

## НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Родина Л.И., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-66-78>

УДК 517.938



## Об оценках характеристик сбора ресурса для стохастических структурированных популяций

**Людмила Ивановна РОДИНА**

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»  
119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

**Аннотация.** Рассматриваются модели структурированных популяций, состоящих из отдельных видов  $x_1, \dots, x_n$ , либо разделенных на  $n$  возрастных групп. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации динамика популяции задана системой дифференциальных уравнений  $\dot{x} = f(x)$ , а в фиксированные моменты времени из популяции добывают случайные доли ресурса каждого из видов. Предложен способ построения управления процессом сбора ресурса, при котором ограничивают величину извлекаемого ресурса для увеличения размера следующего сбора. Получены оценки характеристик сбора ресурса, таких как средняя временная выгода и общий доход с учетом дисконтирования, выполненные с вероятностью единица.

Предложены два метода для решения данной задачи. Первый из них можно применить для систем, обладающих свойством монотонности решений относительно начальных условий. Во втором методе нет ограничений на свойства системы, и состоит он в построении положительно инвариантных множеств, в которых находятся траектории системы при всех значениях случайных параметров. Используется понятие функции Ляпунова относительно множества, введенное Е. Л. Тонковым. Приведены примеры оценки рассматриваемых характеристик для моделей взаимодействия двух видов, таких как нейтрализм и конкуренция.

**Ключевые слова:** положительно инвариантные множества, функции Ляпунова, эксплуатируемая популяция, средняя временная выгода, доход с учетом дисконтирования

**Для цитирования:** Родина Л.И. Об оценках характеристик сбора ресурса для стохастических структурированных популяций // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 66–78. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-66-78>

## SCIENTIFIC ARTICLE

© L. I. Rodina, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-66-78>

## Estimates of harvesting characteristics for stochastic structured populations

**Lyudmila I. RODINA**

Vladimir State University

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

National University of Science and Technology “MISiS”

4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

**Abstract.** Models of structured populations consisting of individual species  $x_1, \dots, x_n$ , or divided into  $n$  age groups are considered. We assume that in the absence of exploitation, the dynamics of the population is given by a system of differential equations  $\dot{x} = f(x)$ , and at fixed moments of time, random fractions of the resource of each species are extracted from the population. A method is proposed for building control of the harvesting process, in which the amount of the extracted resource is limited in order to increase the size of the next collection. Estimates of the harvesting characteristics, such as the average time benefit and total income, including discounting, were obtained, performed with a probability of one.

Two methods are proposed to solve this problem. The first one can be applied to systems with the property of monotony of solutions with respect to initial conditions. In the second method, there are no restrictions on the properties of the system. It consists in constructing positively invariant sets in which the trajectories are located. The concept of Lyapunov functions with respect to a set, introduced by E. L. Tonkov, is used. Examples of estimation of the considered characteristics for models of interaction of two species, such as neutralism and competition, are given.

**Keywords:** positively invariant sets, Lyapunov functions, exploited population, average time benefit, income with discounting

**Mathematics Subject Classification:** 34A34, 34C05, 34C25.

**For citation:** Rodina L.I. Estimates of harvesting characteristics for stochastic structured populations. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 66–78. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-66-78>

Вопросам оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях посвящено множество работ, первые из которых [1, 2] относятся к семидесятым годам прошлого века. Продолжением данной тематики являются публикации по эксплуатации возобновляемого ресурса, в которых случайные изменения внешней среды влияют на размер популяции или коэффициенты рождаемости [3, 4]. Работы [3, 5] посвящены разработке моделей управления рыболовством, включающих экологическую и экономическую неопределенность, и задач ценового регулирования в условиях неопределенности. В [6] рассматриваются вопросы влияния случайных факторов внешней среды на оптимальное управление добычей рыбных ресурсов и проводится сравнение различных характеристик для вероятностных и детерминированных моделей. Отметим, что более подробный обзор литературы приведен в работе [4].

