ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-361-381

УДК 517.955

Интегральное представление решения начальной задачи для волнового уравнения на геометрическом графе без граничных вершин

Владимир Леонидович ПРЯДИЕВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Аннотация. Изучается начальная задача $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$ для волнового уравнения $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ при $x \in \Gamma \setminus J$ и $t > 0$, в которой Γ – геометрический граф (по Ю. В. Покорному) с прямолинейными рёбрами и без граничных вершин ($\partial\Gamma = \varnothing$), J – множество всех внутренних вершин Γ, функция φ задана; условия трансмиссии, замыкающие задачу, – это, помимо непрерывности функции $u(\,\cdot\,,t)$ во внутренних вершинах, условия гладкости для неё, суть которых состоит в том, что при каждом $t \geqslant 0$ в каждой внутренней вершине $a \in J$ сумма правых производных функции $u(\,\cdot\,,t)$ по всем допустимым направлениям равна 0. Доказывается, что если G^* есть обобщённая функция Грина (по М. Г. Завгороднему, 2019) для краевой задачи $-y''(x) = f(x)$, $x \in \Gamma \setminus J$, при гладких условиях трансмиссии (здесь y – искомая функция, непрерывная в точках из J, а f – заданная функция, равномерно непрерывная на каждом ребре Γ), то классическое решение u начальной задачи представимо в виде:

$$u(x,t) = \langle\varphi\rangle - \int\limits_{\Gamma} g^*(x,t,s)\varphi''(s)\,ds,$$

где $\langle\varphi\rangle$ – среднее от φ по Γ, а $g^*(x,t,s) = [\mathcal{C}(t)G^*(\,\cdot\,,s)](x)$, где, в свою очередь, $\mathcal{C}$ есть операторная функция, конечным образом описываемая только через метрические и топологические характеристики Γ. Подход к получению этого представления u аналогичен подходу, реализованному автором ранее (2006) в случае, когда $\partial\Gamma \neq \varnothing$ и в точках $\partial\Gamma$ ставятся условия Дирихле.

Ключевые слова: волновое уравнение на геометрическом графе, гладкие условия трансмиссии, начальная задача, существование и единственность решения, интегральная формула решения, обобщенная функция Грина

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2025-1530).

Для цитирования: *Прядиев В.Л.* Интегральное представление решения начальной задачи для волнового уравнения на геометрическом графе без граничных вершин // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 361–381. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-361-381

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-361-381

Integral representation of the solution of the initial value problem for the wave equation on a geometric graph without boundary vertices

Vladimir L. PRYADIEV
Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russian Federation

Abstract. We study the initial value problem $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$ for the wave equation $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ for $x \in \Gamma \backslash J$ and $t > 0$, where Γ is a geometric graph (according to Yu. V. Pokornyi) with straight-line edges and without boundary vertices ($\partial\Gamma = \varnothing$), J is the set of all internal vertices of Γ, and the function φ is given; the transmission conditions that close the problem are, in addition to the continuity of the function $u(\,\cdot\,,t)$ at the interior vertices, the smoothness conditions for it, the essence of which is that for each $t \geqslant 0$ at each interior vertex $a \in J$ the sum of the right derivatives of the function $u(\,\cdot\,,t)$ in all admissible directions is 0. It is proved that if G^* is a generalized Green's function (according to M. G. Zavgorodniy, 2019) for the boundary value problem $-y''(x) = f(x)$, $x \in \Gamma \setminus J$, under smooth transmission conditions (here y is the desired function, continuous at the points of J, and f is a given function, uniformly continuous on each edge of Γ), then the classical solution u of the initial value problem is representable in form:

$$u(x,t) = \langle\varphi\rangle - \int\limits_{\Gamma} g^*(x,t,s)\varphi''(s)\,ds,$$

where $\langle\varphi\rangle$ is the average of φ over Γ, and $g^*(x,t,s) = [\mathcal{C}(t)G^*(\,\cdot\,,s)](x)$, where, in turn, $\mathcal{C}$ is an operator function finitely described only through the metric and topological characteristics of Γ. The approach to obtaining this representation of u is similar to the approach implemented by the author earlier (2006) in the case where $\partial\Gamma \neq \varnothing$ and Dirichlet conditions are imposed at the points of $\partial\Gamma$.

Keywords: wave equation on a geometric graph, smooth transmission conditions, initial value problem, existence and uniqueness of a solution, integral formula for a solution, generalized Green's function

Acknowledgements: The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2025-1530).

Mathematics Subject Classification: 35R02, 35A09, 35B30, 35C15, 35E15, 35E05, 35L05.

For citation: Pryadiev V.L. Integral representation of the solution of the initial value problem for the wave equation on a geometric graph without boundary vertices. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 361–381. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-361-381

Введение

В настоящей статье осуществлен один из подходов к описанию решения начальной задачи для волнового уравнения на геометрическом графе Γ с пустым множеством $\partial\Gamma$ граничных вершин при условиях трансмиссии вида

$$\sum_{h\in D(a)} u_h^+(a,t)=0,\quad a\in J,\ t\geqslant 0. \tag{0.1}$$

Здесь u обозначает вещественное решение названного уравнения, J — множество внутренних вершин Γ, $D(a)$ — множество единичных векторов, допустимых в точке a относительно Γ, $u_h^+(a,t)$ — правую производную функции $u(\,\cdot\,,t)$ в точке a по направлению h. Сразу подчеркнем: существование правых производных $u_h^+(a,t)$ для всех h из $D(a)$ влечет непрерывность $u(\,\cdot\,,t)$ в точке a.

Случай, когда $\partial\Gamma\neq\varnothing$, и, в дополнение к (0.1), в каждой граничной вершине поставлено краевое условие первого рода, рассмотрен, в частности, в [1]. Там показано, что в этом случае решение начально-краевой задачи при нулевой начальной скорости представимо в виде

$$u(x,t)=-\int\limits_{\Gamma\setminus(J\cup\partial\Gamma)} g(x,t,s)\varphi''(s)\,ds,\quad x\in\Gamma,\ t\geqslant 0, \tag{0.2}$$

где $\varphi=u(\,\cdot\,,0)$, а $g(x,t,s)=[\mathcal{C}(t)G(\,\cdot\,,s)]\,(x)$, где, в свою очередь, G — функция Грина соответствующей стационарной краевой задачи, а $\mathcal{C}$ — операторная косинус-функция, порождаемая начально-краевой задачей; при этом $\mathcal{C}$ допускает конечное описание благодаря принципу Гюйгенса.

Если же $\partial\Gamma=\varnothing$, то G не существует, но замена G на обобщенную функцию Грина G^* в (0.2) дает формулу решения начальной задачи. Это и доказывается ниже.

Стоит здесь отметить, что хотя теория *обобщенной* функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка на Γ и не создана в том виде, в каком создана теория просто функции Грина такой задачи (см., к примеру, [2] или подпункт 3.2.3 и пункт 6.3 в [3]), — тем не менее, с учетом классической теории обобщенной функции Грина (см., например, [4, с. 334–337]), конструкция функции G^*, приводимая ниже, и ее свойства позволяют назвать G^* обобщенной функцией Грина указанного вида задачи.

1. Основной объект исследования

Пусть Γ — связный конечный ограниченный геометрический граф из $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, понимаемый в соответствии с монографией [3] (см. там п. 3.1.1, первый абзац). Это означает, что Γ есть связное множество, являющееся объединением конечного числа интервалов конечной длины, называемых ребрами, и некоторого подмножества J из множества всех концов этих интервалов. При этом о ребрах дополнительно предполагается, что $\gamma_1\cap\overline{\gamma}_2=\varnothing$ для любых различных ребер γ_1 и γ_2; здесь и далее: $\overline{M}$ — замыкание множества $M\subseteq\mathbb{R}^n$ по евклидовой метрике $\mathbb{R}^n$. Объединение ребер обозначается $R(\Gamma)$. Точки из J называются внутренними вершинами Γ. Концы ребер, не вошедшие в J, называются граничными вершинами Γ, а их множество обозначается $\partial\Gamma$.

Для определения производной от функции, определенной в точках ребер Γ, все ребра Γ ориентируются: каждому $\gamma=(a;b)$, являющемуся ребром Γ, ставится в соответствие единичный вектор h_γ — один из двух, коллинеарных вектору $b-a$. Если функция w

определена в точках ребра γ и $x \in \gamma$, то производной функции w в точке x называется число $w'(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}[w(x+\varepsilon h_\gamma) - w(x)]$, то есть производная w в точке x по вектору h_γ. Если функция w определена в точке $x \in \overline{\Gamma}$, а $D(x)$ — множество допустимых в точке x относительно $\overline{\Gamma}$ единичных векторов, то есть $D(x) = \big\{h \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |h| = 1$ и $(x+\varepsilon h) \in \overline{\Gamma}$ для достаточно малых $\varepsilon > 0\big\}$, то правую производную w в точке x по вектору h обозначим $w_h^+(x)$. Если для достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$ существуют $w_h^+(x+\varepsilon h)$, то $w_{hh}^{++}(x)$ будет обозначать правую производную от функции w_h^+ в точке x по вектору h.

Если $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \Gamma \times \mathbb{R}$, то первый и второй аргументы u будем обозначать, как правило, буквами x и t соответственно и, согласно одной из традиций, производные u по первому и второму аргументу будем обозначать соответственно u_x и u_t; согласно той же традиции, u_{xx}, u_{xt}, u_{tx} и u_{tt} у нас — производные второго порядка от u. Первую и вторую правые производные $u(\,\cdot\,,t)$ в точке x по вектору $h \in D(x)$ будем обозначать, соответственно, $u_h^+(x,t)$ и $u_{hh}^{++}(x,t)$.

Основной объект исследования в настоящей статье — начальная задача для волнового уравнения

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \quad x \in R(\Gamma), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

при условиях трансмиссии (0.1), начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \text{ и } \ u_t(x,0+) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1.2}$$

и в предположении пустоты $\partial\Gamma$ (и значит, $\Gamma = \overline{\Gamma}$). Здесь $u : \Gamma \times [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ — искомая функция, такая, что

$$u\big|_{\overline{\gamma}\times[0;+\infty)} \in C^2\left(\overline{\gamma} \times [0;+\infty)\right) \text{ для любого ребра } \gamma, \tag{1.3}$$

а вещественная функция φ задана. Всюду далее, говоря о задаче (1.1), (0.1), (1.2), (1.3), будем предполагать, что $\partial\Gamma = \varnothing$.

