной системы (1.1)–(1.4) на отрезке  $[a, \tau]$  и любая фазовая траектория на отрезке  $[a, \tau]$  продолжаема на весь отрезок  $[a, b]$ .

**Теорема 2.2.** Пусть множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в точке  $(x_0, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$ . Тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в совокупности на множестве  $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon) \times B_{\Xi}(\xi, \varepsilon)$ .

**Доказательство.** Каждое непродолжаемое решение  $x : [a, c) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , как показано в [4], обладает следующим свойством:  $\lim_{t \rightarrow c-0} |x(t)| = \infty$ .

Предположим, что утверждение теоремы не выполнено, т. е. множество  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  априорно ограничено и не существует такого  $\varepsilon > 0$ , что множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в совокупности на  $B_{\mathbb{R}^n}(x_0, \varepsilon) \times B_{\Xi}(\xi, \varepsilon)$ . Иначе говоря, предположим, что множество непродолжаемых фазовых траекторий априорно ограничено в точке  $(x_0, \xi)$ , но не является априорно ограниченным в совокупности ни на одном шаре пространства  $\mathbb{R}^n \times \Xi$  с центром в точке  $(x_0, \xi)$ .

Это означает, что для любых  $m_i > 0$  найдутся такие числа  $\tau_i \in (a, b]$  и последовательности  $\{x_i\} \subset \tilde{H}(x_0, \tau_i, \xi_i)$ , где  $\xi_i \rightarrow \xi$ ,  $x_0^i \rightarrow x_0$  при  $i \rightarrow \infty$ , что для любого  $i = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство

$$|x_i(\tau_i)| \geq m_i. \quad (2.8)$$

Для задачи (1.6), (1.3), (1.4) в [5] было показано, что любое решение  $x_i \in \tilde{H}(x_0^i, \tau_i, \xi_i)$  можно продолжить до непродолжаемого решения  $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Обозначим  $\sigma(\tilde{x}_i)$  правую точку интервала, на котором определено решение  $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$ . Поставим в соответствие последовательности  $\{\tilde{x}_i\} \subset \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , число

$$\tilde{\nu} = \sup \left\{ d \in (a, b] : d < \sigma(\tilde{x}_i), i = 1, 2, \dots, \text{ и множество } \{\tilde{x}_i|_d, i = 1, 2, \dots\} \text{ ограничено в } \tilde{C}^n[a, d] \right\}. \quad (2.9)$$

Не уменьшая общности, будем считать, что при  $i \rightarrow \infty$  последовательность  $\{\tau_i\}$  сходится к  $\tau_0$  монотонно. Из оценки (2.8) и определения числа  $\tilde{\nu}$  соотношением (2.9) вытекают неравенства  $a < \tilde{\nu} \leq \tau_0 \leq b$ . Далее, из (2.9), как показано в [6], вытекает, что для любого  $d \in (a, \tilde{\nu})$  последовательность функций  $\tilde{x}_i|_d$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , компактна в пространстве  $\tilde{C}^n[a, d]$  и из нее диагональным процессом можно извлечь сходящуюся подпоследовательность функций  $\tilde{x}_{jj}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , т. е. что для любого  $d \in (a, \tilde{\nu})$   $\tilde{x}_{jj} \rightarrow x$  в пространстве  $\tilde{C}^n[a, d]$  при  $j \rightarrow \infty$ . Не уменьшая общности, будем считать, что сама последовательность  $\tilde{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , для любого  $d \in (a, b]$  сходится при  $i \rightarrow \infty$  к  $x$  в пространстве  $\tilde{C}^n[a, d]$ . Отметим, что, согласно [4], сужение  $x$  на любой отрезок  $[a, d] \subset [a, \tilde{\nu})$  — это решение овыпукленной задачи (1.7), (1.3), (1.4) на отрезке  $[a, d]$ .

По следствию 1.1, из априорной ограниченности множества  $\tilde{H}(x_0, \xi)$  вытекает, что множество  $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \xi)$  также априорно ограничено. Из определения числа  $\nu$  (см. (2.9)) и соотношения (2.8) следует, что найдется монотонная последовательность  $\{d_i\} \subset [a, b]$ ,  $d_i \rightarrow \tilde{\nu}$  при  $i \rightarrow \infty$  такая, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} |\tilde{x}_i(d_i)| = \infty$ .

Далее покажем, что функция  $x \in \tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \tilde{\nu}, \xi)$  удовлетворяет равенству

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \tilde{\nu}-0} |x(t)| = \infty. \quad (2.10)$$

