6. *Bryson E.R., Yu-Chi Ho* Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control. Blaisdell Publishing Company, 1969.

7. *Buskens C., Maurer H.* SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000. V. 120. P. 85–108.

8. *Alexandrov V.V. and Budninskiy M.A.* On Kinematic Control Extremals // European Control Conference (ECC), Zurich, Switzerland, 2013. P. 210–214.

9. *Dubovickij A.YA., Milyutin A.A.* Neobhodimye usloviya slabogo ehkstremuma v zadachah optimal'nogo upravleniya so smeshannymi ogranicheniyami tipa neravenstva // Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki, 1968. T. 8. № 4. S. 725–779.

10. *Natanson I.P.* Theory of Functions of a Real Variable // Ungar. New-York, 1955.

11. *Arutyunov A.V., Karamzin D.Yu., Perejra F.L.* Usloviya otsutstviya skachka resheniya sopryazhennoj sistemy principa maksimuma v zadachah optimal'nogo upravleniya s fazovymi ogranicheniyami // Tr. IMM UrO RAN, 2014. T. 20. № 4. S. 29–37.

12. *Zaharov E.V., Karamzin D.YU.* K issledovaniyu uslovij nepreryvnosti mery-mnozhitelya Lagranzha v zadachah s fazovymi ogranicheniyami // Differencial'nye uravneniya, 2015. T. 51. № 3. S. 395–401.

13. *Afanas'ev A.P., Dikusar V.V., Milyutin A.A., Chukanov S.A.* Neobhodimoe uslovie v optimal'nom upravlenii. M.: Nauka, 1990. 320 s.

Received 9 February 2016.

Gorbacheva Anna Viktorovna, Russian State Social University, Moscow, Russian Federation, Lecturer of the Applied Mathematics Department, e-mail: avgorbacheva@inbox.ru

Karamzin Dmitry Yurjevich, Dorodnicyn Computing Center of the Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: dmitry_karamzin@mail.ru

УДК 517.911.5
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-55-65

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ С КАУЗАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

© С. В. Корнев, В. В. Обуховский

В настоящей работе предлагаются новые методы решения периодической задачи для нелинейного объекта, описываемого дифференциальным включением с каузальным оператором. В первой части работы предполагается, что правая часть включения имеет выпуклые замкнутые значения. Далее мы предполагаем, что правая часть невыпуклозначна и полунепрерывна снизу. В обоих случаях для исследования рассматриваемой задачи применяется интегральная направляющая функция.

Ключевые слова: включение; каузальный оператор; интегральная направляющая функция; периодические решения; топологическая степень.

1. Введение

Изучение систем, описываемых дифференциальными и функциональными уравнениями с каузальными операторами, введенными Л. Тонелли (см. [1]) и А.Н. Тихоновым (см. [2]), привлекает внимание многих исследователей. Понятие «каузальный» пришло из техники и оказалось мощным инструментом для унификации задач в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений с конечным или бесконечным запаздыванием, интегральных уравнений Вольтерра, функциональных уравнений нейтрального типа и др. (см. [3]). Различные задачи для функционально-дифференциальных уравнений с каузальными операторами были рассмотрены в работах [4-10]. В частности, граничная и периодическая проблемы изучались в [5] и [7]. В настоящей работе мы применяем метод интегральных направляющих функций в исследовании периодической задачи для дифференциального включения с многозначным каузальным оператором.

Основные идеи метода направляющих функций были сформулированы М.А. Красносельским и А.И. Перовым еще в середине прошлого века (см [11, 12]). Будучи геометрически наглядным, этот метод первоначально применялся к изучению периодических и ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см, например, [13-15]). Позже этот метод был распространен на случай дифференциальных включений (см., например, [16, 17]), функционально-дифференциальных уравнений и включений (см., например, [18, 19]) и другие объекты. Сфера применения была расширена на изучение качественного поведения и бифуркации решений (см., например, [20]), асимптотики решений (см., например, [21, 22]). Эти и другие аспекты метода направляющих функций и его приложений, а также дополнительную библиографию, можно найти в недавно вышедшей монографии [23].