Перейдем к согласованию начальных условий (1.2) с уравнением (1.1), условиями трансмиссии (0.1) и включениями (1.3). Отметим: ввиду непрерывности $u(\,\cdot\,,t)$ в точках из J при любом $t \geqslant 0$ (что, как подчеркнуто в конце первого абзаца, следует из (0.1)) выполнение (1.3) влечет включение $u \in C(\Gamma \times [0;+\infty))$. Поэтому $\varphi \in C(\Gamma)$. А кроме того, из (1.3) следует, что $\varphi\big|_{\overline{\gamma}} \in C^2\left(\overline{\gamma}\right)$ для любого ребра γ. С учетом последних двух обстоятельств существуют конечные $\varphi_h^+(a)$ и $\varphi_{hh}^{++}(a)$ для любой $a \in J$ и любого $h \in D(a)$. Далее, подстановка $t = 0$ в условия трансмиссии (0.1) дает равенства

$$\sum_{h\in D(a)} \varphi_h^+(a) = 0, \quad a \in J, \tag{1.4}$$

и, на первый взгляд, других условий на φ, помимо выписанных выше, из постановки задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) не вытекает. Однако есть еще одно условие, которое, как будет показано ниже, необходимо для существования решения задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3), и условие это следующее:

$$\varphi_{hh}^{++}(a) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(a), \quad a \in J, \quad h \in D(a), \quad \eta \in D(a). \tag{1.5}$$

Предполагая далее (1.5) выполненным, договоримся доопределять φ'' в любой точке $a \in J$ общим значением производных $\varphi_{hh}^{++}(a)$, $h \in D(a)$. При таком доопределении $\varphi'' \in C(\Gamma)$.

Все вышевыписанные условия на φ ниже предполагаются выполненными.

2. Существование и единственность решения задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3)

Существование и единственность решения задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) доказаны в статьях [5] и [6], в которых изучались классы условий трансмиссии, включающие в себя (0.1) как частный случай. Из доказательств, проведенных в [5] и [6], можно усмотреть, хотя это там специально и не оговорено, что условие (1.5) не только достаточно, но и необходимо для существования решения задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3). Ниже у нас будет возможность еще раз, уже предметно обращаясь к полученным по ходу выкладок равенствам, обосновать это обстоятельство. Во избежание двусмысленности отметим: представления решения, устанавливаемые в настоящей статье, отличаются по структуре от полученных в [5] и [6].

3. Интегральный оператор, обращающий задачу (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) в случае нулевого среднего от φ

В этом пункте мы покажем, что существует непрерывная функция $\widetilde{g}$, действующая из $\Gamma\times[0;+\infty)\times\Gamma^2$ в $\mathbb{R}$, такая, что для любой φ, имеющей нулевое среднее на Γ, решение задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) представимо в виде

$$u(x,t)=-\frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma}\widetilde{g}(x,t,s,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma,\quad x\in\Gamma,\quad t\geqslant 0,\tag{3.1}$$

где $|\Gamma|$ обозначает сумму длин всех ребер Γ, а интеграл по Γ понимается как сумма интегралов по замыканиям ребер Γ.

При построении $\widetilde{g}$ нам понадобится операторная функция $\mathcal{C}$, определяемая тем же построением, что и в [1] (см. также [7]), только с учетом пустоты $\partial\Gamma$. Это построение начинается с введения множества ориентированных ломаных, которое обозначим P. Ориентированную ломаную p с вершинами $a_i\in\Gamma$, $i=\overline{0,k}$, $k\in\mathbb{N}$, перенумерованными согласно ориентации p, отнесем ко множеству P тогда и только тогда, когда 1) $a_{i-1}\neq a_i$ при любом $i=\overline{1,k}$, 2) непервое и непоследнее звенья p являются замыканиями некоторых ребер Γ, а первое и последнее звенья p содержатся в замыканиях некоторых ребер Γ; при этом допускаем как совпадение некоторых вершин p, так и то, что некоторые звенья p, в том числе соседние, совпадают или вложены одно в другое. Точку a_0 будем называть началом ломаной p, а a_k – концом p. Конец p далее обозначается e_p. Длиной ломаной p назовем $\sum\limits_{i=1}^{k}|a_i-a_{i-1}|$.

Теперь каждой паре (p,i), в которой p — ломаная из P, а i — номер ее вершины, отличной от e_p (т. е. $i=\overline{0,k-1}$), поставим в соответствие число

$$\beta_i(p)=\begin{cases}2\,|D(a_i)|^{-1}, & \text{если } i=0 \text{ или } [a_{i-1};a_i]\cap[a_i;a_{i+1}]=\{a_i\},\\ 2\,|D(a_i)|^{-1}-1, & \text{если } i\neq 0 \quad\text{и}\quad [a_{i-1};a_i]\cap[a_i;a_{i+1}]\neq\{a_i\}.\end{cases}\tag{3.2}$$

Затем положим $\beta_p=\dfrac{1}{2}\prod\limits_{i=0}^{k-1}\beta_i(p)$ и для каждого $t\geqslant 0$ определим оператор $\mathcal{C}(t)$, действующий в пространстве определенных на Γ функций по правилу:

$$[\mathcal{C}(t)\xi](x)=\begin{cases}\sum\limits_{p\in P(x,t)}\beta_p\xi(e_p), & \text{если } x\in\Gamma \text{ и } t>0,\\ \xi(x), & \text{если } x\in\Gamma \text{ и } t=0,\end{cases}\tag{3.3}$$

где $P(x,t)$ есть множество всех ломаных из P с началом в точке x и длины t. Далее β_p будем называть *передаточным коэффициентом* ломаной p.

Также при построении $\widetilde{g}$ нам понадобится вводимая ниже функция H, которую по аналогии с физическим смыслом *функции влияния* (см. [4, гл. V, § 14, п. 1]) можно назвать *функцией противоположных влияний* для стационарной задачи, порождаемой задачей (1.1), (0.1), (1.2), (1.3).

Лемма 3.1. *Пусть $\partial\Gamma = \varnothing$. Тогда существует непрерывная функция $H : \Gamma^3 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим требованиям:*

1) $H(\,\cdot\,, s, s) \equiv 0$,

2) $H_{xx}(x,s,\sigma) = 0$ *при* $x \in R(\Gamma) \setminus \{s;\sigma\}$,

3) $\sum\limits_{h\in D(a)} H_h^+(a,s,\sigma) = 0$ *при* $a \in J \setminus \{s;\sigma\}$, *где производные — по первому аргументу,*

4) *если* $s \neq \sigma$, *то* $\sum\limits_{h\in D(s)} H_h^+(s,s,\sigma) = -1$ *и* $\sum\limits_{h\in D(\sigma)} H_h^+(\sigma,s,\sigma) = 1$, *где производные — по первому аргументу,*

5) $\int\limits_{\Gamma} H(x,s,\sigma)\,dx = 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем любую вершину $b \in J$ такую, что множество $\Gamma_1 = \Gamma\setminus\{b\}$ связно. Будем считать, что Γ_1 — геометрический граф с теми же ребрами, что и Γ, с множеством внутренних вершин $J_1 = J \setminus \{b\}$ и единственной граничной вершиной b. Пусть G — функция Грина задачи

$$\begin{cases} -y''(x) = f(x), \quad x \in R(\Gamma_1), \\ \sum\limits_{h\in D(x)} y_h^+(x) = 0, \quad x \in J_1, \\ y(b) = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

понимаемая здесь в соответствии с [2], или, что то же самое, в соответствии со *связной версией* задачи (3.4) (см. в [3] пункт 3.2, подпункт 3.2.3 и следствие из теоремы 3.6); в частности, это означает, что G определена на $\Gamma_1 \times R(\Gamma_1) = \Gamma_1 \times R(\Gamma)$. При этом G непрерывно доопределяема на Γ^2 (см. [2, теорема 2] или [8, теорема 2.2]); это доопределение обозначим $\overline{G}$. Далее, с учетом того, что $G_{xx}(\,\cdot\,,s) \equiv 0$ на $R(\Gamma_1) \setminus \{s\} = R(\Gamma) \setminus \{s\}$, $\sum\limits_{h\in D(s)} G_h^+(s,s) = -1$ и $\sum\limits_{h\in D(a)} G_h^+(a,s) = 0$ при всех $a \in J_1 \setminus \{s\}$ (производные здесь — по первому аргументу), имеем для $s \in \Gamma \setminus \{b\}$:

$$0 = \int\limits_{R(\Gamma)\setminus\{s\}} \overline{G}_{xx}(x,s)\,dx = \sum_{h\in D(s)} \overline{G}_h^+(s,s) + \sum_{a\in J\setminus\{s;b\}} \sum_{h\in D(a)} \overline{G}_h^+(a,s) + \sum_{h\in D(b)} \overline{G}_h^+(b,s)$$
$$= -1 + \sum_{h\in D(b)} \overline{G}_h^+(b,s),$$

то есть $\sum\limits_{h\in D(b)} \overline{G}_h^+(b,s) = 1$ для $s \in \Gamma \setminus \{b\}$. Но тогда функция

$$H(x,s,\sigma) = \overline{G}(x,s) - \overline{G}(x,\sigma) - \frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_{\Gamma} \left(\overline{G}(x,s) - \overline{G}(x,\sigma)\right)\,dx \tag{3.5}$$

будет удовлетворять всем свойствам из формулировки леммы 3.1, что проверяется непосредственно с использованием указанных выше свойств G. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть* $\partial\Gamma = \varnothing$ *и* $\int\limits_\Gamma \varphi(x)\,dx = 0$. *Пусть*

$$\widetilde{g}(x,t,s,\sigma) = \big[\mathcal{C}(t)H(\,\cdot\,,s,\sigma)\big](x), \quad x\in\Gamma, \quad t\geqslant 0, \quad s\in\Gamma, \quad \sigma\in\Gamma, \tag{3.6}$$

где оператор $\mathcal{C}(t)$ *применяется к* H, *как к функции ее первого аргумента. Тогда формула* (3.1) *определяет решение задачи* (1.1), (0.1), (1.2), (1.3).

Для доказательства теоремы 3.1 удобно воспользоваться следующей цепочкой из пяти лемм.

Лемма 3.2. $x\in\Gamma \Rightarrow -\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,ds = \varphi(x)-\varphi(b)$.

Доказательство. В силу определения функции Грина задачи (3.4) достаточно доказать, что $\varphi-\varphi(b)$ есть решение задачи (3.4) при $f=-\varphi''$. А это проверяется непосредственно. $\square$

Лемма 3.3. $\int\limits_\Gamma \varphi''(s)\,ds = 0$.

