ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

ISSN 2686-9667

Том 29
№ 147
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 29, № 147, 2024

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научным специальностям:
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки);
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Редакторы: М.А. Сенина, М.И. Филатова
Редакторы английских текстов: И.С. Голыбина, М.А. Сенина
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, № 147. 148 с. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147

Подписано в печать 20.09.2024. Дата выхода в свет
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 18,5. Усл. печ. л. 17,2. Тираж 1000 экз. Заказ № 24198. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 29, no. 147, 2024

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialties:
1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences);
1.1.2. Differential equations and mathematical physics (physical and mathematical sciences)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka", Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Derzhavin Tambov State University” (ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Editors: M.A. Senina, M.I. Filatova
English texts editors: I.S. Golybina, M.A. Senina
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. 2024. Vol. 29, no. 147. 148 p. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147

Signed for printing 20.09.2024. Release date
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 18,5. Conv. pr. sheet 17,2. Copies printed 1000. Order no. 24198. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-233-243

УДК 519.245

Универсальный метод Монте–Карло для процессов Леви и его экстремумов

Александр Сергеевич ГРЕЧКО[1] **, Олег Евгеньевич КУДРЯВЦЕВ**[1,2]

[1] ООО НПФ «ИнВайз Системс»

344015, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, ул. Еременко, 58/11

[2] ГКОУ ВО «Ростовский филиал Российской таможенной академии»

344002, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пр. Буденновский, 20

Аннотация. В статье предложен универсальный подход построения методов Монте–Карло для вычисления цен опционов с выплатами, зависящими от совместного распределения конечного положения процесса Леви X_T и его инфимума $\mathcal{I}_T$ (или супремума $\mathcal{S}_T$). Мы выводим приближенные формулы для условных функций распределения процесса Леви $\mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{S}_T = y)$ ($\mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{I}_T = y)$), которые выражаются через частную производную по y функции совместного распределения $\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{S}_T < y)$ $(\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{I}_T < y))$ и плотности инфимума (или супремума) в конечный момент времени. Применив преобразование Лапласа к функции совместного распределения процесса Леви и его экстремума, мы используем приближенную факторизацию Винера–Хопфа для представления образа ее частной производной. Обращая преобразование Лапласа с помощью алгоритма Гавера–Стехфеста, мы находим искомую условную функцию распределения. Разработанный алгоритм симуляции совместного положение процесса Леви и его экстремума в заданный момент времени состоит из двух ключевых этапов. На первом этапе мы симулируем значение экстремума процесса Леви на основе аппроксимации его функции распределения $\mathbf{P}(\mathcal{S}_T < x)$ (или $\mathbf{P}(\mathcal{I}_T < x)$). На втором этапе мы симулируем конечное значение процесса Леви на основе аппроксимации условной функции распределения конечного положения процесса Леви относительно его экстремума. Универсальность разработанного нами метода Монте–Карло заключается в реализации единообразного подхода для широкого класса процессов Леви, в отличие от классических подходов, когда симуляции существенным образом опираются на особенности вероятностного распределения, связанного с моделируемым случайным процессом или его экстремумами. В нашем подходе достаточно знать характеристическую экспоненту процесса Леви. Наиболее затратный по времени вычислительный блок по симуляции случайной величины на основе известной функции распределения может быть эффективно реализован с помощью нейросетей и ускорен за счет параллельных вычислений. Таким образом, с одной стороны, предлагаемый нами подход подходит для широкого класса моделей Леви, с другой — допускает комбинирование с методами машинного обучения.

Ключевые слова: процессы Леви, метод Монте–Карло, процессы экстремума, интегральные преобразования, факторизация Винера–Хопфа

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00474, https://rscf.ru/project/23-21-00474/).

Для цитирования: *Гречко А.С., Кудрявцев О.Е.* Универсальный метод Монте–Карло для процессов Леви и его экстремумов // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 233–243. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-233-243

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-233-243

Universal Monte Carlo method for Lévy processes and their extrema

Alexander S. GRECHKO[1] **, Oleg E. KUDRYAVTSEV**[1,2]
[1] InWise Systems, LLC
58/11 Eremenko St., Rostov-on-Don 344015, Russian Federation
[2] Rostov Branch of the Russian Customs Academy
20 Budennovskiy Av., Rostov-on-Don 344002, Russian Federation

Abstract. The article proposes a universal approach to constructing Monte Carlo methods for pricing options with payoffs depending on the joint distribution of the final position of the Lévy process X_T and its infimum $\mathcal{I}_T$ (or supremum $\mathcal{S}_T$). We derive approximate formulas for the conditional cumulative distribution functions of the Lévy process $\mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{S}_T = y)$ ($\mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{I}_T = y)$), which are expressed through the partial derivative with respect to y of the joint cumulative distribution function $\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{S}_T < y)$ $(\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{I}_T < y))$ and the density of the infimum (or supremum) at the final moment of time. By applying the Laplace transform to the joint cumulative distribution function of the Lévy process and its extremum, we use the approximate Wiener–Hopf factorization to represent the image of its partial derivative. By inverting the Laplace transform using the Gaver–Stehfest algorithm, we find the desired conditional cumulative distribution function. The developed algorithm for simulating the joint position of the Lévy process and its extremum at a given point in time consists of two key stages. At the first stage, we simulate the extremum value of the Lévy process based on the approximation of its cumulative distribution function $\mathbf{P}(\mathcal{S}_T < x)$ (or $\mathbf{P}(\mathcal{I}_T < x)$). In the second step, we simulate the final value of the Lévy process based on the approximation of the conditional cumulative distribution function of the final position of the Lévy process relative to its extremum. The universality of the Monte Carlo method we developed lies in the implementation of a uniform approach for a wide class of Lévy processes, in contrast to classical approaches, when simulations are essentially based on the features of the probability distribution associated with the simulated random process or its extrema. In our approach, it is enough to know the characteristic exponent of the Lévy process. The most time-consuming computational unit for simulating a random variable based on a known cumulative distribution function can be effectively implemented using neural networks and accelerated through parallel computing. Thus, on the one hand, the approach we propose is suitable for a wide class of Lévy models, on the other hand, it can be combined with machine learning methods.

Keywords: Lévy processes, Monte Carlo method, extremum processes, integral transforms, Wiener–Hopf factorization

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00474, https://rscf.ru/en/project/23-21-00474/).

Mathematics Subject Classification: 60G51, 65C05.

For citation: Grechko A.S., Kudryavtsev O.E. Universal Monte Carlo method for Lévy processes and their extrema. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 233–243. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-233-243 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Процессы Леви, допускающие скачки и обобщающие модель Блэка–Шоулза, последние несколько декад активно используются при моделировании финансовых активов (см., например, [1]). Напомним, что процесс Леви имеет независимые однородные по времени приращения и траектории, непрерывные справа с левосторонними пределами (подробнее, см., например, [2]). Простейшим примером процесса Леви является винеровский процесс.

В задачах вычисления цен опционов метод Монте–Карло является наиболее простым с точки зрения практической реализации. Методы симуляции специальных классов процессов Леви на основе особенностей их построения можно найти в [1]. В рамках общего подхода к построению классических методов Монте–Карло моделирование приращений процесса Леви осуществляется на основе обращения соответствующей функции распределения, которую можно вычислить через характеристическую функцию процесса с помощью интеграла Фурье (см., например, [3]). Вместе с тем, в случае опционов, выплаты по которым зависят от траектории базового актива, в моделях со скачками необходимо осуществлять симуляцию положения процесса через достаточно короткие промежутки времени, чтобы фиксировать возможные изменения процессов супремума и инфимума. Этот факт делает стандартные методы Монте–Карло для процессов Леви слишком затратным с вычислительной точки зрения. На основе факторизационного тождества (*факторизация Винера–Хопфа*), связывающего исходный процесс Леви с его супремумом и инфимумом, в [4–6] были построены плотности распределений экстремумов процесса Леви в рандомизированный момент времени, позволяющие разработать более передовые методы Монте–Карло для экзотических опционов. Однако реализация этих методов требовала знания явных формул факторизации, которые известны только для ограниченного числа моделей Леви. Более того, как доказано в [7], в этом случае остается и проблема большого количества шагов по времени. В статье [8] был предложен метод Монте–Карло вычисления вероятности выхода из полосы гауссового процесса, для которого также известна факторизация Винера–Хопфа в явном виде.

В [7] был разработан более универсальный подход к построению методов Монте–Карло для общих моделей Леви, предполагающий непосредственное моделирование процессов экстремума на основе приближенной факторизации Винера–Хопфа. Приближенная факторизация Винера–Хопфа применялась при вычислении цен барьерных опционов в моделях Леви с непрерывным и дискретным мониторингом барьеров (см., например, [9, 10]). Разработанный в [7] метод Монте–Карло с факторизацией Винера–Хопфа для процессов Леви, как показали численные эксперименты в [3], эффективен для симуляции процесса экстремума. Однако для совместного распределения положений экстремума и самого процесса метод нуждается в дальнейшем развитии. В работах [3, 11] предложены подходы по встраиванию искусственных нейросетей в методы Монте–Карло при моделировании случайных величин на основе приближения их функций распределения.

Цель данной статьи — предложить универсальный подход построения методов Монте–Карло для вычисления цен опционов с выплатами, зависящими от совместного распределения конечного положения процесса Леви и его экстремума. В рамках данной работы мы выводим приближенные формулы для условных функций распределения процесса Леви относительно его экстремума, которые выражаются через соответствующую частную производную функции совместного распределения и плотности инфимума (или супремума) в конечный момент времени.

Преобразование Лапласа функции совместного распределения процесса Леви и его экстремума позволяет нам использовать факторизацию Винера–Хопфа для представления образа ее частной производной. Обращая преобразование Лапласа с помощью алгоритма Гавера–Стехфеста, мы находим искомую условную функции распределения. С помощью функций распределения процесса экстремума и условной функции распределения процесса Леви относительно его экстремума мы сначала симулируем положение процесса экстремума, а затем положение самого процесса при известном экстремуме. В результате мы получаем совместное положение процесса Леви и его экстремума в заданный момент времени. Наиболее затратный по времени вычислительный блок по симуляции случайной величины на основе известной функции распределения может быть эффективно реализован с помощью нейросетей. Таким образом, с одной стороны, предлагаемый нами подход подходит для широкого класса моделей Леви, с другой — допускает комбинирование с методами машинного обучения.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разделе 1 мы дадим основные понятия теории процессов Леви, включающие в себя факторизации Винера–Хопфа. Во втором разделе мы выведем приближенные формулы для функций условного распределения процесса Леви относительно его экстремума в фиксированный момент времени. В третьем разделе мы сформулируем алгоритм универсального метода Монте–Карло для общих процессов Леви.

1. Основные понятия теории процессов Леви

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, на котором определен одномерный процесс Леви $\{X_t, t \geq 0\}$. Напомним, что характеристическая экспонента ψ, которая находится из соотношения $E[e^{i\xi X_t}] = e^{-t\psi(\xi)}$, полностью определяет X_t. Согласно хорошо известной формуле Леви–Хинчина (см. [2]), $\psi(\xi)$ допускают следующее представление

$$\psi(\xi) = \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 - i\gamma\xi + \int_{\mathbf{R}} (1 - e^{i\xi x} + i\xi x \mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\Pi(dx), \tag{1.1}$$

где $\sigma \geq 0$ и $\gamma \in \mathbf{R}$ — константы, а Π — мера на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющая свойству

$$\int_{\mathbf{R}} \min\{1, x^2\}\Pi(dx) < +\infty.$$

О п р е д е л е н и е 1.1. [2, Definition 45.1] Определим

$$\mathcal{S}_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s \text{ и } \mathcal{I}_t = \inf_{0 \leq s \leq t} X_s.$$

Процессы $\{\mathcal{S}_t\}$ и $\{\mathcal{I}_t\}$ называются *процессами супремума* и *инфимума*, соответственно.

Отметим, что для любого $t > 0$ имеют место следующие полезные соотношения [2, Remark 45.9]

$$\mathcal{S}_t \overset{d}{\sim} X_t - \mathcal{I}_t, \quad \mathcal{I}_t \overset{d}{\sim} X_t - \mathcal{S}_t.$$

Введем случайное время T_q, имеющее показательное распределение с параметром интенсивности $q > 0$, и рассмотрим характеристическую функцию распределения X_{T_q}

$$E\left[e^{i\xi X_{T_q}}\right] = q(q + \psi(\xi))^{-1}.$$

Имеет место следующий результат (факторизация Винера–Хопфа).

Теорема 1.1. (см. [2, Theorem 45.2]) *Существует единственная пара характеристических функций* $\phi_q^+(\xi)$ *и* $\phi_q^-(\xi)$ *бесконечно делимых распределений с носителями на* $[0,+\infty)$ *и* $(-\infty,0]$, *соответственно, таких, что выполняется тождество*

$$q(q+\psi(\xi))^{-1} = \phi_q^+(\xi)\phi_q^-(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Согласно [2, Theorem 45.7], функции $\phi_q^+(\xi)$ и $\phi_q^-(\xi)$ — это характеристические функции распределений $\mathcal{S}_{T_q}$ и $\mathcal{I}_{T_q}$, соответственно:

$$\phi_q^+(\xi) = E\left[\int_0^\infty qe^{-qt}e^{i\xi\mathcal{S}_t}dt\right] = E\left[e^{i\xi\mathcal{S}_{T_q}}\right], \tag{1.2}$$

$$\phi_q^-(\xi) = E\left[\int_0^\infty qe^{-qt}e^{i\xi\mathcal{I}_t}dt\right] = E\left[e^{i\xi\mathcal{I}_{T_q}}\right]. \tag{1.3}$$

2. Факторизация Винера–Хопфа и условные функции распределения процесса Леви относительно его экстремума

Рассмотрим задачу аппроксимации функций совместного распределения процесса Леви и процесса экстремума. Обозначим через:

$F^+(x,T) = \mathbf{P}(\mathcal{S}_T < x)$ функцию распределения положения процесса супремума $\mathcal{S}_T$;

$F^-(x,T) = \mathbf{P}(\mathcal{I}_T < x)$ функцию распределения положения процесса инфимума $\mathcal{I}_T$;

$F_X^+(x,y,T) = \mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{S}_T < y)$ функцию совместного распределения величин X_T и $\mathcal{S}_T$;

$F_X^-(x,y,T) = \mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{I}_T < y)$ функцию совместного распределения величин X_T и $\mathcal{I}_T$;

$F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T) = \mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{S}_T = y)$ условную функцию распределения величины X_T относительно $\mathcal{S}_T$;

$F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T) = \mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{I}_T = y)$ условную функцию распределения величины X_T относительно $\mathcal{I}_T$.

Применяя преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ к $F^+(x,T)$ по времени T, получаем

$$\begin{aligned}\hat{F}^+(x,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{S}_t - x)\big]dt = q^{-1}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{S}_{T_q} - x)\big] \\ &= q^{-1}\mathbf{P}(\mathcal{S}_{T_q} < x) \equiv q^{-1}\mathbf{P}(X_{T_q} - \mathcal{I}_{T_q} < x).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Аналогично, применяя преобразование Лапласа к $F^-(x,T)$, получаем

$$\begin{aligned}\hat{F}^-(x,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_t - x)\big]dt = q^{-1}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q} - x)\big] \\ &= q^{-1}\mathbf{P}(\mathcal{I}_{T_q} < x) \equiv q^{-1}\mathbf{P}(X_{T_q} - \mathcal{S}_{T_q} < x).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Функции $\hat{F}^+(x,q)$ и $\hat{F}^-(x,q)$ можно вычислить, например, с помощью [3, Теорема 2.1], см. также [7].

Теорема 2.1. *Определим* $\hat{F}^+(x,q)$ *по формуле* (2.1). *Фиксируем четное натуральное число* $N = 2n$, *определим точки* q_k *в соответствии с алгоритмом Гавера–Стехфеста*

$$q_k = \frac{k\ln(2)}{T}, \quad k = 1,\dots,N, \tag{2.3}$$

и весовые коэффициенты ω_k

$$\omega_k := \frac{(-1)^{n+k}}{k \cdot n!} \sum_{j=[(k+1)/2)]}^{\min\{k,n\}} j^{n+1} C_n^j C_{2j}^j C_j^{k-j}, \tag{2.4}$$

где через $[x]$ *обозначена целая часть* x, *а через* $C_L^K = \frac{L!}{(L-K)!K!}$ *— количество сочетаний из* L *элементов по* K. *Тогда*

$$F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T) = 0, \quad y > 0, \tag{2.5}$$

$$F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T) \approx \frac{\sum_{k=1}^N \omega_k \cdot \hat{F}^+(x-y,q_k)\hat{p}_{q_k}^-(y)}{p_T^-(y)}, \quad y \le 0, \quad x \ge y, \tag{2.6}$$

где $p_t^-(x)$ *и* $\hat{p}_q^-(x)$ *— плотности вероятности* $\mathcal{I}_t$ *и* $\mathcal{I}_{T_q}$, *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что $\mathcal{I}_{T_q}$ принимает неположительные значения, по определению условной функции распределения случайной величины $F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T)$ получаем, что при $y > 0$ (2.5) выполняется автоматически.

При $y \le 0$, $x \ge y$ имеем

$$\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{I}_T < y) = \int_{-\infty}^{y} \mathbf{P}(X_T < x | \mathcal{I}_T = \tilde{y}) p_T^-(\tilde{y}) d\tilde{y}, \tag{2.7}$$

где $p_T^-(y)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины $\mathcal{I}_T$. Из (2.7), с учетом наших обозначений, получаем,

$$\mathbf{P}(X_T < x | \mathcal{I}_T = y) = \partial_y F_X^-(x,y,T)/p_T^-(y). \tag{2.8}$$

Применяя преобразование Лапласа к $F_X^-(x,y,T)$ и учитывая соотношения в (2.1), получаем

$$\begin{aligned}
\hat{F}_X^-(x,y,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt} E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(X_t - x)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_t - y)\big] dt \\
&= q^{-1} E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(X_{T_q} - x)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q} - y)\big] \\
&= q^{-1} E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}((X_{T_q} - \mathcal{I}_{T_q}) + (\mathcal{I}_{T_q} - x))\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q} - y)\big] \\
&= E\big[q^{-1}\mathbf{P}(X_{T_q} - \mathcal{I}_{T_q} < x - \mathcal{I}_{T_q})\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q} - y)\big] \\
&= E\big[\hat{F}^+(x - \mathcal{I}_{T_q}, q)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q} - y)\big] \\
&= \int_{-\infty}^{0} \hat{F}^+(x-z,q)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(z-y) p_q^-(z) dz = \int_{-\infty}^{y} \hat{F}^+(x-z,q) p_q^-(z) dz.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Дифференцируя интеграл (2.9) по y, мы получаем

$$\partial_y \hat{F}_X^-(x,y,q) = \hat{F}^+(x-y,q) p_q^-(y). \tag{2.10}$$

Обращая преобразование Лапласа в (2.10) с помощью алгоритма Гавера–Стехфеста и подставляя результат в (2.8), завершаем доказательство соотношения (2.6). $\square$

По аналогии можно доказать следующую теорему для условной функции распределения $F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T)$.

Теорема 2.2. *Определим* $\hat{F}^-(x,q)$ *по формуле* (2.2). *Фиксируем четное натуральное число* $N = 2n$, *определим точки* q_k *в соответствии с алгоритмом Гавера–Стехфеста* (*см.* (2.3), (2.4)) . *Тогда*

$$F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T) = 0, \quad y < 0,$$
$$F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T) \approx \frac{\sum_{k=1}^N \omega_k \cdot \hat{F}^-(x-y,q_k)\hat{p}^+_{q_k}(y)}{p^+_T(y)}, \quad y \geq 0, \quad x \leq y,$$

где $p^+_t(x)$ *и* $\hat{p}^+_q(x)$ — *плотности вероятности* $\mathcal{S}_t$ *и* $\mathcal{S}_{T_q}$, *соответственно.*

Плотности вероятности $p^-_T(x)$ и $p^+_T(x)$ можно вычислить с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть существуют вещественные числа* $\omega_- < 0 < \omega_+$ *такие, что при любых положительных* q *характеристические функции* $\phi^+_q(\xi)$ (1.2) *и* $\phi^-_q(\xi)$ (1.3) *аналитичны при* $\Im\xi > \omega_-$ *и при* $\Im\xi < \omega_+$, *соответственно. Фиксируем четное натуральное число* $N = 2n$, *определим точки* q_k *в соответствии с алгоритмом Гавера–Стехфеста* (*см.* (2.3), (2.4)) . *Тогда*

$$p^-_T(x) = 0, \quad x > 0,$$
$$p^-_T(x) = \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi^-(\xi,T)d\xi, \quad x \leq 0, \tag{2.11}$$
$$p^+_T(x) = 0, \quad x < 0, \tag{2.12}$$
$$p^+_T(x) = \frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi^+(\xi,T)d\xi, \quad x \geq 0, \tag{2.13}$$

где

$$\Phi^-(\xi,T) := E\left[e^{i\xi\mathcal{I}_T}\right] \approx \sum_{k=1}^N \omega_k \cdot q_k^{-1} \cdot \phi^-_{q_k}(\xi). \tag{2.14}$$
$$\Phi^+(\xi,T) := E\left[e^{i\xi\mathcal{S}_T}\right] \approx \sum_{k=1}^N \omega_k \cdot q_k^{-1} \cdot \phi^+_{q_k}(\xi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выразим плотность вероятности $p^-_T(y)$ через характеристическую функцию $\Phi^-(\xi,T)$, применив обратное преобразование Фурье вероятностной меры (см., например, [12, с. 5]):

$$p^-_T(y) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi}\Phi^-(\xi,T)d\xi.$$

Учитывая, очевидное свойство $\Phi^-(-\xi,T) = \overline{\Phi^-(\xi,T)}$ подынтегральной функции, получаем (2.11).

Выразим $p^-_q(y)$ через функцию $\phi^-_q(\xi)$, применив обратное преобразование Фурье вероятностной меры

$$p^-_q(y) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi}\phi^-_q(\xi)d\xi.$$

Из формулы (1.3) следует, что преобразование Лапласа характеристической функции $E\left[e^{i\xi\mathcal{I}_T}\right]$ процесса инфимума $\mathcal{I}_T$ выражается через $\phi^-_q(\xi)$ следующим образом

$$\hat{\Phi}^-(\xi,q) = q^{-1}\phi^-_q(\xi). \tag{2.15}$$

Обращая преобразование Лапласа в (2.15) с помощью алгоритма Гавера–Стехфеста, мы получаем формулу (2.14).

Формулы (2.12), (2.13) доказываются аналогично. □

3. Универсальный метод Монте–Карло для вычисления цен опционов

Суммируя вышесказанное, мы получаем следующий алгоритм симуляции совместного распределения конечного положения процесса Леви и его инфимума:

- В точках q_k, определяемых алгоритмом Гавера–Стехфеста (см. (2.3)–(2.4)), с помощью [3, Теорема 2.1] вычисляем значения функций $\hat{F}^+(x, q_k)$ на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Функцию распределения $F^-(x_j, T)$ вычисляем с помощью [3, Теорема 2.2] на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Симулируем значения $\mathcal{I}_T = y$, решая (с помощью интерполяции или обученной нейросети [11]) уравнение $F^-(y, T) = U$, где U — равномерное распределение на $(0, 1)$.
- Симулируем совместное распределение $X_T = y + z$ и $\mathcal{I}_T = y$, где положительное число z находится путем решения (с помощью интерполяции или обученной нейросети [11, Теорема 3]) уравнения
$$F_{X|\mathcal{I}}(y + z, y, T) = V, \tag{3.1}$$
где V — равномерное распределение на $(0, 1)$, независимое от U. С помощью теоремы теоремы 2.1 решение (3.1) численно сводится к решению
$$\frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(z, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)}{p^-_T(y)} = V,$$
где V — равномерное распределение на $(0, 1)$, независимое от U.

Уравнение (3.1) можно также решить численно с помощью метода Ньютона. Положим $F(z) := \sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(z, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)$. Идея состоит в том, чтобы выбрать начальное приближение z_0 к корню z^* такое, чтобы $F(z_0)$ было достаточно близко к 0. Например, z_0 можно выбрать таким, чтобы $\hat{F}^+(z_0, q_1) = V$. Тогда получим конкретную аппроксимацию решения как корня z_1 уравнения прямой, касательной к кривой $w = F(z)$ в точке $z = z_0$
$$F'(z_0)(z - z_0) = F(z) - F(z_0),$$
где $F(z)$ приближается к 0. Таким образом, новое уточненное предположение z_1 определяется по формуле
$$z_1 = z_0 - \frac{F(z_0)}{F'(z_0)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(z_0, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)}{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{p}^-_{q_k}(z_0)\hat{p}^-_{q_k}(y)}.$$
Мы продолжаем уточнять наш приблизительный корень, пока не достигнем заданной точности. Алгоритм последовательных итераций в методе Ньютона следующий:
$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(z_n, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)}{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{p}^-_{q_k}(z_n)\hat{p}^-_{q_k}(y)}.$$
Поскольку порядок сходимости метода Ньютона равен 2, метод сходится достаточно быстро.

Аналогично можно построить алгоритм симуляции совместного распределения конечного положения процесса Леви и его супремума:

- В точках q_k, определяемых алгоритмом Гавера–Стехфеста (см. (2.3)–(2.4)), с помощью [3, Теорема 2.1] вычисляем значения функций $\hat{F}^-(x, q_k)$ на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Функцию распределения $F^+(x_j, T)$ вычисляем на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$ с помощью [3, Теорема 2.2].
- Симулируем значения $\mathcal{S}_T = y$, решая (с помощью интерполяции или обученной нейросети [11, Теорема 3]) уравнение $F^+(y, T) = U$, где U — равномерное распределение на $(0, 1)$.
- Симулируем совместное распределение $X_T = y + z$ и $\mathcal{S}_T = y$, где отрицательное число z находится путем решения (с помощью интерполяции или обученной нейросети [11, Теорема 3]) уравнения
$$F_{X|\mathcal{S}}(y + z, y, T) = V, \tag{3.2}$$
где V — равномерное распределение на $(0, 1)$, независимое от U. С помощью теоремы 2.2 решение (3.2) численно сводится к решению
$$\frac{\sum_{k=1}^N \omega_k \cdot \hat{F}^-(z, q_k)\hat{p}^+_{q_k}(y)}{p^+_T(y)} = V.$$

З а м е ч а н и е 3.1. Для вычисления функций распределения в теоремах 2.1 и 2.2 нам будут нужны функции $\phi^+_q(\xi)$ и $\phi^-_q(\xi)$. Если явные формулы для характеристических функций $\phi^\pm_q(\xi)$ неизвестны, то их можно найти, используя метод приближенной факторизации (см., например [7, 10]).

Опишем, как предложенные алгоритмы могут быть использованы при построении методов Монте–Карло при вычислении цен экзотических опционов. Пусть $r > 0$ — безрисковая процентная ставка, и цена базового актива $S_t = S\exp(X_t)$, где $S > 0$, а X_t — процесс Леви относительно выбранной матрингальной меры. Пусть цена экзотического опциона с моментом исполнения T в момент времени $t = 0$ определяется по формуле
$$V(T, S) = e^{-rT} E\big[G(Se^{\mathcal{S}_T}, Se^{X_T})\big],$$
где $G(M, S)$ — функция выплат по опциону.

Обозначим через
$$\widehat{V}(T, S) := e^{-rT} S \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G(Se^{\widehat{\mathcal{S}}_n}, Se^{\widehat{\mathcal{S}}_n + \widehat{Z}_n}),$$
где N — количество симуляций, $\widehat{\mathcal{S}}_n$ — решение уравнения $F^+(y, T) = u_n$ относительно y; $\widehat{Z}_n = \mathcal{S}_n$ — решение $F_{X|\mathcal{S}}(u_n + z, u_n, T) = v_n$ относительно z; (u_n, v_n) — симуляция с номером n пары независимых равномерно распределенных на $(0, 1)$ случайных величин U и V. Тогда
$$V(T, S) = \widehat{V}(T, S) + O(N^{-\frac{1}{2}}).$$

Будем называть предложенный подход универсальным методом Монте–Карло для процессов Леви. Универсальность разработанного нами метода Монте–Карло заключается в реализации единообразного подхода для широкого класса процессов Леви, в отличие от классических подходов, когда симуляции существенным образом опираются на особенности вероятностного распределения, связанного с моделируемым случайным процессом или его экстремумами. В нашем подходе достаточно знать характеристическую экспоненту $\psi(\xi)$ (1.1) процесса Леви. Увеличивая количество членов в формуле Гавер–Стехфеста, мы можем добиться необходимой точности вычислений.

С точки зрения практического применения, данный метод легко распараллеливается на базе nVidia CUDA API для одновременного расчета цен различных экзотических опционов на один и тот же базовый актив. В частности, на основе одного набора вероятностей можно одновременно рассчитывать цены нескольких типов опционов для различных значений начальной цены и уровней предопределенного минимума (максимума). В указанном ключе метод может успешно конкурировать с детерминированными методами вычисления опционов. Разработанный в работе универсальный алгоритм состоит из двух ключевых этапов: симуляция положения экстремума процесса Леви на основе аппроксимации его функции распределения $F^+(x,T)$ (или $F^-(x,T)$) и симуляция совместного положения исходного процесса при известном экстремуме на основе аппроксимации условной функции распределения конечного положения процесса Леви относительно его экстремума $F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T)$ (или $F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T)$).

Основным повторяющимся вычислительным блоком в методе Монте–Карло будет решение уравнений вида $F^+(x,T)=u$ (или $F^-(x,T)=u$) и (3.1) (или (3.2)). В настоящее время нейронные сети и другие методы машинного обучения активно используют не как самостоятельные методы решения задач, а как структурные элементы алгоритма, которые позволяют эффективно выполнять часто повторяющиеся вычислительные блоки. Как показано в [11, Theorem 3], непрерывные случайную величину можно симулировать, не обращая функцию распределения, а аппроксимировав ее с помощью монотонной искусственной нейросети, которую можно интерпретировать как функцию распределения смеси логистических распределений. Таким образом, для реализации метода Монте–Карло нам понадобится симулировать только логистическое распределение как составной элемент нашей конструкции.

References

[1] R. Cont, P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Financ. Math. Ser., ed. 2nd edition, Chapman & Hall/CRC, BocaRaton, FL, 2008.

[2] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge Stud. Adv. Math., **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[3] О. Е. Кудрявцев, А. С. Гречко, И. Э. Мамедов, “Метод Монте–Карло для вычисления цен опционов типа lookback в моделях Леви”, *Теория вероятностей и ее применения*, **69**:2 (2024), 305–334; англ. пер.:O. E. Kudryavtsev, A. S. Grechko, I. E. Mamadov, “Monte Carlo method for pricing lookback options in Lévy models”, *Theory Probab. Appl.*, **69**:2 (2024), 243–264.

[4] A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou, J. C. Pardo, K. van Schaik, “Wiener–Hopf Monte Carlo simulation technique for Lévy processes”, *Journal of Applied Probability*, **21**:6 (2011), 2171–2190.

[5] A. Ferreiro–Castilla, A. E. Kyprianou, R. Scheichl, G. Suryanarayana, “Multilevel Monte Carlo Simulation for Lévy processes based on the Wiener–Hopf factorisation”, *Stochastic Processes and their Applications*, **124**:2 (2014), 985–1010.

[6] A. Ferreiro-Castilla, K. Van Schaik, “Applying the Wiener–Hopf Monte Carlo simulation technique for Lévy processes to path functionals”, *Journal of Applied Probability*, **52**:1 (2015), 129–148.

[7] О. Е. Кудрявцев, “Приближенная факторизация Винера–Хопфа и методы Монте–Карло для процессов Леви”, *Теория вероятностей и ее применения*, **64**:2 (2019), 228–257; англ.

пер.:O. E. Kudryavtsev, "Approximate Wiener–Hopf factorization and the Monte Carlo methods for Lévy processes", *Theory Probab. Appl.*, **64**:2 (2019), 186–208.

[8] G. Beliaysky, N. Danilova, G. Ougolnitsky, "Calculation of probability of the exit of a stochastic process from a band by Monte Carlo method: a Wiener–Hopf factorization", *Mathematics*, **7**:7 (2019), 581.

[9] G. Fusai, G. Guido, D. Marazzina, "Spitzer identity, Wiener–Hopf factorization and pricing of discretely monitored exotic options", *European Journal of Operational Research*, **251** (2016), 124–134.

[10] O. Kudryavtsev, S. Levendorskiĭ, "Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes", *Finance Stoch.*, **13**:4 (2009), 531–562.

[11] O. Kudryavtsev, N. Danilova, "Applications of artificial neural networks to simulating Lévy processes", *Journal of Mathematical Sciences*, **271** (2023), 421–433.

[12] G. Doetsch, *Guide to the Applications of the Laplace and Z -transforms*, Van Nostrand-Reinhold, London–New York, 1971.

Информация об авторах

Гречко Александр Сергеевич, научный сотрудник. Научно-производственная фирма «ИнВайз Системс», г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация. E-mail: alex@itparadigma.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-3655-4319

Кудрявцев Олег Евгеньевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информатики и информационных таможенных технологий, Ростовский филиал Российской таможенной академии; заместитель генерального директора по научной работе, Научно-производственная фирма «ИнВайз Системс», г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация.
E-mail: koe@donrta.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4331-0204

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Кудрявцев Олег Евгеньевич
E-mail: koe@donrta.ru

Поступила в редакцию 03.06.2024 г.
Поступила после рецензирования 30.08.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Information about the authors

Alexander S. Grechko, Researcher. InWise Systems, LLC, Rostov-on-Don, Russian Federation.
E-mail: alex@itparadigma.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-3655-4319

Oleg E. Kudryavtsev, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Computer Science and Customs Technologies Department, Rostov Branch of the Russian Customs Academy; Deputy General Director for Research, InWise Systems, LLC, Rostov-on-Don, Russian Federation. E-mail: koe@donrta.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4331-0204

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Oleg E. Kudryavtsev
E-mail: koe@donrta.ru

Received 03.06.2024
Reviewed 30.08.2024
Accepted for press 13.09.2024

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-244-254
УДК 517.518

Оптимальные оценки количества звеньев базисных горизонтальных ломаных для 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением коранга 1

Александр Валерьевич ГРЕШНОВ, Роман Иванович ЖУКОВ
ФГАОУ ВО «Новосибирский государственный университет»
630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1

Аннотация. Доказано, что для 2-ступенчатой группы Карно $\mathbb{D}_n$ с горизонтальным распределением коранга 1, $\dim \mathbb{D}_n = n+1$, минимальное число $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}$ такое, что любые две точки $u, v \in \mathbb{D}_n$ можно соединить базисной горизонтальной k-ломаной (ломаной, состоящей из k звеньев) $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u,v)$, $k \leq N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}$, не превосходит $n+2$. Построены примеры групп $\mathbb{D}_n$, для которых $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} = n+i$, $i=1,2$. Здесь $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ — набор базисных левоинвариантных горизонтальных векторных полей алгебры Ли группы $\mathbb{D}_n$, а звено ломаной $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u,v)$ имеет вид $\exp(asX_i)(w)$, $s \in [0, s_0]$, $a = const$.

Ключевые слова: горизонтальные кривые, ломаные, теорема Рашевского–Чоу, 2-ступенчатые группы Карно, базисные векторные поля

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00319, https://rscf.ru/project/24-21-00319/).

Для цитирования: *Грешнов А.В., Жуков Р.И.* Оптимальные оценки количества звеньев базисных горизонтальных ломаных для 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением коранга 1 // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 244–254. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-244-254

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-244-254

Optimal estimates of the number of links of basis horizontal broken lines for 2-step Carnot groups with horizontal distribution of corank 1

Alexandr V. GRESHNOV, Roman I. ZHUKOV
Novosibirsk State University
1 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russian Federation

Abstract. For a 2-step Carnot group $\mathbb{D}_n$, $\dim \mathbb{D}_n = n+1$, with horizontal distribution of corank 1, we proved that the minimal number $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}$ such that any two points $u, v \in \mathbb{D}_n$ can be joined by some basis horizontal k-broken line (i.e. a broken line consisting of k links) $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u,v)$, $k \leq N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}$, does not exeed $n+2$. The examples of $\mathbb{D}_n$ such that $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} = n+i$, $i = 1, 2$, were found. Here $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ is the set of left invariant basis horizontal vector fields of the Lie algebra of the group $\mathbb{D}_n$, and every link of $L_k^{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}}(u,v)$ has the form $\exp(asX_i)(w)$, $s \in [0, s_0]$, $a = const$.

Keywords: horizontal curves, broken lines, Rashevskii–Chow theorem, 2-step Carnot groups, basis vector fields

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00319, https://rscf.ru/project/24-21-00319/).

Mathematics Subject Classification: 53C17, 43A80.

For citation: Greshnov A.V., Zhukov R.I. Optimal estimates of the number of links of basis horizontal broken lines for 2-step Carnot groups with horizontal distribution of corank 1. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 244–254. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-244-254 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассмотрим связное гладкое многообразие $\mathcal{M}$, $\dim\mathcal{M} = N$ и C^∞-гладкие векторные поля $\mathcal{X}_\mathcal{M} = \{X_1, \dots, X_m\}$, $m < N$, удовлетворяющие условию Хермандера на $\mathcal{M}$ (субриманово многообразие). Векторные поля $X_1, \dots, X_m$ и подрасслоение $H_\mathcal{M} \subset T\mathcal{M}$, натянутое на $X_1, \dots, X_m$, называются *горизонтальными*. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma = \gamma(s) : [0, s_0] \to \mathcal{M}$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(s) \in H_\mathcal{M}(\gamma(s))$ почти всюду. Хорошо известна следующая

Теорема 0.1 (Рашевский–Чоу [1,2]). *Любые две точки $u, v \in \mathcal{M}$ могут быть соединены некоторой горизонтальной кривой $\gamma \subset \mathcal{M}$, состоящей из конечного числа отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $X_1, \dots, X_m$.*

Отметим следующий более точный (по сравнению с теоремой 0.1) результат.

Теорема 0.2. [2] *Любые две точки $u, v \in \mathcal{M}$ могут быть соединены горизонтальной кривой в $\mathcal{M}$, состоящей не более чем из $2N$ отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $X_1, \dots, X_m$.*

Расстояние Карно–Каратеодори на $\mathcal{M}$ определяется как

$$d_{cc}(u, v) = \inf\{l_\mathcal{M}(\gamma) \mid \gamma \text{ — горизонтальная кривая, соединяющая } u, v\};$$

длина $l_\mathcal{M}(\gamma)$ абсолютно непрерывной кривой $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, определяется при помощи скалярного Риманова произведения обычным способом. Пара $(\mathcal{M}, d_{cc})$ называется *пространством Карно–Каратеодори* [1–3]. Важнейшим частным случаем пространств Карно–Каратеодори являются *группы Карно* $\mathbb{G}$ [3–5].

В контексте теорем 0.1, 0.2 кривую, состоящую из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $X_1, \dots, X_m$, естественно называть (горизонтальной) ломаной. При этом, при выбранном базисе $\mathcal{X}_\mathcal{M}$ горизонтального подрасслоения $H_\mathcal{M}$, также естественно определять горизонтальную ломаную как кривую, состоящую из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей вида $\sum\limits_{i=1}^m a_i X_i$, $a_i = const$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Пусть $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_r\}$ — гладкие векторные поля, определенные на некоторой области $U \subset \mathbb{R}^N$. Положим

$$a_J Y = \sum_{j=1}^r a_j Y_j, \quad a_J = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r, \qquad a_i = const.$$

Обозначим через $\exp(a_J Y)(u)$, $u \in U$, точку интегральной линии $\exp(s a_J Y)(u)$, $s \geq 0$, горизонтального векторного поля $a_J Y$, соответствующую значению $s = 1$; для простоты мы полагаем, что выражение $\exp(a_J Y)(u)$ корректно определено для каждого вектора a_J. По индукции определим *k-ломаную* $L_k(x_0, x_k)$, *состоящую из k сегментов* I_i, $i = 1, \dots, k$, (*имеющую k звеньев*) и $k+1$ *вершин* в точках $x_0, \dots, x_k$ с началом в точке x_0 и концом в точке x_k :

$$L_k(x_0, x_k) = \bigcup_{i=1}^k I_i, \quad I_i = \bigcup_{s\in[0,1]} \exp(s a_{J_i} Y)(x_{i-1}), \quad \exp(a_{J_i} Y)(x_{i-1}) = x_i, \quad |a_{J_i}| \neq 0. \quad (0.1)$$

Если в (0.1) мы рассматриваем только такие a_J, где всего лишь одна компонента не равна 0, то такие ломаные мы будем называть $\mathcal{Y}$-*базисными* и использовать в этом случае обозначение $L_k^{\mathcal{Y}}(x_0, x_k)$.

В серии работ [6–9] была исследована задача о нахождении минимального числа $N_{\mathcal{M}}$ такого, что любые две точки $x, y \in \mathcal{M}$ соединяются горизонтальной k-ломаной, $k \le N_{\mathcal{M}}$: для серии групп Карно $\mathbb{G}$ были найдены значения величины $N_{\mathbb{G}}$, и полученные результаты показывают, что значение $2N$ из теоремы 0.2 здесь не оптимально. Но, с другой стороны, подходы работ [6–9] основаны на определении 0.1, тогда как теоремы 0.1, 0.2 доказываются для горизонтальных ломаных вида $L_k^{\mathcal{X}_{\mathcal{M}}}$.

Пусть $N_{\mathcal{X}_{\mathcal{M}}}$ — минимальное натуральное число такое, что любые две точки $x, y \in \mathcal{M}$ соединяются горизонтальной ломаной $L_k^{\mathcal{X}_{\mathcal{M}}}$, где $k \le N_{\mathcal{X}_{\mathcal{M}}}$. В настоящей работе для канонических 2-ступенчатых групп Карно $\mathbb{D}_n$ с горизонтальным распределением коранга 1 мы установили, что $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} \le n+2$, где $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}$ — базис горизонтальных левоинвариантных векторных полей (базис Якоби) группы $\mathbb{D}_n$ (теорема 3.1, следствие 3.1); здесь $\dim \mathbb{D}_n = n+1$, $n \ge 2$. Отметим, что из общих соображений следует, что $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} \ge n+1$. При этом для групп Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^k$, $k \in \mathbb{N}$, (частный случай групп $\mathbb{D}_n$) мы получили, см. теоремы 2.1, 2.2, что

$$N_{\mathcal{X}_{\mathbb{H}_\alpha^k}} = \begin{cases} 4, & k = 1, \\ 2k+1, & k > 1. \end{cases}$$

Полученные результаты интересно сопоставить со следующим фактом: $N_{\mathbb{D}_n} = 3$ для любого $n \ge 2$ [7].

Группы Карно $\mathbb{D}_n$ являются предметом специального исследования в геометрическом анализе, см., например, [10]. В работе [11] были найдены точные значения константы q_2 в обобщенном неравенстве треугольника для Box-квазиметрик групп $\mathbb{D}_n$; точные значения константы q_2 играют существенную роль в получении точных оценок в теоремах о точках совпадения липшицевых и накрывающих отображений в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах [12–14].

Полученные в теоремах 2.1, 2.2, 3.1 результаты говорят о том, что универсальная оценка теоремы 0.2 в контексте настоящей работы не является оптимальной даже при том, что класс горизонтальных ломаных (определение 0.1) был сужен до класса «базисных» горизонтальных ломаных. Из доказательства теоремы 2.2 вытекает, что для любой выделенной точки $M_0 \in \mathbb{D}_n$ почти все точки $M \in \mathbb{D}_n$, $M_0 \ne M$, могут быть соединены с M_0 базисными горизонтальными k-ломаными, $k \le n+1$. Совершенно правдоподобно выглядит гипотеза о том, что для любой выделенной точки $M_0 \in \mathbb{G}$ почти все точки $M \in \mathbb{G}$, $M_0 \ne M$, могут быть соединены с M_0 базисными горизонтальными k-ломаными, $k \le \dim \mathbb{G}$.

1. Предварительные замечания

В наших рассмотрениях мы будем определять группы Карно как канонические группы Ли. *Канонической N-мерной группой Ли* [15, Глава IV] называется аналитическая группа Ли G такая, что ее экспоненциальное отображение $Exp : \mathbb{R}^N \to G$ является тождественным; таким образом, любой элемент $x \in G$ однозначно определяется координатной записью $x = (x_1, \dots, x_N)$, точка $O_G = (0, \dots, 0)$ (начало координат $\mathbb{R}^N$) является нейтральным элементом, $x^{-1} = (-x_1, \dots, -x_N)$, групповая операция $P_x^G x' = x \cdot x'$ для любых $x, x' \in G$ (левый сдвиг элемента x' на элемент x) определяется посредством формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа, а таблица коммутаторов определяется на базисных единичных векторах $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ of $\mathbb{R}^N$. Значения базисных левоинвариантных векторных полей (поля Якоби [4, Section 1.2.2]) $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ алгебры Ли V канонической группы Ли G в произвольной точке $x\in G$ определяется как

$$(X_1,\dots,X_N)(x)=\frac{\partial P^G_x x'}{\partial x'}\Big|_{x'=0},\qquad x'=(x'_1,\dots,x'_N).$$

Мы имеем $\exp(s\sum\limits_{i=1}^{N}x'_iX_i)(x)=P^G_x sx'=x\cdot(sx')$, $s\in[0,s_0]$. Поэтому нам достаточно доказывать теоремы о соединимости горизонтальнми ломаными только пар точек $O_{\mathbb{G}}$ и M, где M — произвольная точка рассматриваемой группы Карно $\mathbb{G}$.

2. Горизонтальные ломаные на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^\alpha_n$

n-группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n_\alpha$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с системой координат $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n,t)$, индуцированной координатным репером

$$(O_{\mathbb{H}^n_\alpha},e_1,e_2,\dots,e_{2n-1},e_{2n},e_{2n+1}),$$

при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$\begin{cases}[e_{2j-1},e_{2j}]=\alpha e_{2n+1}, & j=1,\dots,n,\quad \alpha>0,\\ [e_j,e_{2n+1}]=0, & j=1,\dots,2n.\end{cases}\tag{2.1}$$

Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа [16, Лекция 6] и таблицу (2.1), мы получаем следующее аналитическое выражение левого сдвига $P^{\mathbb{H}^n_\alpha}_w w'$ произвольного элемента $w'=(x'_1,y'_1,\dots,x'_n,y'_n,t')\in\mathbb{H}^n_\alpha$ на произвольный элемент $w=(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n,t)\in\mathbb{H}^n_\alpha$:

$$P^{\mathbb{H}^n_\alpha}_w w'=w\cdot w'=\Big(x_1+x'_1,y_1+y'_1,\dots,x_n+x'_n,y_n+y'_n,t+t'+\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy'_i-x'_iy_i)\Big).\tag{2.2}$$

Используя (2.2), мы получаем выражения для базиса левоинвариантных векторных полей группы $\mathbb{H}^n_\alpha$ в каждой точке $(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n,t)$:

$$X_i=e_{2i-1}-\frac{\alpha}{2}y_ie_{2n+1},\qquad Y_i=e_{2i}+\frac{\alpha}{2}x_ie_{2n+1},\qquad T=e_{2n+1},$$

где $i=1,\dots,n$. Левоинвариантные векторные поля $\{X_1,Y_1,\dots,X_n,Y_n\}$ — горизонтальные; полагаем $\mathcal{X}_{\mathbb{H}^n_\alpha}=\{X_1,Y_1,\dots,X_n,Y_n\}$.

Теорема 2.1.

1^0 *Любая точка* $M=(x_0,y_0,t_0)\in\mathbb{H}^1_\alpha$, $x_0^2+y_0^2\neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ *некоторой базисной горизонтальной* k*-ломаной, где* $k\le 3$;

2^0 *любая точка* $M=(0,0,z_0)\in\mathbb{H}^1_\alpha$, $t_0\neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ *некоторой базисной горизонтальной* 4*-ломаной.*

Доказательство. 1^0 Мы имеем

$$(a,0,0)(0,b,0)(c,0,0)=\big(a+c,b,\frac{\alpha}{2}b(a-c)\big).$$

Пусть
$$\big(a+c, b, \frac{\alpha}{2}b(a-c)\big) = (x_0, y_0, t_0), \tag{2.3}$$
тогда
$$x_0 = a + c, \quad y_0 = b, \qquad z_0 = \frac{\alpha}{2}y_0(2a - x_0). \tag{2.4}$$
Пусть $y_0 \neq 0$ — фиксированное число. Тогда, произвольно меняя a при фиксированном x_0, из (2.4) мы получаем, что t_0 может принимать любое значение. Таким образом, для любой точки $M = (x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $y_0 \neq 0$, найдутся числа a, b, c такие, что выполняется (2.3). Откуда вытекает, что найдется горизонтальная базисная k-ломаная, $k \leq 3$, соединяющая $O_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ и M.

Аналогично доказывается, что для любой точки $M' = (x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $x_0 \neq 0$, найдутся числа a, b, c такие, что
$$(0, a, 0)(b, 0, 0)(0, c, 0) = \big(b, a + c, \frac{\alpha}{2}b(c - a)\big) = M'.$$
Откуда вытекает, что найдется горизонтальная базисная k-ломаная, $k \leq 3$, соединяющая $O_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ и M'.

П. 2^0 вытекает из следующего очевидного тождества
$$(a, 0, 0)(0, b, 0)(-a, 0, 0)(0, -b, 0) = (0, 0, \alpha ab).$$
При этом несложно убедиться в том, что не существует базисной горизонтальной k-ломаной, $k < 4$, соединяющей точки $O_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ и $M = (0, 0, t_0) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $t_0 \neq 0$. □

Теорема 2.2.

1^0 *Любая точка* $M = (x^0_1, y^0_1, \dots, x^0_n, y^0_n, t_0) \in \mathbb{H}^n_\alpha$, $(x^0_1)^2 + (y^0_1)^2 + \ldots + (x^0_n)^2_0 + (y^0_n)^2 \neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{H}^n_\alpha}$ *некоторой базисной горизонтальной* k*-ломаной, где* $k \leq 2n + 1$;

2^0 *любая точка* $M = (0, \dots, 0, t_0) \in \mathbb{H}^n_\alpha$, $t_0 \neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{H}^n_\alpha}$ *некоторой базисной горизонтальной* 4*-ломаной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $\mathbb{H}^2_\alpha$, откуда с очевидностью вытекает и общий случай.

1^0 Мы имеем
$$\exp(y^0_1 Y_1) \circ \exp(x^0_1 X_1)(O_{\mathbb{H}^2_\alpha}) = (x^0_1, y^0_1, 0, 0, \frac{\alpha}{2}x^0_1 y^0_1) = M'_1.$$
Теперь пусть $y^0_2 \neq 0$. Тогда, используя рассуждения п. 1^0 из теоремы 2.1, мы получаем, что для любых x^0_2, t_0 найдутся числа a, b, c такие, что
$$\exp(cX_2) \circ \exp(bY_2) \circ \exp(aX_2)(M'_1) = (x^0_1, y^0_1, x^0_2, y^0_2, \frac{\alpha}{2}y^0_2(2a - x^0_2) + \frac{\alpha}{2}x^0_1 y^0_1) = (x^0_1, y^0_1, x^0_2, y^0_2, t_0).$$
Аналогично проводятся рассуждения для $x^0_2 \neq 0$.

Случай точки $M = (x^0_1, y^0_1, 0, 0, t_0)$ вытекает из теоремы 2.1.

П. 2^0 доказывается так же, как и п. 2^0 из теоремы 2.1. □

3. Горизонтальные ломаные на 2-ступенчатых группах Карно $\mathbb{D}_n$ с горизонтальным распределением коранга 1

Каноническая 2-ступенчатая группа $\mathbb{D}_n$ с горизонтальным распределением коранга 1 в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с системой координат $(x_1,\dots,x_n,t)$ и координатным репером $(O_{\mathbb{D}_n},e_1,\dots,e_n,e_{n+1})$ определяется при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$[e_i,e_j]=\alpha_{ij}e_{n+1},\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}^2\neq 0, \tag{3.1}$$

все остальные возможные коммутаторы $e_1,\dots,e_{n+1}$ равны 0. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n,t)$, $x=(x'_1,\dots,x'_n,t')$. Используя формулу Кэмпбелла–Хаусдорфа [16, Лекция 6], при помощи (3.1) мы получаем

$$P_x^{\mathbb{D}_n}x'=x\cdot x'=\Big(x_1+x'_1,\dots,x_n+x'_n,\ t+t'+\sum_{i,j=1,\dots,n,\,i<j}\frac{\alpha_{ij}}{2}(x_ix'_j-x_jx'_i)\Big).$$

Значения базисных левоинвариантных векторных полей $X_1,\dots,X_n,T$ группы $\mathbb{D}_n$ в каждой точке $u=(x_1,\dots,x_n,t)$ определяются как

$$(X_1,\dots,X_n,T)(u)=\frac{\partial P_u^{\mathbb{D}_n}(x'_1,\dots,x'_n,t')}{\partial(x'_1,\dots,x'_n,t')}\Big|_{(x'_1,\dots,x'_n,t')=(0,\dots,0)}.$$

Левоинвариантные векторные поля $\{X_1,\dots,X_n\}$ — горизонтальные; полагаем $\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}=\{X_1,\dots,X_n\}$.

Теорема 3.1.

1^0 *Любая точка* $M_{t_0}=(0,\dots,0,t_0)\in\mathbb{D}_n$, $t_0\neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{D}_n}$ *некоторой базисной горизонтальной* 4*-ломаной.*

2^0 *Любая точка* $M=(x_1^0,\dots,x_n^0,t_0)\in\mathbb{D}_n$, $(x_1^0)^2+\ldots+(x_n^0)^2\neq 0$, *соединяется с началом координат* $O_{\mathbb{D}_n}$ *некоторой базисной горизонтальной* k*-ломаной, где* $k\le n+2$.

Доказательство. 1^0 Пусть, например, $\alpha_{12}\neq 0$. Тогда п. 1^0 вытекает из следующего тождества

$$\exp(-sX_2)\circ\exp(-sX_1)\circ\exp(sX_2)\circ\exp(sX_1)(O_{\mathbb{D}_n})=\exp(s^2T)(O_{\mathbb{D}_n}).$$

2^0 Обозначим $\alpha=(\alpha_{11},\alpha_{12},\dots,\alpha_{n-1,n})$, $(\hat{x}^0)^\tau=(x_1^0,\dots,x_n^0)$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\exp(bX_1)\circ\exp(x_n^0X_n)\circ\ldots\circ\exp(x_2^0X_2)\circ\exp(aX_1)(O_{\mathbb{D}_n})&\\ =\Big(b+a,x_2^0,\dots,x_n^0,f_1+\frac{(a-b)}{2}\sum_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i^0\Big)&\\ =\big(b+a,x_2^0,\dots,x_n^0,f_1+(a-b)P_1(\alpha,\hat{x}^0)\big),&\end{aligned} \tag{3.2}$$

где выражение f_1 не зависит от a,b. Приравнивая правую часть (3.2) к $(x_1^0,\dots,x_n^0,t_0)$, мы получаем

$$\begin{cases}x_1^0=a+b,\\ t_0=f_1+\frac{(x_1^0-2b)}{2}\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i^0.\end{cases}$$

Если $\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i^0 \neq 0$, то, меняя b произвольным образом, мы получаем, что t_0 принимает произвольные значения из $\mathbb{R}$.