Предположим противное. Тогда функция  $x \in \tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \tau_0, \xi)$  ограничена на  $[a, \tilde{\nu})$ . Пусть для любого  $t \in (a, \tilde{\nu})$  выполнено  $|x(t)| < \tilde{k}$ . Зафиксируем некоторое  $\tilde{m} > \tilde{k}$ . В силу компактности последовательности  $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$  для положительного числа  $\tilde{m} - \tilde{k}$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для любого  $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$  и любых  $t_1, t_2 \in (a, \tilde{\nu})$ , принадлежащих одному и тому же интервалу, в котором функции непрерывны и удовлетворяют неравенству

$$|\tilde{x}_i(t_1) - \tilde{x}_i(t_2)| < \tilde{m} - \tilde{k}. \quad (2.11)$$

Будем считать, что все числа  $d_i$  принадлежат интервалу  $(\tilde{\nu} - \delta, \tilde{\nu})$  непрерывности функций  $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$ , причем  $|\tilde{x}_i(d_i)| > \tilde{m}$ . Выберем  $i$  столь большим, что для всех  $t \in [a, d_1]$  выполняется неравенство  $|\tilde{x}_i(t)| < \tilde{k}$ . Тогда для любого  $\tilde{x}_i \in \tilde{H}(x_0^i, \xi_i)$  справедлива оценка

$$|\tilde{x}_i(d_1) - \tilde{x}_i(d_i)| \geq \tilde{m} - \tilde{k},$$

которая противоречит неравенству (2.11). Следовательно, выполняется (2.10), что противоречит априорной ограниченности множества  $\tilde{H}_{\text{co}}(x_0, \xi)$ . Полученное противоречие доказывает теорему.  $\square$

**Следствие 2.2.** Пусть для некоторой точки  $(\bar{x}_0, \bar{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \Xi$  множество  $\tilde{H}(\bar{x}_0, \bar{\xi})$  априорно ограничено. Тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для любых  $x_0 \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}_0, \varepsilon)$ ,  $\xi \in B_{\Xi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$  и  $\tau \in (a, b]$  множество  $H(x_0, \tau, \xi)$  допустимых пар на отрезке  $[a, \tau]$  не пусто.

## References

- [1] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., Книжный дом "ЛИБРОКОМ", М., 2016. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Vvedeniye v Teoriyu Mnogoznachnykh Otobrazheniy i Differentsial'nykh Vklyucheniye*, LIBROKOM, M., 2016 (In Russian)].
- [2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 2007; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, I, II, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.
- [3] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, 1-е изд., ФИЗМАТЛИТ, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lektsii po Vypuklomu i Mnogoznachnomu Analizu*, FIZMATLIT, M., 2014 (In Russian)].
- [4] А. И. Булгаков, О. В. Филиппова, "Импульсные функционально-дифференциальные включения с отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений", *Известия Института математики и информатики Удмурдского государственного университета*, **1** (43) (2014), 3-48. [A. I. Bulgakov, O. V. Filippova, "The functional differential inclusions with impulses and with the right-hand side not necessarily convex-valued with respect to switching", *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science Udmurt State University*, **14** (2014), 3-48 (In Russian)].
- [5] А. И. Булгаков, Е. В. Корчагина, О. В. Филиппова, "Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части I–VI", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:6 (2009), 1275-1313. [A. I. Bulgakov, E. V. Korchagina, O. V. Filippova, "Functional-differential inclusions with impulses. Part 1-6.", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:6 (2009), 1275-1313 (In Russian)].
- [6] А. И. Булгаков, "К вопросу существования непрерывных ветвей у многозначных отображений с невыпуклыми образами в пространствах суммируемых функций", *Математический сборник*, **136**:2 (1988), 292-300; англ. пер.: A. I. Bulgakov, "On the question of the existence of continuous branches of multivalued mappings with nonconvex images in spaces of summable functions", *Math. USSR-Sb*, **64**:1 (1989), 295-303.

## Информация об авторе

**Филиппова Ольга Викторовна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: philippova.olga@rambler.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-1612-9880>

## Information about the author

**Olga V. Filippova**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.  
E-mail: philippova.olga@rambler.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-1612-9880>

Поступила в редакцию 07.08.2020 г.  
Поступила после рецензирования 01.10.2020 г.  
Принята к публикации 19.11.2020 г.

Received 07.08.2020  
Reviewed 01.10.2020  
Accepted for press 19.11.2020

С глубоким прискорбием извещаем о том, что ушел из жизни

**Борис Алексеевич Пасынков**



**29.06.1937 – 20.11.2020**

Профессор кафедры общей топологии и геометрии Механико-математического факультета МГУ, заслуженный профессор МГУ Борис Алексеевич Пасынков в течение многих лет сотрудничал с математиками Тамбовского педагогического института – Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина. Борис Алексеевич был председателем государственной аттестационной комиссии по специальности «Математика», участвовал в организации и проведении в Тамбове Международных конференций «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения», был редактором, автором статей, рецензентом, членом редакционной коллегии журнала «Вестник российских университетов. Математика».

В нашей памяти навсегда останутся встречи с Борисом Алексеевичем, счастье общения с этим замечательным человеком, выдающимся математиком, блестящим педагогом.



$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \lambda$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$H^2(\Pi, M^\Pi) \rightarrow$$

$$L_v(E, 1)$$

$$\{ \mu_p^{(0)} \} \rightarrow \{ \mu_p^{(0)} \}$$

none

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow$$

$$(p-1) \times (p-1)$$

of the entries in  $\mathbb{Z}$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} + 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_n$$

$$A \frac{4}{\pi} = \frac{1}{\pi} a a \frac{1}{\pi} \sigma = -\pi$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|R|, |M|, |VE| =$$

$$\pi \approx \frac{1}{11}$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$\psi = \frac{1}{\mu_{H^2}}$$

$$(E, p, 4)$$

$$\Pi; \int \chi$$

$$\lambda + \mu$$

$$\det(X, \Theta_X) \neq 0$$

$$K_0(X) \text{ Ind } \mathbb{Z}/p$$