Доказательство. Применив на каждом ребре формулу Ньютона–Лейбница, получим: $\int\limits_\Gamma \varphi''(s)\,ds = -\sum\limits_{a\in J}\sum\limits_{h\in D(a)} \varphi_h^+(a)$, что в силу (1.4) равно 0. $\square$

Лемма 3.4. $\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,ds\,dx = |\Gamma|\varphi(b) - \int\limits_\Gamma \varphi(x)\,dx$.

Доказательство. В силу леммы 3.2

$$\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,ds\,dx = \int\limits_\Gamma (\varphi(b)-\varphi(x))\,dx = |\Gamma|\varphi(b) - \int\limits_\Gamma \varphi(x)\,dx,$$

что и требуется доказать. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть функция* u *определяется формулой* (3.1) *и среднее* φ *на* Γ *равно* 0. *Тогда*

$$u(x,0) = -\frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma H(x,s,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma = \varphi(x), \quad x\in\Gamma.$$

Доказательство. При $t=0$ формула (3.1), с учетом (3.6), (3.3) и (3.5), принимает вид:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= -\frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma H(x,s,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma \\ &= -\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,ds + \frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,dx\,ds - \frac{1}{|\Gamma|^2}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma\,dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В силу леммы 3.2 первое слагаемое в правой части (3.7) равно $\varphi(x) - \varphi(b)$. В силу леммы 3.3 второе и четвертое слагаемые в правой части (3.7) равны 0, а в силу леммы 3.4 третье слагаемое там равно $\varphi(b)$ — с учетом равенства нулю среднего φ на Γ. Это и доказывает лемму 3.5. □

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия леммы 3.5. Тогда при* $t > 0$

$$u(x,t) = -\frac{1}{|\Gamma|} \sum_{p\in P(x,t)} \beta_p \int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma H(e_p,s,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma = \sum_{p\in P(x,t)} \beta_p u(e_p,0) = \sum_{p\in P(x,t)} \beta_p \varphi(e_p). \quad (3.8)$$

Доказательство. Первое равенство в (3.8) следует из (3.1), (3.6) и (3.3), а второе и третье — следуют из леммы 3.5. □

Доказательство теоремы 3.1. В силу лемм 3.6 и 3.5 и с учетом (3.3) достаточно доказать, что в условиях теоремы 3.1 функция

$$u(x,t) = [\mathcal{C}(t)\varphi](x), \quad x \in \Gamma,\ t \geqslant 0, \quad (3.9)$$

есть решение задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3). То, что функция (3.9) удовлетворяет, по отдельности, каждому соотношению из списка (1.1), (0.1), (1.2), уже доказано — см. [9] или [10, пункт 2.1] [1]. Там же доказаны следующие три равенства:

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{p\in P(x,t)} \beta_p \varphi''(e_p), \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (3.10)$$

где $u_{xx}(x,t)$ при $x \in J$ есть общее значение производных $u^{++}_{hh}(x,t)$ для всех $h \in D(x)$ (совпадение этих производных тоже доказано и в [9], и в [10]),

$$u_t(x,t) = -\sum_{p\in P(x,t)} \beta_p \varphi^+_{\theta(p)}(e_p), \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (3.11)$$

$$u^+_h(x,t) = \sum_{p\in P''} \beta_p \varphi^+_{\theta(p)}(e_p) + (1 - |D(x)|) \sum_{p\in P'} \beta_p \varphi^+_{\theta(p)}(e_p), \quad x \in \Gamma, \quad h \in D(x), \quad t > 0, \quad (3.12)$$

где $P' = P'(x,t,h) = \left\{p \in P(x,t) \,\middle|\, (a_1^p - x) \uparrow\uparrow h\right\}$, $P'' = P''(x,t,h) = P(x,t) \setminus P'$, а $\theta(p)$ — вектор из $D(e_p)$ такой, что $\theta(p) \uparrow\uparrow (a^p_{k(p)-1} - e_p)$. Вектор $\theta(p)$ назовем *концевым вектором* ломаной p.

Остается проверить, что функция (3.9) удовлетворяет требованию (1.3), а с учетом того, что она удовлетворяет уравнению (1.1), достаточно проверить (учитываем также (3.10) и выполнение (1.2) для функции (3.9)), что для любого ребра γ

$$u_{xx}\big|_{\overline{\gamma}\times[0;+\infty)} \in C(\overline{\gamma} \times [0;+\infty)), \quad (3.13)$$

$$u_{xt}\big|_{\gamma\times(0;+\infty)} \quad \text{непрерывно доопределяема на} \quad \overline{\gamma} \times [0;+\infty) \quad (3.14)$$

и

$$u_{xt}\big|_{\gamma\times(0;+\infty)} = u_{tx}\big|_{\gamma\times(0;+\infty)}. \quad (3.15)$$

[1] В [9] $\partial\Gamma = \varnothing$ и допускаются ребра-лучи, а в [10] рассмотрен класс условий трансмиссии, включающий в себя (0.1), как частный случай, и допускается $\partial\Gamma = \varnothing$.

Использование формул (3.10)–(3.12) для доказательства свойств (3.13)–(3.15) подразумевает описание того, как связаны между собой, во-первых, множества ломаных из $P(x,t)$ и из $P(x+\mu h, t+\tau)$, где $\mu \geqslant 0$ и τ достаточно малы, $h \in D(x)$, во-вторых, концы и концевые векторы этих ломаных, и в-третьих, передаточные коэффициенты этих ломаных. Для описания этих связей введем в рассмотрение некоторые преобразования ломаных из P (см. ниже определения 3.1–3.6). Ниже для каждой $p \in P$ через $k(p)$ обозначается количество звеньев p, а через a_i^p, $i=\overline{0,k(p)}$, — i-я последовательная вершина p.

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть $p \in P$ и $e_p \notin J$, а $q \in P$ такова, что $k(q)=k(p)$, $a_i^q = a_i^p$ для всех $i=\overline{0,k(p)-1}$ и $e_q = e_p - \tau\theta(p)$, где τ — некоторое положительное число. Тогда q назовем τ-удлинением ломаной p, а p — наоборот, τ-укорочением ломаной q; записывать это будем так: $q=\pi(p,\tau)$ или, соответственно, $p=\pi(q,-\tau)$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть $p \in P$, $e_p \in J$ и $\eta \in D(e_p)$, а $q \in P$ такова, что $k(q)=k(p)+1$, $a_i^q=a_i^p$ для всех $i=\overline{0,k(p)}$ и $e_q = e_p + \tau\eta$, где τ — некоторое положительное число. Тогда q назовем τ-удлинением ломаной p в направлении η и записывать это будем так: $q=\pi(p,\tau,\eta)$.

О п р е д е л е н и е 3.3. Пусть $p \in P$ и $e_p \notin J$, а $q \in P$ такова, что $k(q)=k(p)$, $a_i^q=a_i^p$ для всех $i=\overline{1,k(p)-1}$, $a_0^q \in (a_0^p; a_1^p)$, причем $|a_0^p - a_0^q| = \mu$ и $e_q = e_p - \mu\theta(p)$, где μ — некоторое положительное число. Тогда q назовем положительным μ-сдвигом ломаной p, а p — отрицательным μ-сдвигом q; писать в этом случае будем так: $q = m^+(p,\mu)$ или, соответственно, $p=m^-(q,\mu)$.

О п р е д е л е н и е 3.4. Пусть $p \in P$, $e_p \in J$ и $\eta \in D(e_p)$, а $q \in P$ такова, что $k(q)=k(p)+1$, $a_i^q = a_i^p$ при всех $i=\overline{1,k(p)}$, $a_0^q \in (a_0^p; a_1^p)$, причем $|a_0^p - a_0^q| = \mu$ и $e_q = e_p + \mu\eta$, где μ — некоторое положительное число. Тогда q назовем положительным μ-сдвигом ломаной p в направлении вектора η; писать в этом случае будем так: $q = m^+(p,\mu,\eta)$.

О п р е д е л е н и е 3.5. Будем говорить, что ломаные p и q из P противоположны, если $k(p)=k(q)$ и $a_i^q = a_{k(p)-i}^p$ для всех $i=\overline{0,k(p)}$; писать в этом случае будем так: $q=-p$ (или $p=-q$).

О п р е д е л е н и е 3.6. Пусть $p \in P$, $a_0^p \in J$ и $h \in D(a_0^p)$. Ломаную q, противоположную ломаной $m^+(-p,\mu,h)$, назовем отрицательным μ-сдвигом p в направлении вектора h, записывая это в виде: $q=m^-(p,\mu,h)$.

Ниже, фиксируя $x \in \Gamma$ и $t>0$, всегда будем предполагать, что μ и τ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \mu < \zeta$ и $|\tau| < \zeta$, где $\zeta = \dfrac{\delta}{2}$, а $\delta=\delta(x,t) > 0$ — любое число, такое, что 1) $\delta \leqslant t$, 2) $\delta \leqslant |x-a_1^p|$ для любой $p \in P(x,t)$, 3) $\delta \leqslant |e_p - a|$ для любой $p \in P(x,t)$ и $a \in J\setminus\{e_p\}$. Для описания связи между $P(x,t)$ и $P(x+\mu h, t+\tau)$ множество допускаемых нами пар $(\mu;\tau)$ удобно разбить на подмножества: $[0;\zeta)\times(-\zeta;\zeta) = \{(0;0)\} \cup \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{6} A_j\Big)$, где $A_1 = \big\{(0;\tau)\,\big|\,\tau<0\big\}$, $A_2=\big\{(\mu;\tau)\,\big|\,\tau \leqslant -\mu < 0\big\}$, $A_3 = \big\{(\mu;0)\,\big|\,\mu>0\big\}$, $A_4=\big\{(\mu;\tau)\,\big|\,\mu>0, \tau \in (-\mu;0)\cup(0;\mu]\big\}$, $A_5=\big\{(\mu;\tau)\,\big|\,0<\mu<\tau\big\}$ и $A_6=\big\{(0;\tau)\,\big|\,\tau>0\big\}$.