Теперь предположим, что $\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i^0 = 0$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\exp(bX_2)\circ\exp(x_n^0X_n)\circ\ldots\exp(x_3^0X_3)\circ\exp(x_1^0X_1)\circ\exp(aX_2)(O_{\mathbb{D}_n})\\
=\big(x_1^0, b+a, x_3^0,\ldots,x_n^0, f_2+\frac{(a-b)}{2}\big(-\alpha_{12}x_1^0+\sum_{i=3}^{n}\alpha_{2i}x_i^0\big)\big)\\
=\big(x_1^0, b+a,\ldots,x_n^0, f_1+(a-b)P_2(\alpha,\hat{x}^0)\big),\end{aligned} \tag{3.3}$$

где f_2 не зависит от a,b. Приравнивая правую часть (3.3) к $(x_1^0,\ldots,x_n^0,t_0)$, мы получаем

$$\begin{cases}x_2^0 = a+b,\\ t_0 = f_2+\frac{(x_2^0-2b)}{2}\big(-\alpha_{12}x_1^0+\sum\limits_{i=3}^{n}\alpha_{2i}x_i^0\big)\big).\end{cases}$$

Если $-\alpha_{12}x_1^0+\sum\limits_{i=3}^{n}\alpha_{2i}x_i^0 \neq 0$, то, меняя b произвольным образом, мы получаем, что t_0 принимает произвольные значения из $\mathbb{R}$.

Далее по аналогии будем рассматривать композиции

$$\exp(bX_i)\circ\ldots\circ\exp(x_{i+1}^0X_{i+1})\circ\exp(x_{i-1}^0X_{i-1})\circ\ldots\circ\exp(x_1^0X_1)\circ\exp(aX_i)(O_{\mathbb{D}_n}),$$

где $i=3,\ldots,n$.

В результате мы получаем, что любая точка $M=(x_1^0,\ldots,x_n^0,t_0)\in\mathbb{D}_n$, $(x_1^0)^2+\ldots+(x_n^0)^2\neq 0$, для которой выполняется

$$P_1^2(\alpha,x^0)+\ldots+P_n^2(\alpha,x^0)\neq 0,$$

может быть соединена с $O_{\mathbb{D}_n}$ некоторой горизонтальной k-ломаной, где $k\leq n+1$.

Теперь предположим, что вектор $\hat{x}^0$ таков, что

$$P_i(\alpha,\hat{x}^0)=0, \qquad i=1,\ldots,n. \tag{3.4}$$

Условия (3.4) можно записать в следующем виде

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n}\\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots\\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & \ldots & \ldots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^0\\x_2^0\\\vdots\\x_n^0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{0}=A\hat{x}^0.$$

Заметим, что матрица A кососимметрическая, и хорошо известно, что $\dim\, Ker\, A\leq n-2$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации мы имеем $\hat{x}^0\in Ker\, A$. Но тогда найдется базисный вектор $e_i\in\mathbb{R}^n$ и число $s_0>0$ такие, что

$$\hat{x}^0+s_0e_i\notin Ker\, A.$$

Действительно, если, например, $\alpha_{12}\neq 0$, то подойдет вектор e_2. Тогда рассмотрим точку $M_1=\exp(s_0X_2)(M)$, $M=(\hat{x}^0,t_0)$. Так как первые n координат совпадают с $\hat{x}^0+s_0e_i$, то из предыдущих рассуждений мы получаем, что точка M_1 соединяется с $O_{\mathbb{D}_n}$ базисной горизонтальной k-ломаной, где $k \leq n+1$. Поэтому точка M соединяется с $O_{\mathbb{D}_n}$ горизонтальной k-ломаной, где $k \leq n+2$.

Теперь посмотрим на конструкцию подходящих базисных горизонтальных ломаных немного по-другому. Пусть, например, $\alpha_{12} \neq 0$. И пусть $x_2^0 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\exp(bX_1) \circ \exp(x_2^0 X_2) \circ \exp(aX_1) \circ \exp(x_n^0 X_n) \circ \ldots \circ \exp(x_3^0 X_3)(O_{\mathbb{D}_n})& \\ = \Big(a+c, x_2^0, \ldots, x_n^0, f' + \frac{\alpha_{12}}{2} x_0^2 (a-b)\Big)& \\ = \Big(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, f' + \frac{\alpha_{12}}{2} x_0^2 (x_1^0 - 2b)\Big)&,\end{aligned}$$

где f' зависит от $x_1^0, \ldots, x_n^0$, и не зависит от b. Тогда, меняя b произвольно, $x_1^0 = a+b$ мы получаем, что для любой точки $M_{x_2^0} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n, t_0) \in \mathbb{D}_n$, $x_2^0 \neq 0$, $\alpha_{12} \neq 0$, найдется базисная горизонтальная k-ломаная, $k \leq n+1$, соединяющая точки $O_{\mathbb{D}_n}$ и $M_{x_2^0}$. Точно так же доказывается, см. теорему 2.1, что для любой точки $M_{x_1^0} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n, t_0) \in \mathbb{D}_n$, $x_1^0 \neq 0$, $\alpha_{12} \neq 0$, найдется базисная горизонтальная k-ломаная, $k \leq n+1$, соединяющая точки $O_{\mathbb{D}_n}$ и $M_{x_2^0}$. Теперь рассмотрим случай, когда $x_1^0 = x_2^0 = 0$, $t_0 \neq 0$, $\alpha_{ij} = 0$ для всех $(ij) \neq (12)$, $\alpha_{12} \neq 0$. В этом случае горизонтальная $(n+2)$-ломаная строится следующим образом: сначала мы соединяем точки $O_{\mathbb{D}_n}$ и $\exp(t_0 T)(O_{\mathbb{D}_n})$ при помощи горизонтальной 4-ломаной из п. 1^0, далее строим горизонтальную $(n-2)$-ломаную, соединяющую точки с координатами $(0, \ldots, 0, t_0)$ и $(0, 0, x_3^0, \ldots, x_n^0, t_0)$, используя тот факт, что в рассматриваемой ситуации мы имеем

$$\exp(x_n^0) \circ \ldots \circ \exp(x_3^0 X_3) \circ \exp(t_0 T)(O_{\mathbb{D}_n}) = (0, 0, x_3^0, \ldots, x_n^0, t_0).$$

Теорема 3.1 доказана. □

Следствие 3.1. *Если группа $\mathbb{D}_n$ такова, что $\alpha_{12} \neq 0$ и $\alpha_{ij} = 0$ для всех $(ij) \neq (12)$ (к таким группам относится, в частности, группа $\mathbb{H}_\alpha^1$), то $N_{\mathcal{X}_{\mathbb{D}_n}} = n+2$.*

Следствие 3.2. *Почти все точки группы $\mathbb{D}_n$ соединяются с началом координат $O_{\mathbb{D}_n}$ базисными горизонтальными k-ломаными, где $k \leq n+1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В доказательстве теоремы 3.1 мы получили, что все точки $M = (x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0) \in \mathbb{D}_n$, $(x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^0)^2 \neq 0$, $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \notin Ker\, A$, соединяются с $O_{\mathbb{D}_n}$ некоторой базисной горизонтальной $(n+1)$-ломаной. □

References

[1] M. Gromov, “Carnot–Carathéodory spaces seen from within”, *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics, **144**, Birkhäuser, Basel, 1996, 79–323.

[2] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, 2020.

[3] S. K. Vodopyanov, “Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings”, *Contemporary Mathematics*, **424** (2007), 247–301.

[4] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacian*, Berlin–Heidelberg, Springer–Verlag, 2007.

[5] P. Pansu, “Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un”, *Ann. Math.*, **129**:1 (1989), 1–60.

[6] A. Greshnov, “Optimal horizontal joinability on the Engel group”, *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti Lincei Matematica E Applicazioni*, **32**:3 (2021), 535–547.

[7] А. В. Грешнов, Р. И. Жуков, “Горизонтальная соединимость на канонической 3-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коранга 2”, *Сиб. матем. журн.*, **62**:4 (2021), 736–746; англ. пер.:A. V. Greshnov, R. I. Zhukov, “Horizontal joinability in canonical 3-step Carnot groups with corank 2 horizontal distributions”, *Siberian Math. J.*, **62**:4 (2021), 598–606.

[8] А. В. Грешнов, Р. И. Жуков, “Горизонтальная соединимость на 5-мерной 2-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коразмерности 2”, *Алгебра и логика*, **62**:2 (2023), 205–218; англ. пер.:A. V. Greshnov, R. I. Zhukov, “Horizontal joinability on 5-dimensional 2-step Carnot groups with a codimension 2 horizontal distribution”, *Algebra and Logic*, **62**:2 (2023), 137–147.

[9] А. В. Грешнов, “Метод Аграчева–Барилари–Боскайна и оценки числа звеньев горизонтальных ломаных, соединяющих точки в канонической группе Карно $G_{3,3}$”, *Оптимальное управление и динамические системы*, Сборник статей. К 95-летию академика Реваза Валериановича Гамкрелидзе, Труды МИАН, **321**, МИАН, М., 2023, 108–117; англ. пер.:A. V. Greshnov, “The Agrachev–Barilari–Boscain Method and Estimates for the Number of Segments of Horizontal Broken Lines Joining Points in the Canonical Carnot Group $G_{3,3}$”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **321**:1 (2023), 97–106.

[10] Z. M. Balogh, A. Kristály, K. Sipos, “Jacobian determinant inequality on corank1 Carnot groups with applications”, *Journal of Functional Analysis*, **277**:12 (2019), 1–36.

[11] A. Greshnov, V. Potapov, “About coincidence points theorems on 2-step Carnot groups with 1-dimensional centre equipped with Box-quasimetrics”, *AIMS Mathematics*, **8**:3 (2023), 6191–6205.

[12] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Доклады РАН*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “The theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[13] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “(q_1, q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “(q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izvestiya Mathematics*, **82**:2 (2018), 245–272.

[14] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “(q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results”, *Fixed Point Theory*, **23**:2 (2022), 473–486.

[15] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. [L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[16] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1978. [M. M. Postnikov, *Lie Groups and Lie Algebras. Lectures in Geometry. Semester V*, Nauka Publ., Moscow, 1982 (In Russian)].

Информация об авторах

Грешнов Александр Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1218-2767

Information about the authors

Alexandr V. Greshnov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Mathematical Analysis Department, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1218-2767

Жуков Роман Иванович, ассистент кафедры геометрии и топологии, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация.
E-mail: eifromdc@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0009-0007-0251-4995

Roman I. Zhukov, Assistant of Geometry and Topology Department, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation.
E-mail: eifromdc@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0009-0007-0251-4995

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Грешнов Александр Валерьевич
E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru

Corresponding author:
Alexandr V. Greshnov
E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 05.02.2024 г.
Поступила после рецензирования 24.07.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Received 05.02.2024
Reviewed 24.07.2024
Accepted for press 13.09.2024

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-255-267
УДК 517.951

Метод приближенного решения уравнений в частных производных

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ[1], **Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ**[2,3], **Михаил Анатольевич РЫБАКОВ**[2], **Анна Сергеевна ТРОФИМОВА**[2,3]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106/5

[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[3] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. В статье рассматривается уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\big(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\big), \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0,$$

относительно неизвестной функции u, определенной в области D пространственных переменных x, y и при $t \geq 0$. Предлагается метод нахождения приближенного решения. Рассматриваемое уравнение заменяется приближенным за счет введения оператора сдвига $S : D \to D$, позволяющего заменить на каждом шаге вычислений неизвестные значения функции $u(x,y,t)$ в правой части значениями $u(S(x,y),t)$, полученными на предыдущем шаге. Идея предлагаемого метода восходит к идее метода Тонелли, известного для дифференциальных уравнений относительно функций одной переменной (с обычными, а не частными производными). Достоинствами предлагаемого метода являются простота получаемого итерационного соотношения и возможности применений к широкому классу уравнений и краевых условий. В статье получены итерационные формулы решения краевой задачи с условием Дирихле по пространственным переменным и с начальным или с краевым условием по переменной t. На основании предложенного метода получено приближенное решение конкретной начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадратной области.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, краевая задача, приближенное аналитическое решение, уравнение теплопроводности

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/23-11-45014/).

Для цитирования: *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Рыбаков М.А., Трофимова А.С.* Метод приближенного решения уравнений в частных производных // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 255–267. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-255-267

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-255-267

Method of approximate solution of partial derivative equations

Tatyana V. ZHUKOVSKAYA[1], **Evgeny S. ZHUKOVSKY**[2,3], **Mikhail A. RYBAKOV**[2], **Anna S. TROFIMOVA**[2,3]
[1] Tambov State Technical University
106/5 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[3] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The article considers a partial differential equation of the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\big(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\big), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0,$$

with respect to an unknown function u, defined in a domain D of spatial variables x, y and for $t \geq 0$. A method for finding an approximate solution is proposed. The equation under consideration is replaced by an approximate one by introducing the shift operator $S : D \to D$, which allows replacing at each step of the calculations the unknown values of the function $u(x, y, t)$ on the right side with the values $u(S(x, y), t)$, obtained at the previous step. The idea of the proposed method goes back to the idea of the Tonelli method, known for differential equations with respect to functions of one variable (with ordinary, not partial derivatives). The advantages of the proposed method are the simplicity of the obtained iteration relation and the possibility of application to a wide class of equations and boundary conditions. In the article, iteration formulas are obtained for solving a boundary value problem with the Dirichlet condition for spatial variables and with an initial or boundary condition for the variable t. Based on the proposed method, an approximate solution is obtained for a specific initial-boundary value problem for the heat conductivity equation in a square domain.

Keywords: partial differential equation, boundary value problem, approximate analytical solution, heat equation

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/23-11-45014/).

Mathematics Subject Classification: 65N22, 35A35, 35G30.

For citation: Zhukovskaya T.V., Zhukovsky E.S., Rybakov M.A., Trofimova A.S. Method of approximate solution of partial derivative equations. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 255–267. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-255-267 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных описываются многие физические процессы, в том числе процессы теплопроводности, диффузии, механики сплошных сред и другие процессы с распределенными параметрами (см. [1]). Точные аналитические решения таких задач возможны лишь для ограниченного класса уравнений и граничных условий. Приближенное определение решений уравнений в частных производных является более сложной проблемой, чем соответствующая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений. Очевидно, что определить функцию нескольких переменных сложнее, чем функцию одного аргумента. Но, кроме этой очевидной трудности, приближенное нахождение решений уравнений в частных производных осложнено еще и некорректностью ряда задач математической физики (см. [2]).

Основы аналитических и численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных заложены в известной монографии Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [3]. За прошедшие со времени издания этой книги годы приближенным решениям уравнений в частных производных были посвящены многочисленные работы. Значительные успехи достигнуты в развитии теории А. Н. Тихонова [4] решения некорректных задач (см., например, работы [5, 6] и их библиографические списки). В приложениях наиболее популярными являются различные сеточные методы (см., например, монографию [7] и работу [8]), методы представления решений в виде рядов (см., например, [9, главы X, XIII, XVII], методы сведения к дифференциально-разностным уравнениям (см., например, [10]).

Мы предлагаем метод иного типа, приводящий заданное уравнение к приближенному, аналитическое решение которого выписывается в явном виде. К достоинствам предлагаемого метода можно отнести простоту итерационного соотношения, а также возможности применений к широкому классу уравнений и краевых условий. Например, по переменной времени можно рассматривать не только начальную, но и краевые задачи.

Идея предлагаемого метода восходит к идее метода Тонелли (см., например, [11]), известного для дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений относительно функций одной переменной (с обычными, а не частными производными). Для получения методом Тонелли приближенного решения уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t > 0,$$

при заданном начальном условии $x(0) = \alpha_0$, это уравнение заменяют уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-\tau)), \quad t > 0, \quad x(s) = \alpha(s), \quad s \in (-\tau, 0], \tag{0.1}$$

с достаточно малым запаздыванием $\tau > 0$. Здесь α — некоторая определенная на $(-\tau, 0]$ функция такая, что $\alpha(0) = \alpha_0$. Решение такого уравнения определяется последовательно на каждом полуинтервале $\mathfrak{I}_n = (t_{n-1}, t_n]$, где $t_0 = 0$, $t_n = n\tau$, $n = 1, 2, \ldots$, следующими соотношениями. Положим $x_0(t) = \alpha(t)$, $t \in (-\tau, 0]$ и обозначим через $x_n : \mathfrak{I}_n \to \mathbb{R}$ решение рассматриваемой задачи Коши для уравнения (0.1) на полуинтервале $\mathfrak{I}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда решением на следующем полуинтервале $\mathfrak{I}_{n+1}$ будет функция

$$x_{n+1}(t) = x_n(t_n) + \int_{t_n}^{t} f\big(s, x_n(s-\tau)\big)\, ds, \quad t \in \mathfrak{I}_{n+1}.$$

Для получения приближений к уравнению в частных производных мы предлагаем введение аналогов запаздывания — малого параметра не по переменной времени t, а по пространственным переменным.

1. Метод приближенного решения начально-краевой задачи

Для простоты будем рассматривать уравнение, содержащее частную производную первого порядка по времени t и частные производные не выше второго порядка по двум пространственным переменным x, y.

Будем обозначать через $|M|_{\mathbb{R}^2}$ норму вектора $M \in \mathbb{R}^2$, через $\mu(A)$ меру (площадь) множества $A \subset \mathbb{R}^2$ и через $\overline{A}$ замыкание этого множества в $\mathbb{R}^2$.

Пусть задана область D на плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющая границу Γ_0. Положим $\overline{D} = D \cup \Gamma_0$. В области D рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\big(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\big), \quad t > 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{t=0} = \vartheta(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{1.2}$$

$$u\big|_{(x,y)\in\Gamma_0} = \varphi_0(t), \quad t > 0. \tag{1.3}$$

Здесь f, ϑ, φ_0 — заданные непрерывные функции.

Пусть задано $\tau > 0$. Определим отображение $S_\tau : \overline{D} \to D$, удовлетворяющее нижеперечисленным условиям:

- отображение $S_\tau : \overline{D} \to D$ инъективно;
- для любой точки $M \in D$ выполнено $|S_\tau M - M|_{\mathbb{R}^2} \le \tau$;
- при любом $n = 1, 2, \ldots$ множество $S_\tau^n(D)$ является областью с границей $S_\tau^n(\Gamma_0)$;
- при любом $n = 1, 2, \ldots$ выполнено

$$S_\tau^{n+1}(D) \subsetneq S_\tau^n(D), \quad S_\tau^{n+1}(\Gamma_0) \cap S_\tau^n(\Gamma_0) = \emptyset \ \text{ и } \ \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_\tau^n(D)\Big) = 0.$$

Обозначим $D_0 = D$, $D_n = S_\tau^n(D)$, $\Gamma_n = S_\tau^n(\Gamma_0)$, $n = 1, 2, \ldots$. В силу принятых предположений отображение $S_\tau^n : \overline{D_{n-1}} \to \overline{D_n}$ биективно. Определим обратное к $S_\tau : \overline{D_0} \to \overline{D_1}$ отображение $\Lambda_\tau = S_\tau^{-1} : \overline{D_1} \to \overline{D_0}$.

Рассмотрим примеры множеств D и отображений S_τ, обладающих перечисленными свойствами.

П р и м е р 1.1. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена, то есть

$$\exists r > 0 \ \ \forall M \in D \ \ |M|_{\mathbb{R}^2} \le r,$$

а кроме того, еще выпукла и $0 \in D$. Выберем $k \in (0, 1)$ так, чтобы $(1-k)r < \tau$. Положим $\lambda = \frac{1}{k}$. Очевидно, тогда $\lambda > 1$ и $(\lambda - 1)\frac{r}{\lambda} < \tau$. Определим операторы S_τ, $\Lambda_\tau = S_\tau^{-1}$ соотношениями

$$\forall M \in \overline{D} \ \ S_\tau M = kM, \quad \forall M' \in \overline{D_1} \ \ \Lambda_\tau M' = \lambda M'.$$

Очевидно, при таком определении области $D_1 = S_\tau(D)$ и D подобны, и для отображения S_τ выполнены все требуемые условия. В частности, имеем $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_\tau^n(D) = \{0\}$.

П р и м е р 1.2. Пусть $r > 0$, $D = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < r\}$. Рассматриваемая область D представляет собой полосу на плоскости, а ее граница представляет собой две прямые: $\Gamma_0 = \{M = (x, y) : y = \pm r\}$. Выберем $k \in (0, 1)$ так, чтобы $(1 - k)r < \tau$, и положим $\lambda = \frac{1}{k}$. Определим операторы S_τ, $\Lambda_\tau = S_\tau^{-1}$ соотношениями

$$\forall M = (x, y) \in \overline{D} \ \ S_\tau M = (x, ky), \quad \forall M' = (x', y') \in \overline{D_1} \ \ \Lambda_\tau M' = (x', \lambda y').$$

Очевидно, при таком определении выполнены все требуемые условия. В частности, $D_n = \{M=(x,y) : |y| \le rk^n\}$, $\Gamma_n = \{M=(x,y) : y = \pm rk^n\}$, а множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_\tau^n(D)$ — это прямая $\{M=(x,y) : y=0\}$, плоская мера которой равна нулю.

П р и м е р 1.3. Пусть снова задано $r>0$. Определим область $D\subset\mathbb{R}^2$ соотношением $D=\{M=(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|<r,\ x>0\}$. Ее граница — это множество $\Gamma_0 = \{M=(x,y) : x=0,\ y\in[-r,r]$ или $x>0,\ y=\pm r\}$. Выберем $k\in(0,1)$ так, чтобы $(1-k)r<\tau$, и положим $\lambda=\frac{1}{k}$. Определим треугольники $\Delta=\{M=(x,y)\in\overline{D} : 1-x\ge|y|\}$ и $\Delta'=\{M'=(x',y')\in\overline{D_1} : 1-x'\ge|y'|\}$ и зададим операторы S_τ, $\Lambda_\tau=S_\tau^{-1}$ соотношениями

$$\forall M=(x,y)\in\overline{D}\quad S_\tau M=\begin{cases}\big(x+1-k,ky\big), & \text{если } M\in\Delta,\\ \big(x+\frac{1-k}{x+1},ky\big), & \text{если } M\in\overline{D}\setminus\Delta,\end{cases}$$

$$\forall M'=(x',y')\in\overline{D_1}\quad S_\tau M'=\begin{cases}\big(x'-1+k,\lambda y'\big), & \text{если } M\in\Delta,\\ \big(\frac{1}{2}(x'-1+\sqrt{(x'+1)^2-4(1-k)}),\lambda y\big), & \text{если } M'\in\overline{D_1}\setminus\Delta'.\end{cases}$$

Очевидно, при таком определении выполнены все требуемые условия. В частности, $D_n = \{M=(x,y) : x>(1-k)^n,\ |y|\le k^n r\}$, $\Gamma_n=\{M=(x,y) : x=(1-k)^n,\ y\in(-k^n r,k^n r)$ или $x>(1-k)^n,\ y=\pm k^n r\}$, а множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_\tau^n(D)$ — это луч $\{M=(x,y) : x\ge 1,\ y=0\}$, плоская мера которой равна нулю.

Теперь определим приближенное к (1.1) уравнение. Поскольку τ далее считаем неизменным, будем опускать соответствующий индекс в обозначениях отображений, то есть далее $S_\tau=S$, $\Lambda_\tau=\Lambda$. Пусть на $(\mathbb{R}^2\setminus D)\times\mathbb{R}_+$ задана функция φ такая, что при любом $t\in\mathbb{R}_+$ функция $\varphi(\cdot,t)$ дважды дифференцируема и $\varphi\big|_{(x,y)\in\Gamma_0}=\varphi_0(t)$. Будем предполагать, что отображение $\Lambda:\overline{D_1}\to\overline{D}$ продолжено на все множество $\overline{D}$ таким образом, что $\Lambda(\overline{D}\setminus\overline{D_1})\subset\mathbb{R}^2\setminus\overline{D}$. При $t>0$, $M=(x,y)\in D$ рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}(M,t)\\&\quad=f\Big(t,M,u(\Lambda M,t),\frac{\partial u}{\partial x}(\Lambda M,t),\frac{\partial u}{\partial y}(\Lambda M,t),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Lambda M,t),\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Lambda M,t),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(\Lambda M,t)\Big),\\&\qquad u(N,t)=\varphi(N,t),\quad N\in\mathbb{R}^2\setminus D,\quad t>0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Решение приближенного уравнения (1.4) с начально-краевыми условиями (1.2), (1.3) определяется при любом $t>0$ последовательно на каждом множестве $\mathfrak{D}_n=D_{n-1}\setminus D_n$, $n=1,2,\ldots,$ следующими соотношениями. Положим $u_0(M,t)=\varphi(M,t)$, $M\in\mathbb{R}^2\setminus D_0$, $t>0$, и обозначим через $u_n(M,t)$ решение задачи (1.4), (1.2), (1.3) при $M\in\mathfrak{D}_n$, $n=1,2,\ldots,$ $t>0$. Тогда решение при $M\in\mathfrak{D}_{n+1}$, $t>0$ будет определяться формулой

$$\begin{aligned}&u_{n+1}(M,t)=\vartheta(M)\\&+\int_0^t f\Big(s,M,u_n(\Lambda M,s),\frac{\partial u_n}{\partial x}(\Lambda M,s),\frac{\partial u_n}{\partial y}(\Lambda M,s),\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(\Lambda M,s),\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(\Lambda M,s),\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y}(\Lambda M,s)\Big)ds.\end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что решение $u(M,t)$ в граничных точках $M\in\Gamma_n$ областей D_n, $n=1,2,\ldots,$ определяется следующими рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}&u(M,t)\big|_{M\in\Gamma_{n+1}}=\vartheta(M)\\&+\int_0^t f\Big(s,M,u(\Lambda M,s),\frac{\partial u}{\partial x}(\Lambda M,s),\frac{\partial u}{\partial y}(\Lambda M,s),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Lambda M,s),\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Lambda M,s),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(\Lambda M,s)\Big)\big|_{\Lambda M\in\Gamma_n}ds.\end{aligned}$$

2. Приближенное решение уравнения теплопроводности

Проиллюстрируем предлагаемый метод на примере решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Пусть $D = (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Границей этого квадрата является множество $\Gamma_0 = \{M = (x,y) : x = \pm\pi,\ y \in [-\pi,\pi]$ или $x \in (-\pi,\pi),\ y = \pm\pi\}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t)\Big), \quad (x,y) \in D, \quad t > 0, \tag{2.1}$$

при условиях

$$u\big|_{t=0} = \sin(x)\sin(y), \quad u\big|_{(x,y)\in\Gamma_0} = 0. \tag{2.2}$$

Заметим, что «точным» решением этой задачи является функция

$$u = \sin(x)\sin(y)e^{-t}.$$

Построим приближенное решение. Будем использовать операторы S, Λ из примера 1.1. Выберем коэффициент «подобия» $k \in (0,1)$, положим $\lambda = \frac{1}{k}$. Теперь заменим рассматриваемое уравнение (2.1) приближенным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x,\lambda y,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x,\lambda y,t)\Big). \tag{2.3}$$

Решение приближенной задачи (2.3), (2.2) будем находить последовательно на границах Γ_n, $n = 1,2,\ldots$, квадратов D_n. Для этих границ имеют место следующие равносильные соотношения

$$\Gamma_{n+1} = k\Gamma_n \;\;\Leftrightarrow\;\; \Gamma_n = \lambda\Gamma_{n+1}.$$

Сначала определим решение u в точках линии Γ_1 через известные заданные значения функции u в точках линии Γ_0. Затем определим u в точках Γ_2 через уже найденные ее значения в точках линии Γ_1, и т. д. Таким образом, при каждом $n = 1,2,\ldots$ получаем следующее соотношение для нахождения приближенного решения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\Gamma_{n+1}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x,\lambda y,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x,\lambda y,t)\Big)\big|_{(\lambda x,\lambda y)\in\Gamma_n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &u(x,y,t)\big|_{(x,y)\in\Gamma_{n+1}} \\ &\quad = u(x,y,0)\big|_{(x,y)\in\Gamma_{n+1}} + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x,\lambda y,s) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x,\lambda y,s)\Big)\big|_{(x,y)\in\Gamma_n} \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Приведем результаты четырех шагов вычислений по итерационной формуле (2.4).

1) При $(x,y) \in \Gamma_1$ имеем $(\lambda x,\lambda y) \in \Gamma_0$, и в силу (2.2) выполнено $u(\lambda x,\lambda y,t) = 0$. Поэтому по формуле (2.4) здесь получаем

$$u = \sin(x)\sin(y) \text{ при } (x,y) \in \Gamma_1, \;\; t > 0.$$

2) При $(x,y) \in \Gamma_2$ имеем $(\lambda x,\lambda y) \in \Gamma_1$. Воспользуемся значениями решения, найденными на предыдущем шаге. Получим $\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x,\lambda y,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x,\lambda y,t)\Big) = -\sin(\lambda x)\sin(\lambda y)$. Теперь по формуле (2.4) получаем

$$u = \sin(x)\sin(y) - \int_0^t \sin(\lambda x)\sin(\lambda y)ds = \sin(x)\sin(y) - \sin(\lambda x)\sin(\lambda y)t.$$

3) Теперь пусть $(x, y) \in \Gamma_3$ и поэтому $(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma_2$. Тогда

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x, \lambda y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x, \lambda y, t)\Big) = -\sin(\lambda x)\sin(\lambda y) + \lambda^2 \sin(\lambda^2 x)\sin(\lambda^2 y)t,$$

и после подстановки этого выражения в (2.4) получаем

$$\begin{aligned} u &= \sin(x)\sin(y) + \int_0^t \big(-\sin(\lambda x)\sin(\lambda y) + \lambda^2 \sin(\lambda^2 x)\sin(\lambda^2 y)s\big)ds \\ &= \sin(x)\sin(y) - \sin(\lambda x)\sin(\lambda y)t + \frac{1}{2}\lambda^2 \sin(\lambda^2 x)\sin(\lambda^2 y)t^2. \end{aligned}$$

4) Пусть $(x, y) \in \Gamma_4$ и, соответственно, $(\lambda x, \lambda y) \in \Gamma_3$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\lambda x, \lambda y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\lambda x, \lambda y, t)\Big) \\ &= -\sin(\lambda x)\sin(\lambda y) + \lambda^2 \sin(\lambda^2 x)\sin(\lambda^2 y)t - \frac{1}{2}\lambda^6 \sin(\lambda^3 x)\sin(\lambda^3 y)t^2. \end{aligned}$$

Поэтому согласно формуле (2.4) получаем

$$\begin{aligned} u &= \sin(x)\sin(y) + \int_0^t \Big(-\sin(\lambda x)\sin(\lambda y) + \lambda^2 \sin(\lambda^2 x)\sin(\lambda^2 y)s - \frac{1}{2}\lambda^6 \sin(\lambda^3 x)\sin(\lambda^3 y)s^2\Big)ds \\ &= \sin(x)\sin(y) - \sin(\lambda x)\sin(\lambda y)t + \frac{1}{2}\lambda^2 \sin(\lambda^2 x)\sin(\lambda^2 y)t^2 - \frac{1}{6}\lambda^6 \sin(\lambda^3 x)\sin(\lambda^3 y)t^3. \end{aligned}$$

Несложно заметить и показать (методом математической индукции), что на каждом n-м шаге решение определяется формулой

$$u = \sin(x)\sin(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}\lambda^{i^2-i}\sin(\lambda^i x)\sin(\lambda^i y)t^i, \quad (x, y) \in \Gamma_n, \quad t > 0. \tag{2.5}$$

В следующих таблицах приведены результаты расчетов по формуле (2.5) для $k = 0,99$, $\lambda = \frac{1}{0{,}99} \cong 1,0101$, $n = 10$ и, для сравнения, значения при же аргументах точного решения.

Табл. 1. $(x, y) \in \Gamma_1$, $x = 0,99\pi$, $y \in [-0,99\pi, 0,99\pi]$.

время t	точное решение $0,03141\sin(y)e^{-t}$	приближенное решение $0,03141\sin(y)$
0	$0,03141\sin(y)$	$0,03141\sin(y)$
1	$0,01156\sin(y)$	$0,03141\sin(y)$

Табл. 2. $(x, y) \in \Gamma_2$, $x = 0,9801\pi$, $y \in [-0,9801\pi, 0,9801\pi]$.

время t	точное решение $0,062477\sin(y)e^{-t}$	приближенное решение $0,062477\sin(y) - 0,031414\sin(1,010101y)t$
0	$0,062477\sin(y)$	$0,062477\sin(y)$
1	$0,022984\sin(y)$	$0,062477\sin(y) - 0,031414\sin(1,010101y)$

Табл. 3. $(x,y)\in\Gamma_3,\ \ x=0,9703\pi,\ \ y\in[-0,9703\pi,0,9703\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,093173\sin(y)e^{-t}$	$0,093173\sin(y)-0,06248\sin(1,010101y)t$ $+0,016027\sin(1,020302y)t^2$
0	$0,093173\sin(y)$	$0,093173\sin(y)$
1	$0,034276\sin(y)$	$0,093173\sin(y)-0,06248\sin(1,010101y)$ $+0,016027\sin(1,020302y)$

Табл. 4. $(x,y)\in\Gamma_4,\ \ x=0,9606\pi,\ \ y\in[-0,9606\pi,0,9606\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,123475\sin(y)e^{-t}$	$0,123475\sin(y)-0,093176\sin(1,010101y)t$ $+0,031876\sin(1,020302y)t^2-0,005562\sin(1,030607y)t^3$
0	$0,123475\sin(y)$	$0,123475\sin(y)$
1	$0,045424\sin(y)$	$0,123475\sin(y)-0,093176\sin(1,010101y)$ $+0,031876\sin(1,020302y)-0,005562\sin(1,030607y)$

Табл. 5. $(x,y)\in\Gamma_5,\ \ x=0,9510\pi,\ \ y\in[-0,9510\pi,0,9510\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,153362\sin(y)e^{-t}$	$0,153362\sin(y)-0,123478\sin(1,010101y)t$ $+0,047535\sin(1,020302y)t^2-0,011062\sin(1,030607y)t^3$ $+0,001477\sin(1,041016y)t^4.$
0	$0,153362\sin(y)$	$0,153362\sin(y)$
1	$0,056419\sin(y)$	$0,153362\sin(y)-0,123478\sin(1,010101y)$ $+0,047535\sin(1,020302y)-0,011062\sin(1,030607y)$ $+\ 0,001477\sin(1,041016y)$

Табл. 6. $(x,y)\in\Gamma_6,\ \ x=0,9415\pi,\ \ y\in[-0,9415\pi,0,9415\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,182812\sin(y)e^{-t}$	$0,182812\sin(y)-0,153365\sin(1,010101y)t$ $+0,062994\sin(1,020302y)t^2-0,016496\sin(1,030607y)t^3$ $+0,002937\sin(1,041016y)t^4-0,00032\sin(1,05153y)t^5.$
0	$0,182812\sin(y)$	$0,182812\sin(y)$
1	$0,067253\sin(y)$	$0,182812\sin(y)-0,153365\sin(1,010101y)$ $+0,062994\sin(1,020302y)-0,016496\sin(1,030607y)$ $+0,002937\sin(1,041016y)-0,00032\sin(1,05153y).$

Табл. 7. $(x,y)\in\Gamma_7,\ \ x=0,9321\pi,\ \ y\in[-0,9321\pi,0,9321\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,211806\sin(y)e^{-t}$	$0,211806\sin(y)-0,182815\sin(1,010101y)t$ $+0,078241\sin(1,020302y)t^2-0,02186\sin(1,030607y)t^3$ $+0,00438\sin(1,041016y)t^4-0,000637\sin(1,05153y)t^5$ $+0,000059\sin(1,062151y)t^6.$
0	$0,211806\sin(y)$	$0,211806\sin(y)$
1	$0,077919\sin(y)$	$0,211806\sin(y)-0,182815\sin(1,010101y)$ $+0,078241\sin(1,020302y)-0,02186\sin(1,030607y)$ $+0,00438\sin(1,041016y)-0,000637\sin(1,05153y)$ $+0,000059\sin(1,062151y).$

Табл. 8. $(x,y) \in \Gamma_8$, $x = 0,9227\pi$, $y \in [-0,9227\pi, 0,9227\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,240329\sin(y)e^{-t}$	$0,240329\sin(y) - 0,211809\sin(1,010101y)t$ $+0,093265\sin(1,020302y)t^2 - 0,02715\sin(1,030607y)t^3$ $+0,005805\sin(1,041016y)t^4 - 0,000949\sin(1,05153y)t^5$ $+0,000117\sin(1,062151y)t^6 - 0,00001\sin(1,072879y)t^7.$
0	$0,240329\sin(y)$	$0,240329\sin(y)$
1	$0,088412\sin(y)$	$0,240329\sin(y) - 0,211809\sin(1,010101y)$ $+0,093265\sin(1,020302y) - 0,02715\sin(1,030607y)$ $+0,005805\sin(1,041016y) - 0,000949\sin(1,05153y)$ $+0,000117\sin(1,062151y) - 0,00001\sin(1,072879y).$

Табл. 9. $(x,y) \in \Gamma_9$, $x = 0,9135\pi$, $y \in [-0,9135\pi, 0,9135\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,268363\sin(y)e^{-t}$	$0,268363\sin(y) - 0,240332\sin(1,010101y)t$ $+0,108056\sin(1,020302y)t^2 - 0,032364\sin(1,030607y)t^3$ $+0,00721\sin(1,041016y)t^4 - 0,001258\sin(1,05153y)t^5$ $+0,000175\sin(1,062151y)t^6 - 0,000019\sin(1,072879y)t^7$ $+0,000001\sin(1,083715y)t^8.$
0	$0,268363\sin(y)$	$0,268363\sin(y)$
1	$0,098725\sin(y)$	$0,268363\sin(y) - 0,240332\sin(1,010101y)$ $+0,108056\sin(1,020302y) - 0,032364\sin(1,030607y)$ $+0,00721\sin(1,041016y) - 0,001258\sin(1,05153y)$ $+0,000175\sin(1,062151y) - 0,000019\sin(1,072879y)$ $+0,000001\sin(1,083715y).$

Табл. 10. $(x,y) \in \Gamma_{10}$, $x = 0,9044\pi$, $y \in [-0,9044\pi, 0,9044\pi]$.

время	точное решение	приближенное решение
t	$0,295895\sin(y)e^{-t}$	$0,295895\sin(y) - 0,268366\sin(1,010101y)t$ $+0,122607\sin(1,020302y)t^2 - 0,037497\sin(1,030607y)t^3$ $+0,008594\sin(1,041016y)t^4 - 0,001563\sin(1,05153y)t^5$ $+0,000232\sin(1,062151y)t^6 - 0,000028\sin(1,072879y)t^7$ $+0,000003\sin(1,083715y)t^8 - 0,0000002\sin(1,0946602y)t^9.$
0	$0,295895\sin(y)$	$0,295895\sin(y)$
1	$0,108854\sin(y)$	$0,295895\sin(y) - 0,268366\sin(1,010101y)$ $+0,122607\sin(1,020302y) - 0,037497\sin(1,030607y)$ $+0,008594\sin(1,041016y) - 0,001563\sin(1,05153y)$ $+0,000232\sin(1,062151y) - 0,000028\sin(1,072879y)$ $+0,000003\sin(1,083715y) - 0,0000002\sin(1,0946602y).$

3. Некоторые обобщения

Предложенный выше метод решения уравнений в частных производных достаточно универсален. Он без каких-либо значимых изменений распространяется на область D, принадлежащую пространству $\mathbb{R}^n$ при любом $n \geq 2$. Также метод применим к уравнению, полученному из (1.1) заменой в левой части производной $\frac{\partial u}{\partial t}$ линейным дифференциальным оператором первого порядка

$$\mathcal{L}_t u = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{P}u,$$

где $\mathcal{P}$ — некоторая функция, определенная на $D \times \mathbb{R}_+$. Также может рассматриваться и линейный дифференциальный оператор более высокого порядка. Кроме того, вместо начального условия (1.2) можно рассматривать краевое условие.

Для сокращения записи по-прежнему полагаем область D плоской. Рассмотрим краевую задачу вида

$$\mathcal{L}_t u = f\big(t, x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\big), \quad t \in [0,1], \quad (x,y) \in D, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{A}u(x,y,0) + \mathcal{B}u(x,y,1) = \vartheta(x,y), \quad (x,y) \in D, \tag{3.2}$$

$$u\big|_{(x,y)\in\Gamma_0} = \varphi_0(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Здесь f, ϑ, φ_0 — заданные непрерывные функции, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — заданные числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля.

Будем предполагать, что при всех $(x,y) \in D$ выполнено неравенство

$$\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\int_0^1 \mathcal{P}(x,y,s)ds} \neq 0,$$

которое необходимо и достаточно для однозначной разрешимости краевой задачи с условием (3.2) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{P}(x,y,t)u = f(x,y,t). \tag{3.4}$$

В этом случае решение задачи (3.4), (3.2) определяется формулой

$$u(t,x,y) = U(t,x,y)\vartheta(x,y) + \int_0^1 G(x,y,t,s) f(x,y,s)ds,$$

где

$$U(t,x,y) = \frac{e^{\int_0^t \mathcal{P}(x,y,s)ds}}{\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\int_0^1 \mathcal{P}(x,y,s)ds}}, \quad G(x,y,t,s) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{A}e^{\int_s^t \mathcal{P}(x,y,s)ds}}{\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\int_0^1 \mathcal{P}(x,y,s)ds}}, & 0 \le s \le t \le 1, \\ -\dfrac{\mathcal{B}e^{\int_s^t \mathcal{P}(x,y,s)ds}}{\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\int_0^1 \mathcal{P}(x,y,s)ds}}, & 0 \le t < s \le 1, \end{cases}$$

это, соответственно, фундаментальное решение однородного уравнения и функция Грина краевой задачи.

Заменим уравнение (3.1) приближенным уравнением

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_t u(M,t) \\ &= f\Big(t, M, u(\Lambda M,t), \frac{\partial u}{\partial x}(\Lambda M,t), \frac{\partial u}{\partial y}(\Lambda M,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Lambda M,t), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Lambda M,t), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\Lambda M,t)\Big), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$u(N,t) = \varphi(N,t), \quad N \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \quad t > 0.$$

Здесь функция φ определена на $(\mathbb{R}^2 \setminus D) \times \mathbb{R}_+$ так, что при любом $t \in \mathbb{R}_+$ она, как функция первого аргумента $\varphi(\cdot, t)$, дважды дифференцируема и $\varphi\big|_{(x,y)\in\Gamma_0} = \varphi_0(t)$. Решение приближенного уравнения (3.5) с краевыми условиями (3.2), (3.3) определяется при любом $t \in [0,1]$ последовательно на каждом множестве $\mathfrak{D}_n = D_{n-1} \setminus D_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ следующими соотношениями. Положим $u_0(M,t) = \varphi(M,t)$, $M \in \mathbb{R}^2 \setminus D_0$, $t > 0$, и обозначим через $u_n(M,t)$ решение задачи (1.4), (1.2), (1.3) при $M \in \mathfrak{D}_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ $t > 0$. Тогда решение при $M \in \mathfrak{D}_{n+1}$, $t > 0$ будет определяться формулой

$$\begin{aligned} u_{n+1}(M,t) &= U(M,t)\vartheta(M) + \int_0^t G(M,t,s) \\ &\cdot f\Big(s, M, u_n(\Lambda M,s), \frac{\partial u_n}{\partial x}(\Lambda M,s), \frac{\partial u_n}{\partial y}(\Lambda M,s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(\Lambda M,s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}(\Lambda M,s), \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}(\Lambda M,s)\Big) ds. \end{aligned}$$

Соответственно, решение $u(M,t)$ в граничных точках $M \in \Gamma_n$ областей D_n, $n = 1, 2, \ldots,$ определяется следующими рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} u(M,t)\big|_{M\in\Gamma_{n+1}} &= U(M,t)\vartheta(M) + \int_0^t G(M,t,s) \\ &\cdot f\Big(s, M, u(\Lambda M,s), \frac{\partial u}{\partial x}(\Lambda M,s), \frac{\partial u}{\partial y}(\Lambda M,s), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Lambda M,s), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\Lambda M,s), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\Lambda M,s)\Big)\big|_{\Lambda M\in\Gamma_n} ds. \end{aligned}$$

References

[1] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981. [V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].

[2] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962. [M. M. Lavrent'ev, *On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Academy of Sciences Publ., Novosibirsk, 1962 (In Russian)].

[3] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Методы приближенного решения уравнений в частных производных*, ОНТИ НКТП СССР, Главная редакция общетехнической литературы, Ленинград–Москва, 1936. [L. V. Kantorovich, V. I. Krylov, *Methods of Approximate Solution of Partial Differential Equations*, ONTI NKTP USSR, Main editorial board of general technical literature, Leningrad–Moscow, 1936 (In Russian)].

[4] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[5] M. Joachimiak, "Choice of the regularization parameter for the Cauchy problem for the Laplace equation", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **30**:10 (2020), 4475–4492.

[6] Е. Б. Ланеев, А. В. Климишин, "О приближенном решении некорректно поставленной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области с однородными условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра", *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:146 (2024), 164–175. [E. B. Laneev, A. V. Klimishin, "On an approximate solution to an ill-posed mixed boundary value problem for the Laplace equation in a cylindrical domain with homogeneous conditions of the second kind on the lateral surface of the cylinder", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 164–175 (In Russian)].

[7] В. Вазов, Дж. Форсайт, *Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных*, Издательство иностранной литературы, М., 1963. [V. Vazov, J. Forsythe, *Difference Methods for Solving Partial Differential Equations*, Foreign Literature Publishing House, Moscow, 1963 (In Russian)].

[8] А. В. Родионов, “Некоторые теоретико-числовые методы решения дифференциальных уравнений в частных производных”, *Чебышевский сб.*, **22**:3 (2021), 256–297. [A. V. Rodionov, “Some number-theoretic methods for solving partial derivatives”, *Chebyshevskii Sb.*, **22**:3 (2021), 256–297 (In Russian)].

[9] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*, Высшая школа, М., 1970. [N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[10] В. В. Провоторов, М. А. Рыбаков, “Решение начально-краевой задачи в символьном виде”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:142 (2023), 203–212. [V. V. Provotorov, M. A. Rybakov, “Solution of the initial boundary value problem in symbolic form”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 203–212 (In Russian)].

[11] Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, “Численные методы решения эволюционных функционально-дифференциальных уравнений”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **17**:5 (2012), 1352–1359. [T. V. Zhukovskaya, E. A. Molokanova, “Numerical methods for solution of evolutionary functional differential equations”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **17**:5 (2012), 1352–1359 (In Russian)].

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследлвания»; профессор кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Рыбаков Михаил Анатольевич, старший преподаватель кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: mixail08101987@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8152-8357

Трофимова Анна Сергеевна, аспирант, кафедра функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: anna.trofimova.24.01.99@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-2747-8675

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Evgeny S. Zhukovsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Scientific and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”; Professor of Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Mikhail A. Rybakov, Senior Lecturer Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: mixail08101987@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8152-8357

Anna S. Trofimova, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: anna.trofimova.24.01.99@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-2747-8675

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Рыбаков Михаил Анатольевич
E-mail: mixail08101987@mail.ru

Corresponding author:
Mikhail A. Rybakov
E-mail: mixail08101987@mail.ru

Поступила в редакцию 28.05.2024 г.
Поступила после рецензирования 02.09.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Received 28.05.2024
Reviewed 02.09.2024
Accepted for press 13.09.2024

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-268-295

УДК 517.929, 517.977

Введение в теорию позиционных дифференциальных игр систем с последействием (на основе методологии i-гладкого анализа)

Аркадий Владимирович КИМ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

Аннотация. Хотя основы теории позиционных дифференциальных игр систем с последействием, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ), были разработаны еще в 70-х годах XX столетия Н. Н. Красовским, Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским, тем не менее, до сих пор нет работ, которые, аналогично [Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, 457 с.] (далее по тексту [КС]), представляли бы «завершенную» теорию позиционных дифференциальных игр с последействием.

В статье представлен подход конструктивного перенесения на системы с последействием всех результатов книги [КС]. Этот подход позволяет изложить теорию позиционных дифференциальных игр систем с последействием в такой же конструктивной и завершенной форме, как и для конечномерного случая в [КС]. Подход основан на методологии i-гладкого анализа. Получаемые в рамках такого подхода результаты теории позиционных дифференциальных игр систем с последействием полностью аналогичны соответствующим результатам конечномерной теории Красовского–Субботина.

Ключевые слова: дифференциальные игры, функционально-дифференциальные уравнения, i-гладкий анализ

Для цитирования: *Ким А.В.* Введение в теорию позиционных дифференциальных игр систем с последействием (на основе методологии i-гладкого анализа) // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 268–295.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-268-295

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-268-295

Introduction to the theory of positional differentional games of systems with aftereffect (based on the i-smooth analisys methodology)

Arkady V. KIM
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Abstract. Although the foundations of the theory of positional differential games of systems with aftereffect described by functional differential equations (FDE) were developed back in the 1970s by N. N. Krasovsky, Yu. S. Osipov and A. V. Kryazhimsky, there are still no works that, similar to [N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin. Positional Differential Games. Moscow: Nauka, 1974, 457 p.] (hereinafter referred to as [KS]), would represent a "complete" theory of positional differential games with aftereffect.

The paper presents an approach to constructively transferring all the results of the book [KS] to systems with aftereffect. This approach allows us to present the theory of positional differential games of systems with aftereffect in the same constructive and complete form as for the finite-dimensional case in [KS]. The approach is based on the methodology of i-smooth analysis. The obtained results of the theory of positional differential games of systems with aftereffect are completely analogous to the corresponding results of the finite-dimensional Krasovsky–Subbotin theory.

Keywords: differential games, functional differential equations, i-smooth analysis

Mathematics Subject Classification: 49N70, 34K35, 34K05.

For citation: Kim A.V. Introduction to the theory of positional differentional games of systems with aftereffect (based on the i-smooth analisys methodology). *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 268–295. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-268-295 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория позиционных дифференциальных игр [1, 2] представляет собой завершенную теорию построения конструктивных позиционных алгоритмов управления конечномерными системами в условиях конфликта и неопределенности. Основы теории позиционных дифференциальных игр систем с последействием

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t+s), u, v), \quad -\tau \leq s < 0, \tag{0.1}$$

описываемых функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ), разработаны Н. Н. Красовским, Ю. С. Осиповым и А. В. Кряжимским в работах [3–6], в которых для систем с последействием получены аналоги ключевых результатов конечномерной теории позиционных дифференциальных игр [1]. Современные результаты и тенденции развития теории позиционных дифференциальных систем с последействием представлены в статьях [7–13], специальные задачи теории ФДУ дифференциальных игр исследованы и решены в [14–17] (см. также библиографию этих работ).

Однако до сих пор нет работ, которые бы в «замкнутой» форме излагали теорию позиционных дифференциальных игр систем с последействием. Отсутствие таких обобщающих работ, по-видимому, связано с тем, что в рамках обоснованного в [3–6] подхода не были разработаны такие важные для теории разделы, как «Динамическое программирование», «Программные конструкции», «Априори стабильные мосты», «Корректность дифференциальных игр с последействием», «Стабилизация решений дифференциальных игр с последействием», «Смешанные стратегии в дифференциальных играх с последействием», «Эффективные мосты для смешанных стратегий в системах с последействием», «Стохастическое позиционное управление системами с последействием», «Минимаксная дифференциальная игра с последействием», «Информационная игровая задача», «Дифференциальные игры с запаздыванием и запоминанием информации». Некоторые аспекты отмеченных направлений (разделов), естественно, так или иначе, затрагивались в работах различных авторов, однако не были развиты с такой же полнотой, как в конечномерном случае [1]. Только игровые конструкции, основанные на методологии динамического программирования, достаточно полной развиты и представлены в завершенной форме в работах [7–9].

Методология i-гладкого анализа, основывается на:

1) концепции разделения конечномерных и бесконечномерных составляющих в структуре и свойствах функционалов и ФДУ;

2) применении инвариантной производной и соответствующих конструкций.

Автор рассматривал дифференциальные игры систем с последействием как первую область применения i-гладкого анализа. Однако автор «отложил» (в начале 1980-х гг.) исследования в этом направлении по совету А. В. Кряжимского, считавшего что i-гладкий анализ был в начальной стадии разработки, дифференциальными играми занимался не очень широкий круг специалистов, и было целесообразно продемонстрировать сначала эффективность i-гладкого анализа на «более привычных» всем областях теории ФДУ, а затем уже «браться» за дифференциальные игры. К идее изложения теории позиционных дифференциальных игр систем с последействием на основе методологии i-гладкого анализа автор решил вернуться сейчас, когда на основе i-гладкого анализа разработаны — с такой же полнотой и конструктивностью, как и в конечномерном (ОДУ) случае, разделы ФДУ: метод функционалов Ляпунова–Красовского, метод динамического программирования, численные методы, теория АКОР — аналитического конструирования оптимальных регуляторов, и дифференциальные игры входят в число приоритетных математических направлений исследований РАН до 2030 года.

Применяемый в настоящей статье подход позволяет конструктивно перенести на системы с запаздыванием все результаты теории [1]. При этом, если запаздывание «исчезает», то результаты и формулы статьи «переходят» (совпадают) в соответствующие результаты и формулы книги [1]. Поэтому статья имеет структуру и нумерацию формул соответствующих разделов первой главы книги [1]. Автор также придерживался методики изложения, применяемой в [1], в частности, если стандартные («легко восстанавливаемые») доказательства некоторых утверждений не включены в книгу [1], то и в настоящей статье доказательства аналогичных (соответствующих) утверждений оставляются читателю в качестве несложных упражнений, позволяющих «прочувствовать» (понять) используемые конструкции.

