УДК 514
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-66-75

ОСОБЕННОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ И ЛИНИЙ В ПСЕВДОФИНСЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I

© **А. Н. Курбацкий, Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов**

Эта статья является первой частью серии работ, посвященных особенностям геодезических потоков в обобощенных финслеровых (псевдофинслеровых) пространствах. Геодезические определяются как экстремали некоторого вспомогательного функционала, все неизотропные экстремали которого совпадают с экстремалями функционала действия. Это позволяет рассматривать изотропные линии как (непараметризованные) геодезические, аналогично псевдоримановым метрикам. В следующей, готовящейся к печати второй статье мы исследуем типичные особенности определенных таким образом геодезических потоков в случае, когда псевдофинслерова метрика задана формой степени три общего положения на двумерном многообразии.
Ключевые слова: псевдофинслеровы пространства; геодезические, особые точки.

Введение. Эта статья является первой частью серии работ, посвященных особенностям геодезических потоков в обобощенных финслеровых (псевдофинслеровых) пространствах, и представляет собой очередной шаг в исследовании геометрии поверхностей с метриками переменной сигнатуры, см. статьи [1–4] и библиографию в них.

Согласно [5], под псевдофинслеровым пространством мы подразумеваем многообразие M, $\dim M = m$, с координатами (x_i), снабженное так называемой *метрической функцией* $\overline{f}(x_i;\dot{x}_i) = \overline{F}(x_i;\dot{x}_i)^{\frac{1}{n}}$, где $\overline{F}\colon TM \to \mathbb{R}$ положительно однородна по переменным $(\dot{x}_i)$ степени n и гладкая на всем дополнении нулевого сечения касательного расслоения TM (более детально это определение будет рассмотрено ниже). Хорошо известным примером псевдофинслерова пространства является так называемое *пространство Бервальда–Моора*, в котором $\overline{f}(x_i;\dot{x}_i) = (\dot{x}_1 \cdots \dot{x}_n)^{\frac{1}{n}}$, $n = m$; см., например, [5–7].

Статья начинается с обсуждения понятия *геодезической* в финслеровых и псевдофинслеровых пространствах размерности $n \geq 3$. Как мы увидим, при определении геодезических в псевдофинслеровых пространствах возникают довольно специфические трудности, связанные с наличием изотропных линий. Здесь мы будем использовать вариационное определение геодезических [5; 8]. В отличие от псевдоримановых пространств ($n = 2$), где натурально параметризованные геодезические всех типов (включая изотропные) могут быть определены как экстремали функционала действия, в псевдофинслеровых пространствах подобное определение для изотропных линий не корректно. Эту трудность можно преодолеть двумя способами: либо исключить изотропные линии из рассмотрения, либо найти естественное обобщение определения геодезических, позволяющее рассматривать изотропные линии как экстремали некоторого функционала.

Мы избрали второй путь: основываясь на простом вариационном свойстве, мы определяем геодезические как экстремали некоторого вспомогательного функционала, все неизотропные экстремали которого совпадают с экстремалями функционала действия. На этом пути мы получаем следующий результат: в двумерном случае ($m = 2$) все изотропные линии являются (непараметризованными) геодезическими. Во втором разделе статьи мы рассматриваем геодезические потоки в псевдофинслеровых пространствах $(M, \overline{f})$, где $m = 2$ и функция $\overline{F}$ есть однородный многочлен по переменным $(\dot{x}_i)$ степени $n \geq 3$.

В следующей, второй статье серии мы детально исследуем особенности геодезических потоков в случае $n=3$. Будет показано, что особенности геодезического потока связаны с вырождением сети изотропных линий. Именно, если функция $\overline{F}$ – общего положения, то многообразие M содержит две открытых области M_+ и M_-, разделенных кривой M_0, так что в каждой точке $q\in M_+$ (соответственно M_-) имеется 3 (соответственно 1) различных изотропных направления, а в точках $q\in M_0$ изотропные линии имеют касание. Особенности геодезических потоков возникают в области M_- и на кривой M_0.

Третья статья серии будет посвящена специальному случаю: особенностям геодезических потоков на двумерных поверхностях, вложенных в пространство с метрикой Бервальда–Моора. Соответствующая функция $\overline{F}$ является многочленом по переменным $(\dot{x}_i)$ степени n не общего положения. В частности, при $n=3$ в этом случае область $M_-=\emptyset$, и особенности геодезического потока появляются только на кривой M_0.

Вариационное определение геодезических.

1.1 Финслеровы пространства. Рассмотрим гладкое (здесь и далее это означает C^∞, если не оговорено противное) многообразие M, $\dim M=m$, с координатами (x_i), снабженное функцией $\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)\colon TM\to\mathbb{R}$, являющейся положительно однородной степени $n\geq 2$ по переменным $(\dot{x}_i)$ и гладкой на всем дополнении нулевого сечения касательного расслоения TM.