Пусть $P_R = \big\{p \in P(x,t)\,\big|\,e_p \in R(\Gamma)\big\}$, $P_J=\big\{p\in P(x,t)\,\big|\,e_p \in J\big\}$, $P'_R = P' \cap P_R$, $P'_J = P' \cap P_J$, $P''_R = P'' \cap P_R$, $P''_J = P''\cap P_J$. Непосредственно из определений 3.1–3.6

следуют импликации:

$$\tau<0\Rightarrow P(x,t+\tau)=\bigl\{\pi(p,\tau)\,\big|\,p\in P(x,t)\bigr\}\,, \tag{3.16}$$

$$\tau>0\Rightarrow P(x,t+\tau)=\bigl\{\pi(p,\tau)\,\big|\,p\in P_R\bigr\}\cup\bigl\{\pi(p,\tau,\eta)\,\big|\,p\in P_J,\eta\in D(e_p)\bigr\}\,, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\bigl[\mu>0\,\wedge\,x\in R(\Gamma)\bigr]\Rightarrow P(x+\mu h,t)&=\bigl\{m^-(p,\mu)\,\big|\,p\in P''\bigr\}\\&\cup\bigl\{m^+(p,\mu)\,\big|\,p\in P'_R\bigr\}\cup\bigl\{m^+(p,\mu,\eta)\,\big|\,p\in P'_J,\eta\in D(e_p)\bigr\}\,,\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\bigl[\mu>0\,\wedge\,x\in J\bigr]\Rightarrow P(x+\mu h,t)&=\bigl\{m^-(p,\mu,h)\,\big|\,p\in P(x,t)\bigr\}\\&\cup\bigl\{m^+(p,\mu)\,\big|\,p\in P'_R\bigr\}\cup\bigl\{m^+(p,\mu,\eta)\,\big|\,p\in P'_J,\eta\in D(e_p)\bigr\}\,,\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\bigl[\tau\leqslant-\mu<0\,\wedge\,x\in R(\Gamma)\bigr]&\Rightarrow P(x+\mu h,t+\tau)\\&=\bigl\{m^+(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\,p\in P'\bigr\}\cup\bigl\{m^-(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\,p\in P''\bigr\}\,,\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\bigl[\tau\leqslant-\mu<0\,\wedge\,x\in J\bigr]&\Rightarrow P(x+\mu h,t+\tau)\\&=\bigl\{m^+(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\,p\in P'\bigr\}\cup\bigl\{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)\,\big|\,p\in P(x,t)\bigr\}\,,\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\bigl[\tau>\mu>0\,\wedge\,x\in R(\Gamma)\bigr]&\Rightarrow P(x+\mu h,t+\tau)\\&=\bigl\{m^+(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\,p\in P'_R\bigr\}\cup\bigl\{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu)\,\big|\,p\in P'_J,\eta\in D(e_p)\bigr\}\\&\cup\bigl\{m^-(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\,p\in P''_R\bigr\}\cup\bigl\{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu)\,\big|\,p\in P''_J,\eta\in D(e_p)\bigr\}\,,\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\bigl[\tau>\mu>0\,\wedge\,x\in J\bigr]&\Rightarrow P(x+\mu h,t+\tau)\\&=\bigl\{m^+(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\,p\in P'_R\bigr\}\cup\bigl\{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu)\,\big|\,p\in P'_J,\eta\in D(e_p)\bigr\}\\&\cup\bigl\{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)\,\big|\,p\in P_R\bigr\}\cup\bigl\{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu,h)\,\big|\,p\in P_J,\eta\in D(e_p)\bigr\}\,,\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\bigl[\mu>0\,\wedge\,\tau\in(-\mu;0)\cup(0;\mu]\bigr]\Rightarrow P(x+\mu h,t+\tau)=\bigl\{\pi(r,\tau)\,\big|\,r\in P(x+\mu h,t)\bigr\}\,. \tag{3.24}$$

Импликации (3.16)–(3.24) для каждой пары $(\mu;\tau)\in\bigl([0;\zeta)\times(-\zeta;\zeta)\bigr)\setminus\{(0;0)\}$, в зависимости от того, какое из включений $(\mu;\tau)\in A_j$, $j=\overline{1,6}$, выполнено, определяют соответствие $\alpha_{\mu,\tau}\subseteq P(x,t)\times P(x+\mu h,t+\tau)$, обладающее свойствами: 1) $\forall\,p\in P(x,t)$ $\exists\,q\in P(x+\mu h,t+\tau)\colon$ $(p;q)\in\alpha_{\mu,\tau}$, 2) $\forall\,q\in P(x+\mu h,t+\tau)$ $\exists!\,p\in P(x,t)\colon$ $(p;q)\in\alpha_{\mu,\tau}$. Поэтому для любого функционала λ, заданного на $P(x+\mu h,t+\tau)$, имеем

$$\sum_{q\in P(x+\mu h,t+\tau)}\lambda(q)=\sum_{p\in P(x,t)}\Bigl(\sum_{q\,|\,(p;q)\in\alpha_{\mu,\tau}}\lambda(q)\Bigr). \tag{3.25}$$

В силу (3.16)–(3.24) для описания связи между концами ломаных из $P(x,t)$ и из $P(x+\mu h,t+\tau)$, а также их концевыми векторами и передаточными коэффициентами, достаточно описания следующих связей, непосредственно следующих из определений 3.1–3.6:

$$e_{\pi(p,\tau)}=e_p-\tau\theta(p),\quad \theta(\pi(p,\tau))=\theta(p),\quad \beta_{\pi(p,\tau)}=\beta_p, \tag{3.26}$$

$$e_{\pi(p,\tau,\eta)}=e_p+\tau\eta,\quad \theta(\pi(p,\tau,\eta))=-\eta,\quad \beta_{\pi(p,\tau,\eta)}=\beta_p\varkappa(p,\eta), \tag{3.27}$$

$$e_{m^-(p,\mu)}=e_p+\mu\theta(p),\quad \theta(m^-(p,\mu))=\theta(p),\quad \beta_{m^-(p,\mu)}=\beta_p\beta_0(m^-(p,\mu)), \tag{3.28}$$

$$e_{m^+(p,\mu)}=e_p-\mu\theta(p),\quad \theta(m^+(p,\mu))=\theta(p),\quad \beta_{m^+(p,\mu)}=\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}, \tag{3.29}$$

$$e_{m^-(p,\mu,h)}=e_p+\mu\theta(p),\quad \theta(m^-(p,\mu,h))=\theta(p),\quad \beta_{m^-(p,\mu,h)}=\frac{\beta_p\varkappa(-p,h)}{\beta_0(p)}, \tag{3.30}$$

$$e_{m^+(p,\mu,\eta)}=e_p+\mu\eta,\quad \theta(m^+(p,\mu,\eta))=-\eta,\quad \beta_{m^+(p,\mu,\eta)}=\frac{\beta_p\varkappa(p,\eta)}{\beta_0(p)}, \tag{3.31}$$

где
$$\varkappa(p,\eta)=2|D(e_p)|^{-1},\quad \text{если}\quad \eta\neq\theta(p),\ \text{ и }\ \varkappa(p,\eta)=2|D(e_p)|^{-1}-1,\quad \text{если}\quad \eta=\theta(p). \tag{3.32}$$

Непосредственно проверяется, что
$$\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)=1. \tag{3.33}$$

И еще нам понадобятся следующие импликации, непосредственно вытекающие из (3.2), (3.32) и определения 3.5:
$$\big[x\in R(\Gamma)\ \wedge\ p\in P(x,t)\big]\ \Rightarrow\ \big[|D(x)|=2\ \wedge\ \beta_0(p)=\beta_0(\pi(p,\mu))=\beta_0(\pi(p,\mu,\eta))=1\big], \tag{3.34}$$
$$\big[x\in J\ \wedge\ p\in P(x,t)\big]\ \Rightarrow\ \beta_0(p)=\beta_0(\pi(p,\mu))=\beta_0(\pi(p,\mu,\eta))=2|D(x)|^{-1}, \tag{3.35}$$
$$\big[p\in P(x,t)\ \wedge\ q=m^-(p,\mu)\big]\ \Rightarrow\ \big[|D(a_0^q)|=2\ \wedge\ \beta_0(q)=1\big], \tag{3.36}$$
$$\begin{gathered}\big[x\in J\ \wedge\ h\in D(x)\ \wedge\ p\in P(x,t)\big]\\ \Rightarrow\varkappa(-p,h)=\varkappa(-\pi(p,\mu),h)=\varkappa(-\pi(p,\mu,\eta),h)=\begin{cases}2|D(x)|^{-1}, & \text{если } p\in P'',\\ 2|D(x)|^{-1}-1, & \text{если } p\in P'.\end{cases}\end{gathered} \tag{3.37}$$

Начнем с включения (3.13). Зафиксируем ребро γ, $t>0$, $x\in\overline{\gamma}$ и $h\in D(x)$, допустимый в точке x относительно $\overline{\gamma}$, и рассмотрим функцию $z(\mu,\tau)=u_{xx}(x+\mu h,t+\tau)$. Для доказательства непрерывности функции $u_{xx}\big|_{\overline{\gamma}\times[0;+\infty)}$ в точке $(x;t)$ достаточно доказать непрерывность z в точке $(0;0)$. На следующую лемму мы сошлемся неоднократно.

Лемма 3.7. *Пусть* $\xi\in C(\Gamma)$, *а*
$$\widehat{z}(\mu,\tau)=\sum_{q\in P(x+\mu h,t+\tau)}\chi_q\beta_q\xi(e_q), \tag{3.38}$$
где функционал $q\mapsto\chi_q$ *таков, что при любых* $(\mu;\tau)\in\big([0;\zeta)\times(-\zeta;\zeta)\big)\setminus\{(0;0)\}$
$$(p;q)\in\alpha_{\mu,\tau}\Rightarrow\chi_q=\chi_p. \tag{3.39}$$
Тогда $\widehat{z}$ *непрерывна в точке* $(0;0)$.

Доказательство леммы 3.7 проделаем, рассмотрев пределы $\widehat{z}$ в точке $(0;0)$ по множествам A_j, $j=\overline{1,6}$. Если $(\mu;\tau)\in A_1$, то из (3.38) с учетом (3.16), (3.25), (3.39) и (3.26) получим:
$$\widehat{z}(\mu,\tau)=\widehat{z}(0,\tau)=\sum_{q\in P(x,t+\tau)}\chi_q\beta_q\xi(e_q)=\sum_{p\in P(x,t)}\chi_p\beta_p\xi(e_p-\tau\theta(p))\underset{\tau\to0-}{\longrightarrow}\widehat{z}(0,0).$$

Если же $(\mu;\tau)\in A_6$, то из (3.38), в силу (3.17), (3.25), (3.39) и (3.27) и с учетом (3.33), следует [2]:
$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)=\widehat{z}(0,\tau)=\sum_{q\in P(x,t+\tau)}\chi_q\beta_q\xi(e_q)&=\sum_{p\in P_R}\chi_p\beta_p\xi(e_p-\tau\theta(p))+\sum_{p\in P_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi(e_p+\tau\eta)\\&\underset{\tau\to0+}{\longrightarrow}\sum_{p\in P_R}\chi_p\beta_p\xi(e_p)+\sum_{p\in P_J}\chi_p\beta_p\xi(e_p)\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)=\widehat{z}(0,0).\end{aligned}$$

[2] Отказ от непрерывности ξ в какой-либо точке из J повлек бы, вообще говоря, некорректность приводимого ниже предельного перехода, так как тогда $\xi(e_p+\tau\eta)$ может и не стремиться к $\xi(e_p)$, и равенство (3.33) неприменимо. Поскольку далее мы будем применять лемму 3.7 при $\xi=\varphi''$, то теперь становится понятной необходимость условия (1.5) для выполнения (1.3). Отказ от (1.5) повлек бы существование лишь *сильного* решения, допускающего разрывы вторых производных на характеристиках, выходящих из точек множества $J\times\{0\}$.