1. Стратегии и движения

В дальнейшем будем использовать условную запись [18, 19] системы (0.1)

$$\dot{x} = f(t, x, y(\cdot), u, v) \tag{1.1}$$

и предполагать отображение $f(t, x, y(\cdot), u, v)$ инвариантно непрерывным, а управления во всей области определения стесненными геометрическими ограничениями

$$u \in P, \quad v \in G$$

(P и G — замкнутые множества, характеризующие возможности игроков). Здесь и далее в статье используются понятия и обозначения из [18, 19].

Стратегия U первого игрока отождествляется с отображениями $u(t, h) : [t_0, \vartheta] \times H \to P$. Соотношение между стратегией U и ее отображением $u(t, h)$ обозначается символом $U \doteq u(t, h)$. Пусть дана начальная позиция $\{t_*, h_*\}$ и выбрана стратегия $U \doteq u(t, h)$. Покроем полуось $t_* \leq t < \infty$ системой Δ полуинтервалов $\eta_i \leq t \leq \eta_{(i+1)}$ $(i = 0, 1, \ldots,$ $\eta_0 = t_*)$. Пусть далее $v[t] \in Q$ $(t \geq t_0)$ — какая-то кусочно-непрерывная функция v, развертывающаяся во времени t на основании тех или иных соображений, которыми захочет воспользоваться противник. Ломаной Эйлера $x^\Delta[t] = x^\Delta[t, t_*, h_*, U, v]$ называется абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x_t^\Delta, u(\eta_i, x_{\eta_i}^\Delta), v(t)) \quad \big(\eta_i \leq t < \eta_{(i+1)}, \;\; i = 0, 1, \ldots\big), \tag{1.2}$$

удовлетворяющее начальному условию $x_{t_*}^\Delta = h_*$, для которого равенство (1.2) выполняется при почти всех значениях t из интервала существования. Существование такого решения устанавливается известными теоремами анализа (см. [21, с. 120]). Если при всех возможных значениях аргументов t, h, u и v выполняется неравенство

$$\|f(t, h, u, v)\| \leq k(1 + \|h\|_H), \quad k = const, \tag{1.3}$$

то при любом выборе $\{t_*, h_*\}$, U, Δ и $v[t]$ существует решение $x^\Delta(t, t_*, h_*, U, v[\cdot])$, продолжимое на всю полуось $[t_*, \infty)$. Всюду в дальнейшем, если не будет оговорено противное, будем предполагать условие (1.3) выполненным.

Движением $x[t,t_*,h_*,U]$, порожденным из позиции $\{t_*,h_*\}$ стратегией $U \doteq u(t,x,y(\cdot))$, будем называть всякую функцию $x[t]$, для которой на всяком отрезке $t_* \leq t \leq \vartheta$ найдется последовательность ломаных $x^{\Delta^{(k)}}[t,t_*,h^{(k)},U,v^{(k)}]$, равномерно сходящаяся к $x[t]$ на отрезке $t_* \leq t \leq \vartheta$ при условиях $\lim \sup\limits_i(\eta_{i+1}^{(k)} - \eta_i^{(k)}) = 0$, когда $k \to \infty$. Отметим, что, как и в конечномерном случае [1], стратегия U, при фиксированной начальной позиции $\{t_*,h_*\}$, порождает, вообще говоря, не одно движение $x[t,t_*,h_*,U]$, а целое множество таких движений в соответствии с многообразием последовательностей реализаций $v^{(k)}[t]$, $\Delta^{(k)}$, $h^{(k)}$, которые могут случиться при построении ломаных Эйлера $x^{\Delta^{(k)}}[t,t_*,h^{(k)},U,v^{(k)}[\cdot]]$, определяющих $x[t]$. От движения $x[t]$ не требуется, чтобы оно было решением дифференциального уравнения $\dot{x} = f(t,x,y(\cdot),v[t])$, которое можно получить из уравнения (1.1), подставляя вместо u функционал $u(t,x,y(\cdot))$, а вместо v — какую-либо подходящую функцию $v[t]$. Движение $x[t]$ просто определяется как предельная функция для какой-нибудь подходящей последовательности ломаных Эйлера $x^{\Delta^{(k)}}[t]$.

Лемма 1.1. *Выберем произвольную стратегию $U(t,h)$. Зафиксируем некоторую ограниченную область Ω в пространстве позиций $\{t,h\}$ и число ϑ. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всяком выборе позиции $\{t_*,h_*\} \in \Omega$* ($t_* \leq \vartheta$) для всякой ломаной Эйлера $x^{\Delta}[t,t_*,h_*,U,v[\cdot]]$ (1.2), удовлетворяющей условию $\|\eta_{i+1} - \eta_i\| \leq \delta$ ($i = 0,1,\dots$), найдется по крайней мере одно движение $x[t] = x[t,t_*,h_*,U]$, такое, что

$$\|x[t] - x^{\Delta}\| \leq \varepsilon, \quad t_* \leq t \leq \vartheta. \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу условия (1.3) любая последовательность ломанных Эйлера $\{x^{\Delta^{(j)}}[t,t_*,h^{(j)},U,v^{(j)}[\cdot]]\}$ ($j = 1,2,\dots$), где $\lim \sup\limits_i(\eta_{i+1}^{(j)} - \eta_i^{(j)}) = 0$, $\lim h^{(i)} = h_*$ при $j \to \infty$, образует на всяком конечном отрезке $[t_*,\vartheta]$ множество равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций. Отсюда, на основании известных теорем функционального анализа (см. [18, с. 100]) вытекает возможность выбора из последовательности $x^{\Delta^{(j)}}[t]$ подпоследовательности $\{x^{\Delta^{(j_k)}}[t]\}$ ($k = 1,2,\dots$), которая будет сходиться равномерно на каждом конечном отрезке $[t_*,\vartheta]$ к некоторой функции $x[t]$. Эта функция $x[t]$ и явится движением $x[t,t_*,h_*,U]$. При этом условие (1.4) очевидным образом следует из равномерной сходимости. □

Таким образом, мы видим, что при всяком выборе $\{t_*,h_*\}$ и $U \div u(t,h)$ будет существовать по крайней мере одно движение $x[t,t_*,h_*,U]$, продолжимое на всю полуось $t_* \leq t < \infty$. В то же время данное абстрактное определение стратегии U и движения $x[t]$ допускает разумный переход к реализуемым на практике процедурам управления. Этот переход осуществляется обращением к ломаным Эйлера $x^{\Delta}[t]$ (1.2), ибо, как следует из леммы 1.1, эти ломаные хорошо аппроксимируют движения $x[t]$.

Аналогичным образом определяется класс стратегий $V \div v(t,h)$ второго игрока и порождаемые этими стратегиями движения $x[t,t_*,h_*,V]$. Пусть выбрана пара стратегий $U \div u(t,h)$ и $V \div v(t,h)$, и реализации управления $v[t]$ в уравнении (1.2) строятся по закону $v[t] = v[\eta_j]$, где $\{\eta_j\}$ — какое-либо разбиение полуоси $t_* < t < \infty$, избранное вторым игроком. Тогда уравнение (1.2) будет определять также и ломаные Эйлера $x^{\Delta^*}[t] = x^{\Delta^*}[t,t_*,h_*,V,u[\cdot]]$ для второго игрока, для которых первый игрок выбирает реализации своего управления u по закону $u[t] = u[\eta_i] = u(\eta_i, x^{\Delta}_{\eta_i})$. Обозначим символом $x[t,t_*,h_*,U,V]$ любую непрерывную функцию $x[t]$ ($t_* < t < \infty$), которая на всяком конечном отрезке $[t_*, \vartheta]$ является равномерным пределом для некоторой подходящей последовательности таких ломаных Эйлера $x^{\Delta^{(k)}}[t] = x^{\Delta^{*(k)}}[t]$ при условии, что, $\lim\sup_i(\eta_{i+1}^{(k)} - \eta_i^{(k)}) = 0$, $\lim\sup_i(\eta^{*(k)}{}_{i+1} - \eta^{*(k)}{}_i) = 0$ при $k \to \infty$.

В силу того, что состоянием системы с последействием мы считаем конечномерный вектор [1] $x[t] \in R^n$, многие свойства движений системы (1.1) аналогичны свойствам движений конечномерных систем [1]. В частности, справедливо следующее утверждение, которое, как и в [1], приводится без доказательства.

Лемма 1.2. *Каковы бы ни были позиция $\{t_*, h_*\}$ и пара стратегий $\{U, V\}$, множество движений $x[t, t_*, h_*, U]$ содержит все движения $x[t, t_*, U, V]$, и множество движений $x[t, t_*, h_*, V]$ также содержит все движения $x[t, t_*, U, V]$.*

2. Свойства движений

Зафиксируем начальную позицию $\{t_0, h_0\}$ и остановимся на какой-то стратегии U. Тогда можно построить *пучок* всех возможных движений $x[t, t_0, h_0, V]$ ($t_0 \le t < \infty$), которые получаются как пределы при переборе всех возможных сходящихся последовательностей $x^{\Delta^{(k)}}[t, t_0, h^k, U, v^{(k)}[\cdot]]$, причем перебор всех возможных реализаций $v^{(k)}[\cdot] = \{v^{(k)}[t], t_0 \le t < \infty\}$ отражает всевозможные действия противника. Таким образом, множество всех движений $x[t, t_0, h_0, U]$ при данных $\{t_0, h_0\}$ и U отражает в нашей формализации всевозможные реализации $x[t]$ процесса, стесненные только условием $v \in G$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть Ξ — некоторая ограниченная область в пространстве позиций $\{t, h\}$, и фиксировано число ϑ. Тогда множество всех движений $x[t, t_0, h_0, U]$, отвечающих всем всевозможным стратегиям U и начальным позициям $\{t_0, h_0\} \in \Xi$, $t_0 \le \vartheta$, образует совокупность равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций $x[t]$.*

Под расстоянием $\rho(x[\cdot], z[\cdot])_{[t_0,\vartheta]}$ между двумя непрерывными вектор-функциями $x[t]$ и $z[t]$, определенными на отрезке $[t_0, \vartheta]$, будем понимать их расстояние в метрике пространства $C[t_0, \vartheta]$, т. е. величину

$$\rho(x[\cdot], z[\cdot])_{[t_0,\vartheta]} = \max_{t_0 \le t \le \vartheta} \|x[t] - z[t]\|.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. *На всяком отрезке $[t_0, \vartheta]$ пучок всех движений $x[t, t_0, h_0, U]$ при всяком выборе $[t_0, \vartheta]$ и U образует замкнутое множество в метрике пространства $C[t_0, \vartheta]$.*

Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает, что пучок всех движений $x[t, t_0, h_0, U]$ ($t_0 \le t \le \vartheta$) образует в пространстве $C[t_0, \vartheta]$ компактное в себе множество. Следуя общепринятой терминологии [2, с. 222], некоторый функционал $\mathfrak{x}(z)$ параметра z, значения которого суть множества $\mathfrak{x} = \{p\}_z$, состоящие из элементов p метрического пространства $\tilde{P}$, полунепрерывен

[1] Напомним, что в рамках нашего подхода мы различаем фазовое состояние — фазовый вектор $x[t]$, характеризующий текущее («физическое») состояния системы, и фазовую позицию $x_t = \{x(t); x(t+\cdot)\} = \{x(t+s), -\tau \le s < 0\}$, определяющую (с учетом запаздывания) дальнейшую динамику (движение) системы с последействием.

сверху по включению в точке $z = z_*$ (в метрике $\tilde{P}$), если для всякой последовательности $\{z^{(k)}\}$, сходящейся в метрике пространства $\{z\}$ к точке z_*, и любой сходящейся в метрике $\tilde{P}$ последовательности

$$P^{(k)} \in \{p\}_{z^{(k)}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

предельная точка $p_* = \lim\limits_{k\to\infty} p^{(k)}$ будет удовлетворять условию $p_* \in \{p\}_{z_*}$. В таких ситуациях принято именовать полунепрерывными сами множества $\mathfrak{x}(z)$. Если помимо интересующего нас аргумента (здесь z), множества $\mathfrak{x}(z)$ зависят от других параметров, то, там где это требуется, указывается, относительно какого аргумента имеет место полунепрерывность.

Обозначим пучок всех движений $x[t, t_0, h_0, U]$ ($t_0 \le t \le \vartheta$), отвечающих выбранной стратегии U и некоторой начальной позиции $\{t_0, h_0\}$ символом $\mathfrak{X}(h_0)$, так как будем далее менять только параметр h_0. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.3. *При всяком выборе t_0, $\vartheta \ge t_0$ и U пучки $\mathfrak{X}(h_0)$ полунепрерывны сверху по включению в каждой точке $h_0 = h_*$ (относительно параметра h_0) и в метрике $C[t_0, \vartheta]$. При этом для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое, что при условии*

$$\|h_0 - h_*\|_H \le \delta$$

для всякого движения $x[\cdot] \in X(h_0)$ найдется хотя бы одно движение $x_*[\cdot] \in X(h_*)$, удовлетворяющее условию

$$\rho(x[\cdot], x_*[\cdot])_{[t_0,\vartheta]} < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим противное, что лемма 2.3 неверна. Тогда при некотором выборе t_0, $\vartheta \ge t_0$ и U найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательность движений $x^{(k)}[t]$ ($t_0 \le t \le \vartheta$, $k = 1, 2, \dots$) такие, что $\lim x^{(k)}_{t_0} = h_*$ при $k \to \infty$. Но в пучке $\mathfrak{X}(h_*)$ всякое движение $x[t] = x[t, t_0, h_*, U]$ будет удовлетворять условию

$$\rho(x[\cdot], x^{(k)}[\cdot])_{[t_0,\vartheta]} \ge \varepsilon \tag{2.1}$$

при всяком значении k. В то же время множество $\{x^{(k)}[\cdot]\}$ ($k = 1, 2, \dots$), согласно лемме 2.1, состоит из равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций $x^{(k)}[t] = x[t, t_0, x^{(k)}_t, U]$ ($t_0 \le t \le \vartheta$), поэтому из последовательности $\{x^{(k)}[\cdot]\}$ можно выбрать подпоследовательность $x^{(k_j)}[\cdot]$, равномерно сходящуюся к некоторой функции $x^*[\cdot]$, так, что

$$\rho\left(x^*[\cdot], x^{(k_j)}[\cdot]\right) < \varepsilon \tag{2.2}$$

при всех достаточно больших значениях j. Однако, опираясь на определение движений $x^{(k_j)}[\cdot]$, нетрудно построить последовательность ломаных Эйлера $x^{\Delta^j}[t]$ ($t_0 \le t \le \vartheta$), которая также будет сходиться равномерно к функции $x^*[t]$ ($t_0 \le t \le \vartheta$). Стало быть, опять по определению движения $x[t, t_0, h_*, U]$ функция $x^*[t]$ будет таким движением на отрезке $[t_0, \vartheta]$. Но в таком случае условия (2.1) и (2.2) оказываются противоречивыми. Полученное противоречие доказывает лемму 2.3. □

Лемма 2.3 утверждает, что при приближении точки h_0 к точке h_* все движения пучка $\mathfrak{X}(h_0)$ равномерно приближаются к совокупности движений, составляющих пучок $\mathfrak{X}(h_*)$. Наряду с определенными выше конструктивными идеальными движениями $x[t, t_0, h_0, U]$, получаемыми предельным переходом от ломаных Эйлера, удобно рассматривать во вспомогательных построениях некоторые обобщенные идеальные движения $x(t, t_0, h_0, U)$, которые определяются следующим образом. Зафиксируем некоторую позицию $\{t_*, h_*\}$ и выберем какую-то стратегию $U \div u(t, h)$. Выберем число $\delta > 0$ и построим множество $F_v^{(\delta)}(t_*, h_*, U)$, которое является выпуклой замкнутой оболочкой совокупности всех векторов f вида

$$f = f(t, h, u, v), \quad u = u(t, h), \quad v \in Q,$$

$$\|\{t, h\} - \{t_*, h_*\}\|_H = \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{*i})^2 + \sum_{-\tau \le s < 0}(y_i(s) - y_{*_i})^2 + (t - t_*)^2\Big)^{1/2} \le \delta. \tag{2.3}$$

Такие выпуклые замкнутые оболочки $\widetilde{F}$ какого-либо множества векторов f будем обозначать символом $\widetilde{F} = co\{f\}$. Итак,

$$F_v^{(\delta)}(t_*, h_*, U) = co\big[f : f = f(t, h, u, v),\ u = u(t, h),\ v \in Q,\ \|\{t, h\} - \{t_*, h_*\}\|_H \le \delta\big].$$

При всяком выборе позиции $\{t, h\}$, стратегии U и числа $\delta > 0$ множество $F_v^{(\delta)}(t, h, U)$ оказывается ограниченным. Кроме того, очевидно, справедливо вложение

$$F_v^{(\delta_1)}(t_*, h_*, U) \subset F_v^{(\delta_2)}(t_*, h_*, U)$$

при $\delta_1 \le \delta_2$. Далее можно построить множества

$$\widetilde{F}_v(t_*, h_*, U) = \bigcap_{\delta > 0} F_v^{(\delta)}(t_*, h_*, U),$$

являющиеся, стало быть, пересечениями множеств $F_v^{(\delta)}$ ($\delta > 0$). Из построения множеств $F_v^{(\delta)}$ вытекает, что множества $\widetilde{F}_v(t, h, U)$ ограничены, выпуклы, замкнуты и содержат в себе выпуклую оболочку множества всех векторов $f(t, h, u(t, h), u, v) \in Q$. Более того, можно проверить, что множества $F_v(t, h, U)$, отвечающие одной и той же стратегии $U \div u(t, h)$, оказываются полунепрерывными сверху по включению в каждой позиции $\{t_*, h_*\}$ (относительно позиции $\{t, h\}$ и в евклидовой метрике пространства $\{f\}$). Именно, какой бы ни была стратегия U и какой бы ни была позиция $\{t_*, h_*\}$, для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при выполнении условия (2.3) множество $\widetilde{F}_v(t, h, U)$ такое, что при выполнении условия (2.3) множество $\widetilde{F}(t, h, U)$ будет содержаться в евклидовой ε-окрестности множества $\widetilde{F}_v(t_*, h_*, U)$.

Рассмотрим *дифференциальное уравнение в контингенциях*

$$\dot{x} \in \widetilde{F}_v(t_*, h_*, U). \tag{2.4}$$

Его решением $x(t) = x(t, t_0, h_0, U)$ называется всякая абсолютно непрерывная функция $x(t)$, которая удовлетворяет начальному условию $x_{t_0} = h_0$ и производная которой при почти всех значений $t \ge t_0$ удовлетворяет включению

$$\dot{x} \in \widetilde{F}_v(t_*, x_t, U).$$

Так как множества $\widetilde{F}_v(t_*, x_t, U)$ при всяком выборе стратегии U во всякой возможной позиции $\{t, h\}$ ограничены, выпуклы и замкнуты, при изменении позиции меняются полунепрерывно сверху по включению и, кроме того, согласно (1.3), удовлетворяют условию

$$\|f\| \le \kappa(1 + \|x_t\|_H) \quad \text{при} \quad f \in F_v(t, h, U),$$

то уравнение (2.4) при всяком выборе стратегии U и начальной позиции $\{t_0, h_0\}$ имеет решения $x(t, t_0, h_0, U)$, продолжимые для всех значений $t \geq t_0$. Эти решения будем называть идеальными *обобщенными* движениями $x(t)$ системы (1.1).

Аналогичным образом с переменой ролями символов u и v определяются идеальные обобщенные движения $x(t) = x(t, t_0, h_0, V)$, которые являются решениями дифференциального уравнения в контингенциях

$$\dot{x} \in \widetilde{F}_u(t_*, h_*, U),$$

аналогичного уравнению (2.4).

Между идеальными *конструктивными* движениями $x[t, t_0, h_0, U]$, которые получаются предельным переходом от ломаных Эйлера (1.2), и идеальными обобщенными движениями $x(t, t_0, h_0, U)$, которые определены как решения дифференциальных уравнений в контингенциях (2.4), существует такая же связь, как и в конечномерном случае [1]. Оказывается, что при всяком выборе стратегии U и начальной позиции $\{t_0, h_0\}$ всякое конструктивное движение $x[t, t_0, h_0, U]$ ($t \geq t_0$) является одновременно обобщенным движением $x(t, t_0, h_0, U)$ ($t \geq t_0$). Иначе говоря, пучок всех конструктивных движений

$$\mathfrak{X}_K(t_0, h_0, \vartheta, U) = [x[\cdot] : x[t] = x[t, t_0, h_0, U],\ t_0 \leq t \leq \vartheta]$$

обязательно содержится в соответствующем пучке всех обобщенных движений

$$\mathfrak{X}_0(t_0, h_0, \vartheta, U) = [x[\cdot] : x(t) = x(t, t_0, h_0, U),\ t_0 \leq t \leq \vartheta].$$

Таким образом, имеем

$$\mathfrak{X}_K(t_0, h_0, \vartheta, U) \subset X_0(t_0, h_0, \vartheta, U).$$

Аналогичным образом справедливо включение

$$\mathfrak{X}_K(t_0, h_0, \vartheta, V) \subset X_0(t_0, h_0, \vartheta, V).$$

3. Постановка задачи

После определения стратегий и движений мы можем перейти к формализованной постановке игровых задач. Будем предполагать, что в пространстве «точечных» состояний $\{t, x\}$ заданы множества M и N и задан функционал

$$\gamma = \varphi(x[t],\ t_0 \leq t \leq \eta), \tag{3.1}$$

который должен минимизироваться первым игроком и максимизироваться вторым. Ограничимся сначала функционалом φ (3.1). К более общему случаю

$$\gamma = \varphi(x[t], u[t], v[t],\ t_0 \leq t \leq \eta) \tag{3.2}$$

обратимся позднее. Начальную позицию $\{t_0, h_0\}$ будем полагать выбранной произвольно в пределах ее допустимых значений, но будем полагать ее затем зафиксированной. Множество M удобно предполагать замкнутым, а функционал φ — имеющим смысл на непрерывных функциях $x[t]$. Рассматриваемая задача сближения состоит в приведении конечномерного фазового вектора $x(t)$ (характеризующего физическое состояние системы) на целевое множество M. Будем сначала считать союзником первого игрока и сформулируем задачу для него.

Задача 3.1. *Требуется найти стратегию* $U^0 \div u^0(t,h)$, *которая обеспечивает встречу*

$$\{\eta, x[\eta]\} \in M, \tag{3.3}$$

$$\{t, x[t]\} \notin M, \quad \{t, x[t]\} \in N, \quad t_0 \le t \le \eta, \tag{3.4}$$

для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, h_0, U]$.

Обратим внимание на то, что момент η, фигурирующий в условиях задачи, не является, вообще говоря, заданным априори, но получает для всякого движения $x[t]$ свое значение (3.3). Стратегию $U \div u^0(t,h)$, разрешающую задачу 3.1, будем называть *оптимальной минимаксной* стратегией.

Будем считать союзником второго игрока и сформулируем задачу для него.

Задача 3.2. *Требуется найти стратегию* $V^0 \div v^0(t,h)$, *которая исключает встречу* (3.3) *для всякого движения* $x[t] = x[t, t_0, h_0, V^0]$.

Совокупность двух задач 3.1 и 3.2 будем именовать *игрой*. Игра в нашей формализации складывается из двух *задач*.

4. Игра сближения–уклонения

Изучение задач 3.1 и 3.2, поставленных в предыдущем параграфе, мы начнем с одного частного случая, который будем именовать в дальнейшем игрой сближения-уклонения. Эта игра будет складываться из следующих двух задач. Множество N, фигурирующее в задаче 3.1, равно как и множество M из этой задачи, будем полагать замкнутыми множествами в пространстве R^n, т. е. конечномерными множествами. Однако, учитывая бесконечномерность систем с последействием и эффективность функциональных методов, целесообразно решать рассматриваемую задачу в функциональной постановке. Для применения функционального подхода, целевое множество и фазовые ограничения будем рассматривать в виде $M_c = \{\varphi(\cdot) \in C[-\tau, 0] : \varphi(0) \in M\}$ и $N_c = \{\varphi(\cdot) \in C[-\tau, 0] : \varphi(0) \in N\}$, соответственно. Так как из условия $x_t = \{x(t), x(t+\cdot)\} \in M$ ($x_t = \{x(t), x(t+\cdot) \in N_c$) следует, что $x(t) \in M$ ($x(t) \in N$), то, решив формулируемые ниже задачи, мы фактически решаем и задачи 3.1 и 3.2 из предыдущего раздела.

Таким образом, далее рассматриваем следующие задачи.

Задача 4.1. *Требуется найти стратегию* $U_c \div u_c(t,h)$, *которая обеспечивает встречу*

$$\{\eta, x_\eta\} \in M_c, \quad \{t, x_t\} \notin M_c, \quad \{t, x_t\} \in N_c, \quad t_0 \le t \le \eta, \tag{4.1}$$

для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, h_0, U]$.

Будем обозначать символами $\mathrm{H}(N_c)$ и $\Omega(M_c)$ некоторые окрестности замкнутых множеств N_c и M_c в пространстве позиций $\{t,h\}$. Иначе говоря, $\mathrm{H}(N_c)$ и $\Omega(M_c)$ суть некоторые открытые множества в пространстве позиций $\{t,h\}$, содержащие N_c и M_c соответственно.

Задача 4.2. *Требуется найти какие-либо окрестности* $\mathrm{H}(N_c)$ *и* $\Omega(M_c)$ *и стратегию* $V_c \div v_c(t,h)$, *которая исключает встречу*

$$\{\eta, x_\eta\} \in \Omega(M_c), \quad \{t, x_t\} \in \mathrm{H}(N_c), \quad t_0 \le t < \eta, \tag{4.2}$$

для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, h_0, V_c]$.

В частности, нас будут особенно интересовать случаи задач 4.1 и 4.2, когда множество M_c будет обрываться на некоторой гиперплоскости $t = \vartheta$, т. е. когда это множество M_c будет лежать целиком в области $t \le \vartheta$. В таких случаях мы будем говорить о задаче 4.1 сближения *к моменту* ϑ. О стратегии U_c, разрешающей тогда задачу 4.1, будем говорить, что она гарантирует сближение позиции $\{t, x_t\}$ с M_c внутри N_c к моменту ϑ, а о стратегии V_c, разрешающей задачу 4.2, будем говорить, что она гарантирует уклонение позиции $\{t, x_t\}$ от $\Omega(M_c)$ внутри $\mathrm{H}(N_c)$ вплоть до момента ϑ.

5. Несколько важных замечаний

В следующем параграфе аналогично конечномерному случаю будет введено понятие стабильного моста. Для систем с последействием мосты удобно строить в пространстве $C[-\tau, 0]$, так как это пространство является банаховым. В силу свойства сглаживания решений ФДУ, для любого решения $x(t) = x[t, t_0, h_0, U, v]$ справедливо включение $x_t \in C[-\tau, 0]$ при $t \ge t_0 + \tau$. Поэтому, не нарушая общности, в дальнейшем можно предполагать $\vartheta - t_0 \ge \tau$, что обеспечивает включение $x_t \in C[-\tau, 0]$. Случай $\vartheta - t_0 < \tau$ можно считать «вырожденным», так как тогда задача становится фактически конечномерной. Например, рассмотрим дифференциально-разностную игру

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u, v) \tag{5.1}$$

при условии $\vartheta - t_0 < \tau$. Подставляя функцию $y^0(\cdot) = y^0(s)$, $-\tau \le s < 0$ из начального условия $(t_0,\ h_0 = \{x^0, y^0(\cdot)\})$ в правую часть уравнения (5.1) (так как $x(t-\tau) = y^0(t)$, $t_0 \le t \le \vartheta < t_0 + \tau$), получаем конечномерную дифференциальную игру на интервале $[t_0, \vartheta]$ для обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t), y^0(t-\tau), u, v)$ при $t_0 \le t \le \vartheta < t_0 + \tau$.

6. Стабильный мост

Для решения задачи 4.1 о сближении достаточно построить некоторое множество W_u, называемое *мостом*, которое обладало бы следующими свойствами:

1-u) мост W_u содержит начальную позицию $\{t_0, h_0\}$;

2-u) в какой-то момент $\vartheta \ge t_0$ мост W_u обрывается на M_c, т. е. сечение $W_u(\vartheta)$ моста W_u гиперплоскостью $t = \vartheta$ содержится в M_c;

3-u) мост W_u содержится целиком в N_c;

4-u) существует некоторая стратегия $U_c \div u_c(t, h)$, которая удерживает всякое движение $x[t, t_*, h_*, U_c]$ ($t > t_*$) при любом выборе начальных условий $t_* \le \vartheta$, $\{t_*, h_*\} \in W_u$ на мосту W_u вплоть до встречи с M_c.

Стратегия U, удовлетворяющая условию 4-u, обозначается U_c, так как она решает задачу 4.1 и гарантирует сближение состояния $\{t, x_t\}$ с M_c к моменту ϑ. Для решения задачи 4.2 об уклонении достаточно построить мост W_v, который обладал бы следующими свойствами:

1-v) мост W_v содержит начальную позицию $\{t_0, h_0\}$;

2-v) мост W_v не пересекается с M_c;

3-v) существует некоторая стратегия $V_c \div v_c(t, h)$, которая удерживает всякое движение $x[t] = x[t, t_*, h_*, V_c]$ при $\{t_*, h_*\} \in W_v$ на мосту W_v вплоть до выхода позиции $\{t, x_t\}$ из области N_c.

Стратегия V, удовлетворяющая условию 3-v для задачи 4.2, обозначается V_c, так как она решает задачу 4.2. Важным свойством, которым могут обладать мосты, является *стабильность*. В дальнейшем будем предполагать, что отображение $f(t,h,u,v)$ в правой части уравнений движения (1.1) в каждой ограниченной области Ω пространства $\{t,h\}$ удовлетворяет условию Липшица по h, т. е.

$$\|f(t,h^{(1)},u,v)-f(t,h^{(2)},u,v)\| \leq \|h^{(1)}-h^{(2)}\|_H$$

при всех $\{t,h^{(1)}\}$ и $\{t,h^{(2)}\}$ из Ω и при всех $u\in P$, $v\in G$.

Обратимся сначала к задаче 4.1 о сближении. Пусть W — некоторое множество в пространстве $\{t,h\}\in[t_0,\vartheta]\times C[-\tau,0]$. Выберем какую-нибудь позицию $\{t,h\}$. Предположим на время, что второй игрок на некоторый будущий интервал времени $t_*\leq t<t^*$ выбрал некоторое управление $V\div v(t)=v_*$, характеризуемое постоянным вектором $v_*\in Q$. Рассмотрим обобщенные движения $x(t)$, $x_{t_*}=h_*$, которые, согласно материалу из раздела 2., являются решениями $x(t)=x[t,t_*,h_*,V]$ следующего дифференциального уравнения в контингенциях:

$$\dot{x}(t)\in\widetilde{F}_u(t,x_t,v_*), \tag{6.1}$$

где

$$\widetilde{F}_u(t,x_t,v_*)=co[f:f=f(t,h,u,v_*),\,u\in P].$$

Множество W является u-стабильным, если при всяком выборе позиции $\{t_*,h_*\}\in W$, значения $t^*>t_*$ и вектора $v_*\in Q$ среди решений $x(t)$ уравнения (6.1) найдется по крайней мере одно решение, удовлетворяющее условию

$$\{t^*,x_{t^*}\}\in W \text{ или } \{\eta^*,x_{\eta^*}\}\in M_c$$

при каком-то значении $\eta^*\in[t_*,t^*]$.

Обратимся теперь к задаче 4.2 об уклонении. Пусть опять W — некоторое множество в пространстве позиций $\{t,h\}$ и $\{t_*,h_*\}\in W$. Пусть первый игрок выбрал на некоторый будущий полуинтервал времени $t_*\leq t<t^*$ некоторое управление $U\div u(t)$, характеризуемое постоянным вектором $u_*\in P$. Рассмотрим обобщенные движения $x(t,t_*,h_*,U)$, т. е. решения $x(t)$ ($x_{t_*}=h_*$) следующего дифференциального уравнения в контингенциях:

$$\dot{x}(t)\in\widetilde{F}_v(t,x_t,u_*), \tag{6.2}$$

где

$$\widetilde{F}_v(t,x_t,u_*)=co[f:f=f(t,h,u_*,v),\,v\in Q].$$

Множество W является v-стабильным, если при всяком выборе позиции $\{t_*,h_*\}\in W$, $t^*>t_*$ и $u_*\in P$ среди решений $x(t)$ уравнения (6.2) найдется по крайней мере одно решение, удовлетворяющее условию

$$\{t^*,x_{t^*}\}\in W \quad \text{или} \quad \{\eta^*,h_{\eta^*}\}\notin N_c$$

при каком-то $\eta^*\in[t_*,t^*]$.

7. Маленькая игра

Зафиксируем какую-нибудь позицию $\{t_*, h_*\}$ и вектор s_*. Составим скалярное произведение $s'_* f(t_*, h_*, u, v) = \xi$ (верхний штрих — транспонирование).

Задача 7.1. *Требуется найти вектор* $u^* \in P$, *который удовлетворяет условию*

$$\max_{v\in Q} s'_* f(t_*, h_*, u^*, v) = \min_{u\in P} \max_{v\in Q} s'_* f(t_*, h_*, u, v) = \xi^0. \tag{7.1}$$

Задача 7.2. *Требуется найти вектор* $v^* \in Q$, *который удовлетворяет условию*

$$\min_{u\in P} s'_* f(t_*, h_*, u, v^*) = \max_{v\in Q} \min_{u\in P} s'_* f(t_*, h_*, u, v) = \xi_0. \tag{7.2}$$

Эти две задачи составляют *маленькую игру* в позиции $\{t_*, h_*\}$ по вектору s_*. Вектор u^*, разрешающий задачу (7.1), называется *минимаксным* вектором маленькой игры (в позиции $\{t_*, h_*\}$ по вектору s_*), вектор v^*, разрешающий задачу (7.2), называется *максиминным* вектором маленькой игры (в позиции $\{t_*, h_*\}$ по вектору s_*).

Если окажется, что в некоторой позиции $\{t, h\}$ при некотором выборе вектора s для маленькой игры выполняется равенство $\xi^0 = \xi_0$, т. е. равенство

$$\min_{u\in P} \max_{v\in Q} s' f(t, h, u, v) = \max_{v\in Q} \min_{u\in P} s' f(t, h, u, v),$$

то, следуя обычной терминологии, будем говорить, что эта игра имеет седловую точку, для которой, стало быть, справедливы неравенства

$$s' f(t, h, u^*, v) \le s' f(t, h, u^*, v^*) \le s' f(t, h, u, v^*). \tag{7.3}$$

Заметим, что условие седловой точки (7.3) обязательно выполняется во всякой позиции $\{t, h\}$ и при всяком выборе s, если отображение $f(t, h, u, v)$ в правой части уравнения (1.1) имеет вид суммы

$$f(t, h, u, v) = f^{(1)}(t, h, u) + f^{(2)}(t, h, v).$$

Как и в конечномерном случае условие (7.3) имеет следующий геометрический смысл. Скалярное произведение $s'_* f(t_*, h_*, u, v)$ в позиции $\{t_*, h_*\}$ при выбранном векторе s_* и при фиксированных постоянных u и v с точностью до членов высшего порядка малости по Δt характеризует сдвиг $\Delta\, l(u, v)$, который достигается вдоль решения уравнения (1.1) в направлении вектора s_* за время $\Delta\, t$, ибо $\Delta\, l = \frac{s'_* \Delta t}{\|s'_*\|} + o(\Delta t)$. Таким образом, условие (7.3) означает, что в позиции $\{t_*, h_*\}$ при данном выборе вектора s_* игра на минимакс-максимин по $u \in P$ и $v \in G$ для сдвига $\Delta\, l_{(u,v)}$ в направлении вектора s_* за время $\Delta\, t$ вдоль решений уравнения (1.1) с точностью до высшего порядка малости относительно Δt имеет седловую точку $\{u^*, v^*\}$, и при отклонении значения u от u^* при сохранении $v = v^*$ этот сдвиг в линейном приближении по $\Delta\, t$ может только увеличиться, а при отклонении значения v от v^* при сохранении $u = u^*$ этот сдвиг в линейном приближении по $\Delta\, t$ может только уменьшиться.

8. Экстремальная стратегия

Пусть W — какое-нибудь множество в пространстве позиций $\{t, h\}$. Построим стратегию $U \div u^e(t,h)$, которую будем называть экстремальной к этому множеству. Функционал $u^e(t,h)$, определяющий эту стратегию, задается следующим образом. Пусть $\{t_*, h_*\}$ — какая-то позиция ($h_* = \{x_*, y_*(\cdot)\}$). Если гиперплоскость $\Gamma_{t_*} = [\{t,h\} : t = t_*]$ не пересекается с множеством W, то в качестве $u^e(t_*, h_*)$ можно выбрать любой вектор $u \in P$. Если же гиперплоскость Γ_{t_*} пересекается с W, то надлежит выбрать позицию $\{t_*, w_*\} \in W$, ($w_* = \{x_{w_*}\}, y_{w_*}(\cdot)$), ближайшую к позиции $\{t_*, h_*\}$ (таких ближайших позиций $\{t_*, w_*\}$ может быть не одна, тогда выбираем любую из них). Теперь в качестве $u^e(t_*, h_*)$ следует выбрать любой из минимаксных векторов u^* для маленькой игры (7.1) в позиции $\{t_*, h_*\}$ по вектору $s_* = x_* - x_{w_*}$. Иначе говоря, в качестве $u^e(t_*, h_*)$ следует выбрать вектор u^e, удовлетворяющий условию минимакса

$$\max_{v \in Q}(x_* - w_*)' f(t_*, h_*, u^e, v) = \min_{u \in P}\max_{v \in G}(x_* - x_{w_*}) f(t_*, h_*, u, v). \tag{8.1}$$

Геометрический смысл условия (8.1) таков. Будем обозначать символом $W(t_*)$ сечение множества W гиперплоскостью $\Gamma_{(t_*)}$, т. е.

$$W(t_*) = [\{t,h\} : t = t_*,\ \{t_*, h\} \in W]. \tag{8.2}$$

При построении отрезка $\eta_i \le t \le \eta_{i+1}$ ломаной Эйлера $x^\Delta[t] = x^\Delta[t, t_0, h_0, U^e, v[\cdot]]$ (1.2) от некоторой реализовавшейся позиции $\{\eta_i, x^\Delta_{\eta_i}\} = \{t_*, \overline{h_*}\}$, для которой фазовое состояние $\{\eta_i, x^\Delta_{\eta_i}\}$ не лежит на W, условие (8.1) направляет скорость $\dot{x}^\Delta[t_*] = f(t_*, h_*, u^e[t_*], v[t_*])$ фазового вектора $x^\Delta[t]$ в этой позиции $\{t_*, h_*\}$ так, чтобы обеспечить предельно большой возможный сдвиг вдоль ломаной $x^\Delta[t]$ в направлении к сечению $W(t_*)$ множества W при самом упорном сопротивлении $v = v[t_*] \in G$ этому со стороны противника — второго игрока.

Аналогичным образом определяется стратегия $V^e \div v^e(t,h)$, экстремальная к множеству W. При этом условие (8.1) заменяется на условие максимина

$$\min_{u \in P}(w_* - x_*)' f(t_*, h_*, v^e) = \max_{v \in G}\min_{u \in P}(x_{w_*} - x_*)' f(t_*, h_*, u, v), \tag{8.3}$$

которое назначает в качестве $v^e(t_*, h_*)$ максиминный вектор v_* для маленькой игры (7.2) в позиции $\{t_*, h_*\}$ по вектору $s_* = x_{w_*} - x_*$. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в условии (8.1) величина u^e определяется из условия минимакса скалярного произведения $s' f(t,h,u,v)$, а в условии (8.2) величина v^e определяется из условия максимина скалярного произведения $s' f(t_*, h_*, u, v)$. Однако вектор $s_* = x_{w_*} - w_*$, фигурирующий в маленькой игре (8.1), противоположен вектору $s_* = x_{w_*} - x_*$, который фигурирует в маленькой игре (8.3). Поэтому получается, что оба условия (8.1) и (8.3) имеют один и тот же геометрический смысл. И в случае стратегии $V^e \div v^e(t,h)$ при построении отрезка $\eta_j \le t \le \eta_{j+1}$ ломаной Эйлера $x^\Delta[t] = x^\Delta[t, t_0, h_0, V^e, u[\cdot]]$ от некоторой реализовавшейся позиции $\{\eta_i, x^\Delta_{\eta_i}\} = \{t_*, \overline{h_*}\}$, которая не лежит на W, условие (8.3) направляет скорость $\dot{x}^\Delta[t_*] = f(t_*, h_*, u[t_*], v^*(t_*, h_*))$ фазового вектора $x^\Delta[t]$ в этой позиции $\{t_*, \overline{h_*}\}$ так, чтобы обеспечить предельно большой возможный сдвиг вдоль ломаной Эйлера $x^\Delta[t]$ снова в направлении к сечению $W(t_*)$ множества W при самом упорном сопротивлении $u = u[t_*] \in P$ этому со стороны противника — первого игрока.

9. Оценка

Получим оценку, которая будет используется при доказательстве барьерных свойств экстремальных стратегий. Рассмотрим два движения $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}(t)$ $(t \geq t_*)$. Первое движение удовлетворяет уравнению

$$x^{(1)}[t] = f(t, x_t^{(1)}[t], u^*, v[t]), \tag{9.1}$$

где $v[t] \in G$ — какая-то интегрируемая по Лебегу реализация управления второго игрока. Второе движение удовлетворяет уравнению в контингенциях (6.1), т. е. уравнению

$$\dot{x}^{(2)}(t) \in F_u(t, x^{(2)}(t), v^*). \tag{9.2}$$

Предполагается, что эти оба движения удовлетворяют некоторым начальным условиям $x_{t_*}^{(1)} = h_*^{(1)}$, $x_{t_*}^{(2)} = h_*^{(2)}$, а постоянные векторы $u^* \in P$ и $v^* \in G$ выбраны из условий

$$\max_{v \in Q} s'_* f(t_*, h_*^{(1)}, u^*, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} s'_* f(t_*, h_*^{(1)}, u, v) \tag{9.3}$$

$$\min_{u \in P} s'_* f(t_*, h_*^{(1)}, u, v^*) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'_* f(t_*, h_*^{(1)}, u, v), \tag{9.4}$$

где $s_* = x_*^{(1)} - x_*^{(2)}$. Таким образом, u^* есть минимаксный вектор для маленькой игры (7.1) в позиции $\{t_*, h_*^{(1)}\}$ при $s_* = x_*^{(1)} - x_*^{(2)}$, а v^* — максиминный вектор для маленькой игры (7.2) в позиции $\{t_*, h_*^{(1)}\}$ также при $s_* = x_*^{(1)} - x_*^{(2)}$.

Обозначим через $\rho(t)$ расстояние в $C[-\tau, 0]$ между точками (позициями) $x_t^{(1)}$ и $x_t^{(2)}$, т. е.

$$\rho(t) = \|x_t^{(1)} - x_t^{(2)}\|_C. \tag{9.5}$$

Справедлива следующая оценка

$$\rho^2(t_* + \delta) \leq \rho^2(t_*)(1 + \beta\delta) + \delta\,\varphi(\delta) \quad (0 \leq \delta \leq T), \tag{9.6}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi(\delta) = 0, \tag{9.7}$$

равномерная для всех позиций $\{t_*, h_*^{(1)}\}$ и $\{t_*, h_*^{(2)}\}$ из каждой наперед выбранной ограниченной области Ω пространства позиций $\{t, h\}$.

Докажем оценку (9.6). Решения уравнений (9.1) и (9.2) — движения $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}[t]$ являются абсолютно непрерывными функциями. Поэтому при почти всех $t \geq t_*$ функция $\rho^2(t)$ для функции (9.5) имеет производную, которая определяется по формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} = 2(x^{(1)}[t] - x^{(2)}[t])'(f^{(1)}[t] - f^{(2)}(t)), \tag{9.8}$$

где

$$f^{(1)}[t] = \dot{x}^{(1)}[t] = f(t, x_t^{(1)}, u^*, v[t]), \quad f^{(2)}(t) = \dot{x}^{(2)}(t) \in F_u(t, x^{(2)}(t), v^*).$$

В ограниченной области, содержащей рассматриваемые движения, справедливы оценки

$$\|f^{(1)}[t]\| \leq \kappa, \|f^{(2)}(t)\| \leq \kappa,$$

$$\|x_t^{(1)} - h_*^{(1)}\| \leq \kappa(t - t_*), \|x_t^{(2)} - h_*^{(2)}\| \leq \kappa(t - t_*),$$

где κ — некоторое достаточно большое число. Поэтому соотношение (9.8) можно преобразовать к следующему неравенству

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \leq 2s'_*(f^{(1)}[t] - f^{(2)}(t)) + 8\kappa^2(t - t_*) \quad (s_* = x_*^{(1)} - x_*^{(2)}). \tag{9.9}$$

Оценим величину

$$\xi = s'_*(f^{(1)}[t] - f^{(2)}(t)). \tag{9.10}$$

По теореме Каратеодори вектор $f^{(2)}(t)$, который содержится в выпуклой оболочке $F_u(t, x_t^{(2)}, v^*) = co[f : f = f(t, x_t^{(2)}, u, v^*),\ u \in P]$, можно представить в виде

$$\begin{gathered} f^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} f(t, x_t^{(2)}, u_t^{(i)}, v^*), \\ \alpha_t^{(i)} \geq 0, \quad u_t^{(i)} \in P, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} = 1. \end{gathered} \tag{9.11}$$

Учитывая, что отображение $f(t, h, u, v)$ инвариантно непрерывно по t и липшицево по h, соотношение (9.11) можно переписать следующим образом

$$f^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} f(t_*, h_*^{(1)}, u_t^{(i)}, v^*) + \Delta f^{(2)}(t) \Delta f^{(2)}(t) \leq \varphi^*(t - t_*) + \lambda \|s_*\|.$$

Здесь λ — постоянная Липшица по h отображения f в рассматриваемой области, а $\varphi^*(\delta)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi^*(\delta) = 0. \tag{9.12}$$

Поскольку вектор $f^{(1)}[t]$ также можно представить в виде

$$f^{(1)}[t] = f(t_*, h_*^{(1)}, u^*, v[t]) + \Delta f^{(1)}[t] \|\Delta f^{(1)}[t]\| \leq \varphi^*(t - t_*), \tag{9.13}$$

то для величины (9.10) получаем оценку

$$s'_*(f^{(1)}[t] - f^{(2)}[t]) \leq s'_*[f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v[t])] - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} f(t_*, x_t^{(1)}, u_t^{(i)}, v^*)] + 2\|s_*\| \varphi^*(t - t_*) + \lambda \|s_*\|^2. \tag{9.14}$$

Замечаем теперь, что по определению векторов u^* (9.3) и v^* (9.4) в силу предполагаемого нами условия (7.3) имеем неравенство

$$s'_* f(t_*, h_i^{(1)}, u^*, v[t]) \leq s'_* f(t_*, h_t^{(i)}, u_t^{(i)}, v^*) \ \ (i = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

Умножая эти неравенства на неотрицательные числа $\alpha_t^{(i)}$ и суммируя по i, получаем

$$s'_*[f(t_*, h_*^{(1)}, u^*, v[t]) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} f(t, h_*^{(1)}, u_t^{(i)}, v^*)] \leq 0. \tag{9.15}$$

Таким образом, из оценок (9.15), (9.14), (9.9) имеем неравенство

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \leq 2\lambda \|s_*\| + 4\|s_*\| \varphi^*(t - t^*) + 8(t - t_*)\kappa^2. \tag{9.16}$$

Учитывая, что $\|s_*\|^2 = \rho^2(t_*)$, а функция $\varphi^*(t-t_*)$ удовлетворяет условию (9.12), интегрированием неравенства (9.16) получаем теперь нужную оценку (9.6), где $\beta = 2\lambda$.

Поменяв местами буквы u и v, получим снова оценку (9.6), но теперь уже для пары движений

$$x^{(1)}[t] = f(t, x_t^{(1)}, u[t], v^*), \quad x_{t_*}^{(1)} = h_*^{(1)},$$
$$x^{(2)}(t) \in F_v(t, x^{(2)}(t), u^*), \quad x_{t_*}^{(2)} = h_*^{(2)}.$$

При этом векторы u^* и v^* снова выбираются как минимаксный и максиминный векторы для маленькой игры (7.1), (7.2) в позиции $\{t, h_*^{(1)}\}$, но теперь уже при выборе вектора $s_* = x_*^{(2)} - x_*^{(1)}$.

10. Экстремальный барьер

В данном разделе будет показано, что стратегия $U^e \div u^e(t,h)$, экстремальная к u-стабильному замкнутому множеству $W \subset C[-\tau, 0]$, сохраняет на W позицию (состояние) $\{t, x_t\}$ ($x(t)$) для всякого находящегося на нем движения $x[t, t_0, h_0, U^e]$ вплоть до встречи позиции с множеством M_c. Точно также будет проверено, что стратегия V^e, экстремальная к v-стабильному замкнутому множеству W, сохраняет на W позицию $\{t, x_t\}$ для всякого начавшегося на нем движения $x[t, t_0, h_0, V^e]$, вплоть до выхода этой позиции из окрестности $\mathfrak{H}(N_c)$, множества N_c. Иначе говоря, мы проверим, что экстремальные стратегии U^e и V^e образуют вокруг стабильных мостов W барьеры, которые препятствуют соскальзыванию с них движений $x[t]$ вплоть до момента, когда будет достигнута цель первого или второго игрока соответственно.

Начнем со случая u-стабильного моста W. Нам надлежит доказать следующее утверждение.

Лемма 10.1. *Пусть замкнутое множество W u-стабильно; $U^e \div u^e(t,h)$ есть стратегия, экстремальная к множеству W, и пусть $\{t_0, h_0\} \in W$. Тогда для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, h_0, U^e]$ вплоть до встречи $\{\eta, x_\eta\} \in M_c$ выполнится включение $\{t, x_t\} \in W$ $(t_0 \le t \le \eta)$. Если для некоторого движения $x[t] = x[t, t_0, h_0, U^e]$ встреча с M_c не наступает вообще, то для такого движения $\{t, x_t\} \in W$ при всех $t \ge t_0$.*

Доказательство. Предположим, что это утверждение неверно и, следовательно, найдется движение $x[t] = x[t, t_0, h_0, U^e]$, для которого позиция $\{t, x_t\}$ покидает W раньше, чем она попадает на M_c. Пусть $t = t_*$ — верхняя грань тех значений t_{**}, для которых $\{t, x_t\} \in W$ при $t_0 \le t \le t_{**}$. Вследствие замкнутости множества W и отрезка выбранного движения $x[t]$ ($t_0 \le t \le t_*$) справедливо включение $\{t_*, x_{t_*}\} \in W$. В то же время, по выбору движения $x[t]$ имеем $\{t_*, x_{t_*}\} \notin M_c$. Стало быть, на выбранном движении $x[t, t_0, h_0, U^e]$ можно указать отрезок $t_* \le t \le t_* + \eta_*$ ($\eta_* > 0$), который лежит на некотором ненулевом расстоянии ρ_* от замкнутого множества M_c. Более того, отрезок $t_* \le t \le t_* + \eta_*$ мы можем полагать еще и настолько малым, что и всякое движение $x(t, t_*, h_*, V)$ ($t_* \le t \le t_* + \eta_*$), являющееся решением уравнения (6.1) в контингенциях, при всяком выборе $V \div v_*$ не будет пересекаться с M_c. Но это, вследствие u-стабильности W, будет означать, что всякое сечение $W(t)$ множества W при $t \in [t_*, t_* + \eta_*]$ не пусто, причем для рассматриваемого движения $x[t]$ расстояние от позиции $\{t, x_t\}$ до множества $W(t)$ при $t_* \le t \le t_* + \eta_*$ будет меньше некоторого числа ξ_*. Рассмотрим ломаные Эйлера $x^{\Delta^{(k)}}[t] = x^{\Delta^{(k)}}[t, t_0, h_0^{(k)}, U^e, v^{(k)}[\cdot]]$ ($k = 1, 2, \dots$) (1.2), дающие при $k \to \infty$ выбранное нами движение $x[t, t_0, h_0, U^e]$.

Покажем, что утверждение леммы будет доказано, если имеет место оценка

$$\varepsilon_k^2 \le [\varepsilon_k^2(t_0) + (1 + (t - t_0))\varphi_k] \exp^{(\beta(t-t_0))}, \quad t_0 \le t \le t_*, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{10.1}$$

Здесь символ $\varepsilon_k(t)$ обозначает расстояние в $C[-\tau, 0]$ от точки $x_t^{\Delta^{(k)}}$ до сечения $W(t)$ множества W; $\varphi_k = \sup_{(i,t)} \varphi(t - \eta_i^{(k)}))$ при $i = 0, 1, \ldots,$ $t \in [\eta_i^{(k)}, \ \eta_{i+1}^{(k)}]$, $\eta_i^{(k)}$ — точки из разбиений $\Delta_i^{(k)}$, $\varphi(\delta)$ и β — величины, определенные в соответствии с оценкой (9.6), где ограниченная область Ω выбрана так, что она содержит все рассматриваемые ниже позиции $\{t, x_t^{\Delta^{(k)}}\}$ (вместе с их ξ_*-окрестностью). Отметим, что величина $\varepsilon_k(t)$ при $t_0 \le t \le t_* + \eta_*$ по выбору момента $t = t_* + \eta_*$ имеет смысл, так как сечения $W(t)$ непусты при $t_0 \le t \le t_* + \eta_*$.

Заметим, что из условия $\{t_0, h_0\} \in W$ вытекает сходимость $\varepsilon_k(t_0) \to 0$ при $k \to \infty$, а из соотношения (9.7) — сходимость $\varphi_k \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому оценка (10.1) приводит к противоречию. В самом деле, оценка (10.1) означает, что функции $\varepsilon_k(t)$ на отрезке $[t, t_* + \eta_*]$ сходятся к нулю при $k \to \infty$, т. е. при $k \to \infty$ все позиции $\{t, x_t^{\Delta^{(k)}}\}$ ($t_0 \le t \le t_* + \eta_*$) сходятся к замкнутому множеству W. В то же время все эти позиции при $k \to \infty$ сходятся к позициям $\{t, x_t\}$. А это возможно лишь при условии $\{t, x_t\} \in W$ ($t_0 \le t \le t_* + \eta_*$). Выполнение этого включения при $t > t_*$ противоречит выбору движения $x[t]$ и момента t_*. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы, если выполнена оценка (10.1).