Работа организована следующим образом. После предварительных сведений (п. 2), где определяется, в том числе, понятие многозначного каузального оператора, мы формулируем периодическую задачу для дифференциального включения с каузальным мультиоператором, приводится основной результат работы для включений как с выпуклозначным и замкнутым каузальным мультиоператором (п. 3), так и для случая, когда правая часть включения является полунепрерывным снизу мультиотображением с невыпуклыми значениями (п. 4).

2. Предварительные сведения

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [16, 17, 24, 25]). Напомним некоторые из них.

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y. Если Y — нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$ и $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых замкнутых и, соответственно, компактных подмножеств пространства Y.

Пусть E – сепарабельное банахово пространство; $L^1([a,b];E)$ обозначает банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых по Бохнеру функций $f:[a,b]\to E$.

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество $M\subset L^1([a,b];E)$ называется *разложимым*, если для любых $f,g\in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m\subset[a,b]$ выполнено

$$f\kappa_m + g\kappa_{([a,b]\setminus m)} \in M,$$

где κ_m – характеристическая функция множества m.

О п р е д е л е н и е 2. Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется *полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке* $x_0\in X$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε-окрестность множества.

Определение 3. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *пн. св.*, если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

Определение 4. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *полунепрерывным снизу (пн. сн.) в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$ следует, что $F(x_0) \subset U_\varepsilon(F(x))$.

Определение 5. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *пн. сн.*, если оно пн. сн. в каждой точке $x \in X$.

Определение 6. Если мультиотображение F полунепрерывно и сверху и снизу, то оно называется *непрерывным*.

Определение 7. Пусть $F : X \to P(Y)$ – некоторое мультиотображение. Множество Γ_F в декартовом произведении $X \times Y$,

$$\Gamma_F = \{(x, y) \mid \ (x, y) \in X \times Y, \quad y \in F(x)\}$$

называется *графиком* мультиотображения F.

Определение 8. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *замкнутым*, если его график Γ_F есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.

Мультиотображение будем называть *мультифункцией*, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Определение 9. Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется *компактным*, если образ $F(X)$ является относительно компактным в Y.

Определение 10. Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется *сечением* мультиотображения F, если

$$f(x) \in F(x) \quad \text{для каждого } x \in X.$$

В дальнейшем будет использоваться следующая теорема Брессана-Коломбо-Фрышковского о непрерывном сечении (см., например, [26]).

Лемма 1. *Пусть X – сепарабельное метрическое пространство. Тогда любое пн. сн. мультиотображение $F : X \multimap L^1([a, b]; E)$ с замкнутыми разложимыми значениями имеет непрерывное сечение.*

Пусть I – замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 11. Мультифункция $F : I \to K(Y)$ называется *измеримой*, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

– измеримое подмножество I.

Замечание 1. Всякая пн. сн. мультифункция измерима.

Замечание 2. Всякая измеримая мультифункция $F : I \to K(Y)$ обладает измеримым сечением, т. е. существует такая измеримая функция $f : I \to Y$, что $f(t) \in F(t)$ почти для всех (п.в.) $t \in I$.

Определение 12. Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет *условию подлинейного роста*, если существует неотрицательная суммируемая по Лебегу на I функция $\alpha(\cdot)$ такая, что п.в. $t \in I$

$$\|F(t, x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \le \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

В дальнейшем мы будем использовать определения и элементарные свойства топологической степени однозначных и многозначных векторных полей (см., например, [11, 17, 24, 25]).

Пусть $T>0$ и $\sigma\geq 0$ - данные числа. Символами $C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n)$ и $L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$, где $k\in\mathbb{Z}$, мы обозначаем соответствующие пространства непрерывных и суммируемых функций с обычными нормами.