Переходя к включениям $(\mu;\tau)\in A_j$, $j=\overline{2,5}$, отметим: при их выполнении $\mu\in(0;\zeta)$, что влечет $x+\mu h\in R(\Gamma)$, а значит, и $|D(x+\mu h)|=2$. Поэтому, в силу (3.2),

$$(\mu;\tau)\in\bigcup_{j=2}^{5}A_j\Rightarrow\bigl[q\in P(x+\mu h,t+\tau)\ \Rightarrow\ \beta_0(q)=1\bigr].\tag{3.40}$$

Пусть $(\mu;\tau)\in A_3$. Если $x\in R(\Gamma)$, то из (3.38), применяя сначала (3.18) и (3.25), а затем (3.39), (3.28), (3.29) и (3.31), получим:

$$\widehat{z}(\mu,\tau)=\widehat{z}(\mu,0)=\sum_{q\in P(x+\mu h,t)}\chi_q\beta_q\xi(e_q)=\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\beta_0(m^-(p,\mu))\xi(e_p+\mu\theta(p))$$
$$+\sum_{p\in P'_R}\frac{\chi_p\beta_p}{\beta_0(p)}\xi(e_p-\mu\theta(p))+\sum_{p\in P'_J}\frac{\chi_p\beta_p}{\beta_0(p)}\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi(e_p+\mu\eta),$$

что с учетом (3.40), (3.34) и (3.33) стремится при $\mu\to0+$ к $\widehat{z}(0,0)$. Если же $x\in J$, то из (3.38), применяя сначала (3.19) и (3.25), а затем (3.39), (3.30), (3.29) и (3.31), получим:

$$\widehat{z}(\mu,\tau)=\widehat{z}(\mu,0)=\sum_{q\in P(x+\mu h,t)}\chi_q\beta_q\xi(e_q)=\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)}{\beta_0(p)}\xi(e_p+\mu\theta(p))$$
$$+\sum_{p\in P'_R}\frac{\chi_p\beta_p}{\beta_0(p)}\xi(e_p-\mu\theta(p))+\sum_{p\in P'_J}\frac{\chi_p\beta_p}{\beta_0(p)}\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi(e_p+\mu\eta),$$

что с учетом (3.35) и (3.33) стремится при $\mu\to0+$ к

$$\frac{|D(x)|}{2}\Bigl[\sum_{p\in P(x,t)}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)+\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\xi(e_p)\Bigr]$$
$$=\frac{|D(x)|}{2}\Bigl[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\bigl(\varkappa(-p,h)+1\bigr)\xi(e_p)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)\Bigr]\overset{(3.37)}{=}\widehat{z}(0,0).$$

Итак, предел $\widehat{z}$ по множеству A_3 в точке $(0;0)$ равен $\widehat{z}(0,0)$ и при $x\in R(\Gamma)$, и при $x\in J$.

Пусть теперь $(\mu;\tau)\in A_2$. Если $x\in R(\Gamma)$, то из (3.38), применяя сначала (3.20) и (3.25), затем (3.39), (3.29), (3.28) и (3.26), а затем (3.34) и (3.40), получим:

$$\widehat{z}(\mu,\tau)=\sum_{p\in P'}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}\beta_0(m^-(\pi(p,\tau),\mu))\xi\bigl(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\bigr)$$
$$=\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\xi\bigl(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\bigr)\underset{A_2\ni(\mu;\tau)\to(0;0)}{\longrightarrow}\widehat{z}(0,0).$$

Если же $x\in J$, то из (3.38), применяя сначала (3.21) и (3.25), затем (3.39), (3.29), (3.30) и (3.26), а затем (3.35) и (3.37), получим:

$$\widehat{z}(\mu,\tau)=\sum_{p\in P'}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}\varkappa(-\pi(p,\tau),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\bigl(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\bigr)$$
$$=\frac{|D(x)|}{2}\Bigl[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P(x,t)}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi\bigl(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\bigr)\Bigr]$$
$$\underset{A_2\ni(\mu;\tau)\to(0;0)}{\longrightarrow}\frac{|D(x)|}{2}\Bigl[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\bigl(1+\varkappa(-p,h)\bigr)\xi(e_p)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)\Bigr]\overset{(3.37)}{=}\widehat{z}(0,0).$$

Итак, предел $\widehat{z}$ и по множеству A_2 в точке $(0;0)$ равен $\widehat{z}(0,0)$ — при любом $x\in\overline{\gamma}$.

Теперь пусть $(\mu;\tau)\in A_5$. Если $x\in R(\Gamma)$, то из (3.38), применяя сначала (3.22) и (3.25), затем (3.39), (3.29), (3.28), (3.26) и (3.27), а затем (3.34) и (3.40), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)&=\sum_{p\in P'_R}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\eta\bigr)\\&\quad+\sum_{p\in P''_R}\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}\beta_0(m^-(\pi(p,\tau),\mu))\xi\bigl(e_p-(\tau-\mu)\theta(p)\bigr)\\&\quad+\sum_{p\in P''_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\chi_p\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}\beta_0(m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu))\xi\bigl(e_p+(\tau-\mu)\eta\bigr)\\&=\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_p\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P'_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\eta\bigr)\\&\quad+\sum_{p\in P''_R}\chi_p\beta_p\xi\bigl(e_p-(\tau-\mu)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P''_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\bigl(e_p+(\tau-\mu)\eta\bigr),\end{aligned}$$

что с учетом (3.33) стремится к $\widehat{z}(0,0)$ при $A_5\ni(\mu;\tau)\to(0;0)$. Если же $x\in J$, то из (3.38), применяя сначала (3.23) и (3.25), затем (3.39), (3.29), (3.30), (3.26) и (3.27), а затем (3.35) и (3.37), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)&=\sum_{p\in P'_R}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\eta\bigr)\\&+\sum_{p\in P_R}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}\varkappa(-\pi(p,\tau),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\bigl(e_p-(\tau-\mu)\theta(p)\bigr)\\&\quad+\sum_{p\in P_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}\varkappa(-\pi(p,\tau,\eta),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\xi\bigl(e_p+(\tau-\mu)\eta\bigr)\\&=\frac{|D(x)|}{2}\Bigl[\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_p\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P'_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\eta\bigr)\\&+\sum_{p\in P_R}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi\bigl(e_p-(\tau-\mu)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varkappa(-p,h)\xi\bigl(e_p+(\tau-\mu)\eta\bigr)\Bigr],\end{aligned}$$

что с учетом (3.33) стремится к

$$\begin{aligned}&\frac{|D(x)|}{2}\Bigl[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\xi(e_p)+\sum_{p\in P(x,t)}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)\Bigr]\\&\qquad=\frac{|D(x)|}{2}\Bigl[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\bigl(1+\varkappa(-p,h)\bigr)\xi(e_p)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)\Bigr]\overset{(3.37)}{=}\widehat{z}(0,0).\end{aligned}$$

Итак, и по множеству A_5 предел $\widehat{z}$ в точке $(0;0)$ равен $\widehat{z}(0,0)$ — при любом $x\in\overline{\gamma}$.

Пусть, наконец, $(\mu;\tau)\in A_4$. Если $x\in R(\Gamma)$, то из (3.38), применяя сначала (3.24) и (3.25), затем (3.39), (3.18), (3.26), (3.28), (3.29) и (3.31), а затем (3.36) и (3.34), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)&=\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_{m^-(p,\mu)}\xi\bigl(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_{m^+(p,\mu)}\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)\\&\quad+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\chi_p\beta_{m^+(p,\mu,\eta)}\xi\bigl(e_p+(\tau+\mu)\eta\bigr)=\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\xi\bigl(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\bigr)\\&\quad+\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_p\xi\bigl(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\bigr)+\sum_{p\in P'_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\bigl(e_p+(\tau+\mu)\eta\bigr),\end{aligned}$$

что с учетом (3.33) стремится к $\widehat{z}(0,0)$ при $A_5 \ni (\mu;\tau) \to (0;0)$. Если же $x \in J$, то из (3.38), применяя сначала (3.24) и (3.25), затем (3.39), (3.19), (3.26), (3.30), (3.29) и (3.31), а затем (3.35), получим:

$$\widehat{z}(\mu,\tau) = \sum_{p\in P(x,t)} \chi_p\beta_{m^-(p,\mu,h)}\xi\big(e_p + (\mu-\tau)\theta(p)\big) + \sum_{p\in P'_R} \chi_p\beta_{m^+(p,\mu)}\xi\big(e_p - (\mu+\tau)\theta(p)\big)$$
$$+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)} \chi_p\beta_{m^+(p,\mu,\eta)}\xi\big(e_p + (\tau+\mu)\eta\big) = \frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P''} \chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi\big(e_p + (\mu-\tau)\theta(p)\big)$$
$$+\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p - (\mu+\tau)\theta(p)\big) + \sum_{p\in P'_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\big(e_p + (\tau+\mu)\eta\big)\Big],$$

что с учетом (3.33) стремится к

$$\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p) + \sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\big(1+\varkappa(-p,h)\big)\xi(e_p)\Big] \overset{(3.37)}{=} \widehat{z}(0,0).$$

Итак, предел $\widehat{z}$ и по множеству A_4 в точке $(0;0)$ равен $\widehat{z}(0,0)$ – при любом $x \in \overline{\gamma}$.

Лемма 3.7 доказана.

П р о д о л ж и м д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.1. В силу леммы 3.7 функция z непрерывна в точке $(0;0)$. Значит, для любого ребра γ функция $u_{xx}\big|_{\overline{\gamma}\times(0;+\infty)}$ непрерывна, и для завершения доказательства включения (3.13) остается доказать непрерывность u_{xx} в точках из $\overline{\gamma}\times\{0\}$ для любого ребра γ.