Таким образом, для полного доказательства леммы 10.1 остается проверить оценку (10.1). Рассмотрим предварительно некоторые свойства функции $\varepsilon = \varepsilon(t)$, где величина $\varepsilon(t)$ есть расстояние от позиции $\{t, x_t^{\Delta}\}$ до сечения $W(t)$ множества W, $x^{\Delta}[t]$ — некоторая ломаная Эйлера (1.2). Покажем, что на отрезке $[t_0, t_* + \eta_*]$, где величина $\varepsilon(t)$ имеет смысл, функция ε полунепрерывна снизу и непрерывна справа.

Итак, пусть последовательность точек t_i ($i = 1, 2, \ldots$) сходится к точке $\widehat{t} \in [t_0, t_* + \eta_*]$, а значения $\varepsilon(t_i)$, сходятся при $i \to \infty$ к числу ε_k. Требуется показать, что $\varepsilon(\widehat{t}) \le \varepsilon$. Действительно, по определению величины $\varepsilon(t)$ имеем

$$\varepsilon(t_i) = \|x_{t_i}^{\Delta^{(k)}} - w_i\|_H,$$

где $\{t_i, w_i\}$ — некоторые подходящие позиции из W. В силу замкнутости W всякая предельная точка $\{\widehat{t}, w_*\}$ последовательности $\{t_i, w_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots$) содержится в W, поэтому

$$\varepsilon(t_i) = \|x_{t_i}^{\Delta^{(k)}} - w_i\| \to \varepsilon_* = \|x_t^{\Delta^{(k)}} - w_*\| \ge \varepsilon(\widehat{t}).$$

Полунепрерывность снизу функции ε доказана.

Пусть теперь $\widehat{t} \in [t_0, t_* + \vartheta_*)$ и $t_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ — некоторая последовательность точек, сходящаяся к $(\widehat{t})$ справа. Пусть $\varepsilon(\hat{t}) = \|x_{(\hat{t})}^{\Delta^{(k)}} - w_*\|_H$, где $\{\widehat{t}, w_*\} \in W$. Воспользуемся свойством u-стабильности множества W, из которого вытекает существование позиций $\{t_i, w_i\}$ принадлежащих W ($i = 1, 2, \ldots$) на каких-то обобщенных движениях $x(t, \widehat{t}, w_*, V \doteq v^*)$ и поэтому удовлетворяющих условию $\|w_i - w_*\|_H \to 0$ при $i \to \infty$, т. е. при $t_i \to \widehat{t} + 0$. Имеем следующие соотношения

$$\varepsilon(t_i) \le \|x_t^{\Delta^{(k)}} - w_i\|_H + \|x_{\hat{t}}^{\Delta^{(k)}} - w_*\|_H + \|w_* - w_i\|_H = \varepsilon(\widehat{t}) + \|x_t^{\Delta^{(k)}} - x_{\hat{t}}\|_H \|w_* - w_i\|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $i \to \infty$, получаем, что всякая предельная точка ε_* последовательности $\varepsilon(t_i)$ ($i = 1, 2, \ldots$) удовлетворяет оценке $\varepsilon_* \le \varepsilon(\widehat{t})$. Однако, в силу полунепрерывности снизу функционала ε, справедливо также неравенство $\varepsilon_* \ge \varepsilon(\widehat{t})$. Следовательно, $\varepsilon(t_i) \to \varepsilon(\widehat{t})$ при $i \to \infty$, что и требовалось доказать.

Вернемся к рассмотрению функций $\varepsilon_k(t)$. Для доказательства от противного оценки (10.1) предположим, что эта оценка неверна. Тогда при отдельных значениях k на отрезке $t_0 \le t \le t_* + \eta_*$ будет где-то нарушаться неравенство

$$\varepsilon_k^2(t) \le \psi_k(t) = [\varepsilon_k^2(t_0) + (1 + (1 - t_0))\varphi_k] \exp(\beta(t - t_0)). \tag{10.2}$$

Итак, пусть для функции ε_k оценка (10.2) нарушается. Обозначим через $t_{(k)}$ нижнюю грань чисел $t \in [t_0, t_* + \eta_*]$, для которых справедливо неравенство $\varepsilon_k^2(t) > \psi_k(t)$. Поскольку функция ε_k полунепрерывна снизу и непрерывна справа, имеет место следующее равенство $\varepsilon_k^2(t_{(k)}) = \psi_k(t_{(k)})$. Пусть $[\eta_i^{(k)}, \eta_{i+1}^{(k)})$ полуинтервал, содержащий точку $t_{(k)}$. Тогда по определению числа $t_{(k)}$ имеем

$$\varepsilon_k^2(\eta_i^{(k)}) \le \psi_k(\eta_i^{(k)}), \quad \varepsilon_k^2(t^*) > \psi_k(\eta^*), \tag{10.3}$$

где t^* — некоторая точка полуинтервала $[\eta_i^{(k)}, \eta_{i+1}^{(k)}]$, лежащая правее точки $t_{(k)}$. Из неравенств (10.3) по определению функции $\psi(t)$ (10.2) получаем соотношение

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^2(t^*) &> \varepsilon(\eta_i^{(k)}) \exp(\beta(t^* - \eta_i^{(k)})) + (t^* - \eta_i^{(k)})\varphi_k \exp(\beta(t^* - t_0)) \\ &> \varepsilon_k^2(\eta_i^{(k)})(1 + \beta(t^* - \eta_i^{(k)})) + (t^* - \eta_i^{(k)})\varphi_k.\end{aligned} \tag{10.4}$$

Пусть $u_k^{(e)}[t] = u_k^{(e)}[\eta_i^{(k)}]$ — экстремальное управление первого игрока, которое осуществляет движение $x^{\Delta^{(k)}}[t]$ при $t_i^{(k)} \le t < \eta_{(i+1)}^{(k)}$. Напомним, что $u_k^{(e)}[\eta_i^{(k)}]$ — минимаксный вектор, разрешающий маленькую игру (7.1) в позиции $\{\eta_i^{(k)}, x^{\Delta^{(k)}}_{\eta_i^{(k)}}\}$ при $s_* = x^{\Delta^{(k)}}_{\eta_i^{(k)}} - w^{(k)}$, где $w^{(k)}$ — точка сечения $W(\eta_i^{(k)})$, ближайшая к точке $x^{\Delta^{(k)}}_{\eta_i^{(k)}}$, т. е. $\|x^{\Delta^{(k)}}_{\eta_i^{(k)}} - w^{(k)}\| = \varepsilon(\eta_i^{(k)})$. Выберем максиминный вектор $v_*^{(k)}$, разрешающий маленькую игру (7.2) в позиции $\{\eta_i^{(k)}, x^{\Delta^{(k)}}_{\eta_i^{(k)}}\}$ при $s_* = x^{\Delta^{(k)}}_{\eta_i^{(k)}} - w^{(k)}$. Рассмотрим пучок движений $x(t, \eta_i^{(k)}, w^{(k)}, V^{(k)})$ ($V \div v^{(k)}$), являющихся решением соответствующего уравнения в контингенциях (6.1) при $v_* = v^{(k)}$. Поскольку по выбору числа η_* этот пучок не пересекается при $t \le t_* + \eta_*$ с M_c, то в силу u-стабильности моста W в таком пучке найдется по крайней мере одно движение $x(t, \eta(k)_i, w^{(k)}, V^{(k)})$, для которого

$$\{t^*, x_{t^*}(t, \eta_i^{(k)}, w^{(k)}, V^{(k)})\} \in W. \tag{10.5}$$

Поэтому из оценки (9.6) в силу соотношения (10.5) получаем неравенство

$$\varepsilon_k^2(t^*) \le \varepsilon_k^2(\eta_i^{(k)})(1 + \beta(t^* - \eta_i^{(k)})) + (t^* - \eta_i^{(k)})\varphi(t^* - \eta_i^{(k)}). \tag{10.6}$$

Поскольку по определению числа φ_i справедливо неравенство $\varphi(t^* - \eta_i^{(k)}) \le \varphi_k$, то оценка (10.6) противоречит оценке (10.4). Полученное противоречие доказывает оценку (10.1), а с ней — лемму 10.1. □

Перейдем теперь к случаю v-стабильного моста W. В этом случае нам надлежит доказать следующее утверждение.

Лемма 10.2. *Пусть замкнутое множество W v-стабильно, $V^e \doteq v^e(t, h)$ есть стратегия, экстремальная к множеству W, и пусть $\{t_0, h_0\} \in W$. Тогда $\{t, x_t\} \in W$ при $t_0 \le t \le \eta$ для всякого движения $x[t, t_0, h_0, V^e]$ вплоть до момента η, когда $\{\eta, x_\eta\} \notin \mathfrak{H}(M_c)$. Если для некоторого движения $x[t] = x[t, t_0, h_0, V^e]$ все время $\{t, x_t\} \in \mathfrak{H}(N_c)$, то для такого движения $\{t, x_t\} \in W$ при всех $t \ge t_0$.*

Доказательство. Справедливость леммы 10.2 вытекает немедленно из леммы 10.1, если заметить, что, поменяв местами буквы u и v, мы из u-стабильного моста, фигурирующего в лемме 10.1, получим v-стабильный мост W, фигурирующий в лемме 10.2. При этом только роль множества M_c будет теперь играть дополнение к множеству $\mathfrak{H}(N_c)$ до всего пространства позиций $\{t, h\}$. □

Таким образом, в этом параграфе мы установили важные барьерные свойства стратегий $U^e \doteq u^e(t,h)$ и $V^e \doteq v^e(t,h)$, экстремальных соответственно к u-стабильному мосту W или к v-стабильному мосту W.

11. Максимальный стабильный мост

В этом параграфе конструируются предельно широкие стабильные мосты W, которые только могут существовать в задаче сближения к моменту ϑ и в задаче уклонения вплоть до момента ϑ.

Обратимся сначала к задаче сближения с множеством M_c к моменту ϑ. В соответствии с принятым раньше условием множества M_c и N_c будем полагать замкнутыми. Предельно широкий u-стабильный мост W, который удовлетворяет сформулированным в разделе 6. для моста W_u условиям (2-u)–(4-u), строится следующим образом.

При данном фиксированном значении ϑ уберем из пространства $\{t, h\}$ все те позиции $\{t_*, h_*\}$ ($t_* \le \vartheta$), для каждой из которых, как для начальной, разрешима задача об уклонении хотя бы от одной окрестности $\Omega(M_c)$ множества M_c внутри хотя бы одной окрестности $\mathfrak{H}(N_c)$ множества N_c на отрезке $[t_*, \vartheta]$. Выброшенные позиции $\{t_*, h_*\}$ образуют в каждой гиперплоскости $t = t_* = const$ открытое множество. В самом деле, пусть $\{t_*, h_*\}$ — некоторая выброшенная позиция. Стало быть, найдется стратегия $V \doteq v(t,h)$, которая обеспечит уклонение всех движений $x[t, t_*, h_*, V]$ от встречи с $\Omega(M_c)$ внутри $\mathfrak{H}(N_c)$ при $t \le \vartheta$. Но эта же стратегия V для всех движений $x[t, t_*, h_*, V]$ при всяком выборе h_{**} из достаточно малой окрестности $\|h_* - h_{**}\|_H < \delta$ точки h_* обеспечит также уклонение от встречи с некоторой окрестностью $G^*(M_c)$ множества M_c, лежащей со своим замыканием $\overline{G}^*$ в $G(M_c)$, причем это будет уклонение внутри некоторой окрестности $H^*(N_c)$, лежащей со своим замыканием $\overline{H^*}$ в $H(N_c)$ при $t \le \vartheta$. Если бы это было не так, мы могли бы построить сходящуюся последовательность $h^{(k)} \to h_*$ при $k \to \infty$, такую, что некоторые соответствующие движения $x^{(k)}[t] = x[t, t_*, h^{(k)}, V]$ будут удовлетворять условию

$$\{t, x_t^{(k)}\} \in H^*(N_c), \quad t_* \le t \le \eta^{(k)} \le \vartheta, \quad \{\eta^{(k)}, x_{\eta^{(k)}}^{(k)}\} \in G^*(M_c)$$

при $\eta^{(k)} \to \eta \le \vartheta$ и будут притом при $t_* \le t \le \vartheta$ сходиться равномерно к некоторому движению $x[t] = x[t, t_*, h_*, V]$. Но тогда и это предельное движение удовлетворит условию

$$\{\eta, x_\eta\} \in \overline{G^*}(M_c), \quad \{t, x_t\} \in \overline{H^*}(N_c), \quad t_* \le t < \eta \le \vartheta,$$

а это противоречит тому, что стратегия V уклоняет все движения $x[t]$ от встречи с $\Omega(M_c)$ внутри $\mathfrak{H}(N_c)$ при $t_* \le t \le \vartheta$. Полученное противоречие и доказывает, что в каждой гиперплоскости $t = t_* = const$ выброшенные нами позиции образуют открытое множество.

Обозначим символом W^ϑ множество всех оставшихся позиций $\{t, h\}$. Ясно, что всякий стабильный мост W, лежащий целиком в N_c и обрывающийся на M_c при $t = \vartheta$, должен содержаться в W^ϑ. В самом деле, пусть некоторое состояние $\{t_*, h_*\}$ не содержится в W^ϑ. Тогда не может существовать стратегия $U \doteq u(t,h)$, которая обеспечила бы встречу всех движений $x[t, t_*, h_*, U]$ с M_c при $t \le \vartheta$. Но если бы $\{t_*, h_*\} \in W$, где W — какой-то u-стабильный мост, то согласно лемме 10.1 стратегия $U^e \doteq u^e(t, h)$, экстремальная к этому u-стабильному мосту, обеспечивала бы такую встречу.

Важный факт состоит, однако, в том, что все множество W^ϑ и составляет нужный нам максимальный u-стабильный мост W^ϑ. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 11.1. *Множество W^ϑ является замкнутым и составляет максимальный u-стабильный мост W_u^ϑ, лежащий целиком в N_c и обрывающийся на M_c при $t = \vartheta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы, очевидно, достаточно проверить лишь u-стабильность множества W^ϑ. В самом деле, два последние его свойства, утверждаемые леммой 11.1, вытекают очевидным образом из способа его построения. Замкнутость W^ϑ будет следовать из его u-стабильности согласно лемме 10.1, ибо W^ϑ может быть только максимальным стабильным мостом.

Итак, проверим u-стабильность множества W^ϑ. Примем от противного, что таковым оно не является. Тогда найдутся позиция $\{t_*, h_*\} \in W^\vartheta$ ($t_* < \vartheta$), вектор $v_* \in G$ и момент $t^* \in [t_*, \vartheta]$ такие, что все решения $x(t) = x(t, t_*, h_*, V_*)$ уравнения (6.1) при $t \in [t_*, t^*]$ не пересекаются с M_c и образуют замкнутое множество X^* точек $h^* = x_{t^*}$, не пересекающееся с замкнутым сечением $W^\vartheta(t^*)$ множества W^ϑ.

Но по определению множества W^ϑ для всякой точки $h^* \in X^*$ найдется стратегия V^*, которая обеспечит уклонение всех движений $x[t, t^*, h^{**}, V^*]$ от некоторой окрестности $\Omega^*(M_c)$ внутри некоторой окрестности $H^*(N_c)$ на отрезке $[t^*, \vartheta]$ для всех h^{**}, удовлетворяющих условию

$$\|h^* - h^{**}\|_H \le \delta^* \quad (\delta^* > 0). \tag{11.1}$$

Покроем множество X^* конечной системой окрестностей (11.1). Рассмотрим множество W всех позиций $\{t, h\}$, которые удовлетворяют условию

$$t_* \le t \le t^*, \quad x = x(t, t_*, h_*, V_*),$$

или условию

$$t_* \le t \le \eta^*(x[\cdot]), \quad x = x[t, t^*, h^{**}, V].$$

Здесь h^{**} — произвольная точка из какой-либо из окрестностей (11.1) нашего покрытия множества $\mathfrak{B}^*$, $\eta^*(x[\cdot])$ — момент времени, когда точка $\{t, x_t[t^*, h^{**}, V^*]\}$ впервые покидает область $\mathfrak{H}^*(N_c)$. Можно проверить, что замыкание $\overline{W}$ множества W является v-стабильным мостом для некоторой задачи об уклонении на отрезке $[t_*, \vartheta]$ при подходящем выборе $\Omega(M_c)$ и $\mathfrak{H}(N_c)$. Но тогда, согласно лемме 10.2 стратегия $V^e \doteq v^e(t, h)$, экстремальная к $\overline{W}$, обеспечит уклонение всех движений $x[t, t_*, h_*, V^e]$ от $\Omega(M_c)$ внутри $\mathfrak{H}(N_c)$ на отрезке $[t_*, \vartheta]$. Однако, это возможно лишь при условии, что $\{t_*, h_*\} \notin W^\vartheta$. Полученное противоречие с нашим выбором позиции $\{t_*, h_*\}$, удовлетворяющей включению $\{t_*, h_*\} \in W^\vartheta$, доказывает лемму. $\square$

Обратимся теперь к задаче уклонения от $\Omega(M_c)$ внутри $\mathfrak{H}(N_c)$ на отрезке $[t_0, \vartheta]$. Нужный нам максимальный v-стабильный мост W_v^ϑ, который удовлетворяет условиям (2-v) и (3-v), сформулированным в разделе 6. для моста W_v, построим следующим образом.

При данном фиксированном значении ϑ выбросим из пространства $\{t, h\}$ все те позиции $\{t_*, h_*\}$ ($t_* \le \vartheta$), для каждой из которых, как для начальной, разрешима задача о сближении к моменту ϑ с множеством $\overline{\Omega}^*(M_c)$ внутри множества $\mathfrak{H}^*(N_c)$ по крайней мере при одном выборе окрестностей $\Omega^*(M_c)$ и $\mathfrak{H}^*(N_c)$, вложенных вместе со своими замыканиями $\overline{\Omega}^*(M_c)$ и $\overline{\mathfrak{H}}^*(N_c)$ в окрестности $\Omega(M_c)$ и $\mathfrak{H}(N_c)$. Множество всех оставшихся позиций обозначим символом Ω^ϑ. Ясно, что всякий v-стабильный мост W, не пересекающийся с $\Omega(M_c)$, должен содержаться в W^ϑ. Важно, однако, что все множество W^ϑ и составляет нужный нам v-стабильный мост W_v^ϑ. Это утверждение вытекает немедленно из леммы 11.1, если мы заметим, что проведенное только что построение множества W^ϑ имеет тот же характер, что и построение множества W^ϑ в лемме 11.1. При этом только при переходе от множества W^ϑ, построенного сейчас, к множеству W^ϑ, построенному в лемме 11.1, достаточно поменять местами буквы u и v, и перевести на роль множеств M_c и N_c дополнения ко всему пространству до множеств $\mathfrak{H}(N_c)$ и $\Omega(M_c)$, соответственно, причем новое множество M_c следует пополнить гиперплоскостью Γ_ϑ. Таким образом, для построенного сейчас множества W^ϑ справедливо следующее утверждение.

Лемма 11.2. *Множество W^ϑ является замкнутым и составляет максимальный v-стабильный мост W_v^ϑ, не пересекающийся с окрестностью $\Omega(M_c)$.*

12. Альтернатива

В этом разделе мы получим ключевую теорему об альтернативе, которая при условии (7.3) характеризует игру сближения-уклонения в классе чистых стратегий $U \doteq u(t,h)$ и $V \doteq v(t,h)$. Эта теорема, которая является прямым следствием лемм 10.1, 11.1 и определения моста W_u^ϑ, формулируется следующим образом.

Теорема 12.1. *Пусть для всех возможных $\{t,h\}$ и s выполнено условие (7.3), дана начальная позиция $\{t_0,h_0\}$ и выбрано число $\vartheta \geq t_0$. Тогда*

(1) либо найдется стратегия $U_c \doteq u_c(t,h)$, которая для всех движений $x[t] = x[t,t_0,h_0,U_c]$ обеспечит встречу

$$\{\eta, x_\eta\} \in M_c \tag{12.1}$$

внутри N_c при условии $\eta \leq \vartheta$,

(2) либо найдутся число $\varepsilon_\vartheta > 0$ и стратегия $V_c \doteq v_c(t,h)$ такие, что для всех движений $x[t] = x[t,t_0,h_0,V_c]$ будет обеспечено уклонение вплоть до момента ϑ от ε_ϑ-окрестности $M_c^{\varepsilon_\vartheta}$ множества M_c внутри ε_ϑ-окрестности $N_{c\vartheta}^{\varepsilon}$ множества N_c.

Из теоремы 12.1 вытекает, таким образом, что при всяком выборе ϑ все полупространство $t \leq \vartheta$ разбивается на две части W_u^ϑ и $\mathfrak{E}^\vartheta$. Часть W_u^ϑ слагается из всех позиций $\{t,h\}$, для которых как для начальных разрешима задача сближения с M_c внутри N_c к моменту ϑ. Множество W_u^ϑ является множеством открытым и, очевидно, с ростом ϑ это множество W_u^ϑ не уменьшается. Часть $\mathfrak{E}^\vartheta$ слагается из всех позиций $\{t,h\}$, для каждой из которых, как для начальной, разрешима задача уклонения от некоторой ε-окрестности $M_c^{(\varepsilon)}$ множества M_c внутри подходящей ε-окрестности $N_c^{(\varepsilon)}$ множества N_c вплоть до момента ϑ. Множество $\mathfrak{E}^\vartheta$ является множеством открытым в полупространстве $t \leq \vartheta$, и с ростом ϑ его сечение гиперплоскостями $t = const$ не увеличиваются. Множество $\mathfrak{E}^\vartheta$ складывается из множеств $\mathfrak{E}^{[\vartheta,\varepsilon]}$ $(\varepsilon > 0)$, каждое из которых является замкнутым в полупространстве $t \leq \vartheta$ множеством позиций $\{t,h\}$, для которых, как для начальных, разрешима задача уклонения от M_c^ε внутри N_c^ε вплоть до момента ϑ.

Прямым следствием из теоремы 12.1 является следующее утверждение.

Следствие 12.1. *Для всякой начальной позиции* $\{t_0, h_0\}$ *справедливо одно из двух утверждений: либо найдутся число* $\vartheta \geq t_0$ *и стратегия* $U_c \doteq u_c(t,h)$, *которая для всех движений* $x[t] = x[t, t_0, h_0, U_c]$ *обеспечит встречу* (12.1) *внутри* N_c *при условии* $\eta \leq \vartheta$; *либо при всяком* $\vartheta \geq t_0$ *найдутся число* $\varepsilon_\vartheta > 0$ *и стратегия* $V \doteq v_c(t,h)$ *такая, что для всех движений* $x[t] = x[t, t_0, h_0, V_c]$ *будет обеспечено уклонение вплоть до момента* ϑ *от* ε_ϑ*-окрестности* $M_c^{(\varepsilon_\vartheta)}$ *множества* M_c *внутри* ε_ϑ*-окрестности* $N_c^{(\varepsilon_\vartheta)}$ *множества* N_c.

Следствием из теоремы 12.1 и леммы 11.1 является следующая теорема об альтернативе в аппроксимационной форме.

Теорема 12.2. *Пусть для всех* $\{t,h\}$ *и* s *выполнено условие* (7.3) *и дана начальная позиция* $\{t_0, h_0\}$. *Если для этой начальной позиции при некотором значении* ϑ *выполнено утверждение* (1) *теоремы 12.1, то для любого* $\varepsilon > 0$ *можно подобрать* $\delta_\varepsilon > 0$ *так, что для всех ломаных Эйлера* $x^\Delta[t] = x^\Delta[t, t_0, h_0^*, U_c, v[\cdot]]$ *при условиях*

$$\|h_0^* - h_0\|_H \leq \delta_\varepsilon, \quad \sup_i(\eta_{i+1} - \eta_i) = \delta \leq \delta_\varepsilon \tag{12.2}$$

будет обеспечена встреча

$$\{\eta, x_\eta^\Delta\} \in M_c^\varepsilon \tag{12.3}$$

с ε*-окрестностью* M_c^ε *множества* M_c *внутри* ε*-окрестности* N_c^ε *множества* N_c *при условии* $\eta \leq \vartheta$. *Если же для данного начальной позиции* $\{t_0, h_0\}$ *задача сближения с* M_c *внутри* N_c *к моменту* ϑ *не разрешима, то найдется число* $\varepsilon > 0$ *и к нему число* $\delta > 0$ *такие, что для всех ломаных Эйлера* $x^\Delta[t] = x^\Delta[t, t_0, h_0^*, V_c, u[\cdot]]$ *при условиях* (12.2) *встреча* (12.3) *с* M_c^ε *внутри* N_c^ε *будет исключена вплоть до момента* ϑ.

В заключение подчеркнем, что стратегии $U_c \doteq u_c(t,h)$ и $V_c \doteq v_c(t,h)$, о которых идет речь в теоремах 12.1 и 12.2, можно строить как экстремальные стратегии $U^e \doteq u^e(t,h)$ и $V^e \doteq v^e(t,h)$ к соответствующим стабильным максимальным мостам W_u^ϑ и $W_v^{[\vartheta,\varepsilon]}$.

13. Динамическое программирование

Один из путей построения стабильных мостов W_u^ϑ и W_v^ϑ и соответствующих им способов экстремального управления $U_c \doteq u_c(t,h)$ и $V_c \doteq v_c(t,h)$, которые выводят позицию $\{t, x_t\}$ на M_c, или, напротив, отклоняют ее от встречи с M_c, связан с использованием инвариантно гладких функционалов $\varepsilon(t,h)$, играющих роль *потенциала* в соответствии с рецептами динамического программирования.

Поскольку задача 4.2 об уклонении при перемене местами букв u и v превращается в задачу 4.1 о сближении, мы можем ограничиться здесь только задачей 4.1 о сближении с замкнутым множеством M_c внутри замкнутого множества N_c. Переход к аналогичным достаточным критериям, определяющим решение задачи 4.2 об уклонении, получается понятной трансформацией достаточных критериев, определяющих решение задачи 4.1 о сближении.

Итак, пусть мы имеем задачу о сближении с заданным замкнутым множеством M_c внутри заданного замкнутого множества N_c. Предположим, что в области $t \leq \vartheta$ удалось построить функционал $\varepsilon(t, x, y(\cdot))$, удовлетворяющий неравенствам

$$\varepsilon(t, x, y(\cdot)) > c \ \text{при} \ \{t,h\} \notin N_c \tag{13.1}$$

$$\varepsilon(\vartheta, x, y(\cdot)) > c \ \text{ при } \ \{\vartheta, h\} \notin M_c, \tag{13.2}$$

имеющий непрерывные частные и инвариантные производные

$$\frac{\partial\varepsilon(t, x, y(\cdot))}{\partial t}, \quad \frac{\partial\varepsilon(t, x, y(\cdot))}{\partial x_i}, \quad \partial_i\varepsilon(t, x, y(\cdot)) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

в области

$$t < \vartheta, \quad c < \varepsilon(t, x, y(\cdot)) < c + \beta \quad (\beta > 0 - \text{постоянная}), \tag{13.3}$$

и такой, что в области (13.3) выполняется неравенство

$$\min_{u\in P}\max_{v\in G}\left(\frac{\partial\varepsilon(t, x, y(\cdot))}{\partial x} f(t, x, y(\cdot), u, v) + \frac{\partial\varepsilon(t, x, y(\cdot))}{\partial t} + \partial_i\varepsilon(t, x, y(\cdot))\right) \le 0. \tag{13.4}$$

Здесь и в дальнейшем $\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right]$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 13.1. *При условиях* (13.1)–(13.4) *множество* W *позиций* $\{t, h\}$ $(t \le \vartheta)$, *удовлетворяющих условию* $\varepsilon(t, h) \le c$, *образуют* u*-стабильный мост, проходящий внутри* N_c *и обрывающийся на* M_c *при* $t = \vartheta$.

Доказательство. В соответствии с определением u-стабильности для доказательства леммы 13.1 достаточно показать, что при всяком выборе позиции $\{t_*, h_*\}$ ($t_* < \vartheta$, $\varepsilon(t_*, h_*) \le c$), числа $t^* \in [t_*, \vartheta]$ и вектора v^* по крайней мере одно решение $x(t) = x(t, t_*, h_*, V \doteq v^*)$ уравнения в контингенциях (6.1) удовлетворит условию $\{t^*, x_{t^*}\} \in W$, т. е. условию

$$\varepsilon(t^*, x_{t^*}) \le c. \tag{13.5}$$

Искомое решение $x(t, t_*, h_*, V)$ мы построим следующим образом. Наряду с уравнением (6.1) рассмотрим еще одно уравнение в контингенциях

$$\dot{x}^0(t) \in \mathfrak{F}_u^0(t, x_t^0, v^*), \tag{13.6}$$

где для области (13.3) символом $\mathfrak{F}_u^0$ обозначена выпуклая оболочка множества векторов $f(t, h, u, v^*)$, получающегося, когда вектор $u \in P$ пробегает все те значения u^*, при которых выполняется условие

$$\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right]' f(t, h, u^*, v^*) = \min_{u\in P}\left(\left[\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right]' f(t, h, u, v^*)\right). \tag{13.7}$$

Вне области (13.3) полагаем $\mathfrak{F}_u^0 = \mathfrak{F}_u$. Вследствие инвариантной непрерывности частных производных $\partial\varepsilon/\partial x_i$ в области (13.3), множества $\mathfrak{F}_u^0(t, h, v^*)$ оказываются полунепрерывными сверху относительно включения по изменению позиции $\{t, h\}$. Стало быть, для уравнения (13.6) выполняется теорема о существовании решений $x^0(t)$. Кроме того, очевидно справедливо вложение

$$F_u^0(t, h, v^*) \subset F_u(t, h, v^*),$$

и значит всякое решение уравнения (13.6) одновременно является и решением уравнения (6.1).

Теперь остается проверить, что всякое решение $x^0(t) = x^0(t, t_*, h_*, V \doteq v^*)$ уравнения (13.6) удовлетворяет условию (13.5). Проверим это. В предположении противного для какого-то решения $x^0(t) = x^0(t, t_*, h_*)$ условие (13.5) не выполняется. Тогда, вследствие начального условия $\varepsilon(t_*, x^0_{t_*}) \le c$ и инвариантной непрерывности функционала $\varepsilon(t,h)$ и функции $x^0(t)$, мы можем построить такой отрезок $\eta_* \le t \le \eta^*$ ($\eta_* \ge t_*$, $\eta^* \le t^*$) движения $x^0(t) = x^0(t, t_*, h_*, V)$, который при $\eta_* \ge t_*$, $\eta^* < t \le \eta^*$ лежит в области $c < \varepsilon(t,h) < c + \beta$ и притом удовлетворяет условию $\varepsilon(\eta_*, x^0_{\eta_*}) = c$. Отсюда вытекает, что для абсолютно непрерывной функции $\varepsilon^0(t) = \varepsilon(t, x^0_t)$ на интервале (η_*, η^*) должно найтись множество T значений t, имеющее ненулевую меру, на котором будет выполняться неравенство

$$\varepsilon(t)^0 > 0 \text{ при всех } t \in T. \tag{13.8}$$

Однако, вычисляя производную сложной функции $\varepsilon^0(t) = \varepsilon^0(t, x_t)$ по правилу

$$\dot{\varepsilon}^0(t) = \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right]' \dot{x}^0(t) + \frac{\partial \varepsilon^0}{\partial t} \tag{13.9}$$

и учитывая условия (13.6), способ построения множества $\mathfrak{F}^0_u$ по условиям (13.7), а также условие (13.4), получим из (13.9) неравенство

$$\varepsilon^0(t) < 0 \text{ при почти всех } t \in (\eta_*, \eta^*).$$

Это неравенство противоречит неравенству (13.8). Полученное противоречие доказывает лемму 13.1. □

Из лемм 10.1 и 13.1 вытекает, что при условии $\varepsilon(t_0, h_0) \le c$ стратегия $U_c^{(\varepsilon)} \div u_c^{(\varepsilon)}$, экстремальная к множеству $W = [\{t,h\} : t_0 \le t \le \vartheta,\, \varepsilon(t,h) \le c]$, обеспечивает встречу всякого движения $x[t, t_0, h_0, U_c^{(\varepsilon)}]$ с множеством M_c внутри N_c при $\eta \le \vartheta$, т. е. стратегия $U_c^{(\varepsilon)}$ разрешает здесь задачу о сближении. При этом, если найден функционал $\varepsilon(t,h)$, который удовлетворяет условиям (13.1)–(13.4), то для построения искомой стратегии $U_c \doteq u_c(t,h)$, разрешающей задачу 4.1 о сближении, уже не обязательно надо обращаться к построению экстремальной стратегии $U_c^{(\varepsilon)} \div u_c^{(\varepsilon)}(t,h)$ на базе u-стабильного моста $W(t,h) = [\{t,h\} : t_0 \le t \le \vartheta,\, \varepsilon(t,h) \le c]$. Искомую стратегию можно сконструировать иначе. Покажем это.

Пусть символ $U_c(t,h)$ означает множество векторов $u_c \in P$, удовлетворяющих в некоторой позиции $\{t,h\}$ из области (13.3) условию (13.4)

$$\min_{u\in P}\max_{v\in G}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]' f(t,h,u,v) = \max_{v\in G}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]' f(t,h,u_c,v).$$

В позиции $\{t,h\}$, которая не лежит в области (13.3), в качестве $U_c(t,h)$ можно выбрать все множество P. Пусть $\widetilde{F}_v(t,h,U_c)$ есть выпуклая оболочка множества векторов $f(t,h,u,v)$, когда $u \in U_c(t,h)$ и $v \in G$. Заметим, что множества $\widetilde{F}_v(t,h,U_c)$ полунепрерывны сверху относительно включения по изменению позиции $\{t,h\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 13.2. *Пусть $\varepsilon(t,h) \le 0$. Тогда для любого решения $x(t) = x(t, t_0, h_0, U_c)$ дифференциального уравнения в контингенциях*

$$\dot{x}(t) \in \widetilde{F}_v(t, x_t, U_c) \tag{13.10}$$

выполняется условие встречи

$$\{\eta, x_\eta\} \in M_c, \{t, x_t\} \in N_c \ \textit{при} \ t_0 \le t \le \eta, \quad \eta \le \vartheta. \tag{13.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы основывается на том факте, что вдоль всякого обобщенного движения $x(t)$, являющегося решением $x(t) = x(t, t_0, h_0, U_c)$ уравнения (13.10), выполняется неравенство

$$\varepsilon(t, x(t)) \le c \quad \text{при} \quad t_0 \le t \le \vartheta \tag{13.12}$$

и, стало быть, $\varepsilon(\vartheta, x_\vartheta) \le c$. Но последнее неравенство означает, что позиция $\{\vartheta, x_\vartheta\} \in M_c$, а неравенство (13.12) означает, что $\{t, h\} \in N_c$ при всех $t_0 \le t \le \vartheta$. Это и доказывает лемму 13.2, остается только проверить выполнение условия (13.12). Проверка этого условия проводится совершенно по тому же плану, как и проверка условия (13.5) для всех решений уравнения (13.6) при доказательстве леммы 13.1, и эту проверку мы здесь опустим. □

Обозначим теперь символом $U_c^0 \div u_c^0(t, h)$ стратегию, задаваемую функционалом $u_c^0(t, h)$, который во всякой позиции $\{t, h\}$ удовлетворяет условию $u_c^0(t, h) \in U_c(t, h)$. Тогда всякое конструктивное движение $x[t] = x[t, t_0, h_0, U_c^0]$ явится также и обобщенным движением $x(t) = x(t, t_0, h_0, U_c)$, которое является решением уравнения в контингенциях (13.10). Отсюда и из леммы 13.2 заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 13.1. *Предположим, что удалось найти непрерывный и инвариантно дифференцируемый функционал $\varepsilon(t, h)$, удовлетворяющий условиям (13.1)–(13.3). Пусть далее стратегия $V_c^0(t, h)$ задана условием*

$$\max_{v \in G} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]' f(t, h, u_c^0, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in G} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]' f(t, h, u, v) \tag{13.13}$$

в области (13.3), а вне этой области $u^0(t, h)$ может принимать любые значения. Тогда, если $\varepsilon(t_0, h_0) \le c$, то для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, h_0, U^0]$ условие встречи (13.11) будет выполняться при $\eta \le \vartheta$.

Полезно заметить, ссылаясь на рассуждения, которыми мы обосновывали лемму 13.2, что стратегия U_c^0 обеспечивает также выполнение условия

$$\{\vartheta, x_\vartheta\} \in M_c,$$

хотя ϑ уже может и не быть первым моментом η встречи позиции $\{t, x_t\}$ с M_c.

Далее, заметим также, что управляющее воздействие $u^0(t, h)$, порождаемое стратегией U_c^0, согласно (13.13) опять можно трактовать как некоторое экстремальное управление относительно u-стабильного моста $W = [\{t, h\} : t_0 \le t \le \vartheta, \varepsilon(t, h) \le c]$, но имеющее базой уже не метрику $C[-\tau, 0]$ в окрестности W, как это было в разделе 8., а заменяющий здесь эту метрику потенциал $\varepsilon(t, h)$. Условие выбора $U_c^0 \div u_c^0(t, h)$ (13.13) означает наискорейший возможный спуск движения $x[t, t_0, h_0, U_c^0]$ относительно этого потенциала $\varepsilon(t, h)$ к мосту W при наиболее упорном сопротивлении противника, распоряжающегося управлением v.

Важно заметить еще, что при доказательстве леммы 13.2 и вытекающей из нее теоремы 13.1 условие (7.3) седловой точки для маленькой игры (7.1), (7.2) нигде не используется и, стало быть, в условиях леммы 13.2 и теоремы 13.1 это условие предполагать не требуется.

Автор благодарит рецензента и редактора за высококвалифицированные рекомендации и замечания.

References

[1] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin, *Positional Differential Games*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[2] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Наука, М., 1970. [N. N. Krasovsky, *Game problems about meeting of movements*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[3] Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов, "Линейные дифференциально-разностные игры", *Докл. АН СССР*, **197**:4 (1971), 777–780. [N. N. Krasovskii, Yu. S. Osipov, "Linear differential-difference games", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **197**:4 (1971), 777–780 (In Russian)].

[4] Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов, "Задачи управления с неполной информацией", *Механика твердого тела*, 1973, № 4, 5–14. [N. N. Krasovsky, Yu. S. Osipov, "Control problems with incomplete information", *Mechanics of Solids*, 1973, № 4, 5–14 (In Russian)].

[5] Ю. С. Осипов, "К теории дифференциальных игр систем с последействием", *Прикладная математика и механика*, **35**:2 (1971), 300–311; англ. пер.:Iu. S. Osipov, "On the theory of differential games of systems with aftereffect", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **35**:2 (1971), 262–272.

[6] Ю. С. Осипов, "Дифференциальная игра наведения для систем с последействием", *Прикладная математика и механика*, **35**:1 (1971), 123–131; англ. пер.:Iu. S. Osipov, "A differential guidance game for systems with aftereffect", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **35**:1 (1971), 92–99.

[7] Н. Ю. Лукоянов, "Функциональные уравнения типа Гамильтона–Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией", *Доклады РАН*, **371**:4 (2000), 457–461; англ. пер.:N. Yu. Lukoyanov, "Functional equations of the Hamilton–Jacobi type and differential games with hereditary information", *Doklady Mathematics*, **61**:2 (2000), 301–304.

[8] Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин, "О стратегиях экстремального сдвига в системах с запаздыванием", Тр. ИММ УрО РАН, **27**, № 2, 2021, 150–161; англ. пер.:N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin, "On extremal shift strategies in time-delay systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **315**:suppl. 1 (2021), S192–S202.

[9] Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин, "Неравенства для субградиентов функционала цены в дифференциальных играх для систем с запаздыванием", *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*, **490** (2020), 91–94; англ. пер.:N. Y. Lukoyanov, A. R. Plaksin, "Inequalities for subgradients of a value functional in differential games for time-delay systems", *Doklady Mathematics*, **101**:1 (2020), 76–79.

[10] М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, "О линейно-квадратичных дифференциальных играх для систем дробного порядка", *Математическая теория игр и ее приложения*, **15**:2 (2023), 18–32. [M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, "On linear-quadratic differential games for fractional-order systems", *Mathematical Game Theory and its Applications*, **15**:2 (2023), 18–32 (In Russian)].

[11] М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, "Дифференциальные игры в системах дробного порядка: неравенства для производных функционала цены по направлениям", *Оптимальное управление и дифференциальные игры*, Сборник статей, Труды МИАН, **315**, МИАН, М., 2021, 74–94; англ. пер.:M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, "Differential games in fractional-order systems: inequalities for directional derivatives of the value functional", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315** (2021), 65–84.

[12] Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин, "К теории позиционных дифференциальных игр для систем нейтрального типа", Тр. ИММ УрО РАН, **25**, № 3, 2019, 118–128; англ. пер.:N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin, "On the theory of positional differential games for neutral-type systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **309**:suppl. 1 (2020), S83–S92.

[13] М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин, "Об аппроксимации минимаксных решений функциональных уравнений Гамильтона–Якоби для систем с запаздыванием", Выпуск посвящен 70-летнему юбилею Александра Георгиевича Ченцова, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, № 1, 2018, 53–62; англ. пер.:M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin, "Approximation of minimax solutions of Hamilton—Jacobi functional equations for time-delay systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **304**:suppl. 1 (2019), S68–S75.

[14] Ю. С. Осипов, "Дифференциальные игры систем с последействием", *Докл. АН СССР*, **196**:4 (1971), 779–782. [Yu. S. Osipov, "Differential games of systems with aftereffect", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **196**:4 (1971), 779–782 (In Russian)].

[15] Ю. С. Осипов, *Задачи теории дифференциально-разностных игр*, дисс. ... докт. физ.-матем. наук, Ленинград, 1971, 300 с. [Yu. S. Osipov, *Problems of the Theory of Differential-Difference Games*, diss. ... Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leningrad, 1971 (In Russian), 300 pp.]

[16] А. В. Кряжимский, "Дифференциально-разностная игра уклонения от функциональной цели", *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, **4** (1973), 71–79. [A. V. Kryazhimsky, "Differential-difference game of evasion from a functional goal", *Izv. AN SSSR. Tech. Cybernetics*, **4** (1973), 71–79 (In Russian)].

[17] А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, "Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр", *Прикладная математика и механика*, **42**:2 (1978), 202–209; англ. пер.:A. V. Kriazhimskii, V. I. Maksimov, "Approximation in linear difference- differential games", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **42**:2 (1978), 212–219.

[18] А. В. Ким, *i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения*, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1996, 234 с. [A. V. Kim, *i-Smooth Analysis and Functional-Differential Equations*, IMM UB RAS, Ekaterinburg, 1996 (In Russian), 234 pp.]

[19] A. V. Kim, *i-Smooth Analysis. Theory and Applications*, Scrivener Publishing, New Jersey, 2015, 270 pp.

[20] А. В. Ким, "О применении методологии i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 26–34. [A. V. Kim, "On application of the methodology i-smooth analysis to elaboration of numerical methods for solving functional differential equations", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 26–34 (In Russian)].

[21] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М., Наука, 1976. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Moscow, Nauka Publ., 1976 (In Russian)].

Информация об авторе

Ким Аркадий Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: arkadiik@list.ru
ORCID: http://orcid.org/0009-0005-9637-5767

Поступила в редакцию 20.11.2023 г.
Поступила после рецензирования 14.06.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Information about the author

Arkady V. Kim, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Scientific Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: arkadiik@list.ru
ORCID: http://orcid.org/0009-0005-9637-5767

Received 20.11.2023
Reviewed 14.06.2024
Accepted for press 13.09.2024

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-296-308

УДК 51-72, 517.93

Омниколесная реализация задачи Суслова с реономной связью: динамическая модель и управление

Евгения Арифжановна МИКИШАНИНА

ФГБУН «Математический институт им. В. А. Стеклова» Российской академии наук
119991, Российская Федерация, г. Москва, ул. Губкина, 8
ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова»
428015, Российская Федерация, г. Чебоксары, пр. Московский, 15

Аннотация. Классическая задача Суслова о движении твердого тела с неподвижной точкой достаточно известна и подробно исследована. В данной работе предлагается омниколесная реализация задачи Суслова. Рассматривается управляемое движение твердого тела с неподвижной точкой в присутствии склерономных неголономных связей и реономной искусственной кинематической связи. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки, обкатывает изнутри сферическую оболочку и контактирует с ней посредством омниколес с дифференциальным приводом. Считаем, что омниколеса контактируют со сферической оболочкой только в одной точке. Чтобы подчинить движение твердого тела искусственной реономной связи, дифференциальный привод создает управляющие крутящие моменты на омниколесах. На основании принципа д'Аламбера–Лагранжа построены уравнения движения системы с неопределенными множителями, задающими реакции связей. Задача сводится к исследованию неавтономной двумерной динамической системы. С помощью преобразования Пуанкаре исследование двумерной динамической системы сводится к исследованию устойчивости однопараметрического семейства неподвижных точек для системы дифференциальных уравнений с вырожденной линейной частью. Определены числовые параметры системы, при которых фазовые траектории ограничены и при которых фазовые траектории неограничены. Результаты исследования проиллюстрированы графически. На основании численного интегрирования построены отображения за период (сечения Пуанкаре) и карта динамических режимов для подтверждения Фейгенбаумовского сценария перехода к хаотической динамике.

Ключевые слова: динамическая модель, управление, задача Суслова, омниколесо, неголономная связь, реономная связь, обратная связь

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012, https://rscf.ru/project/23-71-33002/).

Для цитирования: *Микишанина Е.А.* Омниколесная реализация задачи Суслова с реономной связью: динамическая модель и управление // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 296–308. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-296-308

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-296-308

Omniwheel implementation of the Suslov problem with a rheonomic constraint: dynamic model and control

Evgeniya A. MIKISHANINA
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences
8 Gubkina St., Moscow 119991, Russian Federation
Chuvash State University
15 Moskovskii Av., Chebokasry 428015, Russian Federation

Abstract. The classical Suslov problem of the motion of a rigid body with a fixed point is well known and has been studied in detail. In this paper, an omniwheel implementation of the Suslov problem is proposed. The controlled motion of a rigid body with a fixed point in the presence of scleronomic nonholonomic constraints and rheonomic artificial kinematic constraint is considered. The rigid body rotates around a fixed point, rolls around a spherical shell from the inside and contacts it by means of omniwheels with a differential actuator. We believe that the omniwheels are in contact with the spherical shell only at one point. In order to subordinate the motion of the rigid body to an artificial rheonomic constraint, a differential actuator creates control torques on omniwheels. Based on the d'Alembert–Lagrange principle, equations of motion of the mechanical system with indeterminate multipliers specifying constraint reactions are constructed. The problem is reduced to the study of a non-autonomous two-dimensional dynamical system. Using the generalized Poincaré transformation, the study of a two-dimensional dynamical system is reduced to the study of the stability of a one-parameter family of fixed points for a system of differential equations with a degenerate linear part. We determine numerical parameters for which phase trajectories of the system are bounded and for which phase trajectories of the system are unbounded. The results of the study are illustrated graphically. Based on numerical integration, maps for the period (Poincaré sections) and a map of dynamic regimes are constructed to confirm the Feigenbaum scenario of transition to chaotic dynamics.

Keywords: dynamic model, control, Suslov problem, omniwheel, nonholonomic constraint, rheonomic constraint, feedback

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-71-30012, https://rscf.ru/project/23-71-33002/).

Mathematics Subject Classification: 37N15, 70K45, 70Q05.

For citation: Mikishanina E.A. Omniwheel implementation of the Suslov problem with a rheonomic constraint: dynamic model and control. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 296–308. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-296-308 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Данная работа посвящена исследованию динамики твердого тела с неподвижной точкой в задаче Суслова. Твердое тело движется в присутствии неоднородной реономной связи Суслова. Физическая интерпретация однородной склерономной неголономной связи Суслова [1, с. 593] была предложена Вагнером [2] (рис. 1). Твердое тело движется внутри сферической оболочки и контактирует с ней посредством «острых» колесиков (рис. 1), в результате чего возникает неголономная связь Суслова

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = 0,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела, $\boldsymbol{e}$ — вектор, неподвижный в теле.

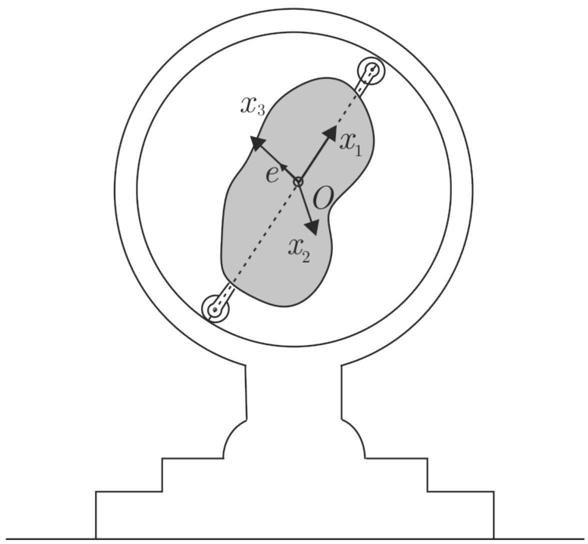


Рис. 1. Физическая реализация Вагнера задачи Суслова

Динамика классической задачи Суслова, в том числе с переменными параметрами (обобщение задачи Суслова), хорошо изучена в работах [3–5]. В работе [3] авторы исследуют динамику системы Суслова с неоднородной склерономной неголономной связью

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = \text{const},$$

однако, физическую интерпретацию этой связи авторы не указывают.

Обобщением склерономной связи Суслова является реономная связь Билимовича [6]. Билимович предложил физическую интерпретацию реономной неголономной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a}) = \alpha,$$

где $\boldsymbol{a} = (1, p(t), 0)$, $p(t)$ — произвольная функция, α — произвольная постоянная, в виде механизма с вращающимся стержнем [6]. Однако данная физическая интерпретация не совсем корректна. Найти физическую реализацию неоднородной склерономной связи Суслова также сложно. Динамика низкоразмерной неавтономной динамической системы в задаче Билимовича достаточно подробно была исследована в [7]. На основе численных экспериментов были выявлены случаи, когда одна из фазовых переменных или обе фазовые переменные неограничены. Для фазовых переменных в этих случаях были найдены асимптотики эмпирически.

В данной работе мы предложим омниколесную реализацию задачи Суслова. Для этого в механической системе Вагнера (рис. 1) заменим острые колесики на омниколеса с дифференциальным приводом. Управляя крутящим моментом на омниколесах, мы подчиним движение твердого тела реономной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = f(t).$$

Однако данную связь нельзя считать неголономной, так как неголономные связи реализуются естественным путем вследствие контакта. Данная связь искусственная. Такие связи часто называют условными связями (сервосвязями) [8–10]. Для ее реализации требуются управляющие воздействия. В данном случае управляющие воздействия — это управляющие крутящие моменты на омниколесах, зависящие от искомых механических параметров. Таким образом, получаем задачу с обратной связью.

В работе для заданных управляющих моментов на омниколесах строятся уравнения движения на основе принципа д'Аламбера–Лагранжа, исследуется динамика системы, для чего строятся отображения Пуанкаре, которые могут содержать странные хаотические аттракторы. В случае появления хаотического аттрактора мы строим карту динамических режимов и показываем сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу посредством каскада бифуркаций удвоения периода. В исследуемой динамической системе может наблюдаться неограниченный рост фазовых переменных. В работе приводится аналитическое доказательство этого факта с использованием преобразования Пуанкаре [11, с. 107], в результате которого мы переходим к исследованию устойчивости однопараметрического семейства неподвижных точек для системы с вырожденной линейной частью [12, 13]. Причем, в отличие от [12], у нас нет необходимости прибегать к нормальным формам. Определяются механические параметры системы, при которых наблюдается неограниченный рост фазовой переменной, и строятся асимтотики фазовых переменных, а также оцениваются управляющие крутящие моменты на омниколесах.

Другие качественные методы исследования динамического поведения нелинейной системы и методы управления представлены в [14, 15].

1. Математическая модель

Постановка задачи. Рассмотрим неподвижную сферическую оболочку радиуса R, внутри которой движется твердое тело массой M с неподвижной точкой O, совпадающей с центром оболочки и центром масс самого тела (рис. 1). Твердое тело контактирует с оболочкой посредством двух одинаково ориентированных омниколес радиуса r и массой m, расположенных диаметрально противоположно. Считаем, что каждое омниколесо контактирует с оболочкой только в одной точке.

Введем подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с центром в точке O, жестко связанную с телом. Направим ось Ox_3 перпендикулярно плоскости омниколес. Тогда ось, соединяющая центры омниколес, лежит в плоскости Ox_1x_2. Предполагаем, что геометрические и физические параметры системы и выбор осей системы координат таковы, что осевой момент инерции омниколеса равен j, а тензор инерции твердого тела вместе с омниколесами принимает вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}.$$

Неголономные условия непроскальзывания омниколес в точках контакта со сферической оболочкой принимают вид

$$(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{n}_i) \cdot \dot{\chi}_i + \frac{R}{r}(\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad i = \overline{1,2}, \tag{1.1}$$

где $\dot{\chi}_i$ — угловая скорость i-го омниколеса, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости тела, $\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{a}_i$, вектор $\boldsymbol{n}_i$ — единичный вектор, нормальный к плоскости омниколеса, вектор $\boldsymbol{a}_i$ — единичный вектор, направленный вдоль оси ролика, контактирующего с оболочкой, $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор, направленный от центра сферы до центра i-го омниколеса. Более подробно с неголономной моделью омниколеса можно ознакомиться в [16] (конструкцию омниколеса см. рис. 2).

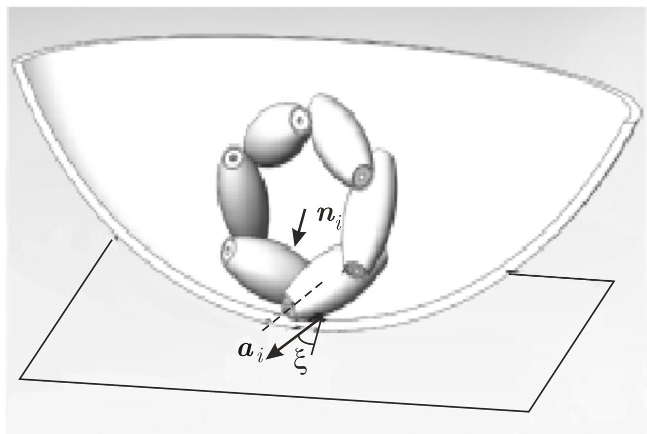


Рис. 2. Конструкция омниколеса

Векторы $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{s}_i$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеют следующие координаты

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix}(R-r)\cos\varphi\\(R-r)\sin\varphi\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\sin\xi\\\cos\varphi\sin\xi\\\cos\xi\end{pmatrix}, \boldsymbol{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix}(R-r)\sin\varphi\cos\xi\\-(R-r)\cos\varphi\cos\xi\\(R-r)\sin\xi\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix}-(R-r)\cos\varphi\\-(R-r)\sin\phi\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}\sin\varphi\sin\xi\\-\cos\varphi\sin\xi\\\cos\xi\end{pmatrix}, \boldsymbol{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix}-(R-r)\sin\varphi\cos\xi\\(R-r)\cos\varphi\cos\xi\\(R-r)\sin\xi\end{pmatrix},$$

где угол $\xi \neq 0, \pi$ — угол между осью ролика и нормалью к плоскости омниколеса, угол φ — угол, между осью, соединяющей центры омниколес и положительным направлением оси Ox_1.