Данная статья продолжает исследования [7, 8], в которых описываются вопросы оптимального сбора ресурса из однородной стохастической популяции. Здесь мы рассматриваем модели динамики структурированной популяции, то есть популяции, состоящей из отдельных видов  $x_1, \dots, x_n$ , либо разделенной на  $n$  возрастных групп. При отсутствии эксплуатации развитие данной популяции задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}. \quad (0.1)$$

Здесь вектор-функция  $f$  и ее производные  $\partial f_i / \partial x_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) непрерывны для всех  $x \in \mathbb{R}_+^n$ . Предполагаем, что в моменты времени  $\tau(k) = kd$ ,  $d > 0$  можно добывать некоторую случайную долю ресурса  $\omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . В скобках будем обозначать параметры времени, а нижними индексами — пространственные параметры; так, через  $\omega_i(k)$  обозначается доля ресурса  $i$ -го вида, извлеченного из популяции в момент  $kd$ .

Пусть имеется возможность остановить процесс сбора в момент  $kd$ , если доли извлеченного ресурса нескольких видов окажутся достаточно большими — не меньше, чем заданные значения  $(u_1(k), \dots, u_n(k)) = u(k) \in [0, 1]^n$ . В этом случае доля добываемого ресурса может быть уменьшена до

$$\ell(k) = (\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad \text{где } \ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

за счет чего размер следующего сбора может быть увеличен. Таким образом, мы рассматриваем *эксплуатируемую популяцию*, динамика которой задана управляемой системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - \ell_i(k)) x_i(kd - 0), \end{aligned} \quad (0.2)$$

где  $x_i(kd - 0)$  и  $x_i(kd)$  — количество ресурса  $i$ -го вида до и после сбора в момент  $kd$  соответственно,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа.

Обозначим через  $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$  решение системы (0.1), удовлетворяющее начальному условию  $\varphi(0, x) = x$ . Будем считать, что данные решения являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях, то есть функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  удовлетворяют *условию квазиположительности* (см. [9, с. 34]), которое выглядит следующим образом:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (0.3)$$

для любых неотрицательных  $x_j$ ,  $j \neq i$ . Из равенств  $x_i(kd) = (1 - u_i(k)) x_i(kd - 0)$  в системе (0.2) следует, что решения данной системы при выполнении условия квазиположительности также неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях.

Приведем описание *вероятностной модели*, параметризующей управляемую систему (0.2). Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mu})$ , где  $\Omega \subseteq [0, 1]$ ,  $\tilde{\mathfrak{A}}$  — сигма-алгебра подмножеств  $\Omega$ , на которой определена вероятностная мера  $\tilde{\mu}$ . Рассмотрим множество последовательностей

$$\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega(1), \dots, \omega(k), \dots)\}, \text{ где } \omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n, \ k = 1, 2, \dots$$

Обозначим через  $\mathfrak{A}$  наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega(1) \in A(1), \dots, \omega(k) \in A(k)\}, \text{ где } A(j) \in \tilde{\mathfrak{A}}, \ j = 1, 2, \dots, k$$

и определим меру  $\tilde{\mu}(E_k) = \tilde{\mu}(A(1)) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(A(k))$ . Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова на измеримом пространстве  $(\Sigma, \mathfrak{A})$  существует единственная вероятностная мера  $\mu$ , которая является продолжением меры  $\tilde{\mu}$  на сигма-алгебру  $\mathfrak{A}$ .

Обозначим через  $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$  начальное количество ресурса,  $X_i(k) = x_i(kd - 0)$  — количество ресурса  $i$ -го вида до сбора в момент  $\tau(k) = kd$ ,  $C_i \geq 0$  — стоимость ресурса  $i$ -го вида,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент  $kd$  равна

$$Y(k) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) \ell_i(k).$$

Пусть также  $\bar{\ell} \doteq (\ell(1), \dots, \ell(k), \dots)$ . Будем рассматривать следующие характеристики сбора возобновляемого ресурса.

**О п р е д е л е н и е 0.1.** (см. [7, 10]). *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется характеристика

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) \ell_i(j). \quad (0.4)$$

Если в правой части (0.4) нижний предел заменить на верхний, то будем обозначать его  $H^*(\bar{\ell}, x(0))$ , и если  $H_*(\bar{\ell}, x(0)) = H^*(\bar{\ell}, x(0))$ , то общий предел обозначим  $H(\bar{\ell}, x(0))$ .

**О п р е д е л е н и е 0.2.** (см. [11]). *Суммарным доходом с учетом дисконтирования* называется характеристика

$$H_\alpha(\bar{\ell}, x(0)) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} Y(k) e^{-\alpha k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) \ell_i(k). \quad (0.5)$$

Значение показателя дисконтирования  $\alpha > 0$  указывает на то, что стоимость позднее получаемого дохода снижается.