Пусть γ — ребро Γ, $x \in \overline{\gamma}$ и $h \in D(x)$ допусти́м в точке x относительно $\overline{\gamma}$. Пусть $\Delta = \dfrac{1}{2}\min\big\{|x-a| \,\big|\, a \in J\setminus\{x\}\big\}$, и рассмотрим $z_0(\nu,\rho) = u_{xx}(x+\nu h,\rho)$ при $0 \leqslant \nu < \Delta$ и $0 < \rho < \Delta$. Если $x \in \gamma \vee (x \in \partial\gamma \wedge \nu \geqslant \rho)$, где, и всюду далее, $\partial\gamma = \overline{\gamma}\cap J$, то $P(x+\nu h,\rho)$ состоит из двух однозвенных ломаных с концами в точках $x+\nu h \pm \rho h \in \gamma$, и значит, в рассматриваемом случае

$$z_0(\nu,\rho) = \frac{1}{2}\big[\varphi''(x+\nu h+\rho h) + \varphi''(x+\nu h-\rho h)\big] \to \varphi''(x) \tag{3.41}$$

при $(\nu;\rho) \to (0;0)$. Пусть теперь $x \in \partial\gamma$ и $0 < \nu < \rho$. Тогда $P(x,\rho)$ есть множество всех однозвенных ломаных r_η с общим началом x и концами $x+\rho\eta$, $\eta \in D(x)$, и значит, $P(x+\nu h,\rho) = \big\{m^-(r,\nu,h)\,\big|\, r \in P(x,\rho)\big\} \cup \{\widetilde{q}\}$, где $\widetilde{q} = m^+(r_h,\nu)$. При этом $r \in P(x,\rho)$ $\Rightarrow$ $(\beta_0(r) = 2|D(x)|^{-1} \wedge \beta_r = |D(x)|^{-1})$ и $\theta(r_\eta) = -\eta$. Но тогда, с учетом (3.30), из (3.10) следует, что в рассматриваемом случае

$$z_0(\nu,\rho) = \sum_{r\in P(x,\rho)} \frac{\beta_r\varkappa(-r,h)}{\beta_0(r)}\varphi''(e_r+\nu\theta(r)) + \beta_{\widetilde{q}}\varphi''((x+\rho h)+\nu h)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\eta\in D(x)}\varkappa(-r_\eta,h)\varphi''((x+\rho\eta)-\nu\eta) + \frac{1}{2}\varphi''(x+(\rho+\nu)h)$$
$$\overset{(3.32)}{=} |D(x)|^{-1}\sum_{\eta\in D(x)}\varphi''(x+(\rho-\nu)\eta) + \Big(|D(x)|^{-1} - \frac{1}{2}\Big)\varphi''(x+(\rho-\nu)h) + \frac{1}{2}\varphi''(x+(\rho+\nu)h),$$

что при $(\nu;\rho) \to (0;0)$ (при условии $0 < \nu < \rho$) стремится к

$$\varphi''(x)\Big(|D(x)|^{-1}(|D(x)|-1) + |D(x)|^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) = \varphi''(x).$$

Если же $x \in \partial\gamma$ и $\nu = 0$, то ввиду импликации $r \in P(x,\rho) \Rightarrow \beta_r = |D(x)|^{-1}$ будет

$$z_0(\nu,\rho) = z_0(0,\rho) = \sum_{r\in P(x,\rho)} \beta_r \varphi''(e_r) = |D(x)|^{-1} \sum_{\eta\in D(x)} \varphi''(x+\rho\eta) \underset{\rho\to 0+}{\longrightarrow} \varphi''(x).$$

Таким образом, предел $z_0(\nu,\rho)$ при $(\nu;\rho) \to (0;0)$ существует и равен $\varphi''(x)$, что в сочетании с $\varphi'' \in C(\Gamma)$ и выполнением (1.2) для функции (3.9) окончательно доказывает включение (3.13).

Докажем теперь (3.15). Зафиксируем, по-прежнему, любое ребро γ и любые $t > 0$ и $x \in \gamma$ и положим $h = \pm h_\gamma$. Тогда в силу (3.18) и (3.25), а также (3.28), (3.29) и (3.31), из (3.11) получим, что при $\mu > 0$

$$\begin{aligned} u_t(x+\mu h,t) &= -\sum_{p\in P''} \beta_{m^-(p,\mu)} \varphi^+_{\theta(m^-(p,\mu))}(e_p+\mu\theta(p)) - \sum_{p\in P'_R} \beta_{m^+(p,\mu)} \varphi^+_{\theta(m^+(p,\mu))}(e_{m^+(p,\mu)}) \\ &- \sum_{p\in P'_J} \sum_{\eta\in D(e_p)} \beta_{m^+(p,\mu,\eta)} \varphi^+_{\theta(m^+(p,\mu,\eta))}(e_{m^+(p,\mu,\eta)}) = -\sum_{p\in P''} \beta_p \beta_0(m^-(p,\mu)) \varphi^+_{\theta(p)}(e_p+\mu\theta(p)) \\ &- \sum_{p\in P'_R} \frac{\beta_p}{\beta_0(p)} \varphi^+_{\theta(p)}(e_p-\mu\theta(p)) - \sum_{p\in P'_J} \frac{\beta_p}{\beta_0(p)} \sum_{\eta\in D(e_p)} \varkappa(p,\eta)\varphi^+_{-\eta}(e_p+\mu\eta). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (3.36) и (3.34), следует:

$$(u_t)^+_h(x,t) = \lim_{\mu\to 0+} \frac{u_t(x+\mu h,t)-u_t(x,t)}{\mu} = -\sum_{p\in P''} \beta_p\varphi''(e_p) + \sum_{p\in P'_R} \beta_p\varphi''(e_p) - \sum_{p\in P'_J} \beta_p \lim_{\mu\to 0+} \ell(p,\mu),$$

где

$$\begin{aligned} \ell(p,\mu) &= \frac{1}{\mu}\Big[\sum_{\eta\in D(e_p)} \varkappa(p,\eta)\varphi^+_{-\eta}(e_p+\mu\eta) - \varphi^+_{\theta(p)}(e_p)\Big] = -\frac{1}{\mu}\Big[\sum_{\eta\in D(e_p)} \varkappa(p,\eta)\varphi^+_{\eta}(e_p+\mu\eta) + \varphi^+_{\theta(p)}(e_p)\Big] \\ &\overset{(3.32)}{=} -\frac{1}{\mu}\Big[\Big(\frac{2}{|D(e_p)|}-1\Big)\varphi^+_{\theta(p)}(e_p+\mu\theta(p)) + \frac{2}{|D(e_p)|} \sum_{\eta\in D(e_p)\setminus\{\theta(p)\}} \varphi^+_\eta(e_p+\mu\eta) + \varphi^+_{\theta(p)}(e_p)\Big] \\ &= -\frac{1}{\mu}\Big[\frac{2}{|D(e_p)|} \sum_{\eta\in D(e_p)} \varphi^+_\eta(e_p+\mu\eta) + \varphi^+_{\theta(p)}(e_p) - \varphi^+_{\theta(p)}(e_p+\mu\theta(p))\Big] \\ &\overset{(1.4)}{=} \frac{1}{\mu}\Big[\varphi^+_{\theta(p)}(e_p+\mu\theta(p)) - \varphi^+_{\theta(p)}(e_p)\Big] - \frac{2}{|D(e_p)|} \sum_{\eta\in D(e_p)} \frac{1}{\mu}\Big[\varphi^+_\eta(e_p+\mu\eta) - \varphi^+_\eta(e_p)\Big] \end{aligned}$$

и, в силу чего,

$$\ell(p,\mu) \underset{\mu\to 0+}{\longrightarrow} \varphi''(e_p) - 2\varphi''(e_p) = -\varphi''(e_p). \tag{3.42}$$

Таким образом,

$$(u_t)^+_h(x,t) = -\sum_{p\in P''} \beta_p\varphi''(e_p) + \sum_{p\in P'} \beta_p\varphi''(e_p). \tag{3.43}$$

Поскольку

$$P''(x,t,h_\gamma) = P'(x,t,-h_\gamma) \text{ и } P'(x,t,h_\gamma) = P''(x,t,-h_\gamma) \text{ при } x\in\gamma \text{ и } t>0, \tag{3.44}$$

то из (3.43) следует $(u_t)^+_{-h_\gamma}(x,t) = -(u_t)^+_{h_\gamma}(x,t)$, что в итоге, вместе с (3.43), означает, что

$$\Big(u_{tx}\big|_{\gamma\times(0;+\infty)}\Big)(x,t) = -\sum_{p\in P''(x,t,h_\gamma)} \beta_p\varphi''(e_p) + \sum_{p\in P'(x,t,h_\gamma)} \beta_p\varphi''(e_p) = \sum_{p\in P(x,t)} s_p\beta_p\varphi''(e_p), \tag{3.45}$$

где $s_p = -1$, если $p \in P''$, и $s_p = 1$, если $p \in P'$.

Теперь найдем выражение для u_{xt}. Так же, как из (3.43) было получено (3.45), из (3.12) ввиду $|D(x)|=2$ следует, что

$$u_x(x,t)=-\sum_{p\in P(x,t)} s_p\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p),\quad x\in R(\Gamma),\quad t>0, \tag{3.46}$$

где подразумевается, что $h=h_\gamma$. Из (3.46) в силу (3.16) и (3.17) и с учетом (3.26) и (3.27) получаем импликации

$$\tau<0\ \Rightarrow\ u_x(x,t+\tau)=-\sum_{p\in P(x,t)} s_p\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p-\tau\theta(p)),$$

и

$$\tau>0\ \Rightarrow\ u_x(x,t+\tau)=-\sum_{p\in P_R} s_p\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p-\tau\theta(p))-\sum_{p\in P_J} s_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varphi^+_{-\eta}(e_p+\tau\eta),$$

в силу первой из которых $(u_x)^-_t(x,t)$ совпадает с правой частью (3.45) (что получается сразу же), а в силу второй —

$$(u_x)^+_t(x,t)=\sum_{p\in P_R} s_p\beta_p\varphi''(e_p)-\sum_{p\in P_J} s_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\lim_{\tau\to0+}\ell(p,\tau)$$

$$\overset{(3.42)}{=}\sum_{p\in P_R} s_p\beta_p\varphi''(e_p)+\sum_{p\in P_J} s_p\beta_p\varphi''(e_p)=\sum_{p\in P(x,t)} s_p\beta_p\varphi''(e_p),$$

что тоже совпадает с правой частью (3.45). Равенство (3.15) доказано.