Для подмножества $\mathcal{N}\subset L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$ и $\tau\in(kT,(k+1)T)$ сужение $\mathcal{N}$ на (kT,τ) определяется как

$$\mathcal{N}\mid_{(kT,\tau)}=\{f\mid_{(kT,\tau)}:\, f\in\mathcal{N}\}.$$

О п р е д е л е н и е 13. Будем говорить, что $\mathcal{Q}$ – *каузальный мультиоператор*, если для каждого $k\in\mathbb{Z}$ мультиотображение

$$\mathcal{Q}:C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n)\multimap L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$$

задано таким образом, что для каждого $\tau\in(kT,(k+1)T)$ и для любых

$$u(\cdot),v(\cdot)\in C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n)$$

условие $u\mid_{[kT-\sigma,\tau]}=v\mid_{[kT-\sigma,\tau]}$ влечет $\mathcal{Q}(u)\mid_{(kT,\tau)}=\mathcal{Q}(v)\mid_{(kT,\tau)}$.

Рассмотрим примеры каузальных мультиоператоров. Обозначим $\mathcal{C}$ банахово пространство $C([-\sigma,0];\mathbb{R}^n)$.

П р и м е р 1. Пусть мультиотображение $F:\mathbb{R}\times\mathcal{C}\to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ мультифункция $F(\cdot,c):\mathbb{R}\to Kv(\mathbb{R}^n)$ допускает измеримое сечение для каждого $c\in\mathcal{C}$;

$(F2)$ мультиотображение $F(t,\cdot):\mathcal{C}\to Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывно сверху для п.в. $t\in\mathbb{R}$;

$(F3)$ для любого $r>0$ найдется локально суммируемая неотрицательная функция $\eta_r(\cdot)\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ такая, что

$$\|F(t,c)\|:=\sup\{\|y\|:y\in F(t,c)\}\leq\eta_r(t)\quad \text{п.в. } t\in\mathbb{R}\ ,$$

для всех $c\in\mathcal{C}$, $\|c\|\leq r$.

Известно (см., например, [24, 25]), что при условиях $(F1)-(F3)$ для каждого $k\in\mathbb{Z}$ определен мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F:C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n)\multimap L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n),$$

$$\mathcal{P}_F(u)=\left\{f\in L^1((kT,(k+1)T];\mathbb{R}^n):\ f(t)\in F(t,u_t)\,\text{п.в.}\,t\in(kT,(k+1)T)\right\}.$$

Здесь $u_t\in\mathcal{C}$ определено как $u_t(\theta)=u(t+\theta)$, $\theta\in[-\sigma,0]$. Мультиоператор $\mathcal{P}_F$ является каузальным.

П р и м е р 2. Пусть $F:\mathbb{R}\times\mathcal{C}\to Kv(\mathbb{R}^n)$ – мультиотображение, удовлетворяющее условиям $(F1)-(F3)$ примера 1. Пусть $\{K(t,s):-\infty<s\leq t<+\infty\}$ – непрерывное семейство линейных операторов в $\mathbb{R}^n$ и $m\in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$ – данная локально суммируемая функция. Для каждого $k\in\mathbb{Z}$ рассмотрим интегральный мультиоператор типа Вольтерра $\mathcal{G}:C([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n)\multimap L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n)$, определенный как

$$\mathcal{G}(u)(t)=m(t)+\int_{kT}^{t}K(t,s)F(s,u_s)ds,$$

т. е.

$$\mathcal{G}(u)=\left\{y\in L^1((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n):y(t)=m(t)+\int_{kT}^{t}K(t,s)f(s)ds:f\in\mathcal{P}_F(u)\right\}.$$

Мультиоператор $\mathcal{G}$ также является каузальным.

П р и м е р 3. Пусть мультиотображение $F:\mathbb{R}\times\mathcal{C}\to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующему условию почти полунепрерывности снизу:

(F_L) найдется последовательность непересекающихся замкнутых множеств $\{J_n\}$, $J_n \subseteq \mathbb{R}$ $n = 1, 2, \ldots$ такая, что: (i) $meas\,(\mathbb{R} \setminus \bigcup_n J_n) = 0$; (ii) сужение F на каждое множество $J_n \times \mathcal{C}$ полунепрерывно снизу.