Получены оценки характеристик (0.4) и (0.5), выполненные с вероятностью единица, для структурированной популяции в случае  $n > 1$ . Предложены два метода для решения данной задачи. Первый из них можно применить для систем, обладающих свойством монотонности решений относительно начальных условий. Во втором методе нет ограничений на свойства системы, и состоит он в построении положительно инвариантных множеств, в которых находятся траектории системы при всех значениях случайных параметров.

# 1. Оценка характеристик сбора ресурса для систем, обладающим свойством монотонности решений относительно начальных данных

Отметим сначала, что неравенство  $x \leq y$ , записанное для векторов  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , будем понимать, как неравенства  $x_i \leq y_i$ , выполненные для всех  $i = 1, \dots, n$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Множество  $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$  называется *положительно инвариантным относительно системы (0.1)*, если для любой начальной точки  $x(0) \in D$  траектория решения  $\varphi(t, x(0))$  содержится в  $D$  при  $t \geq 0$ .

Будем говорить, что для решений  $\varphi(t, x(0))$  системы (0.1) выполнено свойство монотонности относительно начальных данных на множестве  $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ , если множество  $D$  положительно инвариантно относительно данной системы и для любых  $x(0) \in D$ ,  $y(0) \in D$  таких, что  $x(0) \leq y(0)$ , неравенство  $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$  имеет место для любых  $t \geq 0$ . Условия, при которых справедливо свойство монотонности решений системы (0.1), получены в работе [12]. В ней, в частности, показано, что данное свойство выполнено для любой системы (0.1) размерности 1 (то есть для любого дифференциального уравнения). Приведем основное утверждение статьи [12] (такой же результат справедлив для системы дифференциальных уравнений, рассматриваемой на множестве  $\mathbb{R}^n$ ).

**Теорема 1.1.** Пусть выполнены следующие условия:

- 1) множество  $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$  положительно инвариантно относительно системы (0.1);
- 2) каждая из функций  $f_i$  является строго возрастающей на множестве  $D$  по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за возможным исключением переменной  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

- 3)  $x(0) \in D$ ,  $y(0) \in D$  и  $x(0) \leq y(0)$ .

Тогда  $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$  для всех  $t \geq 0$ .

**Следствие 1.1.** Предположим, что множество  $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$  является положительно инвариантным относительно системы (0.1) и  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$  для всех  $x \in D$ , либо  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$  для всех  $x \in D$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Тогда, если  $x(0) \in D$ ,  $y(0) \in D$  и  $x(0) \leq y(0)$ , то  $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$  для всех  $t \geq 0$ .

Вернемся к эксплуатируемой популяции, заданной системой (0.2). Обозначим через  $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$  и  $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$  количество ресурса до сбора и после сбора в момент  $\tau_k$  соответственно, тогда  $X(k+1) = \varphi(d, x(k))$  и  $x(k) = (1 - \ell(k))X(k)$ . Если  $\ell_i(k) = u_i$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ , то  $X(k)$  удовлетворяет системе разностных уравнений

$$X(k+1) = \varphi(d, (1-u)X(k)), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (1.1)$$

здесь  $(1-u)X(k) = ((1-u_1)X_1(k), \dots, (1-u_n)X_n(k))$ . Предположим, что отображение, соответствующее системе (1.1), имеет неподвижную точку  $S(u) = (S_1(u), \dots, S_n(u))$ , тогда  $S(u) = \varphi(d, (1-u)S(u))$ . Пусть  $s(u) \doteq (1-u)S(u)$ ; отметим, что  $s_i(u) = (1-u_i)S_i(u)$  и  $\varphi_i(d, s(u)) = S_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Рассмотрим случайные величины  $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots$  и обозначим через  $M\ell_i = M\ell_i(k)$  их математическое ожидание.