Осталось доказать (3.14). Фиксируя ребро γ, $x\in\gamma$, $h\in D(x)$ и $t>0$, имеем:

$$u_{tx}(x+\mu h,t+\tau)=\sum_{q\in P(x+\mu h,t+\tau)} s_q\beta_q\varphi''(e_q), \tag{3.47}$$

где $s_q=-1$, если $q\in P''(x+\mu h,t+\tau,h)$, и $s_q=1$, если $q\in P'(x+\mu h,t+\tau,h)$. При этом, если $(p;q)\in\alpha_{\mu,\tau}$, то $q\in P'(x+\mu h,t+\tau,h)\ \Rightarrow\ p\in P'(x,t,h)$ и $q\in P''(x+\mu h,t+\tau,h)$ $\Rightarrow\ p\in P''(x,t,h)$, и значит, $(p;q)\in\alpha_{\mu,\tau}\Rightarrow s_q=s_p$. Таким образом, к функции (3.47) применима лемма 3.7, и значит, u_{tx} непрерывна на $\gamma\times(0;+\infty)$ для любого ребра γ.

Пусть теперь γ — ребро Γ, $x\in\partial\gamma$, h допусти́м в точке x относительно $\overline{\gamma}$, $t>0$. При достаточно малых $\mu>0$ выполнено $x+\mu h\in R(\Gamma)$, и значит,

$$u_{tx}(x+\mu h,t+\tau)\overset{(3.47)}{=}\sum_{q\in P'(x+\mu h,t+\tau,h_\gamma)}\beta_q\varphi''(e_q)-\sum_{p\in P''(x+\mu h,t+\tau,h_\gamma)}\beta_q\varphi''(e_q). \tag{3.48}$$

Пусть пока $h=h_\gamma$. Обозначим через ℓ_j предел $u_{tx}(x+\mu h,t+\tau)$ при $(\mu;\tau)\to(0;0)$ по множеству A_j, $j=\overline{2,5}$. Тогда в силу (3.48)

$$\ell_3=\lim_{\mu\to0+}u_{tx}(x+\mu h,t)=\lim_{\mu\to0+}\Bigg(\sum_{q\in P'(x+\mu h,t,h)}\beta_q\varphi''(e_q)-\sum_{p\in P''(x+\mu h,t,h)}\beta_q\varphi''(e_q)\Bigg). \tag{3.49}$$

Если $0<\mu<\zeta$, то с учетом (3.19) имеем: 1) ломаные из $P'(x+\mu h,t,h)$ есть положительные μ-сдвиги ломаных из $P'(x,t,h)$, то есть

$$P'(x+\mu h,t,h)=\left\{m^+(p,\mu)\,\middle|\,p\in P'_R\right\}\cup\left\{m^+(p,\mu,\eta)\,\middle|\,p\in P'_J,\eta\in D(e_p)\right\}, \tag{3.50}$$

2) ломаные из $P''(x+\mu h,t,h)$ есть отрицательные μ-сдвиги ломаных из $P(x,t)$ в направлении вектора h:

$$P''(x+\mu h,t,h)=\big\{m^-(p,\mu,h)\,\big|\,p\in P(x,t)\big\}. \tag{3.51}$$

На основании (3.50) и (3.51) из (3.49) и (3.25) получаем:

$$\begin{aligned}
\ell_3=\lim_{\mu\to0+}\Big(\sum_{p\in P'_R}\beta_{m^+(p,\mu)}\varphi''(e_{m^+(p,\mu)})+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_{m^+(p,\mu,\eta)}\varphi''(e_{m^+(p,\mu,\eta)})\\
-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_{m^-(p,\mu,\eta)}\varphi''(e_{m^-(p,\mu,\eta)})\Big)\overset{(3.30),(3.31),(3.29)}{=}\lim_{\mu\to0+}\Big(\sum_{p\in P'_R}\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}\varphi''(e_p-\mu\theta(p))\\
+\sum_{p\in P'_J}\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varphi''(e_p+\mu\eta)-\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\beta_p\varkappa(-p,h)}{\beta_0(p)}\varphi''(e_p+\mu\theta(p))\Big)\\
\overset{(3.35),(3.33)}{=}\frac{|D(x)|}{2}\Big(\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''(e_p)-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''(e_p)\Big)\\
=\frac{|D(x)|}{2}\Big(\sum_{p\in P'}\beta_p(1-\varkappa(-p,h))\varphi''(e_p)-\sum_{p\in P''}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''(e_p)\Big)\\
\overset{(3.37)}{=}\frac{|D(x)|}{2}\Big(\Big(2-\frac{2}{|D(x)|}\Big)\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''(e_p)-\frac{2}{|D(x)|}\sum_{p\in P''}\beta_p\varphi''(e_p)\Big),
\end{aligned}$$

то есть

$$\ell_3=(|D(x)|-1)\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''(e_p)-\sum_{p\in P''}\beta_p\varphi''(e_p). \tag{3.52}$$

Если $(\mu;\tau)\in A_2$, то с учетом (3.21) имеем: $P'(x+\mu h,t+\tau,h)=\big\{m^+(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\,p\in P'\big\}$ и $P''(x+\mu h,t+\tau,h)=\big\{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)\,\big|\,p\in P(x,t)\big\}$. Поэтому из (3.48) и (3.51) получаем, что ℓ_2 есть предел при $A_2\ni(\mu;\tau)\to(0;0)$ выражения:

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in P'}\beta_{m^+(\pi(p,\tau),\mu)}\varphi''(e_{m^+(\pi(p,\tau),\mu)})-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)}\varphi''(e_{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)})\\
\overset{(3.29),(3.30)}{=}\sum_{p\in P'}\frac{\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau)}-\mu\theta(\pi(p,\tau)))\\
-\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\beta_{\pi(p,\tau)}\varkappa(-\pi(p,\tau),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau)}+\mu\theta(\pi(p,\tau)))\\
\overset{(3.35),(3.26)}{=}\frac{|D(x)|}{2}\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''((e_p-\tau\theta(p))-\mu\theta(p))-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''((e_p-\tau\theta(p))+\mu\theta(p))\\
\underset{A_2\ni(\mu;\tau)\to(0;0)}{\longrightarrow}\frac{|D(x)|}{2}\Big(\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''(e_p)-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''(e_p)\Big),
\end{aligned}$$

что, как и выше, равно правой части (3.52). То есть $\ell_2=\ell_3$.

Если $(\mu;\tau)\in A_5$, то с учетом (3.23) имеем:

$$P'(x+\mu h,t+\tau,h)=\big\{m^+(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\,p\in P'_R\big\}\cup\big\{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu)\,\big|\,p\in P'_J,\eta\in D(e_p)\big\}$$

и

$$P''(x+\mu h,t+\tau,h)=\big\{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)\,\big|\,p\in P_R\big\}\cup\big\{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu,h)\,\big|\,p\in P_J,\eta\in D(e_p)\big\}.$$

И тогда из (3.48) и (3.51) следует, что

$$u_{tx}(x+\mu h,t+\tau)=\sum_{p\in P'_R}\beta_{m^+(\pi(p,\tau),\mu)}\varphi''(e_{m^+(\pi(p,\tau),\mu)})+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu)}\varphi''(e_{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu)})$$

$$-\sum_{p\in P_R}\beta_{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)}\varphi''(e_{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)})-\sum_{p\in P_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu,h)}\varphi''(e_{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu,h)})$$

$$\overset{(3.29),(3.30)}{=}\sum_{p\in P'_R}\frac{\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau)}-\mu\theta(\pi(p,\tau)))$$

$$+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau,\eta)}-\mu\theta(\pi(p,\tau,\eta)))$$

$$-\sum_{p\in P_R}\frac{\beta_{\pi(p,\tau)}\varkappa(-\pi(p,\tau),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau)}+\mu\theta(\pi(p,\tau)))$$

$$-\sum_{p\in P_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}\varkappa(-\pi(p,\tau,\eta),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau,\eta)}+\mu\theta(\pi(p,\tau,\eta)))$$

$$\overset{(3.35),(3.26),(3.27),(3.37)}{=}\frac{|D(x)|}{2}\Big(\sum_{p\in P'_R}\beta_p\varphi''((e_p-\tau\theta(p))-\mu\theta(p))$$

$$+\sum_{p\in P'_J}\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varphi''((e_p+\tau\eta)-\mu\cdot(-\eta))-\sum_{p\in P_R}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''((e_p-\tau\theta(p))+\mu\theta(p))$$

$$-\sum_{p\in P_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_p\varkappa(-p,h)\varkappa(p,\eta)\varphi''((e_p+\tau\eta)+\mu\cdot(-\eta))\Big).$$

Переходя здесь к пределу и учитывая (3.33), получим для ℓ_5 выражение, совпадающее с финальным выражением для ℓ_2. Значит, и $\ell_5=\ell_3$.

Пусть, наконец, $(\mu;\tau)\in A_4$. Тогда в силу (3.24) имеем: $P'(x+\mu h,t+\tau,h)=\big\{\pi(r,\tau)\,\big|\,r\in P'(x+\mu h,t,h)\big\}$ и $P''(x+\mu h,t+\tau,h)=\big\{\pi(r,\tau)\,\big|\,r\in P''(x+\mu h,t,h)\big\}$. Поэтому при $(\mu;\tau)\in A_4$ из (3.48) и (3.25), и при последующем учете (3.50) и (3.51), следует, что

$$u_{tx}(x+\mu h,t+\tau)=\sum_{r\in P'(x+\mu h,t,h)}\beta_{\pi(r,\tau)}\varphi''(e_{\pi(r,\tau)})-\sum_{r\in P''(x+\mu h,t,h)}\beta_{\pi(r,\tau)}\varphi''(e_{\pi(r,\tau)})$$

$$\overset{(3.26)}{=}\sum_{r\in P'(x+\mu h,t,h)}\beta_r\varphi''(e_r-\tau\theta(r))-\sum_{r\in P''(x+\mu h,t,h)}\beta_r\varphi''(e_r-\tau\theta(r))$$

$$\overset{(3.50),(3.51),(3.25)}{=}\sum_{p\in P'_R}\beta_{m^+(p,\mu)}\varphi''(e_{m^+(p,\mu)}-\tau\theta(m^+(p,\mu)))$$

$$+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_{m^+(p,\mu,\eta)}\varphi''(e_{m^+(p,\mu,\eta)}-\tau\theta(m^+(p,\mu,\eta)))$$

$$-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_{m^-(p,\mu,h)}\varphi''(e_{m^-(p,\mu,h)}-\tau\theta(m^-(p,\mu,h)))$$

$$\overset{(3.29),(3.31),(3.30)}{=}\sum_{p\in P'_R}\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}\varphi''((e_p-\mu\theta(p))-\tau\theta(p))$$

$$+\sum_{p\in P'_J}\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varphi''((e_p+\mu\eta)-\tau\cdot(-\eta))-\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\beta_p\varkappa(-p,h)}{\beta_0(p)}\varphi''((e_p+\mu\theta(p))-\tau\theta(p)).$$

Переходя здесь к пределу и учитывая (3.35) и (3.33), получим, что $\ell_4=\ell_3$.

Итак, доказано, что если $h = h_\gamma$, то предел $u_{tx}(x + \mu h, t + \tau)$ при $(\mu; \tau) \to (0; 0)$ равен ℓ_3. В случае, когда $h = -h_\gamma$, в силу (3.44) (с заменой x на $x + \mu h$ и t на $t + \tau$) получается, что предел $u_{tx}(x + \mu h, t + \tau)$ при $(\mu; \tau) \to (0; 0)$ равен $-\ell_3$. Применив лемму 3.7, получим из (3.52), что ℓ_3 есть функция непрерывная по t на $(0; +\infty)$, в силу чего получается, что u_{tx} непрерывно доопределяема на $(\partial\gamma) \times (0; +\infty)$.

Для завершения доказательства справедливости (3.14) остается доказать непрерывную доопределяемость u_{tx} в точках $\overline{\gamma} \times \{0\}$. Это доказательство осуществляется так же, как и доказательство непрерывности u_{xx} в точках $\overline{\gamma} \times \{0\}$ — см. абзац, содержащий утверждение (3.41). Действительно, если в условиях и обозначениях этого абзаца рассмотреть функцию $z_1(\nu, \rho) = u_{tx}(x + \nu h, \rho)$, то установим следующее. Первое, в случае $x \in \gamma \vee (x \in \partial\gamma \wedge \nu \geqslant \rho)$ вместо (3.41) получим

$$z_1(\nu, \rho) = \frac{1}{2}\big[\varphi''(x + \nu h + \rho h) - \varphi''(x + \nu h - \rho h)\big] \to 0.$$

Второе, в случае $x \in \partial\gamma \wedge 0 < \nu < \rho$ ввиду $P'(x + \nu h, \rho, h) = \{\widetilde{q}\}$ и $P''(x + \nu h, \rho, h) = \big\{m^-(r, \nu, h) \,\big|\, r \in P(x, \rho)\big\}$ получим для $z_1(\nu, \rho)$ ту же цепочку равенств, что и для $z_0(\nu, \rho)$, только с минусом перед последним слагаемым в каждом из выражений этой цепочки. Это приводит к стремлению $z_1(\nu, \rho)$ к 0 при $(\nu; \rho) \to (0; 0)$ и в этом случае. Наконец, третье. Если $x \in \partial\gamma$ и $\nu = 0$, то $P'(x, \rho, h) = \{h\}$, тогда применение (3.52) дает:

$$\begin{aligned} z_1(\nu, \rho) = z_1(0, \rho) &= (|D(x)| - 1) \sum_{r \in P'(x,\rho,h)} \beta_r \varphi''(e_r) - \sum_{r \in P''(x,\rho,h)} \beta_r \varphi''(e_r) \\ &= \frac{|D(x)| - 1}{|D(x)|} \varphi''(x + \rho h) - \frac{1}{|D(x)|} \sum_{\eta \in D(x) \setminus \{h\}} \varphi''(x + \rho\eta) \underset{\rho \to 0+}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, предел u_{tx} в точках $\overline{\gamma} \times \{0\}$ равен 0, что и завершает доказательство утверждения (3.14).

Теорема 3.1 доказана.

4. Случай ненулевого среднего от φ

Рассматривая φ в задаче (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) как параметр, обозначим решение этой задачи через $u(\,\cdot\,, \,\cdot\,; \varphi)$. Ниже $\langle \xi \rangle$ для $\xi \in C(\Gamma)$ обозначает среднее от ξ по Γ.

Теорема 4.1. *Пусть* $\partial\Gamma = \varnothing$. *Тогда*

$$u(x, t; \varphi) = \langle \varphi \rangle - \frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma \widetilde{g}(x, t, s, \sigma) \varphi''(s)\, ds\, d\sigma = \langle \varphi \rangle + [\mathcal{C}(t)\varphi]\,(x). \tag{4.1}$$

Доказательство. Если $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ и $\varphi \equiv \varphi_0$, то непосредственно проверяется, что $u(\,\cdot\,, \,\cdot\,; \varphi) \equiv \varphi_0$. Поэтому применение теоремы 3.1 при учете равенства $u(\,\cdot\,, \,\cdot\,; \varphi) = u(\,\cdot\,, \,\cdot\,; \varphi - \langle \varphi \rangle) + u(\,\cdot\,, \,\cdot\,; \langle \varphi \rangle)$ и того, что $\langle \varphi - \langle \varphi \rangle \rangle = 0$, дает (4.1). □

5. Об обобщенной функции Грина в формуле решения

Начнем с тавтологии: функция φ при нулевом своем среднем на Γ есть решение задачи

$$\left\{ \begin{aligned} &-y''(x) = f(x), \quad x \in R(\Gamma), \\ &\sum_{h \in D(x)} y_h^+(x) = 0, \quad x \in J, \end{aligned} \right. \tag{5.1}$$

при $f = -\varphi''$. В то же время, любая φ (с необязательно нулевым средним) представима в виде суммы функции с нулевым средним и константы: $\varphi = (\varphi - \langle\varphi\rangle) + \langle\varphi\rangle$, причем любая константа есть решение задачи (5.1) при $f \equiv 0$. Поэтому второе равенство в лемме 3.5 говорит о том, что функция G^*, определяемая формулой

$$G^*(x,s) = \frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_{\Gamma} H(x,s,\sigma)\,d\sigma,$$

есть обобщенная функция Грина задачи (5.1). Но тогда формула (3.1) может быть записана в виде, аналогичном (0.2):

$$u(x,t) = -\int\limits_{\Gamma} g^*(x,t,s)\varphi''(s)\,ds, \quad x \in \Gamma, \quad t \geqslant 0,$$

где $g^*(x,t,s) = [\mathcal{C}(t)G^*(\,\cdot\,,s)]\,(x)$.

References

[1] В. Л. Прядиев, “Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения”, *Современная математика и ее приложения*, **38**:3 (2006), 82–94; англ. пер.:V. L. Pryadiev, “Description of solutions to the initial-boundary-value problem for a wave equation on a one-dimensional spatial network in terms of the Green function of the corresponding boundary-value problem for an ordinary differential equation”, *J. of Math. Sci.*, **147**:1 (2007), 6470–6482.

[2] Ю. В. Покорный, И. Г. Карелина, “О функции Грина задачи Дирихле на графе”, *Доклады Академии наук СССР*, **318**:3 (1991), 542–544; англ. пер.:Yu. V. Pokornyĭ, I. G. Karelina, “On the Green function of the Dirichlet problem on a graph”, *Soviet Mathematics Doklady*, **43**:3 (1991), 732–734.

[3] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2004. [Yu. V. Pokornyi, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, S. A. Shabrov, *Differential Equations on Geometrical Graphs*, FIZMATLIT Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[4] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики. Т. I*, ГТТИ, М.-Л., 1933; нем. ориг.:R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik. V. I*, Julius Springer, Berlin, 1930.

[5] В. Л. Прядиев, “Один подход к описанию в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети”, *Спектральные и эволюционные проблемы*, Труды XV Крымской осенней математической школы-симпозиума (Севастополь, 17–29 сентября), Севастополь–Ласпи, 2005, 132–139. [V. L. Pryadiev, “One approach to the finite-form description of solutions of the wave equation on a spatial network”, *Spectral and Evolution Problems*, Proceeding of the Fifteenth Crimean Autumn Math. School – Symposium (Sevastopol, September 17–29), **15**, Sevastopol–Laspi, 2005, 132–139 (In Russian)].

[6] Н. В. Глотов, В. Л. Прядиев, “Описание решений волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе при условиях трансмиссии типа «жидкого» трения”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2006, № 2, 185–193. [N. V. Glotov, V. L. Pryadiev, “Opisanie resheniy volnovogo uravneniya na konechnom i ogranichennom geometricheskom grafe pri usloviyakh transmissii tipa “zhidkogo” treniya”, *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2006, № 2, 185–193 (In Russian)].

[7] Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, “Волновое уравнение на пространственной сети”, *Доклады РАН*, **388**:1 (2003), 16–18; англ. пер.:Yu. V. Pokornyi, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, “The wave equation on a spatial network”, *Doklady Mathematics*, **67**:1 (2003), 10–12.

[8] И. Г. Карелина, *Некоторые дифференциальные неравенства на графах*, дисс. … канд. физ.-мат. наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, 1992. [I. G. Karelina, *Some Differential Inequalities on Graphs*, Diss. … Cand. Sci. (Phys. and Mathematics), Voronezh State University, Voronezh, 1992 (In Russian)].

[9] В. Л. Прядиев, Л. Г. Фадеева, “Представление решения волнового уравнения на неограниченном геометрическом графе без граничных вершин”, *Сборник научных трудов*: *Совершенствование преподавания физико-математических и общетехнических дисциплин в педвузе и школе*, **4**, Борисоглеб. гос. пед. ин-т, Борисоглебск, 2007, 39–53. [V. L. Pryadiev, L. G. Fadeeva, “Representation of the Solution of the Wave Equation on an Unbounded Geometric Graph Without Boundary Vertices”, *Collection of Scientific Papers*: *Improving the Teaching of Physics, Mathematics, and General Technical Disciplines in Pedagogical Universities and Schools*, **4**, Borisoglebsk State Pedagogical Institute, Borisoglebsk, 2007, 39–53 (In Russian)].

[10] О. В. Коровина, *О некоторых свойствах решений волнового уравнения на геометрическом графе*, дисс. … канд. физ.-мат. наук, Белгородский государственный университет, Белгород, 2009. [O. V. Korovina, *On Some Properties of Solutions to the Wave Equation on a Geometric Graph*, Diss. … Cand. Sci. (Phys. and Mathematics), Belgorod State University, Belgorod, 2009 (In Russian)].

Информация об авторе

Прядиев Владимир Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и геометрии. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: pryad@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-8301-5674

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 16.08.2025 г.
Поступила после рецензирования 22.10.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the author

Vladimir L. Pryadiev, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functions Theory and Geometry Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: pryad@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-8301-5674

There is no conflict of interests.

Received 16.08.2025
Reviewed 22.10.2025
Accepted for press 21.11.2025