При условиях (F_L), $(F3)$ (см., например, [24, 25]) для каждого $k \in \mathbb{Z}$ мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_F : C\left([kT-\sigma,(k+1)T];\mathbb{R}^n\right) \multimap L^1\left((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n\right)$$

также определен и каузален.

3. Периодическая задача для включений с каузальными мультиоператорами

Обозначим C_T пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ мы обозначаем норму функции x в пространстве L^2,

$$\|x\|_2 = \left(\int\limits_0^T \|x(s)\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для определения понятия периодического каузального мультиоператора, рассмотрим для $k \in \mathbb{Z}$ следующий оператор сдвига $j_k : L^1\left((kT,(k+1)T);\mathbb{R}^n\right) \to L^1\left((0,T);\mathbb{R}^n\right)$:

$$j_k(f)(t) = f(t+kT).$$

О п р е д е л е н и е 14. Каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}$ называется T-*периодическим*, если для каждых $x \in C_T$ и $k \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$j_k(\mathcal{Q}(x|_{[kT-\tau,(k+1)T]})) = \mathcal{Q}(x|_{[-\tau,T]}).$$

Для обеспечения периодичности каузальных мультиоператоров в вышеуказанных примерах, достаточно полагать, что мультиотображения F являются T-периодичными по первому аргументу:

$$F(t+T,c) = F(t,c)$$

для всех $(t,c) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ и в примере 2 дополнительно считать, что функция $m(t)$ и семейство $K(t,s)$ также T-периодичны:

$$m(t+T) = m(t) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R};$$

$$K(t+T,s+T) = K(t,s) \quad \text{для всех } -\infty < s \le t < +\infty.$$

Ясно, что условие T-периодичности каузального мультиоператора позволяет рассматривать его только на пространстве $C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$.

Сформулируем теперь нашу основную задачу:

Для заданного T-периодического каузального мультиоператора $\mathcal{Q}$, найти решение следующего операторного включения:

$$x' \in \mathcal{Q}(x), \tag{1}$$

где $x \in C_T$ – абсолютно непрерывная функция.

3.1. Случай выпуклозначного каузального мультиоператора

Обозначим L_T^1 пространство суммируемых T-периодических функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. В этом разделе мы предполагаем, что T-периодический каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}:C_T\to Cv(L_T^1)$ имеет выпуклые значения и удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{Q}1$) для любого ограниченного линейного оператора $A:L_T^1\to E$, где E – банахово пространство, композиция $A\circ\mathcal{Q}:C_T\to Cv(E)$ – замкнутый мультиоператор;

($\mathcal{Q}2$) существует неотрицательная T-периодическая суммируемая функция $\alpha(t)$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}(x)(t)\|\leq\alpha(t)(1+\|x(t)\|) \text{ п.в. } t\in\mathbb{R},$$

для каждой функции $x\in C_T$.

Для обеспечения условия ($\mathcal{Q}1$) в примерах 1 и 2 достаточно предполагать, что помимо вышеуказанных условий периодичности, мультиотображение F удовлетворяет условиям ($F1$) – ($F3$) (см. [16], теорема 1.5.30), а для выполнения условия ($\mathcal{Q}2$) мы можем предположить в примере 1 выполненным условие подлинейного роста, а в примере 2 следующее условие глобальной интегральной ограниченности

$$\|F(t,c)\|\leq\gamma(t) \text{ п.в. } t\in[0,T],$$

для некоторой неотрицательной суммируемой функции $\gamma(t)$.

Для изучения периодической задачи (1) мы используем теорему о точке совпадения для линейного фредгольмова оператора и многозначного отображения. Введем необходимые обозначения.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства; $U\subset E_1$ – ограниченное открытое множество; $l:\mathrm{Dom}\ l\subseteq E_1\to E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\mathrm{Im}\ l\subset E_2$ замкнуто.

Рассмотрим непрерывные линейные операторы проектирования $p:E_1\to E_1$ и $q:E_2\to$ $\to E_2$ такие, что $\mathrm{Im}\ p=\mathrm{Ker}\ l$, $\mathrm{Im}\ l=\mathrm{Ker}\ q$. Символом l_p обозначим сужение оператора l на $\mathrm{Dom}\ l\cap\mathrm{Ker}\ p$.