**Теорема 1.2.** Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.1,  $x(0) \in D$ ,  $s(u) \in D$  и  $x(0) \geq s(u)$ . Тогда для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  справедливо неравенство

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \geq \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) M \ell_i. \quad (1.2)$$

**Доказательство.** Напомним, что  $X_i(k)$  и  $x_i(k)$  — количество ресурса  $i$ -го вида до сбора и после сбора в момент  $kd$ ; тогда  $x_i(k) = (1 - \ell_i(k))X_i(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . В силу теоремы 1.1, если  $x_i(0) \geq s_i(u)$ , то  $X_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \geq \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Из неравенств  $\ell_i(k) \leq u_i$  получаем

$$x_i(1) = (1 - \ell_i(1))X_i(1) \geq (1 - u_i)X_i(1) \geq (1 - u_i)S_i(u) = s_i(u), \quad i = 1, \dots, n.$$

Далее,  $X_i(2) = \varphi_i(d, x(1)) \geq \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u)$ . Аналогично получаем, что  $X_i(k) \geq S_i(u)$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Поэтому

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) \ell_i(j) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) \ell_i(j). \quad (1.3)$$

Случайные величины  $\ell_i(1), \ell_i(2), \dots$  независимы, имеют одинаковое распределение и, так как  $0 \leq \ell_i(k) \leq 1$  для всех  $k = 1, 2, \dots$ , то  $M|\ell_i(k)| \leq 1 < \infty$ . Поэтому из усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова следует, что для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  и каждого  $i = 1, \dots, n$  выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ell_i(j) = M \ell_i. \quad (1.4)$$

Таким образом, нижний предел в правой части (1.3) равен пределу

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) \ell_i(j) = \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) M \ell_i. \quad (1.5)$$

Неравенство (1.2) теперь следует из (1.3) и (1.5).  $\square$

**З а м е ч а н и е 1.1.** Отметим, что если функция распределения  $F$  случайной величины  $\ell_i(k)$  абсолютно непрерывна, то ее математическое ожидание равно

$$M \ell_i(k) = \int_0^u t f(t) dt + u(1 - F(u)), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

где через  $f$  обозначена плотность данного распределения (см. [7]).

**П р и м е р 1.1.** Найдем оценку средней временной выгоды для модели взаимодействия двух видов типа нейтрализм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - c_1 x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - c_2 x_2^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные, стоимости ресурса данных видов равны  $C_1, C_2$ , и доли добываемого ресурса  $\omega_i(k)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ .

Для системы (1.7) выполнены условия теоремы 1.1 (множество  $D = \mathbb{R}_+^2$  положительно инвариантно относительно данной системы, так как для него справедливо условие квази-положительности (0.3)). Решением системы (1.7) является функция

$$\begin{aligned}\varphi(t, x(0)) &= (\varphi_1(t, x(0)), \varphi_2(t, x(0))), \text{ где} \\ \varphi_i(t, x(0)) &= \frac{a_i x_i(0) e^{a_i t}}{a_i + c_i x_i(0) (e^{a_i t} - 1)}, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Для заданных  $u = (u_1, u_2)$ ,  $d > 0$  найдем неподвижные точки  $S(u) = (S_1(u), S_2(u))$  системы (1.1) из равенства  $S(u) = \varphi(d, (1 - u)S(u))$ . Отметим, что при любом  $u \in [0, 1]^2$  существует нулевая неподвижная точка; при  $u_i < 1 - e^{-a_i d}$  система (1.7) имеет неподвижную точку  $S(u)$  с положительными координатами

$$S_i(u_i) = \frac{a_i((1 - u_i)e^{a_i d} - 1)}{c_i(1 - u_i)(e^{a_i d} - 1)}, \quad i = 1, 2;$$

также возможны случаи, когда одна из координат равна нулю, а другая больше нуля.

Найдем оценки характеристик сбора ресурса. Поскольку  $\omega_i(k)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ , то их плотность  $f(t) = 1$  при  $t \in [0, 1]$  и функция распределения  $F(t) = t$ ,  $t \in [0, 1]$ . Таким образом, из (1.6) получаем

$$M\ell_i = u_i - \frac{u_i^2}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, в силу теоремы 1.2, при  $u_i < 1 - e^{-a_i d}$ ,  $i = 1, 2$  имеем оценку средней временной выгоды

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \geq \sum_{i=1}^2 \frac{a_i C_i ((1 - u_i) e^{a_i d} - 1) (u_i - u_i^2/2)}{c_i (1 - u_i) (e^{a_i d} - 1)},$$

выполненную для почти всех  $\sigma \in \Sigma$ .

## 2. Оценка характеристик сбора ресурса методом построения положительно инвариантных множеств

Отметим, что свойство монотонности решений, рассмотренное в первом параграфе, справедливо не для всех систем дифференциальных уравнений. Здесь мы предлагаем рассмотреть способ оценки характеристик сбора ресурса методом построения положительно инвариантных множеств, при этом свойство монотонности решений не обязано быть выполненным. С этой целью мы используем понятие функции Ляпунова относительно множества, введенное Евгением Леонидовичем Тонковым в работах [13, 14], а также полученные им условия положительной инвариантности заданных множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Приведем необходимые определения и утверждения.