Определим функцию $\overline{f}(x_i;\dot{x}_i)=\overline{F}^{\frac{1}{n}}(x_i;\dot{x}_i)$, являющуюся положительно однородной степени 1 по $(\dot{x}_i)$. Пара $(M,\overline{f})$ или, эквивалентно, $(M,\overline{F})$ называется *финслеровым пространством* (в классическом смысле), если выполнены следующие условия:

B. $\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)>0$, если $|\dot{x}_1|+\cdots+|\dot{x}_m|\neq 0$.

C. Гессиан функции $\overline{f}^2$ по переменным $(\dot{x}_i)$ положительно определен, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2(\overline{f}^2)}{\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_j}\,\xi_i\xi_j>0,\quad \text{если}\quad \sum_{i=1}^{m}|\xi_i|\neq 0. \tag{1}$$

Для обозначения этих условий мы используем буквы B и C для того, чтобы сохранить обозначения, взятые из книги [5], на которую мы будем ссылаться. Квадратичная форма (1) называется *фундаментальным тензором*, а функция $\overline{f}$ (положительная и гладкая на дополнении нулевого сечения TM) называется *метрической функцией* на M.

Метрическая функция $\overline{f}(x_i;\cdot)$ определяет норму на каждом касательном пространстве T_xM. Это позволяет определить функционалы действия и длины, аналогично тому, как это делается для римановых метрик. Именно, для кривой $\gamma\colon I\to M$ мы имеем:

$$J^{(\nu)}(\gamma)=\int\limits_I\overline{f}^{\,\nu}(x_i;\dot{x}_i)\,dt=\int\limits_I\overline{F}^{\,\frac{\nu}{n}}(x_i;\dot{x}_i)\,dt,\quad \dot{x}_i=\frac{dx_i}{dt}, \tag{2}$$

где $\nu=1$ (длина) или $\nu=2$ (действие), см., например, [5; 9]. Как и в римановом случае, функционал длины $J^{(1)}$ инвариантен относительно перепараметризаций кривой γ, а функционал действия $J^{(2)}$ – не инвариантен.

Параметризованные геодезические могут быть определены как экстремали функционала действия $J^{(2)}$, соответствующая параметризация называется *натуральной* или *канонической* (она пропорциональна длине дуги кривой, где $ds=\overline{f}$).

Непараметризованные геодезические могут быть определены как экстремали любого из двух функционалов $J^{(2)}$ и $J^{(1)}$. Различие в использовании $J^{(2)}$ и $J^{(1)}$ состоит в следующем. В первом случае мы просто забываем натуральную параметризацию экстремалей функционала $J^{(2)}$, а во втором случае система уравнений Эйлера–Лагранжа с лагранжианом $\overline{f}(x_i;\dot{x}_i)$ содержит не m, а всего лишь $m-1$ независимых уравнений [5]. Это обстоятельство отражает тот факт, что функционал длины $J^{(1)}(\gamma)$ инвариантен относительно перепараметризаций γ. Используя имеющуюся степень свободы и рассматривая только непрерывно дифференцируемые геодезические, имеющие в каждой точке определенное касательное направление, можно положить параметр t равным одной из координат x_i, тем самым уменьшив число уравнений в системе Эйлера–Лагранжа для функционала $J^{(1)}(\gamma)$ на единицу.

Начиная с этого момента, мы будем использовать следующее общее обозначение. Пусть $\overline{\Phi}(x_i;\dot{x}_i)$ – функция на касательном расслоении TM, положительно однородная степени k по переменным $(\dot{x}_i)$. Тогда

$$\Phi = \frac{\overline{\Phi}}{\dot{x}_1^k} \tag{3}$$

есть функция на проективизированном касательном расслоении PTM. Например, положим $x=x_1$ и $y_i=x_i$, $p_i=dy_i/dx$ для $i=2,\ldots,m$. Тогда уравнение (непараметризованных) геодезических принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad f(x,y_i,p_i) = \frac{\overline{f}(x_i;\dot{x}_i)}{\dot{x}_1}, \quad i=2,\ldots,m. \tag{4}$$

Переход к уравнению (4) представляет собой обычную проективизацию $\Pi\colon TM \to PTM$ касательного расслоения. Более того, непараметризованные геодезические можно определить как экстремали функционала $J^{(\nu)}$ с произвольным $\nu \geq 1$, используя следующее очевидное свойство (см., например, [10]).