Далее, пусть непрерывный оператор $k_{p,q}:E_2\to\mathrm{Dom}\ l\cap\mathrm{Ker}\ p$ определен соотношением $k_{p,q}(y)=l_p^{-1}(y-q(y))$, $y\in E_2$; канонический оператор проектирования $\pi:E_2\to E_2/\mathrm{Im}\ l$ имеет вид $\pi(y)=y+\mathrm{Im}\ l$, $y\in E_2$; и $\phi:\mathrm{Coker}\ l\to\mathrm{Ker}\ l$ – непрерывный линейный изоморфизм.

Пусть $\mathcal{G}:\overline{U}\to Kv(E_2)$ замкнутое мультиотображение такое, что

(a) $\mathcal{G}(U)$ – ограниченное подмножество E_2;

(b) мультиотображение $k_{p,q}\circ\mathcal{G}:\overline{U}\to Kv(E_1)$ компактно и полунепрерывно сверху.

Справедливо следующее утверждение (см. [24], лемма 13.1).

Л е м м а 2. *Пусть*

(i) $l(x)\notin\lambda\mathcal{G}(x)$ *для всех* $\lambda\in(0,1]$, $x\in\mathrm{Dom}\ l\cap\partial U$;

(ii) $0\notin\pi\mathcal{G}(x)$ *для всех* $x\in\mathrm{Ker}\ l\cap\partial U$;

(iii) $\deg_{\mathrm{Ker}\ l}(\phi\pi\mathcal{G}|_{\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}},\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l})\neq0$, *где символ* $\deg_{\mathrm{Ker}\ l}$ *обозначает топологическую степень многозначного векторного поля, вычисляемую в пространстве* $\mathrm{Ker}\ l$, *и* $\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}=\overline{U}\cap\mathrm{Ker}\ l$.

Тогда l и $\mathcal{G}$ имеют точку совпадения в U, т.е. найдется $x \in U$ такое, что $l(x) \in G(x)$.

Напомним следующее понятие (см., например, [11, 18, 19]).

О п р е д е л е н и е 15. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *невырожденным потенциалом*, если найдется $K > 0$ такое, что

$$\nabla V(x) \neq 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geq K$.

Из определения невырожденного потенциала V вытекает, что на каждом замкнутом шаре $B_{\widetilde{K}} \subset \mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $\widetilde{K} \geq K$, топологическая степень градиента $\deg(\nabla V; B_{\widetilde{K}})$ корректно определена и, более того, ее значения не зависят от радиуса $\widetilde{K}$. Это общее значение степени называется индексом $\mathrm{Ind}\, V$ невырожденного потенциала V.

О п р е д е л е н и е 16. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *строгой интегральной направляющей функцией* для включения (1), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds > 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{Q}(x), \tag{2}$$

для любой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|\mathcal{Q}(x)(t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Т е о р е м а 1. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – строгая интегральная направляющая функция задачи (1) такая, что*

$$\mathrm{Ind}\; V \neq 0.$$

Тогда задача (1) имеет решение.

Отметим, что условия теоремы выполнены, если, например, функция V четна или удовлетворяет условию коэрцитивности: $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} V(x) = \pm\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сведем задачу к лемме 2, обосновав разрешимость следующего операторного включения

$$lx \in \mathcal{Q}(x), \tag{3}$$

где $l : \mathrm{Dom}\; l := \{x \in C_T : x \text{ абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \to L^1_T$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса. Тогда $\mathrm{Ker}\; l = \mathbb{R}^n$, проекция $\pi : L^1_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задана формулой $\pi f = \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(s)\, ds$ и мультиоператоры $\pi\mathcal{Q}$ и $k_{p,q}\mathcal{Q}$ выпуклозначны и компактны на ограниченных подмножествах.