Пусть  $D$  — компактное подмножество  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{fr} D$  — граница  $D$ ;  $D^r = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, D) \leq r\}$ , где  $r > 0$ ,  $\rho(x, D) \doteq \min_{y \in D} \|x - y\|$  — расстояние от точки  $x \in \mathbb{R}^n$  до замкнутого множества  $D$  в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.1.** (см. [13]). Функция  $V : D^r \rightarrow \mathbb{R}$  называется *функцией Ляпунова* (относительно множества  $D$ ), если она локально липшицева,  $V(x) = 0$  для всех  $x \in \text{fr}D$  и  $V(x) > 0$  для всех  $x \in D^r \setminus D$ .

Обозначим через  $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)}$  производную функции  $V$  в силу автономной системы (0.1), тогда  $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x)$ . Приведенное ниже утверждение является следствием теоремы 1 работы [13] о положительной инвариантности заданного множества относительно дифференциального включения.

**Теорема 2.1.** *Предположим, что для некоторого  $r > 0$  существует локально липшицева функция Ляпунова  $V : D^r \rightarrow \mathbb{R}$ . Если для всех  $x \in D^r \setminus D$  выполнено неравенство  $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} \leq 0$ , то множество  $D$  положительно инвариантно относительно системы (0.1).*

Приведем условия существования положительно инвариантных множеств для модели эксплуатируемой популяции, заданной системой (0.2). Напомним, что через  $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$  мы обозначаем количеством ресурса до сбора в момент  $\tau_k$ . Пусть фиксировано  $u \in [0, 1]^n$ . Рассмотрим систему разностных уравнений, зависящих от случайных параметров:

$$X(k+1) = \varphi(d, (1 - \ell(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где  $X(1) \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\ell(k) = (\ell_1(k), \dots, \ell_n(k))$ ,  $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u\}$ . Будем искать положительно инвариантное множество относительно системы (2.1), которое является прямоугольником в  $\mathbb{R}_+^n$ , запишем его в виде

$$D = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \delta_i \leq x_i \leq \Delta_i, i = 1, \dots, n\}, \quad \text{где } 0 < \delta_i < \Delta_i. \quad (2.2)$$

Отметим, что прямоугольник  $D$  можно представить в виде пересечения двух множеств:

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq \Delta_i, i = 1, \dots, n\}, \quad D_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \geq \delta_i, i = 1, \dots, n\}.$$

**Теорема 2.2.** *Пусть задано  $u \in [0, 1]^n$  и выполнены следующие условия:*

- 1)  $f_i(x) \leq 0$  при  $x_i \geq \Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;
- 2) если  $x \in \text{fr}D_2 \cap D$ , то  $\varphi(d, (1 - u)x) \in D_2$ .

*Тогда прямоугольник  $D$  является положительно инвариантным множеством относительно системы (2.1).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Определим отображение  $F$ , ставящее в соответствие каждой точке  $x \in \mathbb{R}_+^n$  точку  $y \in \mathbb{R}_+^n$ , такую, что  $y = \varphi(d, x)$ . Покажем, что прямоугольник (2.2) является положительно инвариантным относительно системы (2.1), если множество  $D_1$  положительно инвариантно относительно системы (0.1) и  $F((1 - u)D_2) \subseteq D_2$ . Действительно, пусть  $X(k) \in D_1$ , тогда  $(1 - \ell(k))X(k) \in D_1$  и из положительной инвариантности  $D_1$  относительно (0.1) получаем, что

$$X(k+1) = \varphi((1 - \ell(k))X(k)) \in D_1.$$

Далее, из неравенств  $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\} \leq u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  следует включение

$$(1 - \ell(k))D_2 \subseteq (1 - u)D_2,$$

поэтому, если  $X(k) \in D_2$ , то

$$X(k+1) = \varphi((1 - \ell(k))X(k)) \in F((1 - \ell(k))D_2) \subseteq F((1 - u)D_2) \subseteq D_2.$$

Таким образом, если  $X(k) \in D$ , то  $X(k+1) \in D_1 \cap D_2 = D$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Покажем, что если выполнено первое условие теоремы, то прямоугольник  $D_1$  положительно инвариантен относительно системы (0.1). Представим множество  $D_1$  в виде  $D_1 = \bigcap_{i=1}^n E_i$ , где  $E_i = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq \Delta_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Выберем следующую функцию Ляпунова относительно множества  $E_i$ :  $V(x) = x_i - \Delta_i$ , тогда

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \dot{x}_i = f_i(x).$$

В силу теоремы 2.1, если  $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} = f_i(x) \leq 0$  при  $x_i \geq \Delta_i$ , то множество  $E_i$  положительно инвариантно относительно системы (0.1). Таким образом, если имеет место первое условие, то положительно инвариантным является каждое из множеств  $E_1, \dots, E_n$  и, следовательно, множество  $D_1 = \bigcap_{i=1}^n E_i$ .

Второе условие теоремы означает, что включение  $F((1 - u)D_2) \subseteq D_2$  достаточно проверить для множества  $\text{fr} D_2 \cap D$ .  $\square$

Для доказательства следующих утверждений применяется теорема 2.2 и усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

**Теорема 2.3.** Пусть при  $u \in [0, 1]^n$  решения системы (2.1) удовлетворяют неравенствам

$$X_i(k) \in [\delta_i, \Delta_i], \quad \text{где } i = 1, \dots, n, \quad k \geq k_0 \geq 1. \quad (2.3)$$

Тогда для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i M \ell_i \leq H_*(\bar{\ell}, x(0)) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M \ell_i. \quad (2.4)$$

**Доказательство.** При доказательстве теоремы 1.2 показано, что случайные величины  $\ell_i(1), \ell_i(2), \dots$  удовлетворяют усиленному закону больших чисел А. Н. Колмогорова, поэтому для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  и каждого  $i = 1, \dots, n$  выполнено равенство (1.4). Из условия (2.3) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i \ell_i(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) \ell_i(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i \ell_i(k), \quad k \geq k_0 \geq 1. \quad (2.5)$$

Переходя к пределу среднего арифметического в (2.5), из определения средней временной выгоды и (1.4) получаем неравенство (2.4).  $\square$

Предположим, что в разных опытах появились различные случайные последовательности

$$\sigma^p \doteq \{\omega^p(1), \dots, \omega^p(k), \dots\},$$

также определим  $\bar{\ell}^p \doteq (\ell^p(1), \dots, \ell^p(k), \dots)$ , где  $p = 1, 2, \dots$ . Для каждой последовательности  $\bar{\ell}^p$  реализуется свое значение суммарного дохода, которое равно

$$H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C_i X_i^p(k) \ell_i^p(k), \quad p = 1, 2, \dots$$

**Теорема 2.4.** Пусть при  $u \in [0, 1]^n$  выполнены условия

$$X_i^p(k) \in [\delta_i, \Delta_i], \quad i = 1, \dots, n, \quad p = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Тогда для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  справедлива оценка

$$(e^\alpha - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n C_i \delta_i M \ell_i \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \leq (e^\alpha - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M \ell_i. \quad (2.7)$$

**Доказательство.** Из (2.6) получаем неравенства

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i \ell_i^p(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i X_i^p(k) \ell_i^p(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i \ell_i^p(k), \quad p = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

В силу закона больших чисел А. Н. Колмогорова  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \ell_i^p(k) = M \ell_i$  для почти всех  $\sigma \in \Sigma$ , поэтому из (2.8) следует

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i M \ell_i \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \sum_{i=1}^n C_i X_i^p(k) \ell_i^p(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M \ell_i.$$

Умножая последнее неравенство на  $e^{-\alpha k}$  и суммируя по всем  $k = 1, 2, \dots$ , получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C_i \delta_i M \ell_i \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M \ell_i.$$

Отсюда, с учетом равенства  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} = (e^\alpha - 1)^{-1}$ , следует (2.7).  $\square$

Приведем также утверждение для оценки суммарного дохода с учетом дисконтирования в случае, когда система (0.1) обладает свойством монотонности решений относительно начальных данных.

**Теорема 2.5.** Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.1,  $x(0) \in D$ ,  $s(u) \in D$  и  $x(0) \geq s(u)$ . Тогда для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  справедливо неравенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \geq (e^\alpha - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) M \ell_i.$$

**Доказательство.** Так же, как при доказательстве теоремы 1.2, получаем, что

$$X_i^p(k) \geq S_i(u) \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots, \quad p = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь утверждение теоремы следует из неравенства (2.7).  $\square$

**Пример 2.1.** Модели взаимодействия двух видов в классификации Е. Одума подробно описаны в книге Г.Ю. Ризниченко [15, с. 143–157]. В соответствии с гипотезой В. Вольтерра о взаимодействии экологических сообществ, модель конкуренции задается системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь  $x_1, x_2$  — численности видов,  $c$  — постоянная собственной скорости роста видов,  $a$  — постоянная взаимодействия видов или межвидовой конкуренции,  $b$  — постоянная внутривидовой конкуренции. Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и  $a > b$ .

Пусть задано  $u \in [0, 1]^2$ ; доли добываемого ресурса  $\omega_i(k)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ . Найдем оценки средней временной выгоды и суммарного дохода с учетом дисконтирования для системы (2.9), выполненные с вероятностью единица.

Отметим, что система (2.9) на множестве  $D = \mathbb{R}_+^2$  может не обладать свойством монотонности решений относительно начальных данных (см. следствие 1.1). Поэтому будем искать оценки характеристик сбора ресурса методом положительно инвариантных множеств. Проверим, при каких  $\Delta_1, \Delta_2$  имеет место первое условие теоремы 2.2. В силу симметрии уравнений системы можно считать, что  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ . Тогда

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (c - ax_1 - bx_2)x_1 \leq (c - ax_1)x_1 \leq 0, \\ f_2(x) &= (c - ax_2 - bx_1)x_2 \leq (c - ax_2)x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

при  $x_1 \geq \Delta$ ,  $x_2 \geq \Delta$ , где  $\Delta = \frac{c}{a}$ . Таким образом, множество

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \leq \Delta, x_2 \leq \Delta\}, \text{ где } \Delta = \frac{c}{a}$$

положительно инвариантно относительно системы (2.9).

Теперь для каждого  $u \in [0, 1]^2$  нужно найти значения  $\delta_1, \delta_2$ , при которых выполняется второе условие теоремы 2.2. Отметим, что если  $x = (x_1, x_2)$  содержится в положительно инвариантном множестве  $D_1$ , то

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (c - ax_1 - bx_2)x_1 \geq (c(1 - b/a) - ax_1)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (c - ax_2 - bx_1)x_2 \geq (c(1 - b/a) - ax_2)x_2. \end{aligned}$$

В силу теоремы Чаплыгина, для решения системы (2.9) при

$$x \in D_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \geq \delta_1, x_2 \geq \delta_2\}$$

выполнены неравенства

$$\varphi_i(d, (1 - u)x) \geq \frac{c_0(1 - u_i)\delta_i e^{c_0 d}}{c_0 + a(1 - u_i)\delta_i(e^{c_0 d} - 1)}, \quad i = 1, 2,$$

где  $c_0 = c(1 - b/a) > 0$ . Из условия  $\varphi(d, (1 - u)x) \in D_2$  получаем

$$\delta_i = \frac{c_0(e^{c_0 d} - 1 - e^{c_0 d} u_i)}{a(1 - u_i)(e^{c_0 d} - 1)} > 0, \text{ если } u_i < 1 - e^{-c_0 d} \quad (2.10)$$

и  $\delta_i = 0$ , если  $u_i \geq 1 - e^{-c_0 d}$ ,  $i = 1, 2$ .

Найдем оценки характеристик сбора ресурса. Поскольку  $\omega_i(k)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  имеют равномерное распределение на отрезке  $[0, 1]$ , то их плотность  $f(t) = 1$  при  $t \in [0, 1]$  и функция распределения  $F(t) = t$ ,  $t \in [0, 1]$ . Таким образом, из (1.6) следует, что

$$M\ell_i = u_i - \frac{u_i^2}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть  $\delta_1, \delta_2$  заданы (2.10), тогда из (2.4) следуют неравенства для средней временной выгоды

$$\sum_{i=1}^2 C_i \delta_i \left( u_i - \frac{u_i^2}{2} \right) \leq H_*(\bar{\ell}, x(0)) \leq \frac{c}{a} \sum_{i=1}^2 C_i \left( u_i - \frac{u_i^2}{2} \right),$$

выполненные для почти всех  $\sigma \in \Sigma$ . Далее, в силу (2.7) для почти всех  $\sigma \in \Sigma$  имеют место следующие оценки суммарного дохода:

$$(e^\alpha - 1)^{-1} \sum_{i=1}^2 C_i \delta_i \left( u_i - \frac{u_i^2}{2} \right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \leq (e^\alpha - 1)^{-1} \frac{c}{a} \sum_{i=1}^2 C_i \left( u_i - \frac{u_i^2}{2} \right),$$

где  $\alpha > 0$  — показатель дисконтирования,  $u_i < 1 - e^{-c_0 d}$ ,  $i = 1, 2$ .