Л е м м а 1. *Пусть функция* $\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *такова, что* $\psi\circ\overline{F}$ *является* C^2*-гладкой на дополнении нулевого сечения* TM *и* $\psi'(s)\neq 0$ *для всех* $s\neq 0$. *Тогда непараметризованные экстремали функционала*

$$J_\psi(\gamma) = \int_I \psi\circ\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)\,dt, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \tag{5}$$

совпадают с непараметризованными экстремалями функционала $J_{\mathrm{id}}(\gamma)$, *где* id *– тождественное отображение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала $J_\psi(\gamma)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\psi'\circ\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)\cdot\frac{\partial\overline{F}}{\partial\dot{x}_i}\right) = \psi'\circ\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)\cdot\frac{\partial\overline{F}}{\partial x_i}, \quad i=1,\ldots,m. \tag{6}$$

В силу условия $\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)>0$, каждая кривая γ допускает параметризацию пропорционально длине дуги, при этом выполнено тождество $\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)\equiv c\neq 0$ вдоль γ. Используя такую параметризацию в формуле (5), после сокращения постоянного сомножителя $\psi'\circ\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)=\psi'(c)$ в обеих частях (6), мы получаем уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала $J_{\mathrm{id}}(\gamma)$.

Таким образом, непараметризованные геодезические можно определить как экстремали $J_\psi(\gamma)$ с произвольной функцией ψ из леммы 1, в частности, как экстремали $J_{\mathrm{id}}(\gamma)$, который совпадает с $J^{(\nu)}(\gamma)$ из (2) при $\nu=n$. В случае классических финслеровых пространств такое изменение определения геодезических не дает ничего нового, но для псевдофинслеровых пространств, рассматриваемых ниже, оно оказывается весьма полезно.

1.2. Псевдофинслеровы пространства. Разумное обобщение понятия финслерова пространства может быть получено, если мы откажемся от условий B и C. Такие пространства часто называют *псевдофинслеровыми.* Позволим себе процитировать абзац из монографии [5] известного специалиста по финслеровой геометрии (стр. 397):

Снова следует заметить, что очень часто метрическая функция, отождествляемая с однородным лагранжианом динамической системы, не удовлетворяет условиям B и C. Вследствие нарушения условия C могут появляться сингулярности; их часто игнорируют, однако, по-видимому, изучение их в контексте физических приложений должно быть полезным.

Начиная с настоящего момента, мы будем рассматривать псевдофинслеровы пространства $(M,\overline{F})$, где не предполагается, что функция $\overline{F}$ удовлетворяет условиям B и C. Отсутствие условия B приводит к появлению *изотропной гиперповерхности* $\mathcal{F}$, задаваемой уравнением $\overline{F}(x_i;\dot{x}_i)=0$ в пространстве TM или, эквивалентно, уравнением $F(x,y_i,p_i)=0$ в пространстве PTM. Система уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала $J^{(\nu)}(\gamma)$ при $\nu<n$ не определена на $\mathcal{F}$, так как производные функции $\overline{F}^{\frac{\nu}{n}}(x_i;\dot{x}_i)$ разрывны на $\mathcal{F}$. Это показывает, что для определения геодезических функционал $J^{(n)}(\gamma)$ имеет преимущество по сравнению с $J^{(\nu)}(\gamma)$ при $\nu<n$.

Система уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала $J^{(n)}(\gamma)$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_j}\,\ddot{x}_j+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\dot{x}_i\partial x_j}\,\dot{x}_j=\frac{\partial\overline{F}}{\partial x_i},\quad i=1,\ldots,m, \tag{7}$$

или, эквивалентно,

$$\ddot{x}_i=\frac{\overline{H}_i(x_i;\dot{x}_i)}{\overline{H}(x_i;\dot{x}_i)},\quad \text{где}\quad \overline{H}=\det\left(\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_j}\right),\quad i=1,\ldots,m, \tag{8}$$

и $\overline{H}_i$ суть детерминанты, определяемые из (7) по правилу Крамера. Легко видеть, что функции $\overline{H}_i$ положительно однородные степени n по $(\dot{x}_i)$, а функция $\overline{H}$ положительно однородная степени $n-2$ по $(\dot{x}_i)$.

Подобно (4), проективизация $\Pi\colon TM\to PTM$ превращает уравнения (8) в

$$p_i=\frac{dy_i}{dx},\quad \frac{dp_i}{dx}=\frac{dp_i}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}=\frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}_i}{\dot{x}}\right)=\frac{\ddot{y}_i\dot{x}-\dot{y}_i\ddot{x}}{\dot{x}^3}=\frac{1}{\dot{x}^2}\frac{\overline{H}_i-p_i\overline{H}_1}{\overline{H}}=\frac{H_i-p_iH_1}{H}, \tag{9}$$

$i=2,\ldots,m$, где функции H,H_i получены из $\overline{H},\overline{H}_i$ по формуле (3). Из леммы 1 следует, что вне изотропной гиперповерхности $\mathcal{F}$ интегральные кривые системы (9) совпадают с интегральными кривыми системы (4). Однако система (9) определена во всем пространстве PTM, включая изотропную гиперповерхность.

Л е м м а 2. *$\mathcal{F}$ является инвариантной гиперповерхностью обеих систем (7) и (9). Кроме того, в случае $m=2$ все изотропные линии являются непараметризованными экстремалями функционала $J^{(n)}$.*

Последнее утверждение верно только при $m=2$, а в случае $m>2$ некоторые изотропные линии являются экстремалями, а некоторые – нет. Простейший пример такого рода при $m=3$, $n=2$ (псевдориманова метрика) можно найти в [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью очевидных преобразований систему уравнений (4) можно привести к виду

$$\frac{dp_i}{dx}=\frac{P(x,y_i,p_i)}{F^{2-\frac{1}{n}}},\quad i=2,\ldots,m, \tag{10}$$

где обе функции $F=f^n$ и P гладкие и F обращается в нуль на гиперповерхности $\mathcal{F}$.

Так как система (10) получена из системы уравнений Эйлера–Лагранжа (4), в пространстве PTM она задает векторное поле, бездивергентное всюду кроме гиперповерхности $\mathcal{F}$, на которой оно не определено. По теореме 1 [1], отсюда следует, что $\mathcal{F}$ является инвариантной гиперповерхностью поля

$$\frac{dp_i}{dx}=P(x,y_i,p_i),\quad i=2,\ldots,m, \tag{11}$$

определлнного во всем проективизированном касательном расслоении PTM включая и изотропную гиперповерхность $\mathcal{F}$. По лемме 1, интегральные кривые поля (11) совпадают с интегральными кривыми системы (9), поэтому $\mathcal{F}$ является также инвариантной гиперповерхностью системы (9). Заметим, что каждое решение системы (7) получается из некоторого решения системы (9) с помощью выбора подходящей параметризации $x_1(t)$. Поэтому $\mathcal{F}$ является инвариантной гиперповерхностью системы (7) тоже.

Наконец, рассмотрим отдельно случай $m=2$. Тогда $\dim PTM=3$ и $\dim\mathcal{F}=2$. Поле контактных плоскостей $y_2=p_2dx$ высекает на поверхности $\mathcal{F}$ поле направлений, совпадающее с ограничением поля (9) на $\mathcal{F}$. Следовательно, проекции интегральных кривых с поверхности $\mathcal{F}\subset PTM$ на M являются одновременно изотропными линиями и непараметризованными экстремалями функционала $J^{(n)}$, что и утверждается в лемме.

О п р е д е л е н и е. *Проекции интегральных кривых системы (9) из PTM на M, отличные от точки, называются (непараметризованными) геодезическими псевдофинслерова пространства $(M,\overline{F})$.*

По лемме 2, в случае $m=2$ все изотропные линии являются геодезическими в указанном выше смысле. Натуральная параметризация неизотропных геодезических определяется системой уравнений (6) с функцией $\psi(s)=s^{\frac{2}{n}}$ и, как нетрудно видеть, совпадает в параметризацией пропорциональной длине дуги. В случае $n>2$ натуральная параметризация изотропных геодезических не определена, в то время как при $n=2$ она определена системой (6) с $\psi=\mathrm{id}$.

2. Полиномиальные двумерные псевдофинслеровы метрики.

Теперь мы всегда будем считать, что $m=2$ и функция $\overline{F}$ является однородным полиномом степени $n\geq 2$ по переменным $(\dot{x}_i)$. Обозначим координаты на многообразии M через (x,y). Рассмотрим псевдофинслерову метрику с метрической функцией $\overline{f}=\overline{F}^{\frac{1}{n}}$, где

$$\overline{F}(x,y;\dot{x},\dot{y})=\sum_{i=0}^{n}a_i(x,y)\dot{x}^{n-i}\dot{y}^i,\quad F(x,y;p)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x,y)p^i,$$

коэффициенты a_i гладко зависят от (x,y). Тогда система (8) принимает вид

$$\ddot{x}=\frac{\overline{H}_1}{\overline{H}},\quad \ddot{y}=\frac{\overline{H}_2}{\overline{H}},\quad \overline{H}=\begin{vmatrix}\overline{F}_{\dot{x}\dot{x}} & \overline{F}_{\dot{x}\dot{y}}\\ \overline{F}_{\dot{x}\dot{y}} & \overline{F}_{\dot{y}\dot{y}}\end{vmatrix},\ \overline{H}_1=\begin{vmatrix}\overline{G}_1 & \overline{F}_{\dot{x}\dot{y}}\\ \overline{G}_2 & \overline{F}_{\dot{y}\dot{y}}\end{vmatrix},\ \overline{H}_2=\begin{vmatrix}\overline{F}_{\dot{x}\dot{x}} & \overline{G}_1\\ \overline{F}_{\dot{x}\dot{y}} & \overline{G}_2\end{vmatrix},\tag{12}$$