Пусть для некоторого $\lambda \in (0, 1]$ функция $x \in \mathrm{Dom}\; l$ является решением включения

$$l(x) \in \lambda \mathcal{Q}(x).$$

Это означает, что $x(\cdot)$ является абсолютно непрерывной функцией такой, что $x'(t) = \lambda f(t)$ п.в. $t \in [0, T]$, для некоторого $f \in \mathcal{Q}(x)$.

Тогда

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^T \langle \nabla V(x(s)), x'(s) \rangle \, ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^T V'(x(s))\, ds = \frac{1}{\lambda} (V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

откуда

$$\|x\|_2 < N.$$

Из условия $(\mathcal{Q}2)$ вытекает, что $\|x'\|_2 < M'$, где $M' > 0$. Но тогда найдется и такое $M > 0$, что

$$\|x\|_C < M.$$

Возьмем в качестве U шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{K, M, NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \notin \lambda \mathcal{Q}(x)$$

для всех $x \in \partial U$.

Возьмем произвольное $u \in \partial U \cap Ker\, l$. Получаем $\|u\| \geq NT^{-1/2}$ и, рассматривая u как постоянную функцию, из определения строгой интегральной направляющей функции получаем

$$\int_0^T \langle \nabla V(u), f(s) \rangle \, ds > 0$$

для любого $f \in \mathcal{Q}(u)$.

Но тогда

$$\int_0^T \langle \nabla V(u), f(s) \rangle \, ds = \langle \nabla V(u), \int_0^T f(s) \, ds \rangle = T \langle \nabla V(u), \pi f \rangle > 0,$$

и, следовательно,

$$\langle \nabla V(u), y \rangle > 0$$

для любого $y \in \pi \mathcal{Q}(u)$.

Это означает, что $0 \notin \pi \mathcal{Q}(u)$ и, более того, мультиполе $\pi \mathcal{Q}(u)$ и поле $\nabla V(u)$ не допускают противоположных направлений для $u \in \partial U \cap \mathrm{Ker}\ l$. Это означает, что эти поля гомотопны, что и влечет равенство соответствующих топологических степеней:

$$\deg(\pi \mathcal{Q}\big|_{\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}}, \overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}) = \deg(\nabla V, \overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l}) \neq 0,$$

где $\overline{U}_{\mathrm{Ker}\ l} = \overline{U} \cap \mathrm{Ker}\ l$. Таким образом, все условия леммы 2 выполнены и задача (3), а, следовательно, и задача (1) имеют решение. Теорема доказана.

3.2. Случай полунепрерывного снизу каузального мультиоператора

Теперь мы рассмотрим периодическую задачу для класса включений с невыпуклозначными полунепрерывными снизу каузальными мультиоператорами. Именно, мы будем предполагать, что T-периодический каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : C_T \to P(L^1_T)$ удовлетворяет условию

$(\mathcal{Q}_L)$ $\mathcal{Q}$ полунепрерывен снизу и имеет замкнутые разложимые значения

и условию $(\mathcal{Q}2)$.

В качестве примера каузального мультиоператора, удовлетворяющего условиям $(\mathcal{Q}_L)$ и $(\mathcal{Q}2)$, мы можем рассмотреть суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F$, порожденный T-периодическим по первому аргументу мультиотображением $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющим условию почти полунепрерывности снизу (F_L) и условию подлинейного роста.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mathcal{Q} : C_T \to P(L^1_T)$ *–* T*-периодический каузальный мультиоператор, удовлетворяющий условиям* $(\mathcal{Q}_L)$ *и* $(\mathcal{Q}2)$ *и* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– строгая интегральная направляющая функция для соответствующей задачи* (1) *такая, что*

$$\mathrm{Ind}\ V \neq 0.$$

Тогда задача (1) имеет решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя лемму 2, найдем непрерывное сечение $q: C_T \to L^1_T$ мультиоператора $\mathcal{Q}$. Для отображения q имеем соотношение

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), q(x)(s) \rangle \, ds > 0$$

для каждой абсолютно непрерывной функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geq N$ и $\|x'(t)\| \leq \|\mathcal{Q}(x)(t)\|$ п.в. $t \in [0, T]$.