Отметим, что если  $u_i \geq 1 - e^{-c_0 d}$ ,  $i = 1, 2$ , то справедливы только следующие оценки сверху:

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \leq \frac{c}{a} \sum_{i=1}^2 C_i \left( u_i - \frac{u_i^2}{2} \right),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \leq (e^\alpha - 1)^{-1} \frac{c}{a} \sum_{i=1}^2 C_i \left( u_i - \frac{u_i^2}{2} \right).$$

Таким образом, при «больших» величинах управлений  $u_i \geq 1 - e^{-c_0 d}$ ,  $i = 1, 2$ , нельзя гарантировать, что характеристики сбора ресурса положительные.

## References

- [1] W. J. Reed, “The steady state of a stochastic harvesting model”, *Mathematical Biosciences*, **41**:3-4 (1978), 273–307.
- [2] A. Gkait, “Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth”, *Mathematical Biosciences*, **41**:1-2 (1978), 111–123.
- [3] L. G. Hansen, F. Jensen, “Regulating fisheries under uncertainty”, *Resource and Energy Economics*, **50** (2017), 164–177.
- [4] F. Jensen, H. Frost, J. Abildtrup, “Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information”, *Marine Policy*, **81** (2017), 167–178.
- [5] M. L. Weitzman, “Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks”, *Journal of Environmental Economics and Management*, **43** (2002), 325–338.
- [6] U. Kapaun, M. F. Quaas, “Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties?”, *Environmental and Resource Economics*, **54**:2 (2013), 293–310.
- [7] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].

- [8] Л. И. Родина, “Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, “Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].
- [9] О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора*, Издательство ННГУ, Н. Новгород, 2007. [O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, *Mathematical Modelling of Selection Processes*, Izdatel'stvo Nizhegorodskogo Univ., Nizhnii Novgorod, 2007 (In Russian)].
- [10] М. С. Волдеаб, Л. И. Родина, “О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 16–26. [M. S. Woldeab, L. I. Rodina, “About the methods of renewable resource extraction from the structured population”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 16–26 (In Russian)].
- [11] L. I. Rodina, A. H. Hammadi, “Optimization problems for models of harvesting a renewable resource”, *Journal of Mathematical Sciences*, **25**:1 (2020), 113–122.
- [12] Л. И. Родина, М. С. Волдеаб, “О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:8 (2023), 1022–1028; англ. пер.: L. I. Rodina, M. S. Woldeab, “On the monotonicity of solutions of nonlinear systems with respect to the initial conditions”, *Differential Equations*, **59**:8 (2023), 1025–1031.
- [13] Е. А. Панасенко, Е. Л. Тонков, “Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений”, *Труды Математического института им. В. А. Стеклова*, **262** (2008), 202–221; англ. пер.: E. A. Panasenکو, E. L. Tonkov, “Invariant and stably invariant sets for differential inclusions”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **262** (2008), 194–212.
- [14] Л. И. Родина, Е. Л. Тонков, “О множестве достижимости управляемой системы без предположения компактности геометрических ограничений на допустимые управления”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2012, № 4, 68–79. [L. I. Rodina, E. L. Tonkov, “About the attainability set of control system without assumption of compactness of geometrical restrictions on admissible controls”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2012, № 4, 68–79 (In Russian)].
- [15] Г. Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2002, 232 с. [G. Yu. Riznichenko, *Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1*, Scientific-Publishing Centre “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk, 2002 (In Russian), 232 pp.]

### Информация об авторе

**Родина Людмила Ивановна**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: LRodina67@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Поступила в редакцию 24.01.2025 г.  
 Поступила после рецензирования 17.02.2025 г.  
 Принята к публикации 13.03.2025 г.

### Information about the author

**Ludmila I. Rodina**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University, Vladimir; Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation. E-mail: LRodina67@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Received 24.01.2025  
 Reviewed 17.02.2025  
 Accepted for press 13.03.2025