где $\overline{G}_1=\overline{F}_x-\dot{x}\overline{F}_{\dot{x}x}-\dot{y}\overline{F}_{\dot{x}y}$ и $\overline{G}_2=\overline{F}_y-\dot{x}\overline{F}_{x\dot{y}}-\dot{y}\overline{F}_{\dot{y}y}$.

Л е м м а 3. *Проективизация* $\Pi\colon TM\to PTM$ *переводит систему (12) в систему*

$$p=\frac{dy}{dx},\quad \frac{dp}{dx}=\frac{H_2-pH_1}{H}=\frac{P}{\Delta},\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta(x,y;p)&=nFF_{pp}-(n-1)F_p^2,\\ P(x,y;p)&=nF(F_y-F_{xp}-pF_{yp})+(n-1)F_p(F_x+pF_y).\end{aligned}\tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая во внимание (9), нам остается только доказать равенство $\frac{H_2-pH_1}{H}=\frac{P}{\Delta}$, где Δ,P определены в (14). Покажем, что $H=(n-1)\Delta$ и $H_2-pH_1=(n-1)P$, т. е. $\overline{H}=\dot{x}^{2n-4}(n-1)\Delta$ и $\overline{H}_2-p\overline{H}_1=\dot{x}^{2n-2}(n-1)P$. Так как обе части двух последних равенств можно рассматривать как квадратичные формы от $a_0,\ldots,a_n$ с коэффициентами, зависящими от $\dot{x},\dot{y}$, для доказательства достаточно сравнить коэффициенты при мономах a_ia_j в левой и правой части каждого из равенств.

Положим $\varepsilon_{ij}=1$, если $i\neq j$, и $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}$, если $i=j$. Простое вычисление показывает, что в выражении $\overline{H}=\overline{F}_{\dot x\dot x}\overline{F}_{\dot y\dot y}-\overline{F}^2_{\dot x\dot x}$ коэффициент при мономе a_ia_j, $i+j=k$, равен $\alpha_{ij}\varepsilon_{ij}\dot x^{2(n-1)-k}\dot y^{k-2}$, где

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}=(n-i)(n-1-i)j(j-1)+(n-j)(n-1-j)i(i-1)-2ij(n-i)(n-j)=\\=(n-1)\big(n(k^2-k-4ij)+2ij\big).\end{aligned}\tag{15}$$

С другой стороны, в выражении $\Delta=nFF_{pp}-(n-1)F_p^2$ коэффициент при мономе a_ia_j, $i+j=k$, равен $\beta_{ij}\varepsilon_{ij}p^{k-2}$, где

$$\beta_{ij}=n(i(i-1)+j(j-1))-2ij(n-1)=n(k^2-k-4ij)+2ij.\tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем $\alpha_{ij}=(n-1)\beta_{ij}$, откуда следует равенство $\overline{H}=\dot x^{2n-4}(n-1)\Delta$. Доказательство равенства $\overline{H}_2-p\overline{H}_1=\dot x^{2n-2}(n-1)P$ совершенно аналогично.

З а м е ч а н и е 1. Из формулы (14) следует, что Δ и P являются полиномами по p степеней не больше $2n-4$ и $2n-1$, соответственно. В частности,

$$\Delta(x,y;p)=(2na_na_{n-2}-(n-1)a_{n-1}^2)p^{2n-4}+\cdots+2na_0a_2-(n-1)a_1^2.$$

Для наших целей удобно записать систему уравнений (13) как векторное поле

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial y}\right)+P\frac{\partial}{\partial p}.\tag{17}$$

Поле (17) определено во всем пространстве PTM включая изотропную поверхность $\mathcal{F}$. Поле контактных плоскостей $dy=pdx$ высекает на поверхности $\mathcal{F}$ поле направлений, интегральные кривые которого соответствуют изотропным линиям, а все остальные интегральные кривые поля (17), не лежащие целиком на изотропной поверхности $\mathcal{F}$, соответствуют неизотропным геодезическим.

В соответствии с данным выше определением, непараметризованные геодезические псевдофинслерова пространства $(M,\overline{F})$ суть проекции интегральных кривых поля (17) из PTM на M, отличные от точки. Особенности геодезических возникают в тех точках пространства PTM, где функция $\Delta(x,y;p)$ обращается в нуль. Для того, чтобы описать множество таких точек, используем следующую лемму.

Л е м м а 4. *Для многочлена*

$$\Phi(p)=\prod_{i=1}^{n}(p+\gamma_i),\quad \gamma_i\in\mathbb{R},\quad n\geq 2,\tag{18}$$

рассмотрим многочлен

$$\Delta(p)=n\Phi(p)\Phi''(p)-(n-1)\Phi'(p)^2.\tag{19}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

(a) $\Delta\equiv 0$*, если и только если* $\gamma_1=\cdots=\gamma_n$.

(b) *Если не все числа* $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ *равны между собой, то* p *– вещественный корень многочлена* Δ*, если и только если* p *– кратный корень многочлена* Φ.

(c) *Если* $n\geq 3$ *и* p *– корень многочлена* Φ *кратности* 2*, то* p *– корень многочлена* Δ *кратности* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликации $\gamma_1=\cdots=\gamma_n\ \Rightarrow\ \Delta\equiv 0$ в пункте (a) и $\Phi(p)=\Phi'(p)=0$ $\Rightarrow\ \Delta(p)=0$ в пункте (b) совершенно очевидны. Импликация $\Delta\equiv 0\ \Rightarrow\ \gamma_1=\cdots=\gamma_n$ в пункте

(a) следует из (b). Действительно, предположим, что $\Delta \equiv 0$ и не все числа $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ равны между собой. Согласно (b), равенство $\Delta(p)=0$ влечет $\Phi(p)=0$. Следовательно, $\Phi \equiv 0$, что противоречит (18). Утверждение пункта (c) тоже тривиально: дважды дифференцируя (19), из равенств $\Phi(p)=\Phi'(p)=0$ следует $\Delta(p)=\Delta'(p)=0$ и $\Delta''(p)=(2-n)\Phi''(p)^2 \neq 0$, если $\Phi''(p)\neq 0$ и $n\neq 2$. Таким образом, остается доказать только импликацию $\Delta(p)=0 \Rightarrow \Phi(p)=\Phi'(p)=0$ в пункте (b).

Предположим, что не все $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ равны между собой и существует такое $p_* \in \mathbb{R}$, что $\Phi(p_*)\neq 0$. Сделав замену переменных $p \to p - p_*$, без ограничения общности будем считать, что $p_*=0$. Тогда $\Phi(0)=\gamma_1 \cdots \gamma_n \neq 0$ и

$$\Phi'(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(0), \quad \Phi''(0) = 2\sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \Phi(0), \quad \alpha_i = \frac{1}{\gamma_i}.$$

Подставляя эти формулы в (19), после очевидных преобразований получаем

$$\Delta(0) = \Phi^2(0)\Big(2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j - (n-1)\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^2\Big) = -\Phi^2(0)\,\varphi_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n),$$

где

$$\varphi_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = n\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^2.$$

Покажем, что для любого $n\geq 2$ форма $\varphi_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\geq 0$, причем $\varphi_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0$ только в том случае, когда $\alpha_1=\dots=\alpha_n$. Доказательство легко провести индукцией по n. Действительно, для $n=2$ имеем $\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2)=2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)-(\alpha_1+\alpha_2)^2=(\alpha_1-\alpha_2)^2\geq 0$, причем очевидно, что $\varphi_2(\alpha_1,\alpha_2)=0$ если и только если $\alpha_1=\alpha_2$. Теперь предположим, что доказываемое утверждение верно для формы φ_n и рассмотрим форму φ_{n+1}:

$$\varphi_{n+1}(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta) = (n+1)\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\beta^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\beta\Big)^2 =$$
$$n\beta^2 - 2\beta\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \Big((n+1)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^2\Big).$$

Рассмотрим это выражение как квадратный трехчлен относительно переменной β с дискриминантом

$$D = \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^2 - n\Big((n+1)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big)^2\Big) = -(n+1)\varphi_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n).$$

По предположению индукции, $D\leq 0$ и $D=0$ если и только если $\alpha_1=\dots=\alpha_n$. Так как уравнение $\varphi_{n+1}(\alpha,\dots,\alpha,\beta)=n(\beta-\alpha)^2=0$ имеет единственный корень $\beta=\alpha$, мы доказали, что $\varphi_{n+1}(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta)\geq 0$ и $\varphi_{n+1}(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta)=0$ если и только если $\alpha_1=\dots=\alpha_n=\beta$.

Таким образом, если не все числа $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ равны между собой, мы установили импликацию $\Phi(p)\neq 0 \Rightarrow \Delta(p)\neq 0$ или, эквивалентно, $\Delta(p)=0 \Rightarrow \Phi(p)=0$. Наконец, из (19) следует импликация $\Delta(p)=\Phi(p)=0 \Rightarrow \Phi'(p)=0$, т. е. p является кратным корнем многочлена Φ. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2. Очевидно, что импликация $\Phi=\Phi'=0 \Rightarrow \Delta=0$ выполнена для всех многочленов Φ, не обязательно имеющих вид (18). Однако обратная импликация $\Delta=0 \Rightarrow \Phi=0$ не верна в случае, если многочлен Φ имеет комплексный корень. Нетрудно видеть причину этого: неравенство $\varphi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geq 0$, вообще говоря, не имеет места, если среди чисел α_i есть комплексные. Рассмотрим, например, многочлен $\Phi = p^3 + p$, имеющий единственный вещественный корень $p = 0$ и два комплексных. Соответствующий многочлен $\Delta = 2(3p^2 - 1)$ имеет два вещественных корня, ни один из которых не равен нулю. Более того, $\Phi = p^4 + 6p^2 + 1$ вообще не имеет вещественных корней, в то время как соответствующий ему многочлен $\Delta = 48(p^2 - 1)^2$ имеет два корня $p = \pm 1$ кратности 2.

Лемма 4 дает простое геометрическое описание множества особых точек уравнения (13) в области $M' \subset M$, через каждую точку которой проходят m изотропных линий псевдофинслерова пространства $(M, \overline{F})$, т.е. многочлен $F(p)$ имеет m вещественных корней (с учетом кратностей и, возможно, включая в число корней $p = \infty$). Именно, в точке $(x, y) \in M'$ функция $\Delta(x, y; p)$ обращается в нуль если и только если хотя бы две из m изотропных линий, проходящих через данную точку, касаются друг друга, причем p – соответствующее касательное направление. Заметим, что это утверждение не верно для дополнения области M', где многочлен $F(p)$ имеет комплексные корни.

2.1. Псевдоримановы метрики. Согласно замечанию 1, в случае $n = 2$ (псевдоримановы метрики) Δ есть многочлен степени нуль по переменной p, т.е. Δ не зависит от p. Более того, нетрудно убедиться, что $\Delta = -4D_{[F]}$, где $D_{[F]}$ означает дискриминант многочлена F второй степени. Следовательно, множество особых точек уравнения (13) совпадает с дискриминантной кривой уравнения $F(x, y; p) = 0$. Нетрудно видеть, что уравнение $\Delta(x, y) = 0$ определяет инвариантную поверхность поля (17), заполненную интегральными кривыми, проекции которых на M (стандартное проектирование $PTM \to M$) являются точками, составляющими дискриминантную кривую.

Описанное свойство приводит и интересному феномену: геодезические не могут проходить через точку (x, y) дискриминантной кривой с произвольными касательными направлениями, а только в определенных *допустимых* касательных направлениях p, определяемых условием $P(x, y; p) = 0$. В случае общего положения $P(x, y; p)$ является кубическим многочленом по p, имеющим 1 или 3 вещественных корня, следовательно, число допустимых направлений равно 1 или 3. Особенности геодезического потока в псевдоримановых метриках на двумерных многообразиях детально исследованы в работах [3, 8, 9]. Аналогичные результаты для трехмерных псевдоримановых метрик анонсированы в [7].

Необходимо отметить, что случай $n = 2$ весьма отличается от финслеровой и псевдофинслеровой геометрии произвольной размерности $n > 2$. Дело в том, что в общем случае $n > 2$ функция Δ зависит от p и понятие допустимого направления не возникает: как правило, геодезические проходят через каждую точку многообразия M во всех касательных направлениях, но некоторые направления в некоторых точках дают сингулярность. Другими словами, лишь точки пространства PTM могут обладать (или не обладать) свойством быть особыми точками уравнения геодезических.

В следующей статье мы исследуем типичные особенности геодезических потоков в случае $n = 3$ (кубические псевдофинслеровы метрики) общего положения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ghezzi R., Remizov A. O.* On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics // Journal of Dynamical and Control Systems, 2012. V. 18. № 1. P. 135–158.

2. *Павлова Н. Г., Ремизов А. О.* Геодезические на гиперповерхностях в пространстве Минковского: особенности смены сигнатуры // УМН, 2011. Т. 66. № 6 (402). С. 193–194.

3. *Ремизов А. О.* Геодезические на двумерных поверхностях с псевдоримановой метрикой: особенности смены сигнатуры // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 3. С. 75–94.

4. *Remizov A. O.* On the local and global properties of geodesics in pseudo-Riemannian metrics // Differential Geometry and its Applications. 2015. V. 39. P. 36–58.

5. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.

6. *Balan V., Neagu M.* Jet single-time Lagrange geometry and its applications // John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2011.

7. *Matsumoto M., Shimada H.* On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moor's metric $L=(y^1y^2\cdots\cdots y^n)^{1/n}$ // Tensor (N.S.). 1978. V. 32. № 3. P. 275–278.

8. *Bao D., Chern S.-S., Shen Z.* An Introduction to Riemann-Finsler Geometry // Graduate Texts in Mathematics, 200. Springer-Verlag, New York, 2000.

9. *Matsumoto M.* Two-dimensional Finsler spaces whose geodesics constitute a family of special conic sections // J. Math. Kyoto Univ., 1995. V. 35. № 3. P. 357–376.

10. *Mikeš J., Hinterleitner I., Vanžurová A.* One remark on variational properties of geodesics in pseudoriemannian and generalized Finsler spaces // In: Geometry, integrability and quantization, Softex, Sofia, 2008. P. 261–264.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-04601, 16-01-00677, 16-01-00766).

Поступила в редакцию 8 февраля 2016 г.

Курбацкий Алексей Николаевич, МГУ им. М. В. Ломоносова, Московская школа экономики, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры эконометрики и математических методов экономики, e-mail: akurbatskiy@gmail.com

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: natasharussia@mail.ru

Ремизов Алексей Олегович, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории проблем качественного исследования нелинейных динамических систем, e-mail: alexey-remizov@yandex.ru

UDC 514
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-66-75

SINGULARITIES OF GEODESIC FLOWS AND GEODESIC LINES IN PSEUDO-FINSLER SPACES. I

© **A. N. Kurbatskiy, N. G. Pavlova, A. O. Remizov**

This is a first paper in the series devoted to singularities of geodesic flows in generalized Finsler (pseudo-Finsler) spaces. Geodesics are defined as extremals of a certain auxiliary functional whose non-isotropic extremals coincide with extremals of the action functional. This allows to consider isotropic lines as (unparametrized) geodesics, similarly to pseudo-Riemannian metrics. In the next forthcoming paper we study generic singularities of so-defined geodesic flows in the case when the pseudo-Finsler metric is given by a generic 3-form on a two-dimensional manifold.

Key words: pseudo-Finsler spaces; geodesics, singular points.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 15-01-04601, 16-01-00677, 16-01-00766).

REFERENCES

1. *Ghezzi R., Remizov A.O.* On a class of vector fields with discontinuities of divide-by-zero type and its applications to geodesics in singular metrics // Journal of Dynamical and Control Systems, 2012. V. 18. № 1. P. 135–158.

2. *Pavlova N.G., Remizov A.O.* Geodezicheskie na giperpoverhnostyah v prostranstve Minkovskogo: osobennosti smeny signatury // UMN, 2011. T. 66. № 6 (402). S. 193–194.

3. *Remizov A.O.* Geodezicheskie na dvumernyh poverhnostyah s psevdorimanovoj metrikoj: osobennosti smeny signatury // Matem. sb., 2009. T. 200. № 3. S. 75–94.

4. *Remizov A.O.* On the local and global properties of geodesics in pseudo-Riemannian metrics // Differential Geometry and its Applications, 2015. V. 39. P. 36–58.

5. *Rund H.* Differencial'naya geometriya finslerovyh prostranstv. M.: Nauka, 1981.

6. *Balan V., Neagu M.* Jet single-time Lagrange geometry and its applications // John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2011.

7. *Matsumoto M., Shimada H.* On Finsler spaces with 1-form metric. II. Berwald-Moor's metric $L = (y^1 y^2 \cdots \cdots y^n)^{1/n}$ // Tensor (N.S.), 1978. V. 32. № 3. P. 275–278.

8. *Bao D., Chern S.-S., Shen Z.* An Introduction to Riemann-Finsler Geometry // Graduate Texts in Mathematics, 200. Springer-Verlag, New York, 2000.

9. *Matsumoto M.* Two-dimensional Finsler spaces whose geodesics constitute a family of special conic sections // J. Math. Kyoto Univ., 1995. V. 35. № 3. P. 357–376.

10. *Mikeš J., Hinterleitner I., Vanžurová A.* One remark on variational properties of geodesics in pseudoriemannian and generalized Finsler spaces // In: Geometry, integrability and quantization, Softex, Sofia, 2008. P. 261–264.

Received 8 February 2016.

Kurbatskiy Aleksei Nikolaevich, Moscow Lomonosov State University, Moscow School of Economics, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Econometrics and Mathematical Methods of Economics, e-mail: akurbatskiy@gmail.com

Pavlova Natalia Gennadievna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: natasharussia@mail.ru

Remizov Aleksei Olegovich, Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher of the Laboratory of Qualitative Analysis for Nonlinear Dynamic Systems, e-mail: alexey-remizov@yandex.ru