Теперь, применяя «однозначную» версию леммы 2 (т. е. заменяя мультиотображение $\mathcal{G}$ непрерывным отображением g) и применяя аналогичные рассуждения, мы получим решение x следующего уравнения

$$l(x) = q(x),$$

которое является решением задачи (1). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tonelli L.* Sulle equazioni funzionali di Volterra // Bull. Calcutta Math. Soc., 1930. V. 20. P. 31–48.

2. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. МГУ. Секция А. Сер. матем. и мех., 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25.

3. *Corduneanu C.* Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 16. London: Taylor and Francis, 2002.

4. *Drici Z., McRae F.A., Vasundhara Devi J.* Differential equations with causal operators in a Banach space // Nonlinear Anal., 2005. V. 62. №2. 301–313.

5. *Drici Z., McRae F.A., Vasundhara Devi J.* Monotone iterative technique for periodic boundary value problems with causal operators // Nonlinear Anal., 2006. V. 64. № 6. P. 1271–1277.

6. *Jankowski T.* Boundary value problems with causal operators // Nonlinear Anal., 2008. V. 68. № 12. P. 3625–3632.

7. *Lupulescu V.* Causal functional differential equations in Banach spaces // Nonlinear Anal., 2008. V. 69. № 12. P. 4787–4795.

8. *Obukhovskii V., Zecca P.* On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces // Nonlinear Anal., 2011. V. 74. № 8. P. 2765–2777.

9. *Бурлаков Е.О., Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтера с локально сжимающими операторами // Известия вузов. Математика, 2010. № 8. С. 16–29.

10. *Жуковский Е.С., Жуковская Т.В., Алвеш М.Ж.* Корректность уравнений с обобщенно вольтерровыми отображениями метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1669–1672.

11. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

12. *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР, 1958. Т. 123. № 2. С. 235–238.

13. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.

14. *Mawhin J.* Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 40. American Mathematical Society. Providence. R.I., 1979.

15. *Mawhin J., Ward J.R.* Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations // Discrete Contin. Dyn. Syst., 2002. V. 8. № 1. P. 39–54.

16. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2011.

17. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer, 2006.

18. *Fonda A.* Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations // Proc. Amer. Math. Soc., 1987. V. 99. № 1. P. 79–85.

19. *Kornev S., Obukhovskii V.* On some developments of the method of integral guiding functions // Funct. Differ. Equ., 2005. V. 12. № 3-4. P. 303–310.

20. *Loi N.V., Obukhovskii V., Zecca P.* On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces // Nonlinear Anal., 2013. V. 76. P. 80–92.

21. *Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.C.* On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 2014. V. 34. Issue 2. P. 219–227.

22. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций // Дифференциальные уравнения, 2015. Т. 51. № 6. С. 700–705.

23. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S.* Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076. Berlin: Springer, 2013.

24. *Deimling K.* Multivalued Differential Equations. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

25. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.

26. *Fryszkowski A.* Fixed point theory for decomposable sets. Dordrecht: Kluwer AP, 2004.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-00468, 16-01-00386) и Российского научного фонда (грант 14-21-00066).

Поступила в редакцию 15 декабря 2015 г.

Корнев Сергей Викторович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: kornev _ vrn@rambler.ru

Обуховский Валерий Владимирович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

UDC 517.911.5
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-55-65

INTEGRAL GUIDING FUNCTIONS AND PERIODIC SOLUTIONS FOR INCLUSIONS WITH CAUSAL MULTIOPERATORS

© **S. V. Kornev, V. V. Obukhovskii**

In the present paper the method of guiding functions is applied to study the periodic problem for a differential inclusion with a causal multioperator. At first we consider the case when the multioperator is closed and convex-valued. Then the case of a non-convex-valued and lower semicontinuous right-hand part is considered.

Key words: differential inclusion; causal multioperator; integral guiding function; periodic solutions; coincidence topological degree.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 14-01-00468, 16-01-00386) and by the Russian Scientific Fund (grant 14-21-00066).

REFERENCES

1. *Tonelli L.* Sulle equazioni funzionali di Volterra // Bull. Calcutta Math. Soc., 1930. V. 20. P. 31–48.

2. *Tihonov A.N.* O funkcional'nyh uravneniyah tipa Volterra i ih primeneniyah k nekotorym zadacham matematicheskoj fiziki // Byul. MGU. Sekciya A. Ser. matem. i mekh., 1938. T. 1. V. 8. S. 1–25.

3. *Corduneanu C.* Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications, 16. London: Taylor and Francis, 2002.

4. *Drici Z., McRae F.A., Vasundhara Devi J.* Differential equations with causal operators in a Banach space // Nonlinear Anal., 2005. V. 62. №2. 301–313.

5. *Drici Z., McRae F.A., Vasundhara Devi J.* Monotone iterative technique for periodic boundary value problems with causal operators // Nonlinear Anal., 2006. V. 64. № 6. P. 1271–1277.

6. *Jankowski T.* Boundary value problems with causal operators // Nonlinear Anal., 2008. V. 68. № 12. P. 3625–3632.

7. *Lupulescu V.* Causal functional differential equations in Banach spaces // Nonlinear Anal., 2008. V. 69. № 12. P. 4787–4795.

8. *Obukhovskii V., Zecca P.* On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces // Nonlinear Anal., 2011. V. 74. № 8. P. 2765–2777.

9. *Burlakov E.O., ZHukovskij E.S.* Nepreryvnaya zavisimost' ot parametrov reshenij uravnenij Vol'tera s lokal'no szhimayushchimi operatorami // Izvestiya vuzov. Matematika, 2010. № 8. S. 16–29.

10. *ZHukovskij E.S., ZHukovskaya T.V., Alvesh M.ZH.* Korrektnost' uravnenij s obobshchenno vol'terrovymi otobrazheniyami metricheskih prostranstv // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2010. T. 15. V. 6. S. 1669–1672.

11. *Krasnosel'skij M.A.* Operator sdviga po traektoriyam differencial'nyh uravnenij. M.: Nauka, 1966.

12. *Krasnosel'skij M.A., Perov A.I.* Ob odnom principe sushchestvovaniya ogranichennyh, periodicheskih i pochti-periodicheskih reshenij u sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij // DAN SSSR, 1958. T. 123. № 2. S. 235–238.

13. *Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P.* Geometricheskie metody nelinejnogo analiza. M.: Nauka, 1975.

14. *Mawhin J.* Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 40. American Mathematical Society. Providence. R.I., 1979.

15. *Mawhin J., Ward J.R.* Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations // Discrete Contin. Dyn. Syst., 2002. V. 8. № 1. P. 39–54.

16. *Borisovich YU.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obuhovskij V.V.* Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyh otobrazhenij i differencial'nyh vklyuchenij. Izd. 2-e. M.: Librokom, 2011.

17. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer, 2006.

18. *Fonda A.* Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations // Proc. Amer. Math. Soc., 1987. V. 99. № 1. P. 79–85.

19. *Kornev S., Obukhovskii V.* On some developments of the method of integral guiding functions // Funct. Differ. Equ., 2005. V. 12. № 3-4. P. 303–310.

20. *Loi N.V., Obukhovskii V., Zecca P.* On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces // Nonlinear Anal., 2013. V. 76. P. 80–92.

21. *Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.C.* On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 2014. V. 34. Issue 2. P. 219–227.

22. *Kornev S.V., Obuhovskij V.V.* Asimptoticheskoe povedenie reshenij differencial'nyh vklyuchenij i metod napravlyayushchih funkcij // Differencial'nye uravneniya, 2015. T. 51. № 6. S. 700–705.

23. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S.* Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076. Berlin: Springer, 2013.

24. *Deimling K.* Multivalued Differential Equations. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

25. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.

26. *Fryszkowski A.* Fixed point theory for decomposable sets. Dordrecht: Kluwer AP, 2004.

Received 15 December 2015.

Kornev Sergei Viktorovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: kornev _ vrn@rambler.ru

Obukhovskii Valerii Vladimirovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru