Том 30, № 149 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-15-27

УДК 517+515.126.4

Об оценках устойчивости сжимающих отображений первой группы Гейзенберга в теореме о неподвижной точке

Александр Валерьевич ГРЕШНОВ

ФГАОУ ВО «Новосибирский государственный университет»

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1

Аннотация. На симметрическом $(1, q_2)$-квазиметрическом пространстве $(\mathbb{H}^1_\alpha, \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha})$, где $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ — Box-квазиметрика первой группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, исследована константа L_Φ в оценке устойчивости $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, \xi) \le \frac{\mathrm{L}_\Phi \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}\left(u, \Phi(u)\right)}{1-\varepsilon}$ ε-сжимающих отображений Φ по отношению к тождественному отображению; здесь ξ — неподвижная точка отображения Φ, u — произвольная точка группы $\mathbb{H}^1_\alpha$. В работе установлено, что $\mathrm{L}_\Phi = 1$ в случае, когда отображение Φ представляет собой композицию левого сдвига и однородной подгруппы растяжений. Построены примеры сжимающих отображений Φ первой группы Гейзенбрга таких, что константа L_Φ не менее, чем $C\sqrt{q_2}$, где положительная константа C не зависит от выбора точки $u \in \mathbb{H}^1_\alpha$.

Ключевые слова: (q_1, q_2)-квазиметрика, Box-квазиметрика, каноническая группа Карно, сжимающие отображения, оценки устойчивости, неподвижная точка

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00319, https://rscf.ru/project/24-21-00319/).

Для цитирования: *Грешнов А.В.* Об оценках устойчивости сжимающих отображений первой группы Гейзенберга в теореме о неподвижной точке // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 15–27. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-15-27

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-15-27

About estimates of stability of contraction mappings on the first Heisenberg group in the fixed point theorem

Alexandr V. GRESHNOV
Novosibirsk State University (NSU)
1 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russian Federation

Abstract. On a symmetric $(1, q_2)$-quasimetric space $(\mathbb{H}^1_\alpha, \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha})$, where $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ is the Box-quasimetic of the first Heisenberg group $\mathbb{H}^1_\alpha$, we studied a constant L_Φ in the estimate $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,\xi) \leq \frac{\mathrm{L}_\Phi \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}\big(u,\Phi(u)\big)}{1-\varepsilon}$ of stability of the ε