Замечание 1.1. В случаях $\xi = 0$ и $\xi = \pi$ неголономные условия приобретают вид классических неголономных условий Суслова для твердого тела на «острых» колесиках.

Потребуем, чтобы движение твердого тела подчинялось искусственной связи

$$(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}) = f(t), \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{e} = (0,0,1)^T$ — координатный вектор оси Ox_3, $f(t)$ — заданная периодическая функция времени t. Для реализации условия (1.2) на каждое i-е омниколесо установим дифференциальный привод, который будет генерировать управляющий крутящий момент K_i.

Требуется оценить возможность физической реализации такого движения и исследовать динамику системы.

Уравнения движения. Лагранжиан системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}j\left(\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2\right) + j\left((\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}_1)\dot{\chi}_1 + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}_2)\dot{\chi}_2\right).$$

Уравнения движения с неопределенными множителями для твердого тела строятся аналогично уравнениям движения в [17]:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} + \frac{R}{r}\left(\mu_1 \frac{\boldsymbol{s}_1}{(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{n}_1)} + \mu_2 \frac{\boldsymbol{s}_2}{(\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{n}_2)}\right), \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial \chi_1} + \mu_1 + K_1, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \chi_2} + \mu_2 + K_2, \\
\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор абсолютного пространства, направленный вдоль силы тяжести, μ_1, μ_2 — неопределенные множители, задающие реакцию неголономных связей, K_1, K_2 — моменты сил, приложенных к осям омниколес. Так как центр масс твердого тела совпадает с центром системы координат $Ox_1x_2x_3$, то, отбросив последнее векторное уравнение (1.3), можно перейти к исследованию системы

$$\begin{gathered}
\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{Q} \\
j\ddot{\chi}_1 + j\dot{\omega}_3 = \mu_1 + K_1, \\
j\ddot{\chi}_2 + j\dot{\omega}_3 = \mu_2 + K_2,
\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{23} & I_{33} - \dfrac{2jR}{r} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Q} = \dfrac{R}{r}\begin{pmatrix} \sin\varphi \operatorname{ctg}\xi\,(\mu_1 - \mu_2) \\ -\cos\varphi \operatorname{ctg}\xi\,(\mu_1 - \mu_2) \\ \mu_1 + \mu_2 \end{pmatrix}$.

Неопределенные множители определяем из совместного решения уравнений движения и производных по времени от уравнений (1.1), а моменты сил, приложенные к осям, находим из уравнения, являющегося производной по времени от искусственной связи (1.2). Неопределенные множители μ_1, μ_2 как функции от K_1 и K_2 определяются единственным образом, а вот моменты K_1, K_2 определяются уже не единственным образом, так как одного уравнения (1.2) недостаточно. Таким образом, накладывая дополнительное условие на моменты или на систему, можно получить систему с самой разнообразной динамикой.

Потребуем, чтобы $Q_1 = Q_2 = 0$, то есть $\mu_1 = \mu_2$. Тогда управляющие крутящие моменты на омниколесах примут вид:

$$\begin{aligned}
K_{1,2} = &\mp \frac{jR \operatorname{ctg}\xi \cos\varphi}{rI_{22}}\left[(I_{11} - I_{33})\, f(t)\omega_1 + I_{23}\left(\dot{f}(t) - \omega_1\omega_2\right)\right] \\
&\mp \frac{jR \operatorname{ctg}\xi \sin\varphi}{rI_{11}}\left[(I_{22} - I_{33})\, f(t)\omega_2 + I_{23}\left(f(t)^2 - \omega_2^2\right)\right] \\
&- \frac{r}{2RI_{22}}\left[(I_{22} - I_{11})\omega_1\left(I_{22}\omega_2 + I_{23}f(t)\right) + I_{23}\omega_1\left(I_{23}\omega_2 + I_{33}f(t)\right)\right] \\
&- \frac{1}{2I_{22}}\left[2I_{22}j\left(\frac{R}{r} - 1\right) + \frac{r\left(I_{22}I_{33} - I_{23}^2\right)}{R}\right]\dot{f}(t).
\end{aligned}$$

Тогда система (1.4) и задача в целом сводится к исследованию системы для двух компонент угловой скорости ω_1 и ω_2 :

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\frac{I_{23}}{I_{11}}\omega_2^2 + \frac{I_{22}-\tilde{I}_{33}}{I_{11}}f(t)\omega_2 + \frac{I_{23}}{I_{11}}f(t)^2,\\ \dot{\omega}_2 &= \frac{I_{23}}{I_{22}}\omega_1\omega_2 - \frac{I_{11}-\tilde{I}_{33}}{I_{22}}f(t)\omega_1 - \frac{I_{23}}{I_{22}}\dot{f}(t),\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\tilde{I}_{33} = I_{33} - 2j\dfrac{R}{r}$.

В случае $\varphi = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ или $\xi = \dfrac{\pi}{2}$ аналогичная система получится, если в качестве дополнительного условия выбрать равенство управляющих крутящих моментов на колесах, то есть $K_1 = K_2$.

Управляющие крутящие моменты зависят от значений угловых скоростей ω_1, ω_2. При неограниченном поведении хотя бы одной из компонент управляющие крутящие моменты также будут неограничены, что сделает невозможной физическую реализацию задачи, начиная с некоторого момента времени.

При $I_{23} = 0$ для фазовых переменных системы имеет место первый интеграл

$$\frac{I_{11}-\tilde{I}_{33}}{I_{22}}\omega_1^2 + \frac{I_{22}-\tilde{I}_{33}}{I_{11}}\omega_2^2 = \mathrm{const},$$

и решение может быть найдено явным интегрированием. При

$$(I_{11}-\tilde{I}_{33})(I_{22}-\tilde{I}_{33}) > 0$$

обе фазовые переменные являются ограниченными функциями. Физическая реализация возможна. В противном случае динамика системы зависит от вида функции $f(t)$.

Перейдем к исследованию поведения системы в случае $I_{23} \neq 0$.

2. Исследование динамики системы при $I_{23} \neq 0$

Введем замену

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{I_{22}}{I_{23}}v,\\ \omega_2 &= \frac{I_{11}-\tilde{I}_{33}}{I_{23}}f(t) + \frac{\sqrt{I_{11}I_{22}}}{I_{23}}u.\end{aligned}$$

В новых переменных система (1.5) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{v} &= u^2 + af(t)u + bf(t)^2,\\ \dot{u} &= -uv - c\dot{f}(t),\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$a = \frac{(I_{11}-I_{22}) + \left(I_{11}-\tilde{I}_{33}\right)}{\sqrt{I_{11}I_{22}}},\ \ b = \frac{(I_{11}-I_{22})\left(I_{11}-\tilde{I}_{33}\right) - I_{23}^2}{I_{11}I_{22}},\ \ c = \frac{I_{22}\left(I_{11}-\tilde{I}_{33}\right) + I_{23}^2}{I_{22}\sqrt{I_{11}I_{22}}}.$$

Фазовое пространство системы (2.1) двумерно.

Преобразование Пуанкаре и неограниченность фазовых траекторий. Введем угловую переменную $\tau = t \mod T$, где T — наименьший общий период функций $f(t)$, $f(t)^2$, $\dot{f}(t)$, $\tau \in [0, T)$, и перепишем систему (2.1) в автономном виде

$$\begin{gathered}\frac{dv}{dt} = u^2 + af(\tau)u + bf(\tau)^2,\\ \frac{du}{dt} = -uv - c\frac{df(\tau)}{d\tau},\\ \frac{d\tau}{dt} = 1.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Считаем, что $v > 0$. Используем преобразование Пуанкаре, которое переводит бесконечно удаленные точки фазовой плоскости в неподвижные точки сферы Пуанкаре [11],

$$v = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{y}{x},$$

масштабируем время $ds = vdt$ и переписываем систему (2.2) в переменных x, y :

$$\begin{gathered}\frac{dx}{ds} = -xy^2 - af(\tau)x^2y - bf(\tau)^2x^3,\\ \frac{dy}{ds} = -y - c\frac{df(\tau)}{d\tau}x^2 - y^3 - af(\tau)xy^2 - bf(\tau)^2x^2y,\\ \frac{d\tau}{ds} = x.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Фазовое пространство системы (2.3) уже трехмерно. Эта система обладает семейством неподвижных точек

$$x = 0, \ \ y = 0, \ \ \tau = \tau^*, \tag{2.4}$$

где τ^* — любое из области определения. Для анализа их устойчивости определяем собственные числа матрицы системы, линеаризованной в окрестности (2.4). Одно из собственных чисел матрицы линеаризованной системы равно -1, а другие собственные числа равны нулю. Таким образом, требуется учет членов разложения более высоких порядков.

Согласно [14, 18] в окрестности неподвижной точки (2.4) существует центральное инвариантное многообразие, на котором $0 < x < \varepsilon$, $\tau \mod T$, а функция y представима в виде ряда по степеням x :

$$y = \beta_2(\tau)x^2 + \beta_3(\tau)x^3 + O(x^4). \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) во второе уравнение (2.3), получим

$$y = -c\frac{df(\tau)}{d\tau}x^2 + c\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}x^3 + O(x^4), \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в первое уравнение (2.3), получим

$$\begin{gathered}\frac{dx}{ds} = \alpha_3(\tau)x^3 + \alpha_4(\tau)x^4 + \alpha_5(\tau)x^5 + O(x^6),\\ \alpha_3(\tau) = -b \cdot f(\tau)^2,\\ \alpha_4(\tau) = a \cdot c \cdot f(\tau) \cdot \frac{df(\tau)}{d\tau},\\ \alpha_5(\tau) = -c^2\left(\frac{df(\tau)}{d\tau}\right)^2 - a \cdot c \cdot f(\tau) \cdot \frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Пусть $x \ll 1$. Разделим уравнение (2.7) на третье уравнение (2.3):

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha_3(\tau)x^2 + \alpha_4(\tau)x^3 + \alpha_5(\tau)x^4 + O(x^5)$$

и выполним преобразование для усреднения коэффициентов:

$$\frac{dx}{dt} = \langle\alpha_3\rangle x^2 + \langle\alpha_4\rangle x^3 + \langle\alpha_5\rangle x^4 + O(x^5),$$

где

$$\langle\alpha_i\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_i(\tau)d\tau.$$

Согласно [18], если $b > 0$, то $\langle\alpha_3\rangle < 0$ и точки (2.4) асимптотически устойчивы. Если $b < 0$, то $\langle\alpha_3\rangle > 0$ и точки (2.4) неустойчивы.

Пусть $b = 0$. Так как $I_{23} \neq 0$, то $c \neq 0$. Тогда

$$\langle\alpha_3\rangle = 0, \quad \langle\alpha_4\rangle = \frac{1}{T}\cdot a\cdot c\int_0^T f(\tau)df(\tau) = 0.$$

Перепишем $\alpha_5(\tau)$ в виде

$$\alpha_5(\tau) = -\left(c^2 - a\cdot c\right)\left(\frac{df(\tau)}{d\tau}\right)^2 - a\cdot c\cdot\frac{d}{d\tau}\left(f(\tau)\frac{df(\tau)}{d\tau}\right).$$

Так как $f(\tau)$ и $\dfrac{df(\tau)}{d\tau}$ являются T-периодическими функциями, то

$$\int_0^T d\left(f(\tau)\frac{df(\tau)}{d\tau}\right) = 0.$$

Легко проверить, что если $b = 0$, то $c^2 - a\cdot c < 0$. Если $f(t)$ — не постоянная функция, то $\langle\alpha_5\rangle > 0$. Это значит, что, согласно [18], точки (2.4) неустойчивы при $b = 0$.

В случае $b > 0$ имеем на центральном инвариантном многообразии следующие асимптотики для x, y при $t \to +\infty$:

$$x(t) = \left(b\langle f^2\rangle t\right)^{-1} + o(t^{-1}),$$
$$y(t) = -c\dot{f}(t)\left(b\langle f^2\rangle t\right)^{-2} + o(t^{-2}),$$

где

$$\langle f^2\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt.$$

Возвращаясь к переменным v, u, можно сделать следующий вывод без строгих математических доказательств.

Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для начального условия $v(0) > \varepsilon^{-1}$ и $b > 0$ имеют место следующие асимптотики фазовых переменных системы (2.1) при $t \to +\infty$:

$$v(t) = b\langle f^2\rangle t + o(t),$$
$$u(t) = -c\dot{f}(t)(b\langle f^2\rangle t)^{-1} + o(t^{-1}).$$

Перейдем к исходным переменным ω_1, ω_2 и сформулируем следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для начального значения* $\omega_1(0)$, *удовлетворяющего условию* $-I_{23}I_{22}^{-1}\omega_1(0) > \varepsilon^{-1} > 0$, *и для параметров системы* (1.5), *удовлетворяющих условию*

$$\frac{(I_{11}-I_{22})\left(I_{11}-\tilde{I}_{33}\right)-I_{23}^2}{I_{11}I_{22}} > 0,$$

имеют место следующие асимптотики фазовых переменных системы (1.5) *при* $t\to+\infty$:

$$\omega_1(t) = -\frac{(I_{11}-I_{22})\left(I_{11}-\tilde{I}_{33}\right)-I_{23}^2}{I_{11}I_{23}}\langle f^2\rangle t + o(t), \quad \omega_2(t) \sim \frac{I_{11}-\tilde{I}_{33}}{I_{23}} f(t),$$

причем

– *если* $I_{23} > 0$, *то* $\omega_1 \to -\infty$ *при* $t \to +\infty$;

– *если* $I_{23} < 0$, *то* $\omega_1 \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$.

3. Численные эксперименты

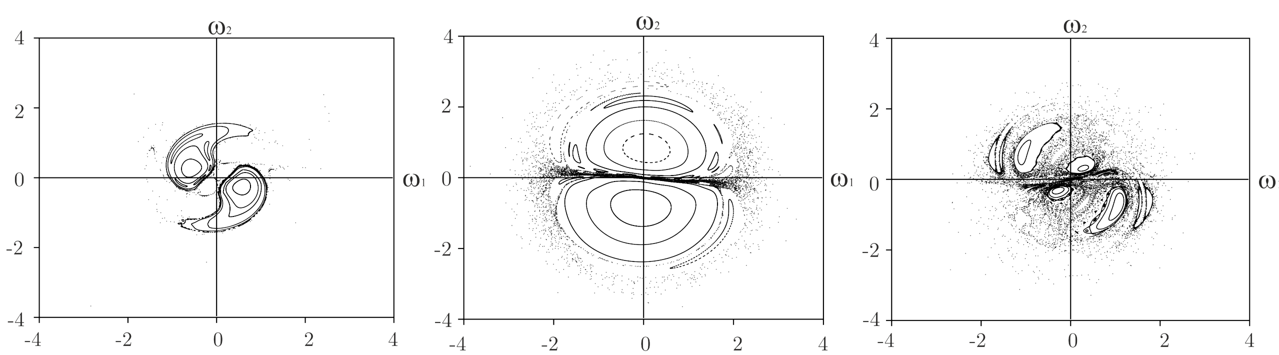
Проиллюстрируем аналитические результаты для случая

$$f(t) = \sin t,$$

используя методы численного интегрирования.

На рис. 3 изображены отображения за период (сечение Пуанкаре) для системы (1.5) с заданным тензором инерции

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3 & I_{23} \\ 0 & I_{23} & 1.8 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$



(a) $I_{23} = -1.2$ (b) $I_{23} = 0.5$ (c) $I_{23} = 0.8$

Рис. 3. Отображения за период системы (1.5) с тензором инерции (3.1)

Эти отображения соответствуют случаю $b < 0$.

На рис. 4 изображены отображения за период (сечение Пуанкаре) для системы (1.5) с заданным тензором инерции

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & I_{23} \\ 0 & I_{23} & 1.8 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

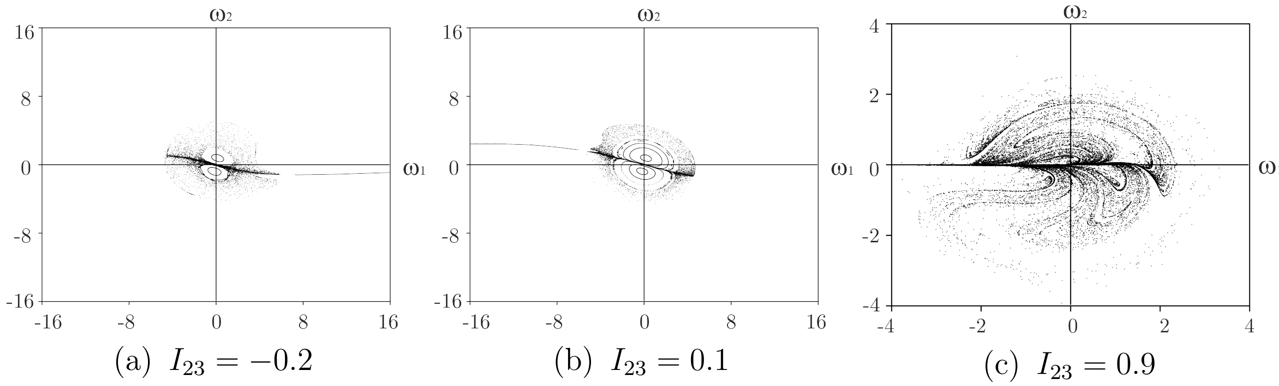


Рис. 4. Отображения за период системы (1.5) с тензором инерции (3.2)

Рис. 4 (a) и (b) соответствуют случаю $b > 0$. Области начальных условий системы (1.5) разделяются на две подобласти (рис. 5). Если начальные условия относятся к внешней подобласти, фазовая кривая не ограничена и убегает в «бесконечность». Если начальные условия относятся к внутренней подобласти, фазовая кривая ограничена.

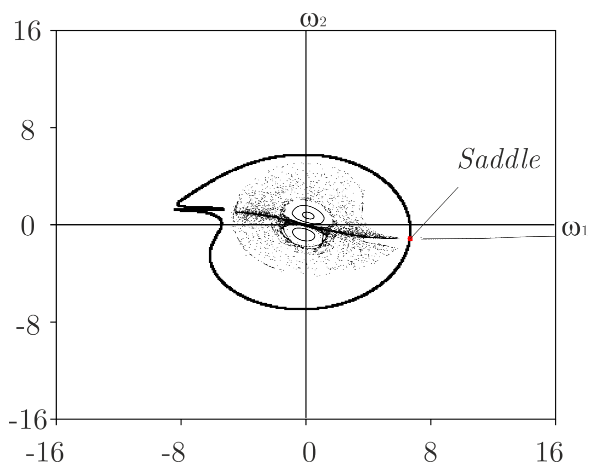


Рис. 5. Разделение области начальных условий

Рис. 4 (c) соответствует случаю $b < 0$ и содержит странный аттрактор с показателями Ляпунова

$$\lambda_1 \approx 0.073,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \approx -0.106.$$

Старший показатель Ляпунова положителен, а сумма показателей Ляпунова отрицательна. Это подтверждает, что на рис. 4 (c) изображен странный аттрактор.

На рис. 6 представлена карта динамических режимов на плоскости параметров $(I_{23}, \tilde{I}_{33})$, где параметры лежат в интервалах $I_{23} \in [0.7, 1]$ и $\tilde{I}_{33} \in [1.6, 1.9]$. Области черного цвета с цветными включениями соответствуют параметрам системы со странным аттрактором. Подтверждается сценарий Фейгенбаума о появлении странного аттрактора в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

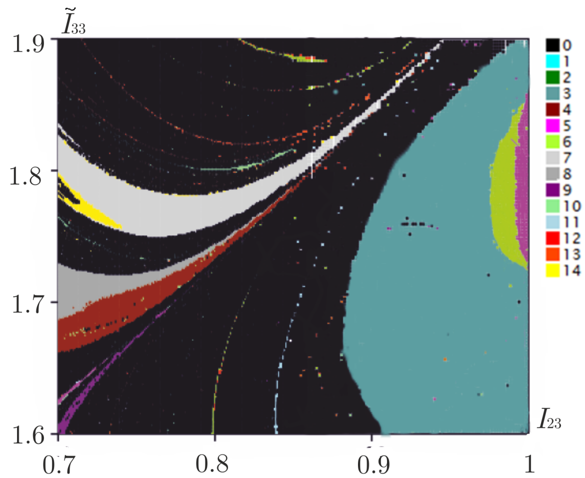


Рис. 6. Карта динамических режимов на плоскости $(I_{23}, \tilde{I}_{33})$

4. Заключение

Результаты, полученные в данном исследовании аналитически, согласуются с результатами, полученными эмпирически в [7]. Найдены механические параметры твердого тела, для которых модуль угловой скорости тела (а следовательно, и модули угловых скоростей омниколес) будет неограниченно возрастать. Показано, что управляющие крутящие моменты на омниколесах могут быть заданы не единственным образом. Следовательно, задавая управляющие крутящие моменты на омниколесах другим образом, может быть получена система с абсолютно другой динамикой.

References

[1] Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1946. [G. K. Suslov, *Theoretical mechanics*, Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1946 (In Russian)].

[2] В. Вагнер, “Геометрическая интерпритация движения неголономных динамических систем”, *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, 1941, № 5, 301–327. [V. Vagner, “Geometric interpretation of the motion of nonholonomic dynamical systems”, *Proceedings of the Seminar on Vector and Tensor Analysis*, 1941, № 5, 301–327 (In Russian)].

[3] L. C. Garcia–Naranjo, A. J. Maciejewsk, J. C. Marrero, M. Przybylska, “The inhomogeneous Suslov problem”, *Physics Letters A*, **378**:32–33 (2013), 2389–2394.

[4] A. V. Borisov, E. A. Mikishanina, “Two nonholonomic chaotic systems. Part I. On the Suslov problem”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **25**:3 (2020), 313–322.

[5] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, A. A. Kilin, “Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **16**:1–2 (2011), 104–116.

[6] A. D. Bilimovitch, “Sur les systemes conservatifs, non holonomes avec des liaisons dependantes du temps”, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **156** (1913), 12–18.

[7] A. V. Borisov, A. V. Tsiganov, E. A. Mikishanina, “On inhomogeneous nonholonomic Bilimovich system”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **94** (2021), 105573.

[8] В. И. Киргетов, “О движении управляемых механических систем с условными связями (сервосвязями)”, *Прикладная математика и механика*, **31**:3 (1967), 433–446; англ. пер.:V. I. Kirgetov, “The motion of controlled mechanical systems with prescribed constraints (servoconstraints)”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **31**:3 (1967), 465–477.

[9] Е. А. Микишанина, “Динамика качения сферического робота с маятниковым приводом, управляемого сервосвязью Билимовича”, *Теоретическая и математическая физика*, **211**:2 (2022), 281–294; англ. пер.:E. A. Mikishanina, “Rolling motion dynamics of a spherical robot with a pendulum actuator controlled by the Bilimovich servo-constraint”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **211**:2 (2022), 679–691.

[10] V. V. Kozlov, “The dynamics of systems with servoconstraints. I”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **20**:3 (2015), 205–224.

[11] Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович, *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, М., 1990. [N. N. Bautin, E. A. Leontovich, *Methods and Techniques of Qualitative Research of Dynamical Systems on a Plane*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russian)].

[12] I. Bizyaev, S. Bolotin, I. Mamaev, “Normal forms and averaging in an acceleration problem in nonholonomic mechanics”, *Chaos*, **31**:1 (2021), 013132.

[13] E. A. Mikishanina, “The problem of acceleration in the dynamics of a double-link wheeled vehicle with arbitrarily directed periodic exitation”, *Theoretical and Applied Mechanics*, **50**:2 (2023), 205–221.

[14] L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001.

[15] В. Р. Барсегян, Т. А. Симонян, А. Г. Матевосян, “Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:145 (2024), 29–42. [V. R. Barseghyan, T. A. Simonyan, A. G. Matevosyan, “On one problem of quadcopter control with given intermediate values of different parts of coordinates”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 29–42 (In Russian)].

[16] А. А. Килин, Ю. Л. Караваев, “Кинематическая модель управления сферороботом с неуравновешенной омниколесной платформой”, *Нелинейная динамика*, **10**:4 (2014), 497–511. [A. A. Kilin, Yu. L. Karavaev, “The kinematic control model for a spherical robot with an unbalanced internal omniwheel platform”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **10**:4 (2014), 497–511 (In Russian)].

[17] А. А Килин, Ю. Л. Караваев, “Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платфорой”, *Нелинейная динамика*, **11**:1 (2015), 187–204. [A. A. Kilin, Yu. L. Karavaev, “The dynamic of a spherical robot with an internal omniwheel platform”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **11**:1 (2015), 187–204 (In Russian)].

[18] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer–Verlag, New York, 1981.

Информация об авторе

Микишанина Евгения Арифжановна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела механики, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва; доцент кафедры актуарной и финансовой математики, Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Российская Федерация. E-mail: evaeva_84@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4408-1888

Поступила в редакцию 23.05.2024 г.
Поступила после рецензирования 05.09.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Information about the author

Evgeniya A. Mikishanina, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher of the Mechanics Department, Steklov Mahematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow; Associate Professor of the Actuarial and Financial Mathematics Department, Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation. E-mail: evaeva_84@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4408-1888

Received 23.05.2024
Reviewed 05.09.2024
Accepted for press 13.09.2024

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-309-324

УДК 517.927.4+517.988.63

Исследование периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородной нелинейностью

Алижон Набиджанович НАИМОВ, Михаил Васильевич БЫСТРЕЦКИЙ

ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»

160000, Российская Федерация, г. Вологда, ул. Ленина, 15

Аннотация. В статье рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой выделена главная нелинейная часть, являющаяся квазиоднородным отображением. Исследуется вопрос о существовании периодических решений. Рассмотрение квазиоднородного отображения позволяет обобщить ранее известные результаты о существовании периодических решений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью. Доказана априорная оценка периодических решений в предположении, что соответствующая невозмущенная система уравнений с квазиоднородной правой частью не имеет ненулевых ограниченных решений. В условиях априорной оценки получены следующие результаты: 1) доказана инвариантность существования периодических решений при непрерывном изменении (гомотопии) главной квазиоднородной нелинейной части; 2) решена задача гомотопической классификации двумерных квазиоднородных отображений, удовлетворяющих условиям априорной оценки; 3) доказан критерий существования периодических решений для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной квазиоднородной нелинейностью.

Ключевые слова: квазиоднородная нелинейность, периодическое решение, априорная оценка, инвариантность существования периодических решений, вращение векторного поля

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00032, https://rscf.ru/project/23-21-00032/).

Для цитирования: *Наимов А.Н., Быстрецкий М.В.* Исследование периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородной нелинейностью // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 309–324. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-309-324

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-309-324

Investigation of periodic solutions of a system of ordinary differential equations with quasi-homogeneous non-linearity

Alizhon N. NAIMOV, Mikhail V. BYSTRETSKII
Vologda State University
15 Lenin St., Vologda 160000, Russian Federation

Abstract. The article considers a system of ordinary differential equations in which the main nonlinear part, which is a quasi-homogeneous mapping, is distinguished. The question of the existence of periodic solutions is investigated. Consideration of a quasi-homogeneous mapping allows us to generalize previously known results on the existence of periodic solutions for a system of ordinary differential equations with the main positively homogeneous non-linearity. An a priori estimate for periodic solutions is proved under the condition that the corresponding unperturbed system of equations with a quasi-homogeneous right-hand side does not have non-zero bounded solutions. Under the conditions of an a priori estimate, the following results were obtained: 1) the invariance of the existence of periodic solutions under continuous change (homotopy) of the main quasi-homogeneous non-linear part was proved; 2) the problem of homotopy classification of two-dimensional quasi-homogeneous mappings satisfying the a priori estimation condition has been solved; 3) a criterion for the existence of periodic solutions for a two-dimensional system of ordinary differential equations with the main quasi-homogeneous non-linearity is proved.

Keywords: quasi-homogeneous non-linearity, periodic solution, a priori estimate, invariance of the existence of periodic solutions, the mapping degree of a vector field

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00032, https://rscf.ru/project/23-21-00032/).

Mathematics Subject Classification: 34C25, 47H11, 55M25.

For citation: Naimov A.N., Bystretskii M.V. Investigation of periodic solutions of a system of ordinary differential equations with quasi-homogeneous non-linearity. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 309–324. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-309-324 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть R^n — пространство n-мерных векторов с вещественными координатами, $n \geq 2$. Пусть заданы положительные числа ω, ν и вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с положительными координатами. Через $\mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ обозначим множество непрерывных отображений $P = (P_1, \ldots, P_n) : \mathrm{R}^{1+n} \mapsto \mathrm{R}^n$, удовлетворяющих условиям

1) ω-периодичности по t: $P(t+\omega, y) \equiv P(t,y)$,

2) квазиоднородности по $y = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$P_j(t, \lambda^{\alpha_1} y_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} y_n) \equiv \lambda^{\alpha_j + \nu} P_j(t, y_1, \ldots, y_n) \quad \forall \lambda > 0, \quad j = \overline{1,n};$$

а через $\mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ — множество непрерывных отображений $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathrm{R}^{1+n} \mapsto \mathrm{R}^n$, удовлетворяющих условиям

3) ω-периодичности по t: $f(t+\omega, y) \equiv f(t,y)$;

4) ограниченности на порядок роста по $y = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$\lim_{r \to +\infty} r^{-(\alpha_j+\nu)} \max_{0 \leq t \leq \omega,\ |y| \leq 1} |f_j(t, r^{\alpha_1} y_1, \ldots, r^{\alpha_n} y_n)| = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = P(t, x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathrm{R}^n, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{0.1}$$

где $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. Вектор-функцию $x \in C^1(\mathrm{R}; \mathrm{R}^n)$ называем ω-периодическим решением системы (0.1), если $x(t)$ удовлетворяет этой системе и $x(t+\omega) \equiv x(t)$.

В настоящей работе исследованы условия на $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, обеспечивающие существование ω-периодических решений системы уравнений (0.1) при любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. В системе уравнений (0.1) слагаемое P называем главной и квазиоднородной нелинейностью, а f считаем возмущением.

Существование периодических решений для систем уравнений вида (0.1) в случае положительно однородного отображения P, когда $\alpha = (1, \ldots, 1)$, исследовано в работах [1, 2] методом априорной оценки и методами вычисления вращения векторных полей. Суть метода априорной оценки состоит в доказательстве ограниченности множества ω-периодических решений по норме пространства $C([0,\omega]; \mathrm{R}^n)$ при предположении, что невозмущенная система уравнений

$$z'(t) = P(t_0, z(t)), \quad z(t) \in \mathrm{R}^n, \tag{0.2}$$

при любом фиксированном $t_0 \in [0,\omega]$ не имеет ненулевых ограниченных решений. В этом случае вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (P(s, x(s)) + f(s, x(s)))\, ds, \quad x \in C([0,\omega]; \mathrm{R}^n),$$

не обращается в ноль вне шара $\|x\| < r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega]; \mathrm{R}^n)$. Поэтому, согласно теории векторных полей [3, с. 135], определена целочисленная характеристика $\gamma_\infty(\Phi)$ — вращение векторного поля Φ на сфере $\|x\| = r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega]; \mathrm{R}^n)$. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения [3, с. 141] имеет место равенство $\Phi(x_0) = 0$ при некоторой вектор-функции $x_0 \in C([0,\omega]; \mathrm{R}^n)$, этим самым доказывается существование ω-периодических решений.

Рассмотрение квазиоднородного отображения P позволяет не только обобщить результаты работ [1, 2], но и уточнить их следующим образом. Если для положительно однородного отображения P не при всех возмущениях f имеет место априорная оценка ω-периодических решений, то класс возмущений можно сужать так, что главная нелинейная часть системы уравнений (0.1) окажется квазиоднородным отображением. Например, система двух скалярных уравнений

$$x_1'(t) = |x_1(t)|^{m-1}x_1(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \qquad x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)),$$

где $m > 1$, не при всех возмущениях $f(t, y_1, y_2) = \big(f_1(t, y_1, y_2), f_2(t, y_1, y_2)\big)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|y_1|+|y_2|\to\infty} (|y_1| + |y_2|)^{-m} \max_{0\le t\le\omega} |f(t, y_1, y_2)| = 0,$$

допускает априорную оценку ω-периодических решений. Если сужать класс возмущений с дополнительным условием

$$f_2(t, y_1, y_2) = |y_2|^{q-1}y_2 + \tilde{f}_2(t, y_1, y_2),$$

где

$$1 < q < m, \quad \lim_{\rho\to\infty} \rho^{-q(m-1)/(q-1)} \max_{0\le t\le\omega,\, |y_1|+|y_2|\le 1} |\tilde{f}_2(t, \rho y_1, \rho^{(m-1)/(q-1)} y_2)| = 0,$$

то в результате получаем систему уравнений вида (0.1) с квазиоднородным отображением $P(y_1, y_2) = (|y_1|^{m-1}y_1, |y_2|^{q-1}y_2)$, где $\alpha = (1, (m-1)/(q-1))$, $\nu = m - 1$.

Кроме того, к системе уравнений вида (0.1) с квазиоднородной нелинейностью P приводятся многие системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с производными высоких порядков. Такие системы уравнений представляют интерес при исследовании нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с применением схемы Фаэдо–Галеркина [4, с. 118–132].

В настоящей работе доказана ограниченность множества ω-периодических решений системы уравнений (0.1) по норме пространства $C([0, \omega]; \mathrm{R}^n)$ (априорная оценка) в предположении, что $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$, $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ и система уравнений (0.2) не имеет ненулевых ограниченных решений при любом фиксированном $t_0 \in [0, \omega]$. Далее, в условиях априорной оценки получены следующие результаты: 1) доказана инвариантность существования периодических решений при непрерывном изменении (гомотопии) главной квазиоднородной нелинейной части; 2) решена задача гомотопической классификации двумерных квазиоднородных отображений, удовлетворяющих условиям априорной оценки; 3) доказан критерий существования периодических решений для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной квазиоднородной нелинейностью.

Существование периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано в многочисленных работах других авторов. Можно отметить работы [5, 6], где применяются идеи и методы, близкие к настоящей работе. Например, в работе [6] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в R^n, чтобы при любом ω-периодическом ее возмущении она имела ω-периодическое решение.

1. Основные результаты

О п р е д е л е н и е 1.1. Скажем, что для ω-периодических решений системы уравнений (0.1) имеет место *априорная оценка*, если множество ω-периодических решений системы уравнений (0.1) пусто или ограничено по норме пространства $C([0,\omega];\mathrm{R}^n)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, и при любом фиксированном $t_0 \in [0,\omega]$ система уравнений (0.2) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда имеет место априорная оценка для ω-периодических решений системы уравнений (0.1).*

Обозначим через $\mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ множество отображений $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1.

О п р е д е л е н и е 1.2. Два отображения $P^1, P^2 \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ назовем *гомотопными*, если существует семейство отображений $\tilde{P}(\cdot,\cdot,\lambda) \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, $\lambda \in [0,1]$, непрерывно зависящее от λ и такое, что $\tilde{P}(\cdot,\cdot,0) = P^1$, $\tilde{P}(\cdot,\cdot,1) = P^2$.

Верна следующая теорема об инвариантности существования ω-периодических решений при гомотопии.

Теорема 1.2. *Пусть отображения $P^1, P^2 \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ гомотопны, и при $P = P^1$ и любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ система уравнений (0.1) имеет ω-периодическое решение. Тогда система уравнений (0.1) при $P = P^2$ и любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ также имеет ω-периодическое решение.*

В связи с теоремой 1.2 рассмотрим следующие задачи:
– описание гомотопических классов множества $\mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ (задача гомотопической классификации);
– существование ω-периодического решения в гомотопических классах.

Исследуем эти задачи при $n = 2$.

Для $P = (P_1, P_2) \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ существует единственная функция $\theta_P(t,s)$, непрерывно зависящая от аргументов $t, s \in \mathrm{R}$ и удовлетворяющая условиям: $\theta_P(0,0) \in [0,2\pi)$,

$$P_1(t,\cos s,\sin s) = |P(t,\cos s,\sin s)|\cos(\theta_P(t,s)),$$

$$P_2(t,\cos s,\sin s) = |P(t,\cos s,\sin s)|\sin(\theta_P(t,s)).$$

Такую функцию $\theta_P(t,s)$ называют *угловой*.

Определим числа

$$\gamma_0(P) := \frac{1}{2\pi}\left(\theta_P(t,s+2\pi) - \theta_P(t,s)\right), \quad \gamma_1(P) := \frac{1}{2\pi}\left(\theta_P(t+\omega,s) - \theta_P(t,s)\right).$$

Эти числа целые и не зависят от t и s.

Введем функции

$$Q_1^{\alpha,p_0,p_1}(t,y_1,y_2) := |y|_{*,\alpha}^{\alpha_1+\nu} Re\Big(e^{i2\pi p_1 t/\omega}\Big(\frac{y_1}{|y|_{*,\alpha}^{\alpha_1}} + i\frac{y_2}{|y|_{*,\alpha}^{\alpha_2}}\Big)^{p_0}\Big),$$

$$Q_2^{\alpha,p_0,p_1}(t,y_1,y_2) := |y|_{*,\alpha}^{\alpha_1+\nu} Im\Big(e^{i2\pi p_1 t/\omega}\Big(\frac{y_1}{|y|_{*,\alpha}^{\alpha_1}} + i\frac{y_2}{|y|_{*,\alpha}^{\alpha_2}}\Big)^{p_0}\Big),$$

где $i = \sqrt{-1}$, p_0, p_1 — целые числа, $|y|_{*,\alpha} = \lambda$ если $y = (\lambda^{\alpha_1}\cos s, \lambda^{\alpha_2}\sin s)$, $\lambda \geq 0$. Легко проверить, что

$$Q^{\alpha,p_0,p_1} = (Q_1^{\alpha,p_0,p_1}, Q_2^{\alpha,p_0,p_1}) \in \mathfrak{P}_{2,\omega}(\alpha,\nu), \qquad \theta_{Q^{\alpha,p_0,p_1}}(t,s) = p_0 s + \frac{2\pi p_1}{\omega} t,$$

$$\gamma_0(Q^{\alpha,p_0,p_1}) = p_0, \qquad \gamma_1(Q^{\alpha,p_0,p_1}) = p_1.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.3. *Пусть* $P \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. *Тогда*
а) $\gamma_0(P) \leq 1$;
б) *если* $\gamma_0(P) = 1$, *то* P *гомотопно одному из отображений* $\pm Q^{\alpha,1,0}$;
в) *если* $\gamma_0(P) < 1$, *то* P *гомотопно* Q^{α,p_0,p_1}, *где* $p_0 = \gamma_0(P)$, $p_1 = \gamma_1(P)$.

Теорема 1.4. *Пусть* $P \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. *Тогда условие* $\gamma_0(P) \neq 0$ *достаточно для существования* ω*-периодического решения системы* (0.1) *при любом* $f \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$, *а при выполнении дополнительного условия* $\nu > |(\alpha_1 - \alpha_2)\mathrm{sign}(\gamma_1(P))|$ *условие* $\gamma_0(P) \neq 0$ *еще и необходимо для существования* ω*-периодического решения системы* (0.1) *при любом* $f \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$.

Теоремы 1.3, 1.4 доказаны по схеме работы [7].

Следствие 1.1. *Если* $P \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ *и* $\nu > |(\alpha_1 - \alpha_2)\mathrm{sign}(\gamma_1(P))|$, *то условие* $\gamma_0(P) \neq 0$ *необходимо и достаточно для существования* ω*-периодического решения системы уравнений* (0.1) *при любом* $f \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$.

2. Доказательства основных результатов

В этом параграфе приведем доказательства всех сформулированных выше теорем, а также связанных с ними утверждений.

2.1. Теорема 1.1

Доказательство теоремы 1.1. Предположим, что существует неограниченная последовательность ω-периодических решений $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ системы уравнений (0.1). Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = (y_{k1}(t), \ldots, y_{kn}(t))^\top$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$y_{kj}(t) = r_k^{-\alpha_j} x_{kj}(t_k + r_k^{-\nu} t), \quad j = \overline{1,n}, \quad t \in \mathrm{R},$$

$$r_k := \max_{0 \leq t \leq \omega} |x_k(t)|_\alpha = |x_k(t_k)|_\alpha, \qquad |z|_\alpha := \left((z_1^2)^{1/\alpha_1} + \ldots + (z_n^2)^{1/\alpha_n}\right)^{1/2}.$$

Для вектор-функций $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$y_k'(t) = P(t_k + r_k^{-\nu} t, y_k(t)) + g_k(t), \quad |y_k(t)|_\alpha \leq |y_k(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathrm{R}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$g_{kj}(t) = r_k^{-\alpha_j - \nu} f_j(t_k + r_k^{-\nu} t, r_k^{\alpha_1} y_1(t), \ldots, r_k^{\alpha_n} y_n(t)), \quad j = \overline{1,n}.$$

Переходя к пределу и учитывая условие 4), получаем

$$y_0'(t) = P(t_0, y_0(t)), \quad |y_0(t)|_\alpha \leq |y_0(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Пришли к противоречию. $\square$

2.2. Теорема 1.2

Пусть отображения $P^1, P^2 \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ гомотопны и $\tilde P(\cdot,\cdot,\lambda) \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, $\lambda \in [0,1]$ — непрерывная линия (путь), соединяющая P^1 и P^2, $\tilde P(\cdot,\cdot,0) = P^1$, $\tilde P(\cdot,\cdot,1) = P^2$. Проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1. *Существует $\sigma > 0$ такое, что для любой ω-периодической вектор-функции $x \in C^1(\mathrm{R};\mathrm{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\max\{|x(t)|_\alpha : 0 \le t \le \omega\} > \sigma^{-1}$, верна оценка*

$$\max_{0\le t\le\omega}\left|x'_{j_0}(t) - \tilde P_{j_0}(t,x(t),\lambda)\right| > \sigma \max_{0\le t\le\omega}\left|x(t)\right|_\alpha^{\alpha_{j_0}+\nu}$$

при некотором $j_0 = j_0(x)$ и любом значении $\lambda \in [0,1]$.

Доказательство. Предположим, что такое $\sigma > 0$ не существует. Тогда найдутся последовательности $\lambda_k \in [0,1]$, $x_k \in C^1(\mathrm{R};\mathrm{R}^n)$, $k = 1,2,\ldots$ такие, что

$$x_k(t+\omega) \equiv x_k(t), \qquad r_k := \max_{0\le t\le\omega}|x_k(t)|_\alpha = |x_k(t_k)|_\alpha > k,$$

$$\max_{0\le t\le\omega}\left|x'_{kj}(t) - \tilde P_j(t,x_k(t),\lambda_k)\right| \le \frac{1}{k} r_k^{\alpha_j+\nu}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = (y_{k1}(t),\ldots,y_{kn}(t))^\top$, $k = 1,2,\ldots$, где

$$y_{kj}(t) = r_k^{-\alpha_i} x_{kj}(t_k + r_k^{-\nu} t), \quad j = \overline{1,n}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Для вектор-функций $y_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$ имеем

$$y'_{kj}(t) = P_j(t_k + r_k^{-\nu}t, y_k(t), \lambda_k) + g_{kj}(t), \quad j = \overline{1,n},$$

$$|y_k(t)|_\alpha \le |y_k(0)|_\alpha = 1, \quad |g_{kj}(t)| \le \frac{1}{k}, \quad t \in \mathrm{R}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где

$$g_{kj}(t) \equiv r_k^{-\alpha_j-\nu}\left(x'_{kj}(t_k + r_k^{-\nu}t) - \tilde P_j(t_k + r_k^{-\nu}t, x_k(t_k + r_k^{-\nu}t), \lambda_k)\right).$$

Переходя к пределу, получаем

$$y'_0(t) = P(t_0, y_0(t), \lambda_0), \quad |y_0(t)|_\alpha \le |y_0(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathrm{R},$$

что противоречит условию $\tilde P(\cdot,\cdot,\lambda_0) \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. □

Доказательство теоремы 1.2. Пусть σ — число, удовлетворяющее условию леммы 2.1. Покажем, что если для $\lambda, \mu \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$\max_{0\le t\le\omega}\left|\tilde P_j(t,y,\lambda) - \tilde P_j(t,y,\mu)\right| \le \frac{\sigma}{4}|y|_\alpha^{\alpha_j+\nu}$$

при любых $y \in \mathrm{R}^n$, $j = \overline{1,n}$, то из существования ω-периодического решения системы

$$x'(t) = \tilde P(t,x(t),\lambda) + g(t,x(t)), \quad t \in \mathrm{R} \tag{2.1}$$

при любом $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ вытекает существование ω-периодического решения системы

$$x'(t) = \tilde P(t,x(t),\mu) + f(t,x(t)), \quad t \in \mathrm{R} \tag{2.2}$$

при любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. Этим самым теорема 1.2 будет доказана.

Для произвольного $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ построим $g_f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ так, чтобы при $g = g_f$ всякое ω-периодическое решение системы (2.1) оказалось решением системы (2.2). Воспользуемся тем, что для $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ имеет место неравенство

$$|f_j(t,y)| < \frac{\sigma}{4}|y|_\alpha^{\alpha_j+\nu} + M, \quad y \in \mathrm{R}^n, \quad j = \overline{1,n},$$

где $M > 0$ и зависит лишь от f и σ. Выберем число r, удовлетворяющее условиям $r > 1/\sigma$, $r^{\alpha_j+\nu} > 2M/\sigma$ при всех $j = \overline{1,n}$. Положим

$$g_f(t,y) := f(t,y) + \eta_r(|y|_\alpha)(\tilde{P}(t,y,\mu) - \tilde{P}(t,y,\lambda)),$$

где $\eta_r \in C[0,+\infty)$, $0 \le \eta_r(\tau) \le 1$, $\eta_r(\tau) = 1$ при $\tau \le r$ и $\eta_r(\tau) = 0$ при $\tau \ge r+1$. Очевидно, $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. Пусть $x(t)$ — ω-периодическое решение системы (2.1) при $g = g_f$. Проверим, что $A := \max\{|x(t)|_\alpha : 0 \le t \le \omega\} \le r$; тогда $x(t)$ будет решением системы (2.2). Действительно, если $A > r$, то согласно лемме 2.1 при некотором $j_0 = j_0(x)$ имеет место неравенство

$$\max_{0\le t\le\omega}\left|x'_{j_0}(t) - \tilde{P}_{j_0}(t,x(t),\lambda)\right| > \sigma A^{\alpha_{j_0}+\nu}.$$

С другой стороны, в силу системы уравнений (2.1) имеем;

$$\max_{0\le t\le\omega}\left|x'_{j_0}(t) - \tilde{P}_{j_0}(t,x(t),\lambda)\right| = \max_{0\le t\le\omega}|(g_f)_{j_0}(t,x(t))| \le \frac{\sigma}{2}A^{\alpha_{j_0}+\nu} + M.$$

Следовательно, $r^{\alpha_{j_0}+\nu} < A^{\alpha_{j_0}+\nu} < 2M/\sigma$. Полученное противоречит выбору r. □

2.3. Теорема 1.3

Пусть $Q = (Q_1, Q_2) : \mathrm{R}^2 \mapsto \mathrm{R}^2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию квазиоднородности $Q \in \mathfrak{P}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ и условию невырожденности $Q(\cos s, \sin s) \ne 0 \ \ \forall s \in \mathrm{R}$. Выясним, при каких дополнительных условиях имеет место включение $Q \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. Для этого определим непрерывные угловые функции $\theta_Q(s)$, $\theta_\alpha(s)$ из следующих равенств:

$$Q_1(\cos s, \sin s) = |Q(\cos s, \sin s)|\cos(\theta_Q(s)),$$

$$Q_2(\cos s, \sin s) = |Q(\cos s, \sin s)|\sin(\theta_Q(s)),$$

$$\cos(\theta_\alpha(s)) = \frac{\alpha_1 \cos s}{b_\alpha(s)}, \quad \sin(\theta_\alpha(s)) = \frac{\alpha_2 \sin s}{b_\alpha(s)},$$

где $s \in \mathrm{R}$, $\theta_Q(0) \in [0, 2\pi)$, $\theta_\alpha(0) = 0$, $b_\alpha(s) = ((\alpha_1 \cos s)^2 + (\alpha_2 \sin s)^2))^{1/2}$. Определим число

$$\gamma(Q) := \frac{1}{2\pi}\left(\theta_Q(s+2\pi) - \theta_Q(s)\right),$$

которое является целым и не зависит от s.

Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in (\tau_1, \tau_2)$ — произвольное ненулевое решение системы уравнений

$$x'(t) = Q(x(t)), \quad x(t) \in \mathrm{R}^2. \tag{2.3}$$

Скалярно перемножая на $x(t)$ можно проверить, что $x(t)$ нигде не обращается в ноль. Произведем замену $x_1(t) = r^{\alpha_1}(t)\cos\psi(t)$, $x_2(t) = r^{\alpha_2}(t)\sin\psi(t)$. Данная замена обратима и относительно $r(t)$ и $\psi(t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \xi'(t)r'(t) = r(t)|Q(\cos\psi(t),\sin\psi(t))|\cos\left(\theta_Q(\psi(t)) - \psi(t)\right), \\ \xi'(t)\psi'(t) = |Q(\cos\psi(t),\sin\psi(t))| b_\alpha(\psi(t))\sin\left(\theta_Q(\psi(t)) - \theta_\alpha(\psi(t))\right), \end{cases}$$

где

$$\xi(t) = \int_0^t \frac{\alpha_1\cos^2\psi(s) + \alpha_2\sin^2\psi(s)}{r^\nu(s)|Q(\cos\psi(s),\sin\psi(s))|}ds.$$

Отсюда для $\rho(t) = r(\xi(t))$, $\varphi(t) = \psi(\xi(t))$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \rho'(t) = \rho(t)\cos\left(\theta_Q(\varphi(t)) - \varphi(t)\right), \\ \varphi'(t) = b_\alpha(\varphi(t))\sin\left(\theta_Q(\varphi(t)) - \theta_\alpha(\varphi(t))\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

Таким образом, установлено, что система уравнений (2.3) не имеет ненулевых ограниченных решений тогда и только тогда, когда система уравнений (2.4) не имеет решений с ненулевой и ограниченной координатой $\rho(t)$.

Лемма 2.2. *Пусть*

$$\sin\left(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)\right) \neq 0 \qquad \forall s \in \mathrm{R}. \tag{2.5}$$

Тогда $\gamma(Q) = 1$ и система уравнений (2.3) не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда выполнено условие

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta_Q(s) - s)}{b_\alpha(s)\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s))}ds \neq 0. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнено условие (2.5), то

$$\pi j_0 < \theta_Q(s) - \theta_\alpha(s) < \pi(j_0 + 1)$$

при некотором целом j_0 и всех $s \in \mathrm{R}$. Отсюда выводим:

$$-\pi < (\theta_Q(s + 2\pi) - \theta_Q(s)) - (\theta_\alpha(s + 2\pi) - \theta_\alpha(s)) < \pi,$$

$$-\pi < 2\pi\gamma(Q) - (\theta_\alpha(s + 2\pi) - \theta_\alpha(s)) < \pi,$$

следовательно, $\gamma(Q) = 1$, так как $\theta_\alpha(s + 2\pi) - \theta_\alpha(s) = 2\pi$. Кроме того, из условия (2.5) следует, что для произвольного решения системы уравнений (2.4) его координата $\varphi(t)$ строго монотонна, и для любого целого l существует t_l такое, что $\varphi(t + t_l) \equiv \varphi(t) + 2\pi l$. Отсюда, в силу первого уравнения системы (2.5), выводим:

$$\ln\rho(t + t_l) \equiv \ln\rho(t) + l\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta_Q(s) - s)}{b_\alpha(s)\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s))}ds.$$

Следовательно, координата $\rho(t)$ ограничена лишь при выполнении условия (2.6). $\square$

Пусть $\sin\left(\theta_Q(s_0) - \theta_\alpha(s_0)\right) = 0$ при некотором $s_0 \in [0, 2\pi)$.

Определение 2.1. Интервал $(s_1, s_2) \subset (s_0, s_0+2\pi)$, где $\sin(\theta_Q(s_j) - \theta_\alpha(s_j)) = 0$, $j = 1, 2$, назовем

гиперболическим, если

$$\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) > 0 \ \ \forall s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_Q(s_1) - s_1) < 0, \quad \cos(\theta_Q(s_2) - s_2) > 0$$

или

$$\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) < 0 \ \ \forall s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_Q(s_1) - s_1) > 0, \quad \cos(\theta_Q(s_2) - s_2) < 0;$$

эллиптическим, если

$$\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) > 0 \ \ \forall s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_Q(s_1) - s_1) > 0, \quad \cos(\theta_Q(s_2) - s_2) < 0,$$

или

$$\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) < 0 \ \ \forall s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_Q(s_1) - s_1) < 0, \quad \cos(\theta_Q(s_2) - s_2) > 0;$$

параболическим, если не пересекается с гиперболическими и эллиптическими интервалами и не содержится в другом более широком интервале, не пересекающимся с гиперболическими и эллиптическими интервалами.

Можно непосредственно проверить справедливость следующих шести утверждений.

Утверждение 2.1. *Если φ_0 принадлежит гиперболическому (эллиптическому, параболическому) интервалу, то среди решений системы уравнений (2.4), удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = \varphi_0$, существует решение, у которого координата $\rho(t)$*

а) *неограничена при $t > 0$ и $t < 0$ — в гиперболическом случае;*

б) *ограничена при $t > 0$ и $t < 0$ — в эллиптическом случае;*

в) *ограничена при $t > 0$ $(t < 0)$ и неограничена при $t < 0$ $(t > 0)$ — в параболическом случае.*

Утверждение 2.2. *Число гиперболических, эллиптических и параболических интервалов конечно и объединения их замыканий совпадают с отрезком $[s_0, s_0 + 2\pi]$.*

Утверждение 2.3. *Для концов s_1, s_2 интервала (s_1, s_2), являющегося гиперболическим (эллиптическим, параболическим), справедливо равенство*

$$\theta_Q(s_2) - \theta_\alpha(s_2) = \theta_Q(s_1) - \theta_\alpha(s_1) + \chi\pi,$$

где χ равно -1, 1 или 0 соответственно в зависимости от гиперболичности, эллиптичности или параболичности интервала (s_1, s_2).

Утверждение 2.4. *Справедлива формула*

$$\gamma(Q) = 1 + \frac{1}{2}\left(n_{Э} - n_{Г}\right),$$

где $n_{Г}$ и $n_{Э}$ — число гиперболических и эллиптических интервалов соответственно.

Утверждение 2.5. *Если система уравнений* (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений, то*

$$\gamma(Q) = 1 - \frac{1}{2} n_\Gamma \leq 1. \tag{2.7}$$

Утверждение 2.6. *Система уравнений* (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений тогда и только тогда, когда* $n_Э = 0$ *и* (2.3) *не имеет ненулевых периодических решений.*

Лемма 2.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\gamma(Q) = 1$;

2) $\sin(\theta_Q(s_0) - \theta_\alpha(s_0)) = 0$ *при некотором* $s_0 \in [0, 2\pi)$;

3) *при любом* $x_0 \in \mathrm{R}^2$ *единственно решение системы уравнений* (2.3), *удовлетворяющее начальному условию* $x(0) = x_0$.

Тогда система уравнений (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда выполнено одно из двух условий: либо*

$$-\pi < \theta_Q(s) - \theta_\alpha(s) < \pi \quad \forall s \in \mathrm{R}, \tag{2.8}$$

либо

$$0 < \theta_Q(s) - \theta_\alpha(s) < 2\pi \quad \forall s \in \mathrm{R}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Заметим, что выполнение одного из условий (2.8), (2.9) равносильно равенствам $n_Э = n_\Gamma = 0$.

Если система уравнений (2.3) не имеет ненулевых ограниченных решений, то $n_Э = 0$ и в силу условия $\gamma(Q) = 1$ и формулы (2.7) получаем $n_\Gamma = 0$. Обратно, если $n_Э = n_\Gamma = 0$, то для системы уравнений (2.3), согласно утверждению 2.6, отсутствие ненулевых ограниченных решений равносильно отсутствию ненулевых периодических решений. А в силу условий 2) и 3) ненулевое периодическое решение не существует. □

Лемма 2.4. *Если* $\gamma(Q) < 1$, *то система уравнений* (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда выполнено условие*

$$\big(\exists s_1 \ \exists j_1 - \textit{целое} \quad \theta_Q(s_1) - \theta_\alpha(s_1) = \pi j_1\big) \implies \theta_Q(s) - \theta_\alpha(s) < \pi j_1 + \pi \quad \forall s > s_1. \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу условия $\gamma(Q) < 1$ и утверждения 2.6 для системы уравнений (2.3) отсутствие ненулевых ограниченных решений равносильно равенству $n_Э = 0$. А это равенство равносильно условию (2.10). □

Леммы 2.2–2.4 подытожим следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть* $Q \in \mathfrak{P}_{2,\omega}(\alpha, \nu)$, $Q(\cos s, \sin s) \neq 0 \ \ \forall s \in \mathrm{R}$ *и пусть при* $\gamma(Q) = 1$ *единственно решение задачи Коши для системы уравнений* (2.3) *с любым начальным значением* $x_0 \in \mathrm{R}^2$. *Тогда система уравнений* (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда выполнено одно из следующих условий:*

Условие 2.1. $\gamma(Q) = 1$, $\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) \neq 0 \ \ \forall s \in \mathrm{R}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta_Q(s) - s)}{b_\alpha(s) \sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s))} ds \neq 0.$$

У с л о в и е 2.2. $\gamma(Q)=1,\ \sin(\theta_Q(s_0)-\theta_\alpha(s_0))=0$ *при некотором* $s_0\in[0,2\pi)$, *либо* $-\pi<\theta_Q(s)-\theta_\alpha(s)<\pi\ \ \forall s\in\mathrm{R}$, *либо* $0<\theta_Q(s)-\theta_\alpha(s)<2\pi\ \ \forall s\in\mathrm{R}$.

У с л о в и е 2.3. $\gamma(Q)<1$ *и* $\big(\exists s_1\in\mathrm{R}\ \ \exists j_1$ *– целое* $\theta_Q(s_1)-\theta_\alpha(s_1)=\pi j_1\big)\implies \theta_Q(s)-\theta_\alpha(s)<\pi j_1+\pi\quad\forall s>s_1$.

Теорема 2.1 для положительно однородного отображения Q анонсирована в работе [8].

Д о к а з а т е л ь с т в о у т в е р ж д е н и й а), б), в) т е о р е м ы 1.3. Пусть $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. Без ограничения общности можно считать, что $P(t,y)$ гладко зависит от y. Утверждение а) теоремы 1.3 следует из утверждения 2.5.

Для доказательства утверждений б) и в) воспользуемся теоремой 2.1. Из теоремы 2.1 вытекает, что включение $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ равносильно одному из следующих трех условий:

У с л о в и е 2.4. $\gamma_0(P)=1$ *и при любом* $t\in\mathrm{R}$ *либо*

$$\sin(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))\neq 0\quad\forall s\in\mathrm{R},\qquad \int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta_P(t,s)-s)}{b_\alpha(s)\sin(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))}ds>0,$$

либо $\sin(\theta_P(t,s_0)-\theta_\alpha(s_0))=0$ *при некотором* $s_0\in[0,2\pi)$ *и*

$$-\pi<\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s)<\pi\quad\forall s\in\mathrm{R}.$$

У с л о в и е 2.5. $\gamma_0(P)=1$ *и при любом* $t\in\mathrm{R}$ *либо*

$$\sin(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))\neq 0\quad\forall s\in\mathrm{R},\qquad \int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta_P(t,s)-s)}{b_\alpha(s)\sin(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))}ds<0,$$

либо $\sin(\theta_P(t,s_0)-\theta_\alpha(s_0))=0$ *при некотором* $s_0\in[0,2\pi)$ *и*

$$0<\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s)<2\pi\quad\forall s\in\mathrm{R}.$$

У с л о в и е 2.6. $\gamma_0(P)<1$ *и* $\big(\exists s_n\in\mathrm{R}\ \ \exists j_1$ *– целое* $\theta_P(t,s_1)-\theta_\alpha(s_1)=\pi j_1\big)\implies \theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s)<\pi j_1+\pi\quad\forall s>s_1$.

Пусть выполнены условия 2.4. Построим семейство угловых функций $\Theta(t,s,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$, непрерывно зависящее от t,s,λ, удовлетворяющее условиям 2.4 при любых фиксированных t,λ и $\Theta(t,s,0)=\theta_P(t,s)$, $\Theta(t,s,1)=s$. Этим самым будет доказана гомотопность отображений P и $Q^{1,0}$. Семейство $\Theta(t,s,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$ построим следующими формулами:

$$\Theta(t,s,\lambda)=\theta_\alpha(s)+(1-2\lambda)(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s)),\quad \lambda\in[0,1/2],$$

$$\Theta(t,s,\lambda)=(2-2\lambda)\theta_\alpha(s)+(2\lambda-1)s,\quad \lambda\in[1/2,1].$$

При любых фиксированных t,λ функция $\Theta(t,s,\lambda)$ удовлетворяет условиям 2.4.

Если выполнены условия 2.5, то семейство $\Theta(t,s,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$ определим формулами

$$\Theta(t,s,\lambda)=\theta_\alpha(s)+(1-2\lambda)(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))+2\lambda\pi,\quad \lambda\in[0,1/2],$$

$$\Theta(t,s,\lambda)=(2-2\lambda)\theta_\alpha(s)+(2\lambda-1)s+\pi,\quad \lambda\in[1/2,1].$$

При любых фиксированных t, λ функция $\Theta(t, s, \lambda)$ удовлетворяет условиям 2.5. Отсюда следует гомотопность отображений P и $-Q^{1,0}$. Утверждение б) теоремы 1.3 доказано.

Если выполнены условия 2.6, то семейство $\Theta(t, s, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$ построим следующими формулами:

$$\Theta(t, s, \lambda) = \theta_\alpha(s) + (1 - 3\lambda)(\theta_P(t, s) - \theta_\alpha(s)) + 3\lambda \max\left(\theta_P(t, 2\pi) - 2\pi, \quad \min_{0 \le \tau \le s}(\theta_P(t, \tau) - \theta_\alpha(\tau))\right), \quad \lambda \in [0, 1/3],$$

$$\Theta(t, s, \lambda) = \theta_\alpha(s) + (3\lambda - 1)(\theta_P(t, 0) + (p_0 - 1)s) + (2 - 3\lambda) \max\left(\theta_P(t, 2\pi) - 2\pi, \quad \min_{0 \le \tau \le s}(\theta_P(t, \tau) - \theta_\alpha(\tau))\right), \quad \lambda \in [1/3, 2/3],$$

$$\Theta(t, s, \lambda) = (3 - 3\lambda)(\theta_\alpha(s) + \theta_P(t, 0)) + (3\lambda - 2)(2\pi p_1 t/\omega + s) + (p_0 - 1)s, \quad \lambda \in [2/3, 1],$$

где $p_0 = \gamma_0(P)$, $p_1 = \gamma_1(P)$. При любых фиксированных t, λ функция $\Theta(t, s, \lambda)$ удовлетворяет условиям 2.6. Отсюда следует гомотопность отображений P и Q^{p_0, p_1}. Утверждение в) теоремы 1.3 доказано. □

2.4. Теорема 1.4

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 1.4.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $P \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha, \nu)$, $\nu > |(\alpha_1 - \alpha_2)\mathrm{sign}(\gamma_1(P))|$ и $\gamma_0(P) = 0$. Покажем, что для такого P при некотором $f \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha, \nu)$ система уравнений (0.1) не имеет ω-периодических решений. Учитывая теоремы 1.2 и 1.3, можно считать, что $P = Q^{\alpha, 0, p_1}$. В этом случае система уравнений (0.1) принимает вид

$$\begin{cases} x_1'(t) = |x(t)|_{*,\alpha}^{\alpha_1 + \nu} \cos \frac{2\pi p_1}{\omega} t + f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = |x(t)|_{*,\alpha}^{\alpha_2 + \nu} \sin \frac{2\pi p_1}{\omega} t + f_2(t, x_1(t), x_2(t)), \end{cases} \tag{2.11}$$

где $p_1 = \gamma_1(P)$, $|y|_{*,\alpha} = \lambda$, если $y = (\lambda^{\alpha_1} \cos s, \lambda^{\alpha_2} \sin s)$, $\lambda \ge 0$.

Положим

$$f_1(t, y_1, y_2) = -\frac{2\pi p_1}{\omega} y_2 + \cos \frac{2\pi p_1}{\omega} t, \qquad f_2(t, y_1, y_2) = \frac{2\pi p_1}{\omega} y_1 + \sin \frac{2\pi p_1}{\omega} t.$$

Тогда для любого решения системы (2.11) имеем:

$$\left(x_1(t) \cos \frac{2\pi p_1}{\omega} t + x_2(t) \sin \frac{2\pi p_1}{\omega} t\right)' = |x(t)|_{*,\alpha}^{\alpha_1 + \nu} \cos^2 \frac{2\pi p_1}{\omega} t + |x(t)|_{*,\alpha}^{\alpha_2 + \nu} \sin^2 \frac{2\pi p_1}{\omega} t + 1.$$

В силу условия $\nu > |(\alpha_1 - \alpha_2)\mathrm{sign}(p_1)|$ справедливо включение $f = (f_1, f_2) \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha, \nu)$. Следовательно, при таком $f \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha, \nu)$ система уравнений (2.11) не имеет ω-периодических решений.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $P \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha, \nu)$ и $\gamma_0(P) \ne 0$. Покажем, что для рассматриваемого P система (0.1) имеет ω-периодическое решение при любом $f \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha, \nu)$. Учитывая теоремы 1.2 и 1.3, можно считать, что $P = Q^{\alpha, p_0, p_1}$, где $p_0 = \gamma_0(P)$, $p_1 = \gamma_1(P)$. В этом случае система уравнений (0.1) принимает вид

$$\begin{cases} x_1'(t) = Q_1^{\alpha,p_0,p_1}(t, x_1(t), x_2(t)) + f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = Q_2^{\alpha,p_0,p_1}(t, x_1(t), x_2(t)) + f_2(t, x_1(t), x_2(t)). \end{cases} \tag{2.12}$$

Существование ω-периодического решения системы уравнений (2.12) равносильно существованию нуля вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (Q^{\alpha,p_0,p_1}(s, x(s)) + f(s, x(s)))\, ds$$

в банаховом пространстве $C([0,\omega]; \mathrm{R}^2)$ с нормой $\|x\| := \max_{0\le t\le\omega} |x(t)|$.

Из теоремы 1.1 вытекает, что векторное поле $\Phi(x)$ не обращается в ноль вне шара $\|x\| < r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega]; \mathrm{R}^2)$. Поэтому, согласно теории векторных полей [3, с. 135], определена целочисленная характеристика $\gamma_\infty(\Phi)$ — вращение векторного поля Φ на сфере $\|x\| = r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega]; \mathrm{R}^2)$. Покажем, что

$$\gamma_\infty(\Phi) \neq 0. \tag{2.13}$$

Тогда согласно принципу ненулевого вращения [3, с. 141] имеет место равенство $\Phi(x_0) = 0$ при некоторой вектор-функции $x_0 \in C([0,\omega]; \mathrm{R}^2)$. Этим самым будет доказано существование ω-периодического решения системы уравнений (2.12) при любом $f \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$.

Из теоремы 1.1 следует, что семейство векторных полей

$$\Phi_\mu(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (Q^{\alpha,p_0,p_1}(s, x(s)) + \mu f(s, x(s)))\, ds, \quad \mu \in [0,1],$$

не обращается в ноль вне шара $\|x\| < r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega]; \mathrm{R}^2)$. Другими словами, векторные поля $\Phi = \Phi_0$ и Φ_1 гомотопны на сфере $\|x\| = r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega]; \mathrm{R}^2)$. Поэтому, согласно свойству сохранения вращения при гомотопии, имеем:

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_0). \tag{2.14}$$

Семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\Psi_\mu(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t Q^{\tilde\alpha(\mu),p_0,p_1}(s, x(s)) ds, \quad \mu \in [0,1],$$

где $\tilde\alpha(\mu) = (1-\mu)\alpha + \mu(1,1)$, не обращается в ноль при $x(t) \not\equiv 0$. Это следует из включения $Q^{\tilde\alpha(\mu),p_0,p_1} \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\tilde\alpha(\mu),\nu)$, которое верно при любом $\mu \in [0,1]$. Отсюда выводим

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Psi_1). \tag{2.15}$$

В работе [7] доказано, что $\gamma_\infty(\Psi_1)$ равно p_0 или 1. Учитывая это и условие $p_0 \neq 0$, из (2.14) и (2.15) получаем (2.13). $\square$

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Э. Мухамадиеву за обсуждение результатов работы и высказанные замечания.

References

[1] Э. Мухамадиев, “К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **194**:3 (1970), 510–513; англ. пер.:E. Mukhamadiev, “On the theory of periodic solutions of systems of ordinary differential equations”, *Sov. Math., Dokl.*, **11** (1970), 1236–1239.

[2] Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, “О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:2 (2023), 280–282; англ. пер.:E. Mukhamadiev, A. N. Naimov, “On the solvability of a periodic problem for a system of ordinary differential equations with the main positive homogeneous nonlinearity”, *Differential Equations*, **59**:2 (2023), 289–291.

[3] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975. [M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreiko, *Geometric Methods of Nonlinear Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[4] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972. [J. L. Lyons, *Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[5] В. Г. Звягин, С. В. Корнев, “Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **58**:1 (2015), 59–81; англ. пер.:V. G. Zvyagin, S. V. Kornev, “Method of guiding functions for existence problems for periodic solutions of differential equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **233**:4 (2018), 578–601.

[6] А. И. Перов, В. К. Каверина, “Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова”, *Дифференциальные уравнения*, **55**:2 (2019), 269–272; англ. пер.:A. I. Perov, V. K. Kaverina, “On a problem posed by Vladimir Ivanovich Zubov”, *Differential Equations*, **55**:2 (2019), 274–278.

[7] Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, М. М. Кобилзода, “О разрешимости одного класса периодических задач на плоскости”, *Дифференциальные уравнения*, **57**:2 (2021), 203–209; англ. пер.:E. Mukhamadiev, A. N. Naimov, M. M. Kobilzoda, “Solvability of a class of periodic problems on the plane”, *Differential Equations*, **57**:2 (2021), 189–195.

[8] Н. А. Бобылев, “О построении правильных направляющих функций”, *Докл. АН СССР*, **183**:2 (1968), 265–266; англ. пер.:N. A. Bobylev, “The construction of regular guiding functions”, *Sov. Math., Dokl.*, **9** (1968), 1353–1355.

Информация об авторах

Наимов Алижон Набиджанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, Вологодский государственный университет, г. Вологда, Российская Федерация. E-mail: naimovan@vogu35.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6194-7164

Быстрецкий Михаил Васильевич, младший научный сотрудник, Вологодский государственный университет, г. Вологда, Российская Федерация. E-mail: pmbmv@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-3192-0675

Information about the authors

Alizhon N. Naimov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Informatics Department, Vologda State University, Vologda, Russian Federation. E-mail: naimovan@vogu35.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6194-7164

Mikhail M. Bystretskii, Junior Researcher, Vologda State University, Vologda, Russian Federation. E-mail: pmbmv@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-3192-0675

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Наимов Алижон Набиджанович
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Corresponding author:
Alizhon N. Naimov
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Поступила в редакцию 29.01.2024 г.
Поступила после рецензирования 28.05.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Received 29.01.2024
Reviewed 28.05.2024
Accepted for press 13.09.2024

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-325-351

УДК 517.983.6

О комплексных операторных функциях комплексного операторного переменного

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассмотрено семейство комплексных операторных функций, область определения и область значений которых включены в вещественную банахову алгебру ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в банаховом пространстве комплексных векторов над полем вещественных чисел. Показано, что исследование данной функции из этого семейства сводится к изучению пары действительных операторных функций двух действительных операторных переменных. Рассмотрены основные элементарные функции данного семейства: степенная функция; экспонента; тригонометрические функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс; гиперболические синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс; доказано основное свойство экспоненты. Получена комплексная операторная формула Эйлера. Найдены соотношения, выражающие синус и косинус через экспоненту. Для тригонометрических функций синус, косинус обоснованы формулы сложения. Доказана периодичность экспоненты, тригонометрических функций синус, косинус, тангенс, котангенс; для этих функций указаны формулы приведения. Получено основное комплексное операторное тригонометрическое тождество. Найдены равенства, связывающие тригонометрические и гиперболические функции. Установлено основное комплексное операторное гиперболическое тождество. Для гиперболических функций синус, косинус указаны формулы сложения. В качестве примера элементарной функции из рассматриваемого семейства комплексных операторных функций приведена рациональная функция, частным случаем которой является характеристический операторный полином линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в вещественном банаховом пространстве.

Ключевые слова: банахова алгебра, комплексная операторная формула Эйлера, основные комплексные операторные тригонометрическое и гиперболическое тождества

Для цитирования: *Фомин В.И.* О комплексных операторных функциях комплексного операторного переменного // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 325–351. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-325-351

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-325-351

About complex operator functions of a complex operator variable

Vasiliy I. FOMIN
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. We consider a family of complex operator functions whose domain and range of values are included in the real Banach algebra of bounded linear complex operators acting in the Banach space of complex vectors over the field of real numbers. It is shown that the study of a function from this family can be reduced to the study of a pair of real operator functions of two real operator variables. The main elementary functions of this family are considered: power function; exponent; trigonometric functions of sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant; hyperbolic sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant; the main property of the exponent is proved. A complex Euler operator formula is obtained. Relations that express sine and cosine in terms of the exponent are found. For the trigonometric functions of sine and cosine, addition formulas are justified. The periodicity of the exponent and trigonometric functions of sine, cosine, tangent, cotangent is proved; reduction formulas for these functions are provided. The main complex operator trigonometric identity is obtained. Equalities connecting trigonometric and hyperbolic functions are found. The main complex operator hyperbolic identity is established. For the hyperbolic functions of sine and cosine, addition formulas are indicated. As an example of an elementary function from the family of complex operator functions under consideration, a rational function is considered, a special case of which is the characteristic operator polynomial of a linear homogeneous differential equation of n-th order with constant bounded operator coefficients in a real Banach space.

Keywords: Banach algebra, Euler's complex operator formula, basic complex operator trigonometric and hyperbolic identities

Mathematics Subject Classification: 47A60.

For citation: Fomin V.I. About complex operator functions of a complex operator variable. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 325–351. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-325-351 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Актуальность изучения комплексных операторных функций комплексного операторного переменного обусловлена тем, что такие функции оказались полезным инструментом при исследовании линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см. [1,2]).

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $\mathcal{L}(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $G\mathcal{L}(E)=\{A\in\mathcal{L}(E):\exists A^{-1}\in\mathcal{L}(E)\}$; $E^2_{\mathbb{R}}=\{w=(x,y):x,y\in E\}$ — банахово пространство комплексных векторов над полем вещественных чисел с линейными операциями $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, $\alpha\,(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$ и нормой $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$ (см. [3, с. 103]).

Условимся называть элементы алгебры $\mathcal{L}(E)$ действительными операторами, а функции со значениями в $\mathcal{L}(E)$ действительными операторными функциями.

Заметим, что $G\mathcal{L}(E)\neq\emptyset$. Например, любой скалярный оператор αI, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$, принадлежит множеству $G\mathcal{L}(E)$, ибо существует $(\alpha I)^{-1}=\alpha^{-1}I$ и $(\alpha I)^{-1}\in\mathcal{L}(E)$.

Пусть $X\in\mathcal{L}(E)$, $r>0$. Обозначим через $O_r\,(X)=\{F\in\mathcal{L}(E):\|F-X\|<r\}$ открытый шар пространства $\mathcal{L}(E)$ с центром в X радиуса r.

Известно (см. [4, с. 229]), что множество $G\mathcal{L}(E)$ открыто: если $A_0\in G\mathcal{L}(E)$, то

$$O_{\left\|A_0^{-1}\right\|^{-1}}\,(A_0)\subset G\mathcal{L}(E).$$

Тогда, при любом $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$, учитывая равенство $\left\|(\alpha I)^{-1}\right\|^{-1}=|\,\alpha\,|$, получаем

$$O_{|\alpha|}\,(\alpha I)\subset G\mathcal{L}(E). \tag{0.1}$$

В случае $\alpha>0$ имеем $|\,\alpha\,|=\alpha$ и включение (0.1) принимает вид

$$O_{\alpha}\,(\alpha I)\subset G\mathcal{L}(E).$$

Заметим, что для всех $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta>0$, выполнено

$$\alpha<\beta\;\Rightarrow\;O_\alpha\,(\alpha I)\subset O_\beta\,(\beta I)\,. \tag{0.2}$$

Действительно, пусть $F\in O_\alpha\,(\alpha I)\,$, т. е. $\|F-\alpha I\|<\alpha$. Тогда

$$\|F-\beta I\|=\|(F-\alpha I)-(\beta-\alpha)\,I\|\leq\|(F-\alpha I)\|+\|-(\beta-\alpha)\,I\|$$
$$<\alpha+(\beta-\alpha)\,\|I\|=\alpha+\beta-\alpha=\beta.$$

Итак $\|F-\beta I\|<\beta$, т. е. $F\in O_\beta\,(\beta I)\,$, и включение (0.2) справедливо.

В работе [2] рассмотрена вещественная банахова алгебра

$$\mathcal{A}=L^{O\mathbb{C}}_{\mathbb{R}}\left(E^2_{\mathbb{R}}\right)=\{Z=(A,B):A,B\in\mathcal{L}(E)\}$$

ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по закону:

$$Zw=(A,B)(x,y)=(Ax-By,Ay+Bx),$$

с линейными операциями $(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$, $\alpha(A, B) = (\alpha A, \alpha B)$, операцией умножения

$$(A_1, B_1)\,(A_2, B_2) = (A_1 A_2 - B_1 B_2, A_1 B_2 + B_1 A_2) \tag{0.3}$$

и нормой $\|Z\| = \|(A, B)\| = \|A\| + \|B\|$.

Каждый оператор $Z \in \mathcal{A}$ непрерывен, ибо, как известно (см. [5, с. 89]), для непрерывности линейного оператора F, отображающего нормированное пространство N_1 в нормированное пространство N_2, необходимо и достаточно, чтобы F был ограничен (в нашем случае $N_1 = N_2 = \mathcal{A}$).

Алгебра $\mathcal{A}$ некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$, нулевым элементом оператор $\hat{O} = (O, O)$.

Рассмотрим в алгебре $\mathcal{A}$ подалгебры вида

$$\mathcal{A}_1 = \{(A, O) : A \in \mathcal{L}(E)\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{(O, B) : B \in \mathcal{L}(E)\}.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ является прямой суммой $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$.

Подалгебра $\mathcal{A}_1$ изоморфна алгебре $\mathcal{L}(E)$ при биекции $(A, O) \leftrightarrow A$, поэтому можно считать, что $\mathcal{A}$— расширение алгебры $\mathcal{L}(E)$. Любой элемент (A, O) подалгебры $\mathcal{A}_1$ можно отождествлять с соответствующим элементом $A \in \mathcal{L}(E)$:

$$(A, O) = A \quad \forall A \in \mathcal{L}(E). \tag{0.4}$$

Учитывая соглашение (0.4) и операцию умножения (0.3), получаем для любых $A \in \mathcal{L}(E)$, $(P, Q) \in \mathcal{A}$ равенство

$$A\,(P, Q) = (A, O)\,(P, Q) = (AP, AQ)\,. \tag{0.5}$$

В силу равенств $(A, B) = (A, O) + (O, B)$, $(O, B) = (O, I)\,(B, O)$ и соглашения (0.4) алгебру $\mathcal{A}$ можно представить в виде

$$\mathcal{A} = \{Z = A + \mathrm{J}B : A, B \in \mathcal{L}(E)\},$$

где $\mathrm{J} = (O, I)$— мнимая операторная единица.

В силу соглашения (0.4) $\mathcal{A}_1$ можно называть подалгеброй действительных операторов A алгебры $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}_2$ это подалгебра чисто мнимых операторов $\mathrm{J}B$ алгебры $\mathcal{A}$.

Учитывая (0.3), (0.4), получаем

$$\mathrm{J}^2 = \mathrm{J} \cdot \mathrm{J} = (-I, O) = -\,(I, O) = -\hat{I} = -I, \tag{0.6}$$

следовательно, допустима запись $\mathrm{J} = \sqrt{-I}$.

Заметим, что

$$\mathrm{J}\,(x, y) = (-y, x) \quad \forall\,(x, y) \in E^2_{\mathbb{R}}.$$

Для любого $Z = A + \mathrm{J}B \in \mathcal{A}$ имеем

$$\mathrm{J}\,Z = Z\,\mathrm{J} = -B + \mathrm{J}A, \tag{0.7}$$

в частности, $\mathrm{J}B = B\mathrm{J}$ для любого $B \in \mathcal{L}(E)$, следовательно, оператор $Z = A + \mathrm{J}B$ можно записывать в виде $Z = A + B\mathrm{J}$.

В дальнейшем важное значение будут иметь следующие множества в алгебре $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_K = \{Z = A + \mathrm{J}B \in \mathcal{A} : AB = BA\}, \qquad \mathcal{A}_G = \left\{Z \in \mathcal{A} : \exists Z^{-1} \in \mathcal{A}\right\}.$$

Справедливы включения

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_K, \quad \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_K, \tag{0.8}$$

ибо $FO = OF$ для любого $F \in \mathcal{L}(E)$.

Выделим в $\mathcal{A}_K$ множество вида

$$\Omega_* = \left\{Z = A + \mathrm{J}B \in \mathcal{A}_K : A^2 + B^2 \in G\mathcal{L}(E)\right\}.$$

Известно (см. [2]), что для любого $Z = A + \mathrm{J}B \in \Omega_*$ существует обратный оператор Z^{-1} и справедлива формула

$$Z^{-1} = A\left(A^2 + B^2\right)^{-1} - \mathrm{J}B\left(A^2 + B^2\right)^{-1}, \tag{0.9}$$

из которой видно, что $Z^{-1} \in \mathcal{A}$, т. е. $Z \in \mathcal{A}_G$. Таким образом,

$$\Omega_* \subset \mathcal{A}_G. \tag{0.10}$$

Рассмотрим множества вида

$$\mathcal{A}_{1G} = \{(A, O) \in \mathcal{A}_1 : A \in G\mathcal{L}(E)\},$$
$$\mathcal{A}_{2G} = \{(O, B) \in \mathcal{A}_2 : B \in G\mathcal{L}(E)\}.$$

В силу (0.8) справедливы включения

$$\mathcal{A}_{1G} \subset \mathcal{A}_K, \quad \mathcal{A}_{2G} \subset \mathcal{A}_K.$$

Для любого $Z = (A, O) \in \mathcal{A}_{1G}$ имеем $A^2 + B^2 = A^2$, следовательно, существует обратный оператор $\left(A^2 + B^2\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^2$, т. е. $A^2 + B^2 \in G\mathcal{L}(E)$. Значит, $Z \in \Omega_*$. Показано, что

$$\mathcal{A}_{1G} \subset \Omega_*. \tag{0.11}$$

Аналогично получаем включение

$$\mathcal{A}_{2G} \subset \Omega_*. \tag{0.12}$$

В силу (0.11), (0.12)

$$\mathcal{A}_{1G} \cup \mathcal{A}_{2G} \subset \Omega_*,$$

следовательно, в силу (0.10)

$$\mathcal{A}_{1G} \cup \mathcal{A}_{2G} \subset \mathcal{A}_G.$$

Применяя формулу (0.9), получаем $Z^{-1} = (A^{-1}, O)$ для любого $Z = (A, O) \in \mathcal{A}_{1G}$; $Z^{-1} = (O, -B^{-1})$ для любого $Z = (O, B) \in \mathcal{A}_{2G}$.

В работе [6] рассмотрены действительные операторные функции e^X, $\sin X$, $\cos X$, $\operatorname{tg} X$, $\operatorname{ctg} X$, $\sec X$, $\operatorname{cosec} X$, $\operatorname{sh} X$, $\operatorname{ch} X$, $\operatorname{th} X$, $\operatorname{cth} X$, $\operatorname{sech} X$, $\operatorname{cosech} X$ действительного операторного переменного $X \in \mathcal{L}(E)$, т. е. функции, принадлежащие семейству операторных функций

$$S\left(\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(E)\right) = \left\{f : \mathcal{L}(E) \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq \mathcal{L}(E)\right\}. \tag{0.13}$$

В данной работе изучаются комплексные операторные функции, принадлежащие семейству

$$S\left(\mathcal{A}, \mathcal{A}\right) = \left\{f : \mathcal{A} \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq \mathcal{A}\right\}. \tag{0.14}$$

1. Основные понятия

В силу того, что $\mathcal{A}$ представляет собой декартов квадрат алгебры $\mathcal{L}(E)$, а предельный переход в декартовом произведении нормированных пространств равносилен покоординатному предельному переходу (см. [7, с. 19]), приходим к следующим заключениям.

Рассмотрим последовательность $Z_n = X_n + \mathrm{J}Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, элементов из $\mathcal{A}$. Пусть $H = P + \mathrm{J}Q \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\exists \lim_{n\to\infty} Z_n = H \Leftrightarrow \Big(\exists \lim_{n\to\infty} X_n = P\Big) \wedge \Big(\exists \lim_{n\to\infty} Y_n = Q\Big),$$

т. е. вопрос о сходимости последовательности элементов из $\mathcal{A}$ сводится к вопросу о сходимости двух последовательностей элементов из $\mathcal{L}(E)$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ с членами $Z_k = X_k + \mathrm{J}Y_k$ из $\mathcal{A}$. Пусть $S = S^{(1)} + \mathrm{J}S^{(2)}$ принадлежит $\mathcal{A}$. Имеем: ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ сходится и его сумма равна S тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$ и их суммы равны соответственно $S^{(1)}$, $S^{(2)}$. Таким образом, вопрос о сходимости ряда с членами из $\mathcal{A}$ сводится к вопросу о сходимости двух рядов с членами из $\mathcal{L}(E)$.

Рассмотрим функцию $W = f(Z)$ из семейства (0.14). Представляя Z и W в алгебраической форме: $Z = X + \mathrm{J}Y$, $W = U + \mathrm{J}V$, получаем $U + \mathrm{J}V = f\,(X + \mathrm{J}Y)$, следовательно, $U = U\,(X, Y)$, $V = V\,(X, Y)$. Тогда функцию $W = f(Z)$ можно записать в виде $W = U\,(X,Y) + \mathrm{J}V\,(X,Y)$, при этом $U\,(X,Y)$, $V\,(X,Y)$ называются соответственно действительной и мнимой частями функции $W = f(Z)$:

$$Re\,(f(Z)) = U\,(X,Y)\,, \quad Im\,(f(Z)) = V\,(X,Y)\,.$$

Например, для функции $W = Z^2$, $Z \in \mathcal{A}$, используя формулу (0.3), получаем

$$U\,(X,Y) = X^2 - Y^2, \quad V\,(X,Y) = XY + YX,$$

в частности, для $Z \in \mathcal{A}_K$ имеем $V\,(X,Y) = 2XY$.

Пусть $Z_0 = X_0 + \mathrm{J}Y_0$ — предельная точка множества $D(f)$, $H = P + \mathrm{J}Q \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\exists \lim_{Z\to Z_0} f(Z) = H \Leftrightarrow \Big(\exists \lim_{\substack{X\to X_0\\ Y\to Y_0}} U\,(X,Y) = P\Big) \wedge \Big(\exists \lim_{\substack{X\to X_0\\ Y\to Y_0}} V\,(X,Y) = Q\Big).$$

Так как непрерывность функции определяется с помощью предельного перехода, то непрерывность функции $f(Z)$ в данной точке $Z_0 \in D(f)$ (на данном множестве $\Omega \subseteq D(f)$) равносильна непрерывности ее действительной и мнимой частей в этой точке (на этом множестве).

Таким образом, исследование данной комплексной операторной функции из семейства (0.14) сводится к изучению пары действительных операторных функций двух действительных операторных переменных.

2. Основные результаты

Простейшими примерами комплексных операторных функций из семейства (0.14) являются следующие функции, определенные на $\mathcal{A}$: комплексная операторная степенная функция $W = Z^n$, $n \in \mathbb{N}$ (частный случай этой функции при $n = 2$ рассмотрен выше); комплексная операторная рациональная функция

$$W = P_n(Z) = G_0 Z^n + G_1 Z^{n-1} + \ldots + G_{n-1} Z + G_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$; $G_i \in \mathcal{A}$; $i = \overline{0; n}$; $G_0 \neq \hat{O}$. При $n = 1$ получаем линейную функцию $W = G_0 Z + G_1$; при $n = 2$ квадратичную функцию $W = G_0 Z^2 + G_1 Z + G_2$.

В частности, коэффициентами полинома $P_n(Z)$ могут быть действительные операторы $A_i \in \mathcal{L}(E)$, $i = \overline{0; n}$; $A_0 \neq O$:

$$W = P_n(Z) = A_0 Z^n + A_1 Z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} Z + A_n.$$

В этом случае коэффициенты A_i нужно рассматривать как комплексные операторы, и при умножении оператора A_i на оператор Z^{n-i}, $i = \overline{0; n-1}$, надо использовать формулу (0.5), так как функция $W = P_n(Z)$ действует в алгебре $\mathcal{A}$.

Примером комплексной операторной рациональной функции с действительными операторными коэффициентами является характеристический операторный полином линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в вещественном банаховом пространстве, использованный в работах [1,2] для построения общего решения такого уравнения.

В дальнейшем понадобится

З а м е ч а н и е 2.1. Известно ([8, с. 129]), что из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ с членами из банахова пространства следует его сходимость и, кроме того,

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|.$$

Рассмотрим комплексные операторные функции из семейства (0.14), определяемые суммами сходящихся комплексных операторных степенных рядов. Такие функции и соотношения между ними аналогичны случаю комплексных функций комплексного переменного (см. [9]).

1. *Комплексная операторная экспоненциальная функция*

По определению,

$$e^Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}, \tag{2.1}$$

для любого $Z \in \mathcal{A}$ (здесь, по определению, $Z^0 = \hat{I}$, в частности, $\hat{O}^0 = \hat{I}$; $0! = 1$).

Покажем, что определение (2.1) корректно. Убедимся вначале, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!} \tag{2.2}$$

сходится абсолютно, т. е. сходится знакоположительный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{Z^k}{k!} \right\|. \tag{2.3}$$

При $Z = \hat{O}$ ряд (2.3) имеет вид $1 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$ и его сумма равна 1. Пусть $Z \neq \hat{O}$. Используя неравенство $\left\| Z^k \right\| \leq \|Z\|^k$, $k \in \mathbb{N}$, вытекающее из кольцевого свойства $\|Z_1 Z_2\| \leq \|Z_1\| \, \|Z_2\|$ алгебры $\mathcal{A}$, имеем

$$a_k = \left\| \frac{Z^k}{k!} \right\| = \frac{\left\| Z^k \right\|}{k!} \leq \frac{\|Z\|^k}{k!} = b_k.$$

Применяя к ряду с b_k признак Даламбера, получаем

$$D = \lim_{k \to \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \left[\frac{\|Z\|^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{\|Z\|^k}{k!} \right] = \lim_{k \to \infty} \frac{\|Z\|}{k+1} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд с b_k сходится. Значит, по первому признаку сравнения ряд с a_k сходится, т. е. ряд (2.2) является абсолютно сходящимся. Следовательно, ряд (2.2) сходится (см. замечание 2.1). Корректность определения (2.1) установлена.

При значениях $Z = (X, O) \in \mathcal{A}_1$ функцию e^Z можно записать, в силу соглашения (0.4), в следующем виде:

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!},$$

т. е. определение комплексной операторной экспоненциальной функции e^Z согласуется с определением действительной операторной экспоненциальной функции e^X.

Аналогично, вводимые ниже определения других комплексных операторных функций из семейства (0.14) согласуются с определениями соответствующих действительных операторных функций из семейства (0.13).

Применяя теорему 61 из [8, с. 138] при

$$B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad B\,(Z_1, Z_2) = Z_1 Z_2,$$

получаем

Следствие 2.1. *Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с членами из алгебры $\mathcal{A}$ является абсолютно сходящимся рядом и, значит, сходящимся рядом (см. замечание 2.1); сумма произведения этих рядов равна произведению сумм перемножаемых рядов.*

Теорема 2.1. *Для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию*

$$Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1, \tag{2.4}$$

справедливо основное свойство экспоненциальной функции:

$$e^{Z_1 + Z_2} = e^{Z_1} e^{Z_2}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Рассмотрим абсолютно сходящиеся ряды, суммы которых определяют левую и правую части формулы (2.5):

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Z_1 + Z_2)^k}{k!}, \quad P_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Z_1^i}{i!}, \quad P_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Z_2^j}{j!}.$$

В силу условия (2.4) можно применить операторный бином Ньютона:

$$(Z_1 + Z_2)^k = \sum_{s=0}^{k} C_k^s Z_1^{k-s} Z_2^s. \tag{2.6}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{k!} C_k^s = \frac{1}{s!(k-s)!}. \tag{2.7}$$

В силу (2.6), (2.7)

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} \frac{Z_1^{k-s} Z_2^s}{s!(k-s)!}. \tag{2.8}$$

Используя произведение рядов в форме Коши, получаем

$$P_1 P_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{Z_1^i Z_2^j}{i!j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} \frac{Z_1^{k-s} Z_2^s}{s!(k-s)!}. \tag{2.9}$$

В силу (2.8), (2.9) $P = P_1 P_2$. Значит, в силу следствия 2.1 справедливо равенство (2.5). $\square$

Используя формулу (2.5) и равенство $e^{\hat{O}} = \hat{I}$, приходим к выводу: при любом фиксированном $Z \in \mathcal{A}$ оператор e^{-Z} является левым и правым обратным оператором для оператора e^Z, следовательно, существует $\left(e^Z\right)^{-1} = e^{-Z}$, т. е. $e^Z \in \mathcal{A}_G$. Таким образом, область значений $R\left(e^Z\right)$ функции e^Z является подмножеством множества $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{A}$, следовательно, $R\left(e^Z\right) \neq \mathcal{A}$, т. е. e^Z не является сюръективной функцией. Заметим, что любой оператор $Z \in \mathcal{A} \backslash \mathcal{A}_G$ не принадлежит множеству $R\left(e^Z\right)$. Например, $\hat{O} \notin R\left(e^Z\right)$, т. е. функция e^Z не имеет нулей: $e^Z \neq \hat{O}$ для любого $Z \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим в алгебре $\mathcal{A}$ подалгебру скалярных операторов: $\mathcal{A}_s = \left\{\alpha \hat{I} : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$. Заметим, что подалгебра $\mathcal{A}_s$ коммутативна. Выделим в $\mathcal{A}_s$ множество позитивных скалярных операторов: $\mathcal{A}_s^+ = \left\{\beta \hat{I} \in \mathcal{A}_s : \beta > 0\right\}$. Справедливо включение $\mathcal{A}_s^+ \subset R\left(e^Z\right)$, ибо для любого $\beta \hat{I} \in \mathcal{A}_s^+$, используя определение (2.1) и равенство $\hat{I}^k = \hat{I}$, $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$e^{\hat{I} \ln \beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\hat{I} \ln \beta\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{I}^k (\ln \beta)^k}{k!} = \hat{I} e^{\ln \beta} = \beta \hat{I}.$$

Попутно показано, что натуральный логарифм позитивного скалярного оператора $\beta \hat{I}$ имеет вид $\ln\left(\beta \hat{I}\right) = \hat{I} \ln \beta$, в частности, $\ln \hat{I} = \hat{O}$.

Известно (см. [2]), что при любом $Z = X + \mathrm{J}Y \in \mathcal{A}_k$ функция e^Z представима в виде

$$e^Z = e^{X + \mathrm{J}Y} = e^X (\cos Y + \mathrm{J} \sin Y). \tag{2.10}$$

В этом случае действительная и мнимая части функции e^Z имеют вид

$$U(X,Y) = e^X \cos Y, \quad V(X,Y) = e^X \sin Y.$$

Заметим, что $O + \mathrm{J}Y \in \mathcal{A}_k$ для любого $Y \in \mathcal{L}(E)$. Тогда в силу (2.10) и равенства $e^O = I$ имеем

$$e^{\mathrm{J}Y} = \cos Y + \mathrm{J}\sin Y \quad \forall Y \in \mathcal{L}(E). \tag{2.11}$$

Покажем периодичность функции e^Z.

Теорема 2.2. *Любой комплексный оператор* $T_m = 2\pi m\mathrm{J}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, *является периодом функции* e^Z.

Доказательство. Нужно показать, что для любого $Z \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$e^{Z+2\pi m\mathrm{J}} = e^Z. \tag{2.12}$$

В силу (0.7) операторы Z, $2\pi m\mathrm{J}$ коммутируют между собой, следовательно, в силу (2.5)

$$e^{Z+2\pi m\mathrm{J}} = e^Z e^{2\pi m\mathrm{J}}. \tag{2.13}$$

В силу (2.11)

$$e^{2\pi m\mathrm{J}} = e^{\mathrm{J}(2\pi mI)} = \cos(2\pi mI) + \mathrm{J}\sin(2\pi mI). \tag{2.14}$$

Покажем, что

$$\sin(\alpha I) = I\sin\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.15}$$

$$\cos(\alpha I) = I\cos\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

При $\alpha = 0$ выполнимость соотношений (2.15), (2.16) следует из равенств $\sin O = O$, $\cos O = I$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Пусть $\alpha \neq 0$. Учитывая, что $I^n = I$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sin(\alpha I) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha I)^{2k+1}}{(2k+1)!} = I \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} = I\sin\alpha;$$

$$\cos(\alpha I) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha I)^{2k}}{(2k)!} = I \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} = I\cos\alpha.$$

Соотношения (2.15), (2.16) установлены.

Согласно соотношениям (2.15), (2.16) имеем

$$\sin(2\pi mI) = O, \quad \cos(2\pi mI) = I. \tag{2.17}$$

Используя соглашение (0.4), получаем

$$I = (I,O) = \hat{I}, \quad \mathrm{J}\cdot O = (O,I)(O,O) = (O,O) = \hat{O},$$

следовательно, в силу (2.14), (2.17)

$$e^{2\pi m\mathrm{J}} = \hat{I}. \tag{2.18}$$

Из соотношений (2.13), (2.18) следует равенство (2.12). □

В качестве основного периода функции e^Z берется оператор $T_1 = 2\pi\mathrm{J}$.

2. *Комплексные операторные тригонометрические функции*

По определению,

$$\sin Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{2.19}$$

$$\cos Z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k}}{(2k)!} \tag{2.20}$$

для любого $Z \in \mathcal{A}$.

Обоснование корректности определений (2.19), (2.20) аналогично случаю функции e^Z.

Заметим, что $\sin \hat{O} = \hat{O}$, $\cos \hat{O} = \hat{I}$,

$$\sin(-Z) = -\sin Z, \tag{2.21}$$

$$\cos(-Z) = \cos Z. \tag{2.22}$$

Укажем, какими соотношениями связаны функция e^Z и функции $\sin Z$, $\cos Z$. Для этого потребуются некоторые вспомогательные факты.

Для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы равенства

$$(Z_1 Z_2)^n = Z_1^n Z_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.23}$$

$$(Z_1 \pm Z_2)^2 = Z_1^2 \pm 2Z_1 Z_2 + Z_2^2 \tag{2.24}$$

(равенство (2.24) это частный случай формулы (2.6) при $k = 2$).

Используя теорему 60 из [8, с. 136], приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$ *с членами из алгебры* $\mathcal{A}$ *сходится, и его сумма равна* S. *Тогда при любом фиксированном* $H \in \mathcal{A}$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (HZ_k)$ *сходится, и его сумма равна* HS.

З а м е ч а н и е 2.2. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ с членами из нормированного пространства N сходятся: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s_1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = s_2$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ сходится и выполнено $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = s_1 + s_2$ (см. [10, с. 52]).

Теорема 2.3. *Для любого* $Z \in \mathcal{A}$ *справедлива комплексная операторная формула Эйлера:*

$$e^{\mathrm{J}Z} = \cos Z + \mathrm{J}\sin Z. \tag{2.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая соотношения (0.6), (0.7), (2.23), лемму 2.1 при $H = \mathrm{J}$ и замечание 2.2, имеем

$$\mathrm{J}\sin Z = \mathrm{J}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\hat{I})^k \frac{\mathrm{J}Z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{J}^{2k+1} Z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{J}Z)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Аналогично получаем

$$\cos Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{J}Z)^{2k}}{(2k)!}.$$

Тогда, используя замечание 2.2, имеем

$$e^{\mathrm{J}Z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{J}Z)^{m}}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(\mathrm{J}Z)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(\mathrm{J}Z)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{J}Z)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{J}Z)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos Z + \mathrm{J}\sin Z.$$

□

В силу (2.21), (2.22), (2.25)

$$e^{-\mathrm{J}Z} = \cos Z - \mathrm{J}\mathrm{sin}Z. \tag{2.26}$$

Из соотношений (2.25), (2.26) получаем

$$2\mathrm{J}\mathrm{sin}Z = e^{\mathrm{J}Z} - e^{-\mathrm{J}Z}. \tag{2.27}$$

Заметим, что $\mathrm{J} \in \mathcal{A}_G$ и

$$\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J}. \tag{2.28}$$

Умножая слева обе части равенства (2.27) на $2^{-1}\mathrm{J}^{-1}$ и учитывая соотношение (2.28), имеем

$$\mathrm{sin}Z = -\mathrm{J}\frac{e^{\mathrm{J}Z} - e^{-\mathrm{J}Z}}{2} \tag{2.29}$$

или, в силу (0.7),

$$\mathrm{sin}Z = -\frac{e^{\mathrm{J}Z} - e^{-\mathrm{J}Z}}{2}\mathrm{J}.$$

Согласно (2.25), (2.26), имеем

$$\cos Z = \frac{e^{\mathrm{J}Z} + e^{-\mathrm{J}Z}}{2}. \tag{2.30}$$

Заметим, что для любого $Z \in \mathcal{A}$ выполнено

$$e^{\mathrm{J}Z}e^{-\mathrm{J}Z} = e^{-\mathrm{J}Z}e^{\mathrm{J}Z} = \hat{I}. \tag{2.31}$$

Справедливо основное комплексное операторное тригонометрическое тождество: для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\sin^2 Z + \cos^2 Z = \hat{I}. \tag{2.32}$$

Действительно, используя соотношения (0.6), (0.7), (2.5), (2.23), (2.24), (2.29)–(2.31), получаем

$$\sin^2 Z = -4^{-1}\left(e^{2\mathrm{J}Z} - 2\hat{I} + e^{-2\mathrm{J}Z}\right), \quad \cos^2 Z = 4^{-1}\left(e^{2\mathrm{J}Z} + 2\hat{I} + e^{-2\mathrm{J}Z}\right),$$

откуда и следует тождество (2.32).

Покажем периодичность функций $\mathrm{sin}Z$, $\cos Z$.

Используя (2.12), (2.29), имеем для любых $Z \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$:

$$\sin\left(Z + 2\pi m\hat{I}\right) = -2^{-1}\mathrm{J}\left[e^{\mathrm{J}\left(Z+2\pi m\hat{I}\right)} - e^{-\mathrm{J}\left(Z+2\pi m\hat{I}\right)}\right] = -2^{-1}\mathrm{J}\left[e^{\mathrm{J}Z+2\pi m\mathrm{J}} - e^{-\mathrm{J}Z+2\pi(-m)\mathrm{J}}\right]$$
$$= -2^{-1}\mathrm{J}\left(e^{\mathrm{J}Z} - e^{-\mathrm{J}Z}\right) = \sin Z.$$

Получили равенство $\sin\Big(Z + 2\pi m\hat{I}\Big) = \sin Z$. Аналогично доказывается, что

$$\cos(Z + 2\pi m\hat{I}) = \cos Z.$$

Таким образом, любой комплексный оператор $T_m = 2\pi m\hat{I}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, является периодом функций $\sin Z$, $\cos Z$. В качестве основного периода этих функций берется оператор $T_1 = 2\pi\hat{I}$.

Используя равенство (2.5), можно доказать некоторые формулы комплексной операторной тригонометрии.

З а м е ч а н и е 2.3. Пусть операторы $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ удовлетворяют условию (2.4). Тогда операторы $\mathrm{J}Z_1, \mathrm{J}Z_2, -\mathrm{J}Z_1, -\mathrm{J}Z_2$ попарно коммутируют между собой.

Теорема 2.4. *Для любых операторов $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы формулы сложения*

$$\sin(Z_1 + Z_2) = \sin Z_1 \cos Z_2 + \cos Z_1 \sin Z_2, \tag{2.33}$$

$$\cos(Z_1 + Z_2) = \cos Z_1 \cos Z_2 - \sin Z_1 \sin Z_2. \tag{2.34}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя соотношения (2.5), (2.29), (2.30) и учитывая замечание 2.3, получаем

$$\begin{aligned}\sin Z_1 \cos Z_2 + \cos Z_1 \sin Z_2 = &- 4^{-1}\mathrm{J}\left(e^{\mathrm{J}Z_1} - e^{-\mathrm{J}Z_1}\right)\left(e^{\mathrm{J}Z_2} + e^{-\mathrm{J}Z_2}\right) \\ &- 4^{-1}\mathrm{J}\left(e^{\mathrm{J}Z_1} + e^{-\mathrm{J}Z_1}\right)\left(e^{\mathrm{J}Z_2} - e^{-\mathrm{J}Z_2}\right) \\ = &- 4^{-1}\mathrm{J}\Big[e^{\mathrm{J}(Z_1+Z_2)} + e^{\mathrm{J}(Z_1-Z_2)} - e^{\mathrm{J}(Z_2-Z_1)} - e^{-\mathrm{J}(Z_1+Z_2)} \\ &+ e^{\mathrm{J}(Z_1+Z_2)} - e^{\mathrm{J}(Z_1-Z_2)} + e^{\mathrm{J}(Z_2-Z_1)} - e^{-\mathrm{J}(Z_1+Z_2)}\Big] \\ = &- 2^{-1}\mathrm{J}\Big[e^{\mathrm{J}(Z_1+Z_2)} - e^{-\mathrm{J}(Z_1+Z_2)}\Big] = \sin(Z_1 + Z_2).\end{aligned}$$

Формула (2.33) доказана. Справедливость формулы (2.34) проверяется аналогично. □

В силу теоремы 2.4, для любого $Z \in \mathcal{A}$ справедливы формулы двойного аргумента:

$$\sin 2Z = 2\sin Z \cos Z, \quad \cos 2Z = \cos^2 Z - \sin^2 Z.$$

Из теоремы 2.4 и соотношений (2.21), (2.22) следует, что для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы равенства

$$\sin(Z_1 - Z_2) = \sin Z_1 \cos Z_2 - \cos Z_1 \sin Z_2, \tag{2.35}$$

$$\cos(Z_1 - Z_2) = \cos Z_1 \cos Z_2 + \sin Z_1 \sin Z_2. \tag{2.36}$$

Из (2.33)–(2.36) следуют формулы преобразования произведения комплексных операторных тригонометрических функций в сумму:

$$\sin Z_1 \cos Z_2 = \frac{1}{2}[\sin(Z_1 + Z_2) + \sin(Z_1 - Z_2)], \tag{2.37}$$

$$\cos Z_1 \cos Z_2 = \frac{1}{2}[\cos(Z_1 + Z_2) + \cos(Z_1 - Z_2)], \tag{2.38}$$

$$\sin Z_1 \sin Z_2 = \frac{1}{2}[\cos(Z_1 - Z_2) - \cos(Z_1 + Z_2)]. \tag{2.39}$$

Из (2.37)–(2.39) следуют формулы преобразования суммы и разности одноименных комплексных операторных тригонометрических функций в произведение:

$$\sin Z_1 + \sin Z_2 = 2\sin\frac{Z_1 + Z_2}{2}\cos\frac{Z_1 - Z_2}{2}, \tag{2.40}$$

$$\sin Z_1 - \sin Z_2 = 2\sin\frac{Z_1 - Z_2}{2}\cos\frac{Z_1 + Z_2}{2}, \tag{2.41}$$

$$\cos Z_1 + \cos Z_2 = 2\cos\frac{Z_1 + Z_2}{2}\cos\frac{Z_1 - Z_2}{2}, \tag{2.42}$$

$$\cos Z_1 - \cos Z_2 = -2\sin\frac{Z_1 - Z_2}{2}\sin\frac{Z_1 + Z_2}{2}. \tag{2.43}$$

Напомним, что формулы (2.33)–(2.43) верны при выполнении условия (2.4).

Теперь покажем, что для функций $\sin Z$, $\cos Z$ справедливы стандартные формулы приведения.

Теорема 2.5. *Для любого* $Z \in \mathcal{A}$

$$\sin\big(Z + \pi\hat{I}\big) = -\sin Z, \quad \cos\big(Z + \pi\hat{I}\big) = -\cos Z; \tag{2.44}$$

$$\sin\Big(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \cos Z, \quad \cos\Big(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = -\sin Z. \tag{2.45}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операторы $Z, \pi\hat{I}$ коммутируют между собой, следовательно, в силу (2.33), (2.34)

$$\sin\big(Z + \pi\hat{I}\big) = \sin Z\cos\big(\pi\hat{I}\big) + \cos Z\sin\big(\pi\hat{I}\big), \tag{2.46}$$

$$\cos\big(Z + \pi\hat{I}\big) = \cos Z\cos\big(\pi\hat{I}\big) - \sin Z\sin\big(\pi\hat{I}\big). \tag{2.47}$$

Аналогично равенствам (2.15), (2.16) получаем

$$\sin\big(\alpha\hat{I}\big) = \hat{I}\sin\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.48}$$

$$\cos\big(\alpha\hat{I}\big) = \hat{I}\cos\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.49}$$

в частности,

$$\sin\big(\pi\hat{I}\big) = \hat{O}, \quad \cos\big(\pi\hat{I}\big) = -\hat{I}. \tag{2.50}$$

Из соотношений (2.46), (2.47), (2.50) следуют формулы (2.44). Далее,

$$\sin\Big(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \sin Z\cos\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) + \cos Z\sin\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big), \tag{2.51}$$

$$\cos\Big(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \cos Z\cos\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) - \sin Z\sin\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big). \tag{2.52}$$

В силу (2.48), (2.49)

$$\sin\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \hat{I}, \quad \cos\Big(\frac{\pi}{2}\hat{I}\Big) = \hat{O}. \tag{2.53}$$

Из соотношений (2.51)–(2.53) следуют формулы (2.45). □

Аналогично показывается, что для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\sin\left(Z - \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\cos Z, \quad \cos\left(Z - \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = \sin Z.$$

Укажем, как операторы из алгебры $\mathcal{A}$, определяемые суммами сходящихся рядов, действуют в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$.

З а м е ч а н и е 2.4. Из сходимости (по норме) последовательности H_n, $n \in \mathbb{N}$, с членами из алгебры $\mathcal{A}$ к оператору $H \in \mathcal{A}$ следует ее поточечная сходимость (в иной терминологии сильная сходимость).

Действительно, сходимость по норме означает, что

$$\|H_n - H\| \to 0. \tag{2.54}$$

Для любого фиксированного $w \in E^2_{\mathbb{R}}$ получаем

$$\|H_n w - Hw\| = \|(H_n - H)\,w\| \leq \|H_n - H\|\,\|w\|. \tag{2.55}$$

В силу (2.54), (2.55) $\|H_n w - Hw\| \to 0$, т. е. последовательность $\{H_n\}$ сходится поточечно.

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z_k \tag{2.56}$$

с членами из алгебры $\mathcal{A}$ сходится и его сумма S принадлежит $\mathcal{A}$. Это означает, по определению, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$, $n \in \mathbb{N}$, ряда (2.56) сходится к S, т. е. $\|S_n - S\| \to 0$. Следовательно, в силу замечания 2.4 имеем для любого фиксированного $w \in E^2_{\mathbb{R}}$

$$\|S_n w - Sw\| \to 0. \tag{2.57}$$

Заметим, что

$$S_n w = \Big(\sum_{k=1}^{n} Z_k\Big) w = \sum_{k=1}^{n} (Z_k w)$$

является n-ой частичной суммой ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Z_k w). \tag{2.58}$$

Следовательно, в силу (2.57) ряд (2.58) сходится, и его сумма равна Sw :

$$Sw = \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k w).$$

Пусть, например, $H \in \mathcal{A}$, H фиксирован. Тогда оператор

$$e^H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k}{k!}$$

действует в пространстве $E^2_{\mathbb{R}}$ по правилу: для любого $w \in E^2_{\mathbb{R}}$

$$e^H w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k w}{k!}.$$

Комплексные операторные тригонометрические функции $\operatorname{tg} Z$, $\operatorname{ctg} Z$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} Z = \sin Z \cos^{-1} Z, \quad \operatorname{ctg} Z = \cos Z \sin^{-1} Z,$$

где $\cos^{-1} Z = (\cos Z)^{-1}$, $\sin^{-1} Z = (\sin Z)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\cos Z$, $\sin Z$.

Области определения этих функций имеют вид

$$D(\operatorname{tg} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \cos Z \in \mathcal{A}_G\}, \quad D(\operatorname{ctg} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \sin Z \in \mathcal{A}_G\}.$$

Покажем, что

$$D(\operatorname{tg} Z) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{ctg} Z) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{tg} Z) \cap D(\operatorname{ctg} Z) \neq \emptyset. \tag{2.59}$$

Пусть

$$M_1 = \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}\right\}, \quad M_2 = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Заметим, что M_1, M_2 являются соответственно областями определения скалярных функций $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. Рассмотрим множество

$$M = M_1 \cap M_2 = \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Лемма 2.2. *Справедливы включения*

$$\alpha \hat{I} \in D(\operatorname{tg} Z) \quad \forall \alpha \in M_1, \tag{2.60}$$

$$\alpha \hat{I} \in D(\operatorname{ctg} Z) \quad \forall \alpha \in M_2, \tag{2.61}$$

$$\alpha \hat{I} \in D(\operatorname{tg} Z) \cap D(\operatorname{ctg} Z) \quad \forall \alpha \in M. \tag{2.62}$$

Доказательство. Из соотношения (2.49) следует, что при любом $\alpha \in M_1$ существует

$$\cos^{-1}\left(\alpha \hat{I}\right) = \frac{1}{\cos \alpha} \hat{I}, \tag{2.63}$$

следовательно, определен $\operatorname{tg}\left(\alpha \hat{I}\right) = \sin\left(\alpha \hat{I}\right) \cos^{-1}\left(\alpha \hat{I}\right)$. Включение (2.60) доказано.

Далее, из соотношения (2.48) видно, что при любом $\alpha \in M_2$ существует

$$\sin^{-1}\left(\alpha \hat{I}\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \hat{I}, \tag{2.64}$$

значит, определен $\operatorname{ctg}\left(\alpha \hat{I}\right) = \cos\left(\alpha \hat{I}\right) \sin^{-1}\left(\alpha \hat{I}\right)$. Включение (2.61) установлено.

Включение (2.62) следует из (2.60), (2.61). □

В силу леммы 2.2 справедливы соотношения (2.59).

В силу (2.48), (2.49), (2.63), (2.64) имеем

$$\operatorname{tg}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{tg}\alpha \quad \forall\alpha \in M_1,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{ctg}\alpha \quad \forall\alpha \in M_2.$$

Для любого $Z \in D(\operatorname{tg} Z) \cap D(\operatorname{ctg} Z)$ справедливо тождество

$$\operatorname{tg} Z \operatorname{ctg} Z = \hat{I}. \tag{2.65}$$

Действительно, используя сочетательное свойство $Z_1(Z_2Z_3) = (Z_1Z_2)Z_3$ алгебры $\mathcal{A}$, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} Z \operatorname{ctg} Z &= \left(\sin Z \cos^{-1} Z\right)\left(\cos Z \sin^{-1} Z\right) = \sin Z\left(\cos^{-1} Z\left(\cos Z \sin^{-1} Z\right)\right)\\ &= \sin Z\left(\left(\cos^{-1} Z \cos Z\right)\sin^{-1} Z\right) = \sin Z\left(\hat{I}\sin^{-1} Z\right) = \sin Z \sin^{-1} Z = \hat{I}.\end{aligned}$$

Для комплексных операторов справедливо следующее утверждение, аналогичное лемме из [10, с. 141]:

Лемма 2.3. *Пусть*

$$H_1, H_2 \in \mathcal{A}_G. \tag{2.66}$$

Тогда

$$H_1H_2 \in \mathcal{A}_G \tag{2.67}$$

и справедливо равенство

$$(H_1H_2)^{-1} = H_2^{-1}H_1^{-1}. \tag{2.68}$$

Доказательство. Покажем, что уравнение

$$(H_1H_2)\,w = h \tag{2.69}$$

при любом фиксированном $h \in E_{\mathbb{R}}^2$ имеет единственное решение $w \in E_{\mathbb{R}}^2$. Это будет означать, что $R(H_1H_2) = E_{\mathbb{R}}^2$ и существует $(H_1H_2)^{-1} : E_{\mathbb{R}}^2 \to E_{\mathbb{R}}^2$.

Применяя к обеим частям уравнения (2.69) оператор H_1^{-1}, получаем

$$H_2w = H_1^{-1}h. \tag{2.70}$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.70) оператор H_2^{-1}, имеем

$$w = \left(H_2^{-1}H_1^{-1}\right)h, \tag{2.71}$$

т. е. уравнение (2.69) при любом фиксированном $h \in E_{\mathbb{R}}^2$ имеет единственное решение (2.71), принадлежащее пространству $E_{\mathbb{R}}^2$.

Из равенства (2.71) следует формула (2.68). В силу (2.66) $H_2^{-1}, H_1^{-1} \in \mathcal{A}$, следовательно, в силу (2.68) оператор $(H_1H_2)^{-1}$ принадлежит алгебре $\mathcal{A}$ как произведение двух операторов из этой алгебры. Справедливость включения (2.67) установлена. □

Применяя лемму 2.3, для любого $Z \in D(\operatorname{tg} Z) \cap D(\operatorname{ctg} Z)$, получаем

$$\operatorname{ctg}^{-1} Z = \left(\cos Z \sin^{-1} Z\right)^{-1} = \sin Z \cos^{-1} Z = \operatorname{tg} Z,$$

$$\operatorname{tg}^{-1} Z = \left(\sin Z \cos^{-1} Z\right)^{-1} = \cos Z \sin^{-1} Z = \operatorname{ctg} Z,$$

т. е.

$$\operatorname{tg} Z = \operatorname{ctg}^{-1} Z, \quad \operatorname{ctg} Z = \operatorname{tg}^{-1} Z. \tag{2.72}$$

Покажем периодичность функций $\operatorname{tg} Z$, $\operatorname{ctg} Z$.

Теорема 2.6. *Любой комплексный оператор* $T_m = \pi m \hat{I}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, *является периодом функций* $\operatorname{tg} Z$, $\operatorname{ctg} Z$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению периодической функции нужно показать, что для любого $Z \in D(\operatorname{tg} Z)$ выполнено

$$Z + \pi m \hat{I} \in D(\operatorname{tg} Z), \tag{2.73}$$

$$\operatorname{tg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \operatorname{tg} Z, \tag{2.74}$$

а для любого $Z \in D(\operatorname{ctg} Z)$ выполнено

$$Z + \pi m \hat{I} \in D(\operatorname{ctg} Z), \tag{2.75}$$

$$\operatorname{ctg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \operatorname{ctg} Z. \tag{2.76}$$

Любой оператор $Z \in \mathcal{A}$ коммутирует с любым оператором $\pi m \hat{I}$, $m \in \mathbb{Z}$, следовательно, в силу (2.33), (2.34)

$$\sin\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \sin Z \cos\left(\pi m \hat{I}\right) + \cos Z \sin\left(\pi m \hat{I}\right), \tag{2.77}$$

$$\cos\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \cos Z \cos\left(\pi m \hat{I}\right) - \sin Z \sin\left(\pi m \hat{I}\right). \tag{2.78}$$

В силу (2.48), (2.49)

$$\sin\left(\pi m \hat{I}\right) = \hat{O}, \quad \cos\left(\pi m \hat{I}\right) = (-1)^m \hat{I}. \tag{2.79}$$

В силу (2.77)–(2.79)

$$\sin\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^m \sin Z, \tag{2.80}$$

$$\cos\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^m \cos Z. \tag{2.81}$$

Пусть $Z \in D(\operatorname{tg} Z)$. Тогда, в силу (2.81) существует

$$\cos^{-1}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^{-m} \cos^{-1} Z, \tag{2.82}$$

следовательно, определен

$$\operatorname{tg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \sin\left(Z + \pi m \hat{I}\right) \cos^{-1}\left(Z + \pi m \hat{I}\right),$$

т. е. справедливо включение (2.73). В силу (2.80), (2.82)

$$\operatorname{tg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^m \sin Z \, (-1)^{-m} \cos^{-1} Z = \sin Z \cos^{-1} Z = \operatorname{tg} Z.$$

Равенство (2.74) доказано. Пусть $Z \in D(\operatorname{ctg} Z)$. Тогда, в силу (2.80) существует

$$\sin^{-1}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = (-1)^{-m} \sin^{-1} Z, \tag{2.83}$$

значит, определен $\operatorname{ctg}\left(Z + \pi m \hat{I}\right) = \cos\left(Z + \pi m \hat{I}\right) \sin^{-1}\left(Z + \pi m \hat{I}\right)$, т. е. справедливо включение (2.75). Из соотношений (2.81), (2.83) следует равенство (2.76). □

В качестве основного периода функций $\mathrm{tg}Z$, $\mathrm{ctg}Z$ берется оператор $T_1 = \pi\hat{I}$. Покажем, что для функций $\mathrm{tg}Z$, $\mathrm{ctg}Z$ верны стандартные формулы приведения.

Теорема 2.7. *Для любого* $Z \in D\,(\mathrm{tg}\,Z) \cap D\,(\mathrm{ctg}\,Z)$ *справедливы равенства*

$$tg\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\mathrm{ctg}\,Z, \quad \mathrm{ctg}\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\mathrm{tg}Z. \tag{2.84}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.45) существуют

$$\sin^{-1}\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = \cos^{-1} Z, \tag{2.85}$$

$$\cos^{-1}\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\sin^{-1} Z. \tag{2.86}$$

Из соотношений (2.45), (2.85), (2.86) следуют формулы (2.84). □

Комплексные операторные тригонометрические функции $\mathrm{sec}Z$, $\mathrm{cosec}Z$ определяются равенствами

$$\mathrm{sec}Z = \cos^{-1} Z, \quad \mathrm{cosec}Z = \sin^{-1} Z.$$

Для этих функций

$$D\,(\mathrm{sec}Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \cos Z \in \mathcal{A}_G\}, \quad D\,(\mathrm{cosec}Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \sin Z \in \mathcal{A}_G\}.$$

Таким образом, $D\,(\mathrm{sec}Z) = D\,(\mathrm{tg}Z)$, $D\,(\mathrm{cosec}Z) = D\,(\mathrm{ctg}Z)$. Следовательно, в силу леммы 2.2

$$\alpha\hat{I} \in D\,(\mathrm{sec}Z) \quad \forall\alpha \in M_1,$$

$$\alpha\hat{I} \in D\,(\mathrm{cosec}Z) \quad \forall\alpha \in M_2,$$

$$\alpha\hat{I} \in D\,(\mathrm{sec}Z) \cap D\,(\mathrm{cosec}Z) \quad \forall\alpha \in M,$$

и для таких значений аргумента получаем в силу (2.63), (2.64)

$$\mathrm{sec}\,(\alpha\hat{I}) = \hat{I}\,\mathrm{sec}\,\alpha, \quad \mathrm{cosec}\,(\alpha\hat{I}) = \hat{I}\,\mathrm{cosec}\,\alpha.$$

Заметим, что

$$\mathrm{sec}\,\hat{O} = \hat{I}, \quad \hat{O} \notin D\,(\mathrm{cosec}Z), \quad \mathrm{sec}\,(-Z) = \mathrm{sec}\,Z,$$

$$\mathrm{cosec}\,(-Z) = -\mathrm{cosec}\,Z, \quad \cos Z\,\mathrm{sec}Z = \hat{I}, \quad \sin Z\,\mathrm{cosec}Z = \hat{I}.$$

Для любого $Z \in D\,(\mathrm{sec}Z) \cap D\,(\mathrm{cosec}Z)$, используя лемму 2.3, получаем равенство

$$\mathrm{sec}Z\,\mathrm{cosec}Z = (\sin Z \cos Z)^{-1}$$

или в силу формулы $\sin Z \cos Z = 2^{-1} \sin 2Z$ равенство

$$\mathrm{sec}Z\,\mathrm{cosec}Z = 2\sin^{-1} 2Z.$$

Функции $\mathrm{sec}Z$, $\mathrm{cosec}Z$ периодичны: любой комплексный оператор $T_m = 2\pi m\hat{I}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, является периодом этих функций:

$$\mathrm{sec}\big(Z + 2\pi m\hat{I}\big) = \mathrm{sec}Z \quad \forall Z \in D\,(\mathrm{sec}\,Z),$$

$$\mathrm{cosec}\big(Z + 2\pi m\hat{I}\big) = \mathrm{cosec}Z \quad \forall Z \in D\,(\mathrm{cosec}\,Z)$$

(это следует из периодичности функций $\sin Z$, $\cos Z$). В качестве основного периода функций $\sec Z$, $\mathrm{cosec} Z$ берется оператор $T_1 = 2\pi\hat{I}$.

Для функций $\sec Z$, $\mathrm{cosec} Z$ справедливы формулы приведения

$$\sec\big(Z + \pi\hat{I}\big) = -\sec Z \quad \forall Z \in D\,(\sec Z)\,,$$

$$\mathrm{cosec}\big(Z + \pi\hat{I}\big) = -\mathrm{cosec} Z \quad \forall Z \in D\,(\mathrm{cosec}\,Z)\,,$$

$$\sec\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = -\mathrm{cosec} Z, \quad \mathrm{cosec}\left(Z + \frac{\pi}{2}\hat{I}\right) = \sec Z, \quad \forall Z \in D\,(\sec Z) \cap D\,(\mathrm{cosec}\,Z)$$

(это следует из формул (2.44), (2.45)).

3. *Комплексные операторные гиперболические функции*

По определению, для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{sh}\,Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \mathrm{ch}\,Z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{2k}}{(2k)!}. \tag{2.87}$$

Обоснование корректности определений (2.87) аналогично случаю функции e^Z.

Заметим, что $\mathrm{sh}\,\hat{O} = \hat{O}$, $\mathrm{ch}\,\hat{O} = \hat{I}$,

$$\mathrm{sh}\,(-Z) = -\mathrm{sh}\,Z, \quad \mathrm{ch}\,(-Z) = \mathrm{ch}\,Z. \tag{2.88}$$

Для любого $Z \in \mathcal{A}$, используя замечание 2.2, имеем

$$e^Z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{Z^{2k}}{(2k)!} + \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{ch}\,Z + \mathrm{sh}\,Z.$$

Получили соотношение

$$e^Z = \mathrm{sh}\,Z + \mathrm{ch}\,Z. \tag{2.89}$$

В силу (2.88), (2.89)

$$e^{-Z} = -\mathrm{sh}\,Z + \mathrm{ch}\,Z. \tag{2.90}$$

Из соотношений (2.89), (2.90) получаем равенства

$$\mathrm{sh}\,Z = \frac{e^Z - e^{-Z}}{2}, \tag{2.91}$$

$$\mathrm{ch}\,Z = \frac{e^Z + e^{-Z}}{2}. \tag{2.92}$$

Найдем соотношения, связывающие комплексные операторные тригонометрические функции $\sin Z$, $\cos Z$ и комплексные операторные гиперболические функции $\mathrm{sh}\,Z$, $\mathrm{ch}\,Z$.

В силу (2.29), (2.30), (2.91), (2.92)

$$\sin Z = -\mathrm{J}\,\mathrm{sh}\,(\mathrm{J}Z)\,, \tag{2.93}$$

$$\cos Z = \mathrm{ch}\,(\mathrm{J}Z)\,. \tag{2.94}$$

Заменяя в равенствах (2.93), (2.94) Z на $-\mathrm{J}Z$ и используя соотношение (0.6), получаем

$$-\,\mathrm{J}\,\mathrm{sh}\,Z = \sin\left(-\mathrm{J}Z\right), \tag{2.95}$$

$$\mathrm{ch}Z = \cos\,\left(-\mathrm{J}Z\right). \tag{2.96}$$

Умножая слева обе части равенства (2.95) на J и учитывая соотношение (2.21), имеем

$$\mathrm{sh}\,Z = -\mathrm{J}\,\sin\left(\mathrm{J}Z\right). \tag{2.97}$$

В силу (2.22) равенство (2.96) принимает вид

$$\mathrm{ch}Z = \cos\,\left(\mathrm{J}Z\right). \tag{2.98}$$

Из равенства (2.97) получаем

$$\sin\left(\mathrm{J}Z\right) = \mathrm{J}\,\mathrm{sh}\,Z. \tag{2.99}$$

Формулу (2.98) можно записать в виде

$$\cos\,\left(\mathrm{J}Z\right) = \mathrm{ch}Z. \tag{2.100}$$

В силу (2.93), (2.94)

$$\mathrm{sh}\,\left(\mathrm{J}Z\right) = \mathrm{J}\,\sin Z, \tag{2.101}$$

$$\mathrm{ch}\,\left(\mathrm{J}Z\right) = \cos Z. \tag{2.102}$$

Покажем справедливость основного комплексного операторного гиперболического тождества: для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{ch}^2\,Z - \mathrm{sh}^2\,Z = \hat{I}. \tag{2.103}$$

Используя соотношения (0.6), (0.7), (2.23), (2.32), (2.97), (2.98), получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2\,Z - \mathrm{sh}^2\,Z &= \cos^2\left(\mathrm{J}Z\right) - \left(-\mathrm{J}\sin\left(\mathrm{J}Z\right)\right)^2\\ &= \cos^2\left(\mathrm{J}Z\right) - \mathrm{J}^2\sin^2\left(\mathrm{J}Z\right) = \cos^2\left(\mathrm{J}Z\right) + \sin^2\left(\mathrm{J}Z\right) = \hat{I}.\end{aligned}$$

Тождество (2.103) доказано.

Для любых $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы формулы сложения:

$$\mathrm{sh}\left(Z_1 + Z_2\right) = \mathrm{sh}\,Z_1\mathrm{ch}\,Z_2 + \mathrm{ch}\,Z_1\mathrm{sh}\,Z_2, \tag{2.104}$$

$$\mathrm{ch}\left(Z_1 + Z_2\right) = \mathrm{ch}\,Z_1\mathrm{ch}\,Z_2 + \mathrm{sh}\,Z_1\mathrm{sh}\,Z_2. \tag{2.105}$$

Доказательство формул (2.104), (2.105) идентично: с помощью соотношений (2.5), (2.91), (2.92) показывается, что правая часть формулы равна ее левой части.

В силу (2.104), (2.105) справедливы формулы двойного аргумента: для любого $Z \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{sh}\,2Z = 2\mathrm{sh}\,Z\,\mathrm{ch}\,Z, \quad \mathrm{ch}\,2Z = \mathrm{ch}^2\,Z + \mathrm{sh}^2\,Z.$$

Из соотношений (2.88), (2.104), (2.105) следует, что для любых $Z_1, Z_2 \in A$, удовлетворяющих условию (2.4), справедливы равенства

$$\mathrm{sh}\left(Z_1 - Z_2\right) = \mathrm{sh}\,Z_1\mathrm{ch}\,Z_2 - \mathrm{ch}\,Z_1\mathrm{sh}\,Z_2, \tag{2.106}$$

$$\mathrm{ch}\left(Z_1 - Z_2\right) = \mathrm{ch}\,Z_1\mathrm{ch}\,Z_2 - \mathrm{sh}\,Z_1\mathrm{sh}\,Z_2. \tag{2.107}$$

Из (2.103)–(2.107) следуют формулы преобразования произведения комплексных операторных гиперболических функций в сумму:

$$\text{sh}\, Z_1 \text{ch}\, Z_2 = \frac{1}{2}[\text{sh}\,(Z_1 + Z_2) + \text{sh}\,(Z_1 - Z_2)], \tag{2.108}$$

$$\text{ch}\, Z_1 \text{ch}\, Z_2 = \frac{1}{2}[\text{ch}\,(Z_1 + Z_2) + \text{ch}\,(Z_1 - Z_2)], \tag{2.109}$$

$$\text{sh}\, Z_1 \text{sh}\, Z_2 = \frac{1}{2}[\text{ch}\,(Z_1 + Z_2) - \text{ch}\,(Z_1 - Z_2)]. \tag{2.110}$$

Из последних трех равенств следуют формулы преобразования суммы и разности одноименных комплексных операторных гиперболических функций в произведение:

$$\text{sh}\, Z_1 + \text{sh}\, Z_2 = 2\text{sh}\,\frac{Z_1 + Z_2}{2}\text{ch}\,\frac{Z_1 - Z_2}{2}, \tag{2.111}$$

$$\text{sh}\, Z_1 - \text{sh}\, Z_2 = 2\text{sh}\,\frac{Z_1 - Z_2}{2}\text{ch}\,\frac{Z_1 + Z_2}{2}, \tag{2.112}$$

$$\text{ch}\, Z_1 + \text{ch}\, Z_2 = 2\text{ch}\,\frac{Z_1 + Z_2}{2}\text{ch}\,\frac{Z_1 - Z_2}{2}, \tag{2.113}$$

$$\text{ch}\, Z_1 - \text{ch}\, Z_2 = 2\text{sh}\,\frac{Z_1 - Z_2}{2}\text{sh}\,\frac{Z_1 + Z_2}{2}. \tag{2.114}$$

Напомним, что формулы (2.104)–(2.114) справедливы при выполнении условия (2.4).

В дальнейшем потребуется следующее утверждение.

Пусть $P, Q \in \mathcal{A}$, P, Q фиксированы, комплексные операторные степенные ряды

$$R_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P^i, \quad R_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j Q^j, \tag{2.115}$$

где $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$; $i, j \in \mathbb{N}$, сходятся абсолютно, и их суммы равны соответственно S_P, S_Q. Напомним (см. замечание 2.1), что в этом случае ряды (2.115) являются сходящимися.

Лемма 2.4. *При выполнении условия*

$$PQ = QP \tag{2.116}$$

справедливо равенство

$$S_P S_Q = S_Q S_P. \tag{2.117}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя сочетательное свойство операции умножения алгебры $\mathcal{A}$ и условие (2.116), получаем

$$P^m Q^n = Q^n P^m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{2.118}$$

Используя произведение рядов в форме Коши и формулу (2.118), получаем

$$R_1 R_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i+j=k} \left[\left(\alpha_i P^i\right)\left(\beta_j Q^j\right)\right] = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j+i=k} \left[\left(\beta_j Q^j\right)\left(\alpha_i P^i\right)\right] = R_2 R_1.$$

Таким образом, $R_1 R_2 = R_2 R_1$, значит, в силу следствия 2.1 справедливо (2.117). □

Найдем вид действительной и мнимой частей функций $\sin Z$, $\cos Z$ для значений $Z \in \mathcal{A}_K$.

Пусть $Z = X + \mathrm{J}Y \in \mathcal{A}_K$. Используя соотношения (0.6), (0.7), (2.10), (2.21), (2.22), (2.91)–(2.94), получаем

$$\sin Z = \sin(X + \mathrm{J}Y) = \operatorname{ch} Y \sin X + \mathrm{J}\operatorname{sh} Y \cos X, \tag{2.119}$$

$$\cos Z = \cos(X + \mathrm{J}Y) = \operatorname{ch} Y \cos X - \mathrm{J}\operatorname{sh} Y \sin X. \tag{2.120}$$

Пусть X, Y фиксированы. Используя условие $XY = YX$, лемму 2.4 для комплексных операторов из подалгебры $\mathcal{A}_1$ и соглашение (0.4), приходим к выводу: операторы

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{X^{2k}}{(2k)!}$$

попарно коммутируют с операторами

$$\operatorname{sh} Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \operatorname{ch} Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^{2k}}{(2k)!}.$$

Следовательно, равенства (2.119), (2.120) можно записать в виде

$$\sin Z = \sin(X + \mathrm{J}Y) = \sin X \operatorname{ch} Y + \mathrm{J}\cos X \operatorname{sh} Y,$$

$$\cos Z = \cos(X + \mathrm{J}Y) = \cos X \operatorname{ch} Y - \mathrm{J}\sin X \operatorname{sh} Y.$$

Таким образом, для $Z = X + \mathrm{J}Y \in \mathcal{A}_K$ имеем

$$Re\,(\sin Z) = \sin X \operatorname{ch} Y, \quad Im\,(\sin Z) = \cos X \operatorname{sh} Y;$$

$$Re\,(\cos Z) = \cos X \operatorname{ch} Y, \quad Im\,(\cos Z) = -\sin X \operatorname{sh} Y.$$

Комплексные операторные гиперболические функции $\operatorname{th} Z$, $\operatorname{cth} Z$ определяются равенствами

$$\operatorname{th} Z = \operatorname{sh} Z \operatorname{ch}^{-1} Z, \quad \operatorname{cth} Z = \operatorname{ch} Z \operatorname{sh}^{-1} Z,$$

где $\operatorname{ch}^{-1} Z = (\operatorname{ch} Z)^{-1}$, $\operatorname{sh}^{-1} Z = (\operatorname{sh} Z)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\operatorname{ch} Z$, $\operatorname{sh} Z$. Для этих функций

$$D\,(\operatorname{th} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \operatorname{ch} Z \in \mathcal{A}_G\},$$

$$D\,(\operatorname{cth} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \operatorname{sh} Z \in \mathcal{A}_G\}.$$

Покажем, что

$$D\,(\operatorname{th} Z) \neq \emptyset, \quad D\,(\operatorname{cth} Z) \neq \emptyset, \quad D\,(\operatorname{th} Z) \cap D\,(\operatorname{cth} Z) \neq \emptyset. \tag{2.121}$$

Лемма 2.5. *Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо включение*

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{th} Z), \tag{2.122}$$

а при любом $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ — включения

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{cth} Z), \tag{2.123}$$

$$\alpha \hat{I} \in D\,(\operatorname{th} Z) \cap D\,(\operatorname{cth} Z). \tag{2.124}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определение функции e^Z и равенство $\hat{I}^n=\hat{I}$, $n\in\mathbb{N}$, получаем для любого $\alpha\in\mathbb{R}$

$$e^{\alpha\hat{I}}=e^{\alpha}\hat{I},\quad e^{-\alpha\hat{I}}=e^{-\alpha}\hat{I}. \tag{2.125}$$

Применяя соотношения (2.91), (2.92), (2.125), получаем

$$\operatorname{sh}\left(\alpha\hat{I}\right)=\hat{I}\operatorname{sh}\alpha \text{ при любом } \alpha\in\mathbb{R}, \tag{2.126}$$

$$\operatorname{ch}\left(\alpha\hat{I}\right)=\hat{I}\operatorname{ch}\alpha \text{ при любом } \alpha\in\mathbb{R}. \tag{2.127}$$

Заметим, что

$$\operatorname{sh}\alpha\neq 0 \text{ при любом } \alpha\in\mathbb{R},\ \ \alpha\neq 0, \tag{2.128}$$

$$\operatorname{ch}\alpha\neq 0 \text{ при любом } \alpha\in\mathbb{R}. \tag{2.129}$$

В силу (2.127), (2.129) для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ существует

$$\operatorname{ch}^{-1}\left(\alpha\hat{I}\right)=\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\hat{I}, \tag{2.130}$$

следовательно, определен $\operatorname{th}\left(\alpha\hat{I}\right)=\operatorname{sh}\left(\alpha\hat{I}\right)\operatorname{ch}^{-1}\left(\alpha\hat{I}\right)$. Включение (2.122) доказано.

Далее, в силу (2.126), (2.128) для любого $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$, существует

$$\operatorname{sh}^{-1}\left(\alpha\hat{I}\right)=\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\hat{I}, \tag{2.131}$$

значит, определен $\operatorname{cth}(\alpha\hat{I})=\operatorname{ch}(\alpha\hat{I})\operatorname{sh}^{-1}(\alpha\hat{I})$.

Включение (2.123) установлено. Включение (2.124) следует из (2.122), (2.123). □

В силу леммы 2.5 справедливы соотношения (2.121).

В силу (2.126), (2.127), (2.130), (2.131)

$$\operatorname{th}\left(\alpha\hat{I}\right)=\hat{I}\operatorname{th}\alpha \text{ при любом } \alpha\in\mathbb{R},$$

$$\operatorname{cth}\left(\alpha\hat{I}\right)=\hat{I}\operatorname{cth}\alpha \text{ при любом } \alpha\in\mathbb{R},\ \ \alpha\neq 0.$$

Заметим, что $\operatorname{th}\hat{O}=\hat{O}$, $\hat{O}\notin D\left(\operatorname{cth}Z\right)$, $\operatorname{th}\left(-Z\right)=-\operatorname{th}Z$, $\operatorname{cth}\left(-Z\right)=-\operatorname{cth}Z$.

Пусть $H\in\mathcal{A}_G$. В силу включения $\mathrm{J}\in\mathcal{A}_G$ и леммы 2.3 $\mathrm{J}H\in\mathcal{A}_G$ и $(\mathrm{J}H)^{-1}=H^{-1}\mathrm{J}^{-1}$ или в силу соотношений (0.7), (2.28)

$$(\mathrm{J}H)^{-1}=-\mathrm{J}H^{-1}. \tag{2.132}$$

Теорема 2.8. *Справедливы тождества:*

$$\operatorname{tg}\left(\mathrm{J}Z\right)=\mathrm{J}\operatorname{th}Z\quad\forall Z\in D\left(\operatorname{th}Z\right), \tag{2.133}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\mathrm{J}Z\right)=-\mathrm{J}\operatorname{cth}Z\quad\forall Z\in D\left(\operatorname{cth}Z\right), \tag{2.134}$$

$$\operatorname{th}\left(\mathrm{J}Z\right)=\mathrm{J}\operatorname{tg}Z\quad\forall Z\in D\left(\operatorname{tg}Z\right), \tag{2.135}$$

$$\operatorname{cth}\left(\mathrm{J}Z\right)=-\mathrm{J}\operatorname{ctg}Z\quad\forall Z\in D\left(\operatorname{ctg}Z\right). \tag{2.136}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z \in D(\operatorname{th} Z)$. В силу (2.100) существует

$$\cos^{-1}(\mathrm{J}Z) = \operatorname{ch}^{-1} Z. \tag{2.137}$$

Используя соотношения (2.99), (2.137), получаем

$$\operatorname{tg}(\mathrm{J}Z) = \sin(\mathrm{J}Z)\cos^{-1}(\mathrm{J}Z) = \mathrm{J}\operatorname{sh} Z \operatorname{ch}^{-1} Z = \mathrm{J}\operatorname{th} Z.$$

Тождество (2.133) доказано.

Пусть $Z \in D(\operatorname{cth} Z)$. В силу (2.99), (2.132) существует

$$\sin^{-1}(\mathrm{J}Z) = -\mathrm{J}\operatorname{sh}^{-1} Z. \tag{2.138}$$

Применяя соотношения (0.7), (2.100), (2.138), имеем

$$\operatorname{ctg}(\mathrm{J}Z) = \cos(\mathrm{J}Z)\sin^{-1}(\mathrm{J}Z) = \operatorname{ch} Z\left(-\mathrm{J}\operatorname{sh}^{-1} Z\right) = -\mathrm{J}\operatorname{ch} Z \operatorname{sh}^{-1} Z = -\mathrm{J}\operatorname{cth} Z.$$

Тождество (2.134) установлено.

Пусть $Z \in D(\operatorname{tg} Z)$. В силу (2.102) существует

$$\operatorname{ch}^{-1}(\mathrm{J}Z) = \cos^{-1} Z. \tag{2.139}$$

Используя соотношения (2.101), (2.139), получаем

$$\operatorname{th}(\mathrm{J}Z) = \operatorname{sh}(\mathrm{J}Z)\operatorname{ch}^{-1}(\mathrm{J}Z) = \mathrm{J}\sin Z\cos^{-1} Z = \mathrm{J}\operatorname{tg} Z.$$

Тождество (2.135) доказано. Пусть $Z \in D(\operatorname{ctg} Z)$. В силу (2.101), (2.132) существует

$$\operatorname{sh}^{-1}(\mathrm{J}Z) = -\mathrm{J}\sin^{-1} Z. \tag{2.140}$$

Применяя соотношения (0.7), (2.102), (2.140), имеем

$$\operatorname{cth}(\mathrm{J}Z) = \operatorname{ch}(\mathrm{J}Z)\operatorname{sh}^{-1}(\mathrm{J}Z) = \cos Z(-\mathrm{J}\sin^{-1} Z) = -\mathrm{J}\cos Z\sin^{-1} Z = -\mathrm{J}\operatorname{ctg} Z.$$

Тождество (2.136) установлено. □

Для любого $Z \in D(\operatorname{th} Z) \cap D(\operatorname{cth} Z)$

$$\operatorname{th} Z \operatorname{cth} Z = \hat{I}, \tag{2.141}$$

$$\operatorname{th} Z = \operatorname{cth}^{-1} Z, \quad \operatorname{cth} Z = \operatorname{th}^{-1} Z. \tag{2.142}$$

Тождество (2.141) доказывается так же, как тождество (2.65). Доказательство равенств (2.142) аналогично доказательству соотношений (2.72).

Комплексные операторные гиперболические функции секанс и косеканс определяются равенствами

$$\operatorname{sech} Z = \operatorname{ch}^{-1} Z, \quad \operatorname{cosech} Z = \operatorname{sh}^{-1} Z.$$

Для этих функций

$$D(\operatorname{sech} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \operatorname{ch} Z \in \mathcal{A}_G\},$$

$$D(\operatorname{cosech} Z) = \{Z \in \mathcal{A} : \operatorname{sh} Z \in \mathcal{A}_G\}.$$

Таким образом, $D(\operatorname{sech} Z) = D(\operatorname{th} Z)$, $D(\operatorname{cosech} Z) = D(\operatorname{cth} Z)$. Следовательно, в силу леммы 2.5 для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\alpha\hat{I} \in D(\operatorname{sech} Z),$$

а любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ выполнено

$$\alpha\hat{I} \in D(\operatorname{cosech} Z),$$

$$\alpha\hat{I} \in D(\operatorname{sech} Z) \cap D(\operatorname{cosech} Z),$$

и для таких значений аргумента в силу (2.130), (2.131) получаем

$$\operatorname{sech}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{sech}\alpha, \quad \operatorname{cosech}\left(\alpha\hat{I}\right) = \hat{I}\operatorname{cosech}\alpha.$$

Заметим, что

$$\operatorname{sech}\hat{O} = \hat{I}, \quad \hat{O} \notin D(\operatorname{cosech} Z), \quad \operatorname{sech}(-Z) = \operatorname{sech} Z,$$

$$\operatorname{cosech}(-Z) = -\operatorname{cosech} Z, \quad \operatorname{ch} Z \operatorname{sech} Z = \hat{I}, \quad \operatorname{sh} Z \operatorname{cosech} Z = \hat{I}.$$

Для любого $Z \in D(\operatorname{sech} Z) \cap D(\operatorname{cosech} Z)$, используя лемму 2.3, получаем

$$\operatorname{sech} Z \operatorname{cosech} Z = (\operatorname{sh} Z \operatorname{ch} Z)^{-1}$$

или в силу формулы $\operatorname{sh} Z \operatorname{ch} Z = 2^{-1}\operatorname{sh} 2Z$

$$\operatorname{sech} Z \operatorname{cosech} Z = 2\operatorname{sh}^{-1} 2Z.$$

Следующим этапом в изучении комплексных операторных функций из семейства (0.14) является построение обратных функций $\operatorname{Ln} Z$, $\operatorname{Arcsin} Z$, $\operatorname{Arccos} Z$, $\operatorname{Arctg} Z$, $\operatorname{Arcctg} Z$. Эти функции являются многозначными как функции, обратные периодическим функциям.

В перспективе естественный интерес представляет исследование вопросов, связанных с дифференцированием и интегрированием комплексных операторных функций семейства (0.14), в частности, конкретных функций из этого семейства, рассмотренных в данной работе.

В более отдаленной перспективе видится создание теории комплексных операторных функций нескольких комплексных операторных переменных.

Результаты данной работы анонсированы в [11, 12].

References

[1] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 211–217. [V. I. Fomin, “About a general solution of a linear homogeneous differential equations in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 211–217 (In Russian)].

[2] В. И. Фомин, “О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:8 (2020), 1045–1054; англ. пер.:V. I. Fomin, “On the case of complex roots of the characteristic operator polynomial of a linear nth-order homogeneous differential equation in a banach space”, *Differential Equations*, **56**:8 (2020), 1021–1030.

[3] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные опеарторы. Общая теория*, Иностранная литература, М., 1962. [N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators. General Theory*, Inostrannaya Literatura Publ., Moscow, 1962 (In Russian)].

[4] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

[5] В. А. Садовничий, *Теория операторов*, Дрофа, М., 2001. [V. A. Sadovnichy, *Theory of Operators*, Drofa Publ., Moscow, 2001 (In Russian)].

[6] В. И. Фомин, "Об операторных функциях операторного переменного", *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:141 (2023), 68–89. [V. I. Fomin, "About operator functions of an operator variable", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:141 (2023), 68–89 (In Russian)].

[7] А. Н. Талдыкин, *Элементы прикладного функционального анализа*, Высш. школа, М., 1982. [A. N. Taldykin, *Elements of Applied Functional Analysis*, Vyssh. Shkola Publ., Moscow, 1982 (In Russian)].

[8] Л. Шварц, *Анализ. Т.1*, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analysis. V.1*, Mir Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

[9] В. Д. Морозова, *Теория функций комплексного переменного*, Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2002. [V. D. Morozova, *Theory of Functions of a Complex Variable*, MGTU N. E. Bauman Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

[10] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[11] В. И. Фомин, "О периодичности комплексной операторной экспоненциальной функции", *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна» (27 января – 1 февраля 2023), Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2023, 326–327. [V. I. Fomin, "On the periodicity of the complex operator exponential function", *Modern Methods of Function Theory and Related Problems*, Proceedings of the International Conference "Voronezh Winter Mathematical School of S. G. Krein" (January 27 – February 1, 2023), VSU Publishing House, Voronezh, 2023, 326–327 (In Russian)].

[12] В. И. Фомин, "О комплексной операторной формуле Эйлера", *Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения*, Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа» (3–9 мая 2023), Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2023, 411–413. [V. I. Fomin, "On the complex operator formula of Euler", *Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems. Pontryagin Readings*, Proceedings of the International Conference "Voronezh Spring Mathematical School" (May 3–9, 2023), VSU Publishing House, Voronezh, 2023, 411–413 (In Russian)].

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Поступила в редакцию 12.03.2024 г.
Поступила после рецензирования 23.08.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Received 12.03.2024
Reviewed 23.08.2024
Accepted for press 13.09.2024

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-352-376

УДК 517.977

Некоторые вопросы, связанные с реализацией множеств притяжения с точностью до наперед заданной окрестности

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Аннотация. Рассматриваются вопросы, связанные с реализацией множеств притяжения (МП) в абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Исследуется возможность реализации МП с точностью до произвольной окрестности в классе замыканий множеств достижимости, отвечающих конкретным множествам семейства, порождающего ОАХ. Кроме того, рассматриваются некоторые соотношения для МП, порождаемых различными ОАХ (исследуются условия дизъюнктности МП). Общие конструкции окрестностной реализации МП были применены в случае, когда данные МП рассматривались в пространстве ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства (ИП). В частности, детально исследовался случай, когда ОАХ определяются посредством фильтра; для данного случая, при неограничительных условиях на исходное ИП, в виде МП реализуется множество всех у/ф, мажорирующих исходный фильтр. В данном случае (пространства у/ф) отдельно исследовались варианты оснащения множества у/ф топологиями стоуновского и волмэновского типов.

Ключевые слова: множество притяжения, ограничение асимптотического характера, окрестность, топология

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Некоторые вопросы, связанные с реализацией множеств притяжения с точностью до наперед заданной окрестности // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 352–376. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-352-376

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-352-376

Some questions connected with implementation of attraction sets accurate to a predetermined neighborhood

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Abstract. Questions connected with implementation of attraction sets (AS) in attainability problem with constraints of asymptotic nature (CAN) are considered. It is investigated the possibility of AS implementation accurate to arbitrary neighborhood in class of closures of attainability sets corresponding to concrete sets from the family generating CAN. Moreover, some relations for AS generated by different CAN are considered (disjunction conditions of AS are investigated). General constructions of neighborhood implementation of AS were applied in the case when these AS were considered in the space of ultrafilters of broadly understood measurable space (MS). In particular, the case when CAN are defined by a filter was investigated in detail; for this case, under non-restrictive conditions on the original MS, the set of ultrafilters majorizing the original filter is implemented as AS. In this case (of ultrafilter space) variants of equipment of ultrafilter set with topologies of Stone and Wallman types are investigated separately.

Keywords: attraction set, constraints of asymptotic nature, neighborhood, topology

Mathematics Subject Classification: 93C83.

For citation: Chentsov A.G. Some questions connected with implementation of attraction sets accurate to a predetermined neighborhood. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 352–376.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-352-376 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая статья продолжает исследование [1]. Основным предметом настоящего исследования являются множества притяжения (МП) в задачах о достижимости в топологических пространствах (ТП) с ограничениями асимптотического характера (ОАХ). Упомянутые ОАХ могут возникать при последовательном ослаблении стандартных ограничений (неравенства — в задачах математического программирования; краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения — в задачах управления), но могут задаваться и изначально (см., в частности, [2, 3]). Так или иначе возникает непустое семейство множеств в пространстве обычных (доступных для непосредственного применения) решений, которое без потери общности можно считать направленным (двойственно к упорядоченности по включению). Предполагая, что каждому обычному решению (или управлению) сопоставляется точка топологического пространства (ТП), мы имеем некоторое целевое отображение (ЦО). Образы множеств с точками в виде обычных решений (управлений) при действии ЦО можно трактовать как аналоги областей достижимости (ОД) в задачах управления (см. в этой связи [4–6]). Известно, что ослабление стандартных ограничений в задачах управления зачастую приводит к скачкообразному расширению ОД. Возникающее при этом предельное множество, отвечающее семейству ОД при ослабленных условиях, является МП, реализуемым (в задачах об исследовании ОД управляемой системы с конечномерным фазовым пространством) в обычной секвенциальной форме, что соответствует идейно конструкциям на основе приближенных решений Дж. Варги (см. [7, гл. III]) в задачах оптимизации и, в частности, в задачах оптимального управления. Однако подход, связанный с построением МП в задачах о достижимости с ОАХ, является намного более общим; он охватывает, в частности, и уже упоминавшиеся случаи, когда ОАХ не связаны с ослаблением каких-либо стандартных ограничений. С другой стороны, в рамках данного подхода, базирующегося на конструкциях общей топологии, неестественным является и исключительно секвенциальный вариант реализации элементов МП; здесь уже имеет смысл использовать направленности и фильтры в качестве аналогов приближенных решений Дж. Варги. Отметим, что при таком (расширенном) определении МП удается охватить и некоторые, далекие на первый взгляд от ОД управляемых систем, объекты. Так, в [1] указан вариант МП в пространстве ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства (ИП): имеется в виду «совокупность» у/ф, мажорирующих наперед заданный фильтр.

Вместе с тем следует отметить, что МП являются по самому смыслу обобщенными пределами некоторых «настоящих» достижимых множеств (ДМ) (в задачах управления таковыми следует признать замыкания обычных ОД; замыкание здесь выступает в роли несущественной «технической» операции, не связанной с ослаблением стандартных ограничений исходной задачи). Упомянутые ДМ отвечают всякий раз стандартному ограничению на выбор обычного решения (управления) в виде множества из семейства, порождающего ОАХ; при этом соответствующее МП является п/м каждого такого ДМ. Вполне естественным является вопрос о реализации МП в классе ДМ, соответствующих семейству, порождающему ОАХ, с точностью до любой наперед выбранной окрестности исходного МП (т. е. о реализации уже не только в пределе). В этой связи отметим построения [8, § 3.6], естественное развитие которых осуществляется в настоящей работе. В частности, мы рассматриваем, продолжая [1] , данные построения в пространстве у/ф при оснащении топологиями стоуновского и волмэновского типов.

В связи с общими вопросами построения расширений задач о достижимости с ОАХ отметим, что здесь вполне применимы методы, использовавшиеся в случае экстремальных задач и, в частности, задач оптимального управления. Особо отметим подход Дж. Варги (см. [7, гл. III,IV]); в частности, напомним понятия точных, приближенных и обобщенных решений в [7, гл. III]. Отметим исследования Р. В. Гамкрелидзе, касающиеся применения управлений-мер (мерозначных функций) в задачах оптимального управления и, в частности, в задаче быстродействия (см. [9]).

В задачах теории дифференциальных игр Н. Н. Красовский и А. И. Субботин широко использовали конструкции решения с приближенным соблюдением фазовых ограничений в виде сечений стабильных мостов, что позволило установить фундаментальную теорему об альтернативе (см. [10, 11]). Кроме того, в их работах использовались управления-меры на этапе построения программных конструкций для решения нелинейных дифференциальных игр (см. [11]). Отметим в этом направлении также монографию [12] и серию журнальных публикаций в связи с методом программных итераций, где применялись управления-меры.

Для построения расширений в задачах импульсного управления Н. Н. Красовский предложил использовать аппарат обобщенных функций (см. [4, гл. 4,§ 14]), что впоследствии стало основой в конструкциях импульсного управления. Для линейных систем управления с ограничениями импульсного и моментного характера и разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях (в [2, 3, 8, 13, 14] и ряде других работ) использовались процедуры расширения в классе конечно-аддитивных мер как в случае экстремальных задач, так и в случае задач о достижимости, где с их помощью определялись МП в классе обобщенных управлений. Этот подход получил естественное развитие в виде конструкций, использующих у/ф широко понимаемых ИП (см. [1, 15, 16]).

1. Основные понятия

В статье используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть def непустое множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда каждому объекту z сопоставляется синглетон $\{z\} \triangleq \{z;z\}$, содержащий $z : z \in \{z\}$. Множества — объекты и, следуя [17, с. 67], полагаем для объектов u и v, что $(u,v) \triangleq \{\{u\};\{u;v\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом u и вторым элементом v. Для каждой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы h, однозначно определяемые условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H); $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. В качестве H может использоваться семейство. Множеству $\mathbb{M}$ и (непустому) семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ сопоставляем семейство

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\, \mathbb{M} \setminus M :\ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})), \tag{1.1}$$

двойственное к $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство и B — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{\, A \cap B :\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{1.2}$$

есть след $\mathcal{A}$ на B. Используем (1.1), (1.2) в конструкциях, связанных с топологией. Если $\mathcal{H}$ — семейство и S — множество, то

$$([\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}))\&(]\,\mathcal{H}\,[\,(S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid H \subset S\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})).$$

Наконец, множеству $\mathbb{X}$ и (непустому) семейству $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{X} \mid \mathcal{X}] \triangleq \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \mid \mathbb{X} = \bigcup_{X \in \chi} X\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{X}))$$

всех покрытий $\mathbb{X}$ множествами из $\mathcal{X}$. Если P и Q — множества, то Q^P есть def множество всех функций из P в Q (при $f \in Q^P$ и $x \in P$ в виде $f(x) \in Q$ имеем значение функции f в точке x); при $g \in Q^P$ и $C \in \mathcal{P}(P)$ в виде $g^1(C) \triangleq \{g(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(Q)$ имеем образ C при действии g (для прообраза множества $M \in \mathcal{P}(Q)$ при действии g используем стандартное обозначение $g^{-1}(M)$). Если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — непустые множества и $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$, то

$$\begin{gathered}(f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(A) : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B}))\ \ \forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))) \\ \&(f^{-1}[\mathcal{B}] \triangleq \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{A}))\ \ \forall \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{B})));\end{gathered} \tag{1.3}$$

семейства, определяемые в (1.3), называем образом и прообразом соответствующих подсемейств $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ и $\mathcal{P}(\mathbb{B})$ соответственно.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и

$$\overline{1, n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Мы полагаем, что элементы $\mathbb{N}$, т. е. натуральные числа, множествами не являются. С учетом этого для каждых множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение H^n для множества всех отображений из $\overline{1, n}$ в H, именуемых далее кортежами («длины» n). В дальнейшем используем индексную форму записи функций (см. [18, с. 20,21]) и, в частности, кортежей.

Специальные семейства. Фиксируем до конца настоящего раздела множество I. В виде

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(I \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.4}$$

имеем семейство всех π-систем [19, с. 14] п/м I с «нулем» и «единицей». Среди всевозможных π-систем из семейства (1.4) выделяем отделимые:

$$\tilde{\pi}^0[I] \triangleq \{\, \mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in I \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{I} :\ (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\}$$

есть семейство всех отделимых π-систем из (1.4). В качестве примера π-системы отметим полуалгебру множеств (см. [20, гл. I]). При этом $\forall \mathcal{L} \in \pi[I]\ \ \forall A \in \mathcal{P}(I)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_n(A, \mathcal{L}) \triangleq \{\, (L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n \mid\ (A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i)\&(L_p \cap L_q = \varnothing\ \ \forall p \in \overline{1, n}\ \ \forall q \in \overline{1, n} \setminus \{p\})\}$$

(введены упорядоченные конечные разбиения A множествами π-системы $\mathcal{L}$). Тогда

$$\Pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall J \in \mathcal{I}\ \exists n \in \mathbb{N} :\ \Delta_n(I \setminus J, \mathcal{I}) \neq \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\pi}^0[I]) \tag{1.5}$$

(заметим, что $\mathcal{P}(I) \in \Pi[I]$). Итак, при $\mathcal{I} \in \Pi[I]$ мы имеем вариант отделимой π-системы; заметим, что $(I, \mathcal{I})$ есть в этом случае измеримое пространство (ИП) с полуалгеброй множеств (алгебры и σ-алгебры п/м I — суть частные случаи полуалгебр). Вообще, при $\mathcal{I} \in \pi[I]$ мы рассматриваем $(I, \mathcal{I})$ как широко понимаемое ИП; отметим. что в этом случае в виде

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$$

реализуется семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{I}$.

2. Элементы топологии

В настоящем разделе мы сосредоточимся на некоторых представлениях топологических пространств (ТП), так или иначе связанных с вопросами отделимости и свойствами окрестностей. Однако, сначала введем ряд общих обозначений, фиксируя до тех пор, пока не будет оговорено противное, множество I; тогда в виде

$$(\mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)\}$$

имеем семейство всех топологий на множестве I. При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ в виде (I, τ) имеем ТП, а в виде $\mathbf{C}_I[\tau]$ — семейство всех замкнутых в (I, τ) п/м I; при $x \in I$ полагаем, что $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N_\tau^0(x) : G \subset H\} = \{H \in \mathcal{P}(I) \mid]\, N_\tau^0(x)\, [\,(H) \neq \varnothing\} \tag{2.1}$$

(фильтр [21, гл. I] окрестностей x в ТП (I, τ)), $N_\tau^0(x) = \tau \cap N_\tau(x)$. По аналогии с (2.1) вводим окрестности множеств: если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $A \in \mathcal{P}(I)$, то $\mathbf{N}_\tau^0[A] \triangleq \{G \in \tau \mid A \subset G\}$ и

$$\mathbf{N}_\tau[A] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in \mathbf{N}_\tau^0[A] : G \subset H\} = \{H \in \mathcal{P}(I) \mid]\, \mathbf{N}_\tau^0[A]\, [\,(H) \neq \varnothing\}; \tag{2.2}$$

ясно, что мы получаем два непустых подсемейства $\mathcal{P}(I)$. Конечно, при $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $x \in I$ имеем равенства

$$(N_\tau^0(x) = \mathbf{N}_\tau^0[\{x\}]) \& (N_\tau(x) = \mathbf{N}_\tau[\{x\}]).$$

Мы полагаем далее, что

$$(\mathcal{D} - \mathrm{top})[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \ \ \forall x \in I \ \ \forall y \in I \setminus \{x\} \ \ \exists\, G \in N_\tau^0(x) : y \notin G\}, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{top})_0[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \ \forall x \in I \ \ \forall y \in I \setminus \{x\} \\ \exists\, G_1 \in N_\tau^0(x) \ \ \exists G_2 \in N_\tau^0(y) : G_1 \cap G_2 = \varnothing\},\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{top})^0[I] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \ \forall F \in \mathbf{C}_I[\tau] \ \ \forall x \in I \setminus F \ \ \exists\, G_1 \in \mathbf{N}_\tau^0[F] \\ \exists\, G_2 \in N_\tau^0(x) : G_1 \cap G_2 = \varnothing\},\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$(\mathrm{reg} - \mathrm{top})[I] \triangleq (\mathcal{D} - \mathrm{top})[I] \cap (\mathrm{top})^0[I]. \tag{2.6}$$

В (2.3) имеем семейство всех достижимых топологий на I (т. е. топологий, превращающих I в достижимые [22, с. 191] ТП), в (2.4) — семейство всех хаусдорфовых топологий (T_2 - топологий) на I; (2.5) определяет семейство всех топологий на I, превращающих I в T_3 - пространство; (2.6) — семейство всех топологий на I, реализующих каждая регулярное ТП с «единицей» I. В виде

$$(\mathbf{c}-\mathrm{top})[I]=\{\tau\in(\mathrm{top})[I]\mid\ \forall\xi\in(\mathrm{COV})[I\mid\tau]\ \ \exists\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\xi):I=\bigcup_{G\in\mathcal{K}}G\}$$
$$=\{\tau\in(\mathrm{top})[I]\mid\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F\neq\varnothing\ \ \forall\mathcal{F}\in(\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_I[\tau]]\}$$

(мы учитываем, что $\mathbf{C}_I[\tilde{\tau}]\in\pi[I]$ при $\tilde{\tau}\in(\mathrm{top})[I]$) имеем семейство всех топологий, превращающих I в компактное ТП; будем называть такие топологии компактными. Особо выделяем

$$(\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[I]\triangleq(\mathbf{c}-\mathrm{top})[I]\cap(\mathrm{top})_0[I];$$

при $\tau\in(\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[I]$ называем ТП (I,τ) компактом. При $\tau\in(\mathrm{top})[I]$ в виде

$$(\tau-\mathrm{comp})[I]\triangleq\{K\in\mathcal{P}(I)\mid\ \forall\mathcal{G}\in\mathcal{P}'(\tau)$$
$$(K\subset\bigcup_{G\in\mathcal{G}}G)\Rightarrow(\exists\,\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{G}):K\subset\bigcup_{G\in\mathcal{K}}G)\}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$$

имеем семейство всех компактных в ТП (I,τ) п/м I (всегда $\varnothing\in(\tau-\mathrm{comp})[I]$). Отметим теперь ряд простых следствий известных определений (2.3)–(2.6), использующих [23, следствие 3.1.5, теорема 3.1.6] и используемых в дальнейшем. Так, в частности,

$$\begin{aligned}(\mathbf{c}-\mathrm{top})[I]&=\{\tau\in(\mathrm{top})[I]\mid\mathbf{N}^0_\tau[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}}\mathbb{F}]=\bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{F})}\mathbf{N}^0_\tau[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}}\mathbb{F}]\ \ \forall\mathcal{F}\in\mathcal{P}'(\mathbf{C}_I[\tau])\}\\&=\{\tau\in(\mathrm{top})[I]\mid\mathbf{N}_\tau[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}}\mathbb{F}]=\bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{F})}\mathbf{N}_\tau[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}}\mathbb{F}]\ \ \forall\mathcal{F}\in\mathcal{P}'(\mathbf{C}_I[\tau])\}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

В представлении (2.7) проявляется эквивалентность открытых и произвольных (см. [21, гл. I]) окрестностей множеств; по этой причине далее мы будем ограничиваться, как правило, представлениями в терминах открытых окрестностей.

З а м е ч а н и е 2.1. В связи с (2.7) полезно отметить аналогию, касающуюся условий счетной компактности. В этой связи заметим, что

$$(\mathbf{c}_{\mathbb{N}}-\mathrm{top})[I]\triangleq\{\tau\in(\mathrm{top})[I]\mid\forall\,(G_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\tau^{\mathbb{N}}\ \ (I=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}G_i)\Rightarrow(\exists\,n\in\mathbb{N}:I=\bigcup_{i=1}^{n}G_i)\}$$

есть семейство всех топологий, превращающих I в счетно компактное ТП. Тогда, используя аналоги конструкции [8, предложение 3.6.2], получаем, что

$$(\mathbf{c}_{\mathbb{N}}-\mathrm{top})[I]=\{\tau\in(\mathrm{top})[I]\mid\mathbf{N}^0_\tau[\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_i]=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{N}^0_\tau[\bigcap_{i=1}^{k}F_i]\ \ \forall\,(F_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathbf{C}_I[\tau]^{\mathbb{N}}\}.$$

□

В развитие [23, теорема 3.1.6] отметим весьма очевидное представление

$$\begin{gathered}(\mathrm{top})_0[I] = \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall K_1 \in (\tau - \mathrm{comp})[I] \;\; \forall K_2 \in (\tau \in \mathrm{comp})[I] \\ (K_1 \cap K_2 = \varnothing) \Rightarrow (\exists\, G_1 \in \mathbf{N}_\tau^0[K_1] \;\; \exists\, G_2 \in \mathbf{N}_\tau^0[K_2] : G_1 \cap G_2 = \varnothing)\}\end{gathered} \tag{2.8}$$

(в (2.8) имеем понятное свойство: в T_2-пространстве компактные множества ведут себя как точки). Аналогичное представление реализуется для T_3-пространств:

$$(\mathrm{top})^0[I] = \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall A \in (\tau - \mathrm{comp})[I]$$
$$\forall B \in \mathbf{C}_I[\tau] \;\; (A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (\exists\, G_1 \in \mathbf{N}_\tau^0[A] \;\; \exists\, G_2 \in \mathbf{N}_\tau^0[B] : G_1 \cap G_2 = \varnothing)\}.$$

Отметим здесь полезное следствие, касающееся аналогичных представлений для регулярных ТП:

$$(\mathrm{reg} - \mathrm{top})[I] = \{\tau \in (\mathcal{D} - \mathrm{top})[I] \mid \forall A \in (\tau - \mathrm{comp})[I]$$
$$\forall B \in \mathbf{C}_I[\tau] \;\; (A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (\exists\, G_1 \in \mathbf{N}_\tau^0[A] \;\; \exists\, G_2 \in \mathbf{N}_\tau^0[B] : G_1 \cap G_2 = \varnothing)\}.$$

Отметим здесь же, что при $\tau \in (\mathrm{top})[I]$, $n \in \mathbb{N}$ и $(K_i)_{i \in \overline{1,n}} \in (\tau \in \mathrm{comp})[I]^n$

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i \in (\tau \in \mathrm{comp})[I].$$

Тогда из (2.8) извлекается полезное следствие: если $\tau \in (\mathrm{top})_0[I]$, $n \in \mathbb{N}$ и $(K_i)_{i \in \overline{1,n}} \in (\tau - \mathrm{comp})[I]^n$, то

$$(K_r \cap K_s = \varnothing \;\; \forall\, r \in \overline{1,n} \;\; \forall\, s \in \overline{1,n} \setminus \{r\})$$
$$\Rightarrow (\exists\, (G_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \prod_{i=1}^{n} \mathbf{N}_\tau^0[K_i] : G_r \cap G_s = \varnothing \;\; \forall\, r \in \overline{1,n} \;\; \forall\, s \in \overline{1,n} \setminus \{r\}).$$

Непрерывные и замкнутые отображения.

Фиксируем в настоящем пункте непустые множества X и Y, а также топологии $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$. В виде

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}[\tau_2] \subset \tau_1\}$$

имеем множество всех непрерывных в смысле ТП (X, τ_1) и (Y, τ_2) функций из Y^X. Множество всех замкнутых отображений из (X, τ_1) в (Y, τ_2) есть

$$C_{\mathrm{cl}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \mid f^1[\mathbf{C}_X[\tau_1]] \subset \mathbf{C}_Y[\tau_2]\}.$$

Наконец, почти совершенные отображения [23, с. 287] из (X, τ_1) в (Y, τ_2) образуют множество

$$C_{\mathbf{ap}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{f \in C_{\mathrm{cl}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \mid f^{-1}(\{y\}) \in (\tau_1 - \mathrm{comp})[X] \;\; \forall\, y \in Y\}.$$

Замыкание.

Если (H, τ) есть ТП, т. е. H — множество и $\tau \in (\mathrm{top})[H]$, а $A \in \mathcal{P}(H)$, то

$$\mathrm{cl}(A, \tau) \triangleq \{h \in H \mid G \cap A \neq \varnothing \;\; \forall\, G \in N_\tau^0(h)\} = \{h \in H \mid S \cap A \neq \varnothing \;\; \forall\, S \in N_\tau(h)\}$$
$$= \bigcap_{F \in [\mathbf{C}_H[\tau]](A)} F \in [\mathbf{C}_H[\tau]](A),$$

где $[\mathbf{C}_H[\tau]](A) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_H[\tau])$.

3. Множества притяжения

В настоящем разделе мы обращаемся к проблеме о достижимости в ТП при ограничениях асимптотического характера (ОАХ). Решение данной задачи естественно связать с множеством притяжения (МП), которое по сути является регуляризованным вариантом образа множества. Конкретный вариант данной проблемы можно связать с исследованием области достижимости (ОД) управляемой системы (см. [4, с. 116], [6, раздел 4.2]).

Фиксируем непустое множество E, точки которого называем обычными решениями или обычными управлениями в зависимости от контекста; п/м E могут выступать в качестве способов задания ограничений. Мы допускаем использование в этом качестве и непустых подсемейств $\mathcal{P}(E)$; среди последних будем выделять направленные подсемейства. В виде

$$\beta[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E}:\ \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2\} \tag{3.1}$$

имеем семейство всех направленных (двойственно к вложению) подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Заметим, что $\beta_0[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta[E] \mid \varnothing \notin \mathcal{B}\}$ есть семейство всех баз фильтров п/м E; данное семейство играет важную роль в построениях общей топологии (см. [21, гл. I]). Если (X,τ) есть ТП, $X \neq \varnothing$, $f \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то полагаем, что

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau); \tag{3.2}$$

мы называем (3.2) МП при ОАХ в виде направленного семейства $\mathcal{E}$ и целевом отображении f (заметим, что МП рассматривались [24, (2.3)] и для случая произвольных непустых подсемейств $\mathcal{P}(E)$, но мы будем ограничиваться вариантом (3.2) для $\mathcal{E} \in \beta[E]$, имея в виду простую связь [24, (2.2),(2.3)] с более общими построениями (см. также [24, предложение 1])). В связи с выбором целевого отображения f в (3.2) напомним одно полезное множество, использовавшееся в [25]: для произвольного ТП $(X,\tau), X \neq \varnothing$,

$$\mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau] \overset{\triangle}{=} \{f \in X^E \mid f^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[X]\}, \tag{3.3}$$

где $(\tau - \mathrm{comp})^0[X] \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists K \in (\tau - \mathrm{comp})[X] : H \subset K\}$. Последнее понятие содержательно при условии отделимости (X,τ). А именно: для непустого множества X и топологии $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ (см. (2.4))

$$(\tau - \mathrm{comp})^0[X] = \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \mathrm{cl}(H,\tau) \in (\tau - \mathrm{comp})[X]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)). \tag{3.4}$$

Из (3.2)–(3.4) имеем, конечно, свойство: для непустого множества X, $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ (т. е. для хаусдорфова ТП $(X,\tau), X \neq \varnothing$), $f \in \mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau]$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}] \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \tag{3.5}$$

(в частности, $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}] \in \mathbf{C}_X[\tau]$). В связи с (3.3) отметим полезную связь с понятием компактификатора [26] (здесь и ниже $\circ$ используется для обозначения композиции [23, с. 18] функций).

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Если K и X — непустые множества, $\tau_1 \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[K]$, $\tau_2 \in (\mathrm{top})[X]$, $m \in K^E$ и $g \in C(K,\tau_1,X,\tau_2)$, то*

$$g \circ m \in \mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau_2]. \tag{3.6}$$

Доказательство. Фиксируем E, X, τ_1, τ_2, m и g в соответствии с условиями. Тогда $g^1(K) \in (\tau_2 - \mathrm{comp})[X]$ (см. [23, с. 199]) и $(g \circ m)^1(E) \subset g^1(K)$. Тогда $(g \circ m)^1(E) \in (\tau_2 - \mathrm{comp})^0[X]$. Из (3.3) получаем нужное свойство (3.6). □

Предложение 3.2. *Если $(X, \tau), X \neq \varnothing$, есть T_2-пространство* (т. е. $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$) и $f \in \mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E; X; \tau]$, то

$$\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]] = \bigcup_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau)] \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{3.7}$$

Доказательство. Будем использовать (2.7). При этом согласно (3.3) для некоторого $\mathbb{K} \in (\tau - \mathrm{comp})[X]$

$$f^1(E) \subset \mathbb{K}. \tag{3.8}$$

Тогда (см. (1.2)) $\tau|_{\mathbb{K}} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbb{K}]$ и $(\mathbb{K}, \tau|_{\mathbb{K}})$ — непустой (см. (3.8)) компакт. При этом, в частности, $\mathbb{K} \in \mathbf{C}_X[\tau]$. Пусть $\mathcal{E} \in \beta[E]$; тогда (см. (3.8))

$$\mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau) \subset \mathbb{K} \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

Как следствие получаем, что

$$\mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau) \in \mathbf{C}_{\mathbb{K}}[\tau|_{\mathbb{K}}] \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

В итоге получаем очевидное свойство

$$\mathcal{F} \triangleq \{\mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau) : \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{K}}[\tau|_{\mathbb{K}}]). \tag{3.9}$$

Теперь воспользуемся свойством (2.7): имеем равенство

$$\mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau)] = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[\bigcap_{F \in \mathcal{K}} F].$$

С учетом (3.2) получаем, как следствие, что $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}] \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ и

$$\mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[(\mathrm{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]] = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[\bigcap_{F \in \mathcal{K}} F]. \tag{3.10}$$

Пусть $\mathbb{G} \in \mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]]$. Тогда $\mathbb{G} \cap \mathbb{K} \in \mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[(\mathrm{AS})[E; X; \tau; f; \mathcal{E}]]$ и, согласно (3.9), (3.10) для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $(\Sigma_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{E}^n$

$$\mathbb{G} \cap \mathbb{K} \in \mathbf{N}^0_{\tau|_{\mathbb{K}}}[\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma_i), \tau)]. \tag{3.11}$$

При этом (см. (3.1)) рассуждением по индукции устанавливается, что для некоторого $\Xi \in \mathcal{E}$

$$\Xi \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Sigma_i$$

(см. [13, (3.3.16)]). Тогда, как следствие, $\mathrm{cl}(f^1(\Xi),\tau) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma_i),\tau)$, а потому (см. (3.11)) $\mathrm{cl}(f^1(\Xi),\tau) \subset \mathbb{G} \cap \mathbb{K} \subset \mathbb{G}$; это означает, что $\mathbb{G} \in \mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Xi),\tau)]$ и, тем более,

$$\mathbb{G} \in \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)].$$

Поскольку выбор $\mathbb{G}$ был произвольным, установлено вложение

$$\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] \subset \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)]. \tag{3.12}$$

С другой стороны, в силу (3.2) имеем свойство

$$\mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\tilde{\Sigma}),\tau)] \subset \mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] \ \ \forall \tilde{\Sigma} \in \mathcal{E}.$$

Последнее свойство доставляет вложение, противоположное (3.12), и, следовательно, равенство

$$\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)].$$

Поскольку выбор $\mathcal{E}$ был произвольным, (3.7) установлено. □

Из (2.1) и предложения 3.2 легко следует свойство: если $(X,\tau), X \neq \varnothing$, есть T_2-пространство, $f \in \mathbf{F}_{\mathbf{c}}^0[E;X;\tau]$ и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то

$$\mathbf{N}_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)]. \tag{3.13}$$

С учетом (3.2) и (3.13) получаем, конечно, что для всяких T_2-пространства $(X,\tau), X \neq \varnothing$, $f \in \mathbf{F}_{\mathbf{c}}^0[E;X;\tau]$, $\mathcal{E} \in \beta[E]$ и $H \in \mathbf{N}_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]]$ непременно

$$\exists\, \Sigma \in \mathcal{E} : (\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}] \subset \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau) \subset H; \tag{3.14}$$

при этом $\mathbf{N}_\tau^0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]] \subset \mathbf{N}_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}]]$. В (3.14) мы имеем свойство реализуемости МП с точностью до любой наперед выбранной окрестности в классе замыканий образов множеств из семейства $\mathcal{E}$; имеется в виду реализация в виде вилки.

Теорема 3.1. *Если* $(X,\tau), X \neq \varnothing$, *есть* T_2*-пространство* (X — непустое множество и $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$), $f \in \mathbf{F}_{\mathbf{c}}^0[E;X;\tau]$, $\mathcal{E}_1 \in \beta[E]$ и $\mathcal{E}_2 \in \beta[E]$, то

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1] \cap (\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2] = \varnothing) \Leftrightarrow (\exists\, \Sigma_1 \in \mathcal{E}_1 \ \ \exists\, \Sigma_2 \in \mathcal{E}_2 \\ \exists\, G_1 \in \mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_1),\tau)] \ \ \exists\, G_2 \in \mathbf{N}_\tau^0[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_2),\tau)] : G_1 \cap G_2 = \varnothing).\end{gathered} \tag{3.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (X,τ), f, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ удовлетворяют условиям предложения. Тогда, в частности, $f \in X^E$; при этом

$$(\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau) \in \mathcal{P}(X) \ \ \forall\, \Sigma \in \mathcal{E}_1) \& (\mathrm{cl}(f^1(\tilde{\Sigma}),\tau) \in \mathcal{P}(X) \ \ \forall\, \tilde{\Sigma} \in \mathcal{E}_2).$$

Справедливы (см. (3.2), (3.5)) следующие равенства

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1] = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}_1} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau) \in (\tau - \mathrm{comp})[X]) \\ \& ((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2] = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}_2} \mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau) \in (\tau - \mathrm{comp})[X]).\end{gathered} \tag{3.16}$$

С учетом предложения 3.2 получаем, что (см. (3.16))

$$\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}_1} \mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)], \tag{3.17}$$

$$\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}_2} \mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma),\tau)]. \tag{3.18}$$

Далее, из (2.8) и (3.16) вытекает импликация

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing)\ \Rightarrow\\ (\exists\, G_1\in\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]]\ \ \exists\, G_2\in\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]] : G_1\cap G_2=\varnothing).\end{gathered} \tag{3.19}$$

Пусть истинна посылка импликации (3.19). Тогда для некоторых

$$(\mathbb{G}_1\in\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]])\&(\mathbb{G}_2\in\mathbf{N}^0_\tau[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]]) \tag{3.20}$$

имеем равенство $\mathbb{G}_1\cap\mathbb{G}_2=\varnothing$. В силу (3.17), (3.18) и (3.20) имеем, что для некоторых $\Sigma'\in\mathcal{E}_1$ и $\Sigma''\in\mathcal{E}_2$

$$(\mathbb{G}_1\in\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma'),\tau)])\&(\mathbb{G}_2\in\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma''),\tau)]).$$

Итак, установлена следующая импликация

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing)\ \Rightarrow\\ (\exists\,\Sigma_1\in\mathcal{E}_1\ \ \exists\,\Sigma_2\in\mathcal{E}_2\ \ \exists\, G_1\in\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_1),\tau)]\ \ \exists\, G_2\in\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_2),\tau)] : G_1\cap G_2=\varnothing).\end{gathered}$$

С учетом (3.16)–(3.18) легко устанавливается (см. определение раздела 2) противоположная импликация, чем и завершается обоснование (3.15). □

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Если* X *— непустое множество и* $\tau\in(\mathrm{top})_0[X]$, $f\in\mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau]$, $\mathcal{E}_1\in\beta[E]$ *и* $\mathcal{E}_2\in\beta[E]$, *то*

$$\begin{gathered}((\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing)\ \Leftrightarrow\\ (\exists\,\Sigma_1\in\mathcal{E}_1\ \ \exists\,\Sigma_2\in\mathcal{E}_2 : \mathrm{cl}(f^1(\Sigma_1),\tau)\cap\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_2),\tau)=\varnothing).\end{gathered}$$

Доказательство получается комбинацией (3.2) и теоремы 3.1 Итак, в случае хаусдорфова ТП (X,τ), $X\neq\varnothing$, при $f\in\mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E;X;\tau]$, $\mathcal{E}_1\in\beta[E]$ и $\mathcal{E}_2\in\beta[E]$ эквивалентны следующие три утверждения:

1) $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_1]\cap(\mathrm{AS})[E;X;\tau;f;\mathcal{E}_2]=\varnothing$;
2) $\exists\,\Sigma_1\in\mathcal{E}_1\ \ \exists\,\Sigma_2\in\mathcal{E}_2\ \ \exists\, G_1\in\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_1),\tau)]\ \ \exists\, G_2\in\mathbf{N}^0_\tau[\mathrm{cl}(f^1(\Sigma_2),\tau)] : G_1\cap G_2=\varnothing$;
3) $\exists\,\Sigma'\in\mathcal{E}_1\ \ \exists\,\Sigma''\in\mathcal{E}_2 : \mathrm{cl}(f^1(\Sigma'),\tau)\cap\mathrm{cl}(f^1(\Sigma''),\tau)=\varnothing$.

В заключении раздела отметим полезное свойство [27, раздел 2]: если (X,τ), $X\neq\varnothing$, и $(K,\mathbf{t})$, $K\neq\varnothing$, — два ТП, $m\in K^E$, $g\in C_{\mathbf{ap}}(K,\mathbf{t},X,\tau)$ и $\mathcal{E}\in\beta[E]$, то

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;g\circ m;\mathcal{E}] = g^1((\mathrm{AS})[E;K;\mathbf{t};m;\mathcal{E}]); \tag{3.21}$$

отметим в этой связи [28, (2.3), предложение 2.1]. В связи с (3.21) отметим следующий вариант условий, при которых данное равенство справедливо: $(X,\tau), X\neq\varnothing$, есть T_1-пространство (X — непустое множество и $\tau\in(\mathcal{D}-\mathrm{top})[X]$), $(K,\mathbf{t})$ — компактное ТП (т. е. $\mathbf{t}\in(\mathbf{c}-\mathrm{top})[K]$), $g\in C_{\mathrm{cl}}(K,\mathbf{t},X,\tau)$ и $\mathcal{E}\in\beta[E]$.

4. Множества притяжения в пространстве ультрафильтров с топологией стоуновского типа

Всюду в настоящем разделе фиксируем $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, получая в виде $(E, \mathcal{L})$ ИП с полуалгеброй множеств (в качестве $\mathcal{L}$ может, конечно, использоваться алгебра или σ-алгебра п/м E). Напомним, что (см. (1.5)), в частности, $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \\ \&(\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{L} : (F \subset L) \Rightarrow (L \in \mathcal{F}))\} \tag{4.1}$$

имеем множество всех фильтров ИП $(E, \mathcal{L})$. Тогда [29, раздел 3]

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\} \\ = \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\} \tag{4.2}$$

есть множество всех ультрафильтров (у/ф) ИП $(E, \mathcal{L})$, совпадающее с множеством всех максимальных центрированных подсемейств $\mathcal{L}$. В силу отделимости $\mathcal{L}$ имеем (см. [30, (5.9)]), что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E; \tag{4.3}$$

в (4.3) введены тривиальные у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$. Далее, при $L \in \mathcal{L}$ вводим множество

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}\}. \tag{4.4}$$

Тогда [29, раздел 3] семейство $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\ \Phi_{\mathcal{L}}(L) :\ \ L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ является, в частности, (открытой) базой топологии

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in G\ \ \exists\, L \in \mathcal{U} : \Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset G\} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]; \tag{4.5}$$

в связи с (4.5) см. [28, замечание 5.1]. При этом см. [27, (2.9)]

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]; \tag{4.6}$$

в силу (4.6) получаем, что компакт, определяемый в (4.5), является нульмерным. В силу (4.3) определено отображение

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \triangleq ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E. \tag{4.7}$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Справедливо свойство*

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot] \in \mathbf{F}^0_{\mathbf{c}}[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (4.7) имеем, что

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(E) = \{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] : x \in E\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \tag{4.9}$$

Учтем (4.5). При этом (см. (4.5), (4.9))

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]^1(E) \in (\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] - \mathrm{comp})^0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})], \tag{4.10}$$

а потому (см. (3.3), (4.9), (4.10)) имеем требуемое свойство (4.8). $\square$

Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то заключаем в силу (4.6), что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]. \tag{4.11}$$

□

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ *и* $\Sigma \in \mathcal{E}$, *то*

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]. \tag{4.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $\Sigma \in \mathcal{E}$. Тогда $\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$, а потому (см. (4.6), (4.11))

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma).$$

Поэтому (см. раздел 2) справедливо (4.12). □

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда в качестве непустого подсемейства $\mathcal{L}$ используется фильтр. Итак, пусть $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Тогда в силу (4.11)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{L}}(F) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \tag{4.13}$$

есть семейство всех у/ф ИП $(E,\mathcal{L})$, мажорирующих исходный фильтр $\mathcal{F}$; описание данного семейства (см. [1]) представляет теоретический интерес. Напомним, что [31, (1.20)]

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] : x \in L\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \ \ \forall L \in \mathcal{L}. \tag{4.14}$$

В связи с (4.4), (4.14) напомним, что (см. [1, (2.15)])

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{L}}(F) \ \ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{4.15}$$

Итак, в частности, при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ определено $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$, которое может рассматриваться [1, (3.5)] как МП:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = (\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; (\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{F}] \tag{4.16}$$

на самом деле данное свойство реализуется и в более общем случае, но мы сейчас ограничимся (4.16), учитывая, что

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta[E], \tag{4.17}$$

что позволяет использовать (3.2) (см. в этой связи (4.16)).

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\Phi_{\mathcal{L}}(F)]. \tag{4.18}$$

Доказательство. Требуемое равенство (4.18) легко извлекается из предложений 3.2, 4.1, а также из (4.14)–(4.16), но мы все же рассмотрим соответствующее рассуждение. Итак, мы рассматриваем (3.2) в случае, когда

$$(X,\tau)=(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]),$$

где $\mathcal{L}\in\Pi[E]$, $f=(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]$ и $\mathcal{E}=\mathcal{F}$. Тогда с учетом предложения 3.2, (4.5), (4.14), (4.16) и (4.17) имеем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F})]&=\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[(\mathrm{AS})[E;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E];(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot];\mathcal{F}]\\&=\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(F),\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])]=\bigcup_{F\in\mathcal{F}}\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\Phi_{\mathcal{L}}(F)].\end{aligned}$$

□

Теперь из (3.14) следует, при упомянутой в последнем доказательстве конкретизации параметров, что $\forall\,\mathcal{F}\in\mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ \forall\,H\in\mathbf{N}_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F})]\ \ \exists\,F\in\mathcal{F}:$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F})\subset\Phi_{\mathcal{L}}(F)\subset H. \tag{4.19}$$

Предложение 4.4. *Если* $\mathcal{F}_1\in\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ *и* $\mathcal{F}_2\in\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F}_1)\cap\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F}_2)=\varnothing)\Leftrightarrow(\exists\,F_1\in\mathcal{F}_1\ \ \exists\,F_2\in\mathcal{F}_2:F_1\cap F_2=\varnothing).$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ в соответствии с условиями предложения. Тогда в силу (4.5), (4.14), (4.16), предложений 3.3 и 4.1 имеем эквивалентность

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F}_1)\cap\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F}_2)=\varnothing)\Leftrightarrow(\exists\,F_1\in\mathcal{F}_1\ \ \exists\,F_2\in\mathcal{F}_2:\Phi_{\mathcal{L}}(F_1)\cap\Phi_{\mathcal{L}}(F_2)=\varnothing). \tag{4.20}$$

Вместе с тем, $\Phi_{\mathcal{L}}(L_1)\cap\Phi_{\mathcal{L}}(L_2)=\Phi_{\mathcal{L}}(L_1\cap L_2)$ при $L_1\in\mathcal{L}$ и $L_2\in\mathcal{L}$. При этом $\Phi_{\mathcal{L}}(\varnothing)=\varnothing$. Пусть $\mathbb{L}_1\in\mathcal{L}$ и $\mathbb{L}_2\in\mathcal{L}$. Тогда имеем, что

$$(\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2=\varnothing)\Rightarrow(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1)\cap\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2)=\varnothing). \tag{4.21}$$

Пусть, напротив, $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1)\cap\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2)=\varnothing$. Покажем, что выполнено $\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2=\varnothing$. В самом деле, допустим противное: пусть $\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2\neq\varnothing$. Выберем и зафиксируем $x_*\in\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2$. Тогда $\mathcal{V}\overset{\triangle}{=}(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x_*]\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, $\mathbb{L}_1\in\mathcal{V}$ и $\mathbb{L}_2\in\mathcal{V}$, а потому (см. (4.4))

$$\mathcal{V}\in\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1)\cap\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2),$$

что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает импликацию

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1)\cap\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2)=\varnothing)\Rightarrow(\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2=\varnothing).$$

С учетом (4.21) получаем эквивалентность $(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_1)\cap\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}_2)=\varnothing)\Leftrightarrow(\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2=\varnothing)$. Поскольку $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$ выбирались произвольно, имеем $\forall\,L_1\in\mathcal{L}\ \ \forall\,L_2\in\mathcal{L}$

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(L_1)\cap\Phi_{\mathcal{L}}(L_2)=\varnothing)\Leftrightarrow(L_1\cap L_2=\varnothing). \tag{4.22}$$

В частности, в (4.22) может использоваться случай, когда $L_1\in\mathcal{F}_1$ и $L_2\in\mathcal{F}_2$. Из (4.20) и (4.22) имеем тогда эквивалентность

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F}_1)\cap\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}\mid\mathcal{F}_2)=\varnothing)\Leftrightarrow(\exists\,F_1\in\mathcal{F}_1\ \ \exists\,F_2\in\mathcal{F}_2:F_1\cap F_2=\varnothing).$$

□

П р е д л о ж е н и е 4.5. *Если* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, *то семейство* $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}} \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ *есть локальная база окрестностей множества* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$:

$$(\mathfrak{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})])\&(\forall\, \mathbb{H} \in \mathbf{N}_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]\ \ \exists\, \mathbb{G} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} : \mathbb{G} \subset \mathbb{H}). \tag{4.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и рассмотрим семейство $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$. С учетом предложения 4.2 имеем, что

$$\mathfrak{B}_{\mathcal{F}} \subset \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]. \tag{4.24}$$

Пусть $\tilde{\mathbb{H}} \in \mathbf{N}_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]$. С учетом (2.2) подберем

$$\tilde{\mathbb{G}} \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]$$

со свойством $\tilde{\mathbb{G}} \subset \tilde{\mathbb{H}}$. С учетом (4.18) имеем для некоторого $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ включение

$$\tilde{\mathbb{G}} \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{F})].$$

Это означает, что $\Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{F}) \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ и при этом $\Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{F}) \subset \tilde{\mathbb{G}} \subset \tilde{\mathbb{H}}$. Итак, установлено, что $\exists\, \mathbb{G} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} : \mathbb{G} \subset \tilde{\mathbb{H}}$. Поскольку выбор $\tilde{\mathbb{H}}$ был произвольным, мы получаем, что

$$\forall\, \mathbb{H} \in \mathbf{N}_{\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})]\ \ \exists\, \mathbb{G} \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} : \mathbb{G} \subset \mathbb{H}.$$

С учетом (4.24) получаем теперь свойство (4.23). □

В заключении раздела отметим один полезный частный случай. А именно: полагаем до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Тогда в виде элементов $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ имеем фильтры семейства всех п/м E, что соответствует [21, гл. I]; у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ будем называть сейчас стоун-чеховскими. Пусть $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ и $x \in E$. Тогда в нашем случае

$$N_\tau(x) \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}), \tag{4.25}$$

причем $N_\tau(x) \subset (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x]$. Стоун-чеховские у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid N_\tau(x))$ представляют интерес, т. к. они являются по сути дела усовершенствованными вариантами (4.25). Заметим, что в рассматриваемом случае $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, а потому предложения 4.3–4.5 содержат полезную информацию о таких у/ф. Заметим, что в терминах фильтров из $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ в рассматриваемом случае вводится [21, гл. I] общее определение сходимости в ТП. При этом (см. (4.3), (4.13))

$$(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid N_\tau(x)),$$

так что мы имеем простой вариант у/ф, мажорирующего фильтр окрестностей точки x в ТП (E, τ) (см. (4.25)).

5. Топология волмэновского типа

Пусть далее $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (рассматриваем случай произвольной π-системы; он является более общим в сравнении с ИП предыдущего раздела). Исследуем вопросы окрестностной реализации МП в случае оснащения множества у/ф топологией волмэновского типа. Для ее введения полагаем, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid H] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists\, U \in \mathcal{U} : U \subset H\}\ \ \forall\, H \in \mathcal{P}(E).$$

Мы сохраняем определения (4.1)–(4.4), (4.7), (4.11) для рассматриваемого более общего случая $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (см. в этой связи [31, раздел 2]). Получаем, что

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \triangleq \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid C] : C \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))); \tag{5.1}$$

легко видеть,что семейство (5.1) есть открытая предбаза, порождающая [32, (2.8)] топологию

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})] \cap (\mathcal{D} - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]. \tag{5.2}$$

Итак, $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ есть слабейшая топология $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$, содержащая семейство (5.1);

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \subset \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle. \tag{5.3}$$

В виде $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle)$ имеем (непустое) компактное T_1-пространство. Напомним, что (см. [32, с. 80]) при $L \in \mathcal{L}$

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L),$$

а потому $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L]$ и, как следствие (см. (5.3)),

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]; \tag{5.4}$$

в самом деле $E \setminus L \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, а потому

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]$$

и, следовательно (см. (5.3)),

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L} \mid E \setminus L] \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle,$$

откуда в силу (1.1) и вытекает (5.4). Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то согласно (5.4)

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle] \;\; \forall \, \Sigma \in \mathcal{E}. \tag{5.5}$$

Заметим, что из (1.4) рассуждением по индукции следует, что при $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$

$$\bigcap_{L \in \mathcal{K}} L \in \mathcal{L}; \tag{5.6}$$

поэтому определено $\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap\limits_{L \in \mathcal{K}} L) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma)]. \tag{5.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Тогда $\mathrm{Fin}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$; при $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ справедливо (5.6) и определено (см. (5.4))

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{K}} \Sigma) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]. \tag{5.8}$$

Заметим здесь же, что согласно (5.5)

$$\mathcal{F} \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) : \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle]). \tag{5.9}$$

Поэтому (см. (2.7), (5.2)) имеем следующую цепочку равенств

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)] = \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \mathbb{F}] = \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}} \mathbb{F}]. \tag{5.10}$$

С учетом (4.11) и (5.10) имеем, однако, равенство

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}} \mathbb{F}]. \tag{5.11}$$

В связи с рассмотрением множества в правой части (5.11) заметим, что (см. (4.1), (4.2), (4.4))

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L_1 \cap L_2) = \Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \cap \Phi_{\mathcal{L}}(L_2) \ \ \forall L_1 \in \mathcal{L} \ \ \forall L_2 \in \mathcal{L}. \tag{5.12}$$

Из (5.12) рассуждением по индукции следует (см. (5.6)), что

$$\bigcap_{L\in\mathcal{K}} \Phi_{\mathcal{L}}(L) = \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}} L) \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}).$$

Как следствие получаем полезное свойство

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}} L) = \bigcap_{L\in\mathcal{K}} \Phi_{\mathcal{L}}(L) \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E}). \tag{5.13}$$

Сравним теперь множества

$$(\mathbb{A} \triangleq \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{F})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}} \mathbb{F}]) \ \& \ (\mathbb{B} \triangleq \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{E})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L\in\mathcal{K}} L)]). \tag{5.14}$$

Пусть $G' \in \mathbb{A}$. Тогда для некоторого $\mathcal{K}' \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F})$ имеем включение

$$G' \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}'} \mathbb{F}].$$

Это означает, что $G' \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ и при этом

$$\bigcap_{\mathbb{F}\in\mathcal{K}'} \mathbb{F} \subset G'. \tag{5.15}$$

По выбору $\mathcal{K}'$ имеем для некоторых $p \in \mathbb{N}$ и $(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,p}} \in \mathcal{F}^p$ равенство

$$\mathcal{K}' = \{\mathbb{F}_i : i \in \overline{1,p}\}.$$

С учетом (5.9) можно указать кортеж $(\Sigma'_i)_{i\in\overline{1,p}} \in \mathcal{E}^p$ со свойством

$$\mathbb{F}_j = \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma'_j) \ \ \forall j \in \overline{1,p}. \tag{5.16}$$

При этом $\mathcal{K}'' \triangleq \{\Sigma'_i : i \in \overline{1,p}\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ и согласно (5.13) и (5.16)

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L \in \mathcal{K}''} L) = \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{i=1}^{p} \Sigma'_i) = \bigcap_{i=1}^{p} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma'_i) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathbb{F}_i = \bigcap_{\mathbb{F} \in \mathcal{K}'} \mathbb{F}.$$

С учетом (5.15) получаем, как следствие, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L \in \mathcal{K}''} L) \subset G'.$$

Это означает, что справедливо включение

$$G' \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L \in \mathcal{K}''} L)];$$

тем более, $G' \in \mathbb{B}$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbb{A} \subset \mathbb{B}. \tag{5.17}$$

Выберем произвольно $G^0 \in \mathbb{B}$, после чего подберем (см. (5.14)) $\mathcal{K}^0 \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ со свойством

$$G^0 \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L \in \mathcal{K}^0} L)]. \tag{5.18}$$

Подберем $q \in \mathbb{N}$ и $(\Xi_i)_{i \in \overline{1,q}} \in \mathcal{E}^q$ со свойством

$$\mathcal{K}^0 = \{\Xi_i : i \in \overline{1,q}\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E}). \tag{5.19}$$

Из (5.9) вытекает с очевидностью, что

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi_i))_{i \in \overline{1,q}} \in \mathcal{F}^q,$$

а потому реализуется следующее свойство

$$\mathcal{K}_0 \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi_i) : i \in \overline{1,q}\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{F}).$$

При этом согласно (5.13) и (5.19)

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L \in \mathcal{K}^0} L) = \bigcap_{L \in \mathcal{K}^0} \Phi_{\mathcal{L}}(L) = \bigcap_{i=1}^{q} \Phi_{\mathcal{L}}(\Xi_i) = \bigcap_{\mathbb{F} \in \mathcal{K}_0} \mathbb{F}.$$

Тогда в силу (5.18) получаем вложение $\bigcap\limits_{\mathbb{F} \in \mathcal{K}_0} \mathbb{F} \subset G^0$, а потому $G^0 \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\bigcap\limits_{\mathbb{F} \in \mathcal{K}_0} \mathbb{F}]$. Тем более (см. (5.14)) $G^0 \in \mathbb{A}$. Получили, что $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, а потому (см. (5.17)) $\mathbb{A} = \mathbb{B}$. С учетом (5.11) и (5.14) получаем теперь цепочку равенств

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \mathbb{B} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{L \in \mathcal{K}} L)],$$

означающую справедливость (5.7). $\square$

Следствие 5.1. *Если семейство* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ *является направленным, т. е.*

$$\forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E} \ \ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \tag{5.20}$$

то справедливо равенство

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)]. \tag{5.21}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и выполнено (5.20). Тогда рассуждением по индукции получаем, что $\forall m \in \mathbb{N} \ \ \forall (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m \ \ \exists \tilde{\Sigma} \in \mathcal{E}$

$$\tilde{\Sigma} \subset \bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i. \tag{5.22}$$

Из (5.22) вытекает очевидное следствие

$$\forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E}) \ \ \exists \tilde{\Sigma} \in \mathcal{E} : \tilde{\Sigma} \subset \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{K}} \Sigma. \tag{5.23}$$

Далее, из (4.1), (4.2), (4.4) вытекает, что $\forall L_1 \in \mathcal{L} \ \ \forall \mathcal{L}_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \subset L_2) \Rightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L_1) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(L_2)). \tag{5.24}$$

В качестве L_1 и L_2 в (5.24) могут использоваться множества из $\mathcal{E}$. Возвращаясь к предложению 5.1, рассмотрим семейство в правой части (5.7), учитывая свойство (5.6). Итак, пусть

$$(\tilde{\mathbb{A}} \triangleq \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{E})} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{K}} \Sigma)])\&(\tilde{\mathbb{B}} \triangleq \bigcup_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)]). \tag{5.25}$$

При этом $\{\Sigma\} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$ в случае $\Sigma \in \mathcal{E}$. Поэтому $\tilde{\mathbb{B}} \subset \tilde{\mathbb{A}}$. Осталось установить вложение

$$\tilde{\mathbb{A}} \subset \tilde{\mathbb{B}}. \tag{5.26}$$

Выберем произвольно $\Gamma \in \tilde{\mathbb{A}}$. Тогда для некоторого $\mathfrak{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{E})$

$$\Gamma \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{K}} \Sigma)].$$

Это означает, что $\Gamma \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ и при этом

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{K}} \Sigma) \subset \Gamma. \tag{5.27}$$

С учетом (5.23) подберем множество $\Xi \in \mathcal{E}$ со свойством

$$\Xi \subset \bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{K}} \Sigma. \tag{5.28}$$

Здесь $\Xi \in \mathcal{L}$ и $\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{K}} \Sigma \in \mathcal{L}$ (см. (5.6)). Из (5.24) и (5.28) получаем поэтому, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\bigcap_{\Sigma\in\mathfrak{K}} \Sigma),$$

а тогда с учетом (5.27) получаем вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi) \subset \Gamma,$$

что означает свойство $\Gamma \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(\Xi)]$. По выбору Ξ имеем из (5.25), что $\Gamma \in \tilde{\mathbb{B}}$, чем и завершается проверка (5.26), а следовательно, и равенства $\tilde{\mathbb{A}} = \tilde{\mathbb{B}}$. Из предложения 5.1 и (5.25) имеем, однако, равенство

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \tilde{\mathbb{A}},$$

а потому $\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})] = \tilde{\mathbb{B}}$. С учетом второго определения в (5.25) получаем, как следствие, требуемое равенство (5.21). □

Из (4.1) и следствия 5.1 получаем, конечно, свойство: $\forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(F)]. \tag{5.29}$$

Из (5.29) вытекает, с очевидностью, что $\forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ $\forall\, G \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})]$ $\exists\, F \in \mathcal{F}:$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(F) \subset G; \tag{5.30}$$

в (5.30) имеем естественный аналог (4.19).

З а м е ч а н и е 5.1. Напомним, что (см. [27, теорема 7.1]) при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$

$$(\mathrm{AS})[E; \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle; (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[\cdot]; \mathcal{F}] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}).$$

Итак, в данном (весьма общем) случае $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$ есть МП в пространстве у/ф отделимой π-системы в оснащении топологией волмэновского типа.

6. Некоторые добавления

Сейчас мы рассмотрим тот случай, когда при $\mathcal{L} \in \pi[E]$ в качестве непустого подсемейства $\mathcal{L}$ мы располагаем базой фильтра (БФ) широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$. Итак, пусть (см. раздел 3)

$$\beta^0_{\mathcal{L}}[E] \triangleq \{\mathcal{B} \in \beta_0[E] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{L}\}. \tag{6.1}$$

В (6.1) введено множество всех БФ упомянутого типа; ясно, что

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta^0_{\mathcal{L}}[E] \subset \beta_0[E].$$

Кроме того, отметим, что, как легко видеть, при $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists\, B \in \mathcal{B} : B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \tag{6.2}$$

(фильтр, порожденный базой). Заметим, что $\beta^0_{\mathcal{L}}[E] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и определено множество $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ при $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$. Вполне очевидно следующее

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если* $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$, *то*

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]). \tag{6.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$. Из (6.1), (6.2) $\mathcal{B} \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]$. Поэтому (см. (4.11), (4.13), (6.3)) имеем очевидное вложение

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]) \subset \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}). \tag{6.4}$$

Пусть $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B})$. Тогда в силу (4.11) имеем, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и при этом

$$\mathcal{B} \subset \mathfrak{U}. \tag{6.5}$$

Тогда в силу (4.1), (4.2) и (6.5) имеем с очевидностью $\forall\, B \in \mathcal{B}\ \ \forall\, L \in \mathcal{L}$

$$(B \subset L) \Rightarrow (L \in \mathfrak{U}). \tag{6.6}$$

Пусть $\tilde{V} \in (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]$. Тогда в силу (6.2) $\tilde{V} \in \mathcal{L}$ и для некоторого $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ имеет место вложение

$$\tilde{B} \subset \tilde{V}. \tag{6.7}$$

Тогда из (6.6), (6.7) получаем, что $\tilde{V} \in \mathfrak{U}$. Тем самым установлено вложение

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}] \subset \mathfrak{U},$$

откуда согласно (4.11) вытекает, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}])$. Поскольку выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, установлено, что

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{B}) \subset \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{L}]).$$

С учетом (6.4) получаем требуемое равенство (6.3). □

Ниже мы отметим один из полезных вариантов использования предложения 6.1. Итак, пусть $\mathcal{M} \in \pi[E]$ и при этом

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{L}. \tag{6.8}$$

Итак, $\mathcal{M}$ есть π-система, являющаяся подсемейством $\mathcal{L}$. Отметим одно очевидное положение.

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Справедливо свойство* $\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \subset \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$. Тогда (см. (4.1)) $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{M})$ и, в частности, $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ согласно (6.8). Далее, из (4.1) имеем, что $\varnothing \notin \mathcal{F}$ и, кроме того,

$$A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall\, A \in \mathcal{F}\ \ \forall\, B \in \mathcal{F}. \tag{6.9}$$

Тогда, в частности, $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и с учетом (3.1) и (6.9),

$$\mathcal{F} \in \beta[E] : \varnothing \notin \mathcal{F}.$$

Тогда $\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \subset \beta_0[E]$ и, как следствие, имеет место $\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \subset \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$; требуемое свойство установлено.

Из (6.2) и предложения 6.2 вытекает, что при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ определен фильтр

$$(E - \mathbf{fi})[\mathcal{F} \mid \mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$$

и согласно предложению 6.1 $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid (E - \mathbf{fi})[\mathcal{F} \mid \mathcal{L}])$. Учтем следствие 5.1. Однако, прежде заметим, что при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ имеем $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, причем

$$\forall\, \Sigma_1 \in \mathcal{F} \;\; \forall\, \Sigma_2 \in \mathcal{F} \;\; \exists\, \Sigma_3 \in \mathcal{F} : \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2. \tag{6.10}$$

$\square$

З а м е ч а н и е 6.1. Проверим данное (очевидное) свойство, фиксируя $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$. Тогда в силу предложения 6.2 $\mathcal{F} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$, т. е. $\mathcal{F} \in \beta_0[E]$ и при этом $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$. Далее, из определений раздела 3 следует, что $\mathcal{F} \in \beta[E]$, а тогда $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и справедливо (6.10). Поскольку $\mathcal{F} \neq \varnothing$, то $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$; итак, требуемое свойство установлено.

Теперь согласно следствию 5.1 имеем (см. (6.10)), что

$$\mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\Phi_{\mathcal{L}}(F)] \;\; \forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}). \tag{6.11}$$

Напомним (4.11) в связи с (6.10): при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ справедливо равенство

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \Phi_{\mathcal{L}}(F).$$

Тогда из (6.11) получаем, что $\forall\, \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \;\; \forall \mathbb{G} \in \mathbf{N}^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})] \;\; \exists\, \tilde{F} \in \mathcal{F}:$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F}) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\tilde{F}) \subset \mathbb{G};$$

итак, для общего случая широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$ мы получили «волмэновский» вариант реализации множества $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L} \mid \mathcal{F})$ (см. замечание 5.1) в классе множеств $\Phi_{\mathcal{L}}(F)$, $F \in \mathcal{F}$, с точностью до любой наперед выбранной окрестности.

References

[1] А. Г. Ченцов, “О топологических свойствах множества притяжения в пространстве ультрафильтров”, *Вестник российских университетов. Математика*, **23**:143 (2023), 335–356. [A. G. Chentsov, “About topological properties of attraction set in ultrafilter space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 335–356 (In Russian)].

[2] А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, “Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 292–311; англ. пер.:A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, “On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 279–298.

[3] А. Г. Ченцов, А. П. Бакланов, “Об одной задаче, связанной с асимптотической достижимостью в среднем”, *Доклады РАН*, **459**:6 (2014), 672–676; англ. пер.:A. G. Chentsov, A. P. Baklanov, “A problem related to asymptotic attainability in the mean”, *Dokl. Math.*, **90** (2014), 762–765.

[4] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1986. [N. N. Krasovsky, *Motion Control Theory*, Nauka Publ., M., 1986 (In Russian)].

[5] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Наука, М., 1970. [N. N. Krasovsky, *Game Problems About Meeting of Movements*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[6] А. И. Панасюк, В. И. Панасюк, *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем*, Наука и техника, Минск, 1986. [A. I. Panasyuk, V. I. Panasyuk, *Asymptotic Turnpike Optimization of Control Systems*, Science and Technology Publ., Minsk, 1986 (In Russian)].

[7] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]

[8] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Mathematics and Its Applications, **542**, Springer Dordrecht, Boston; London, 2002.

[9] Р. В. Гамкрелидзе, *Основы оптимального управления*, Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, 1975. [R. V. Gamkrelidze, *Fundamentals of Optimal Control*, Tbilisi University Publishing House, Tbilisi, 1975 (In Russian)].

[10] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, “Альтернатива для игровой задачи сближения”, *Прикладная математика и механика*, **34**:6 (1970), 1005–1022; англ. пер.:N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, “An alternative for the game problem of convergence”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **34**:6 (1970), 948–965.

[11] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin, *Positional Differential Games*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[12] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, *Оптимизация гарантии в задачах управления*, Наука, М., 1981. [A. I. Subbotin, A. G. Chentsov, *Optimization of Guarantee in Control Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].

[13] A. G. Chentsov, *Asymptotic Attainability*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997.

[14] A. G. Chentsov, *Finitely Additive Measures and Relaxations of Extremal Problems*, Plenum, New York, 1996.

[15] А. Г. Ченцов, “Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости”, Тр. ИММ УрО РАН, **17**, № 1, 2011, 268–293; англ. пер.A. G. Chentsov, “Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **275**:suppl. 1 (2011), 12–39.

[16] А. Г. Ченцов, “Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2011, № 1, 113–142. [A. G. Chentsov, “Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, № 1, 113–142 (In Russian)].

[17] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[18] А. Г. Ченцов, *Элементы конечно-аддитивной теории меры. I*, УГТУ-УПИ, Екатеринбург, 2008, 388 с. [A. G. Chentsov, *Elements of Finitely Additive Measure Theory. I*, USTU-UPI, Ekaterinburg, 2008 (In Russian), 388 pp.]

[19] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005. [A. V. Bulinsky, A. N. Shiryaev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[20] Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[21] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 279 с. [N. Bourbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 279 pp.]

[22] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology*, Higher School Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[23] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[24] А. Г. Ченцов, "Замкнутые отображения и построение моделей расширения", Тр. ИММ УрО РАН, **29**, 2023, 274–295; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Closed mappings and construction of extension models", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **323**:suppl. 1 (2023), 56–77.

[25] A. G. Chentsov, E. G. Pytkeev, "Constraints of asymptotic nature and attainability problems", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:4 (2019), 569–582. [A. G. Chentsov, E. G. Pytkeev, "Constraints of asymptotic nature and attainability problems", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **29**:4 (2019), 569–582 (In Russian)].

[26] А. Г. Ченцов, "Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера", Тр. ИММ УрО РАН, **22**, №1, 2016, 294–309; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **296**:suppl. 1 (2017), 102–118.

[27] А. Г. Ченцов, "Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции", *Известия института математики и информатики УдГУ*, **52** (2018), 86–102. [A. G. Chentsov, "Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions", *Izv. IMI UdGU*, **52** (2018), 86–102 (In Russian)].

[28] А. Г. Ченцов, "Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров", Тр. ИММ УрО РАН, **18**, №4, 2012, 298–314. [A. G. Chentsov, "Tier mappings and ultrafilter-based transformations", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **18**, no. 4, 2012, 298–314 (In Russian)].

[29] А. Г. Ченцов, "Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем", Выпуск посвящен 70-летнему юбилею Александра Георгиевича Ченцова, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 257–272; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

[30] А. Г. Ченцов, "Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **1** (2014), 87–101. [A. G. Chentsov, "Some ultrafilter properties connected with extension constructions", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, №1, 87–101 (In Russian)].

[31] А. Г. Ченцов, "К вопросу о реализации элементов притяжения в абстрактных задачах о достижимости", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **25**:2 (2015), 212–229. [A. G. Chentsov, "To question about realization of attraction elements in abstract attainability problems", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **25**:2 (2015), 212–229 (In Russian)].

[32] А. Г. Ченцов, "О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа", *Известия института математики и информатики УдГУ*, **54** (2019), 74–101. [A. G. Chentsov, "On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type", *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 74–101 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Поступила в редакцию 23.05.2024 г.
Поступила после рецензирования 02.09.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Received 23.05.2024
Reviewed 02.09.2024
Accepted for press 13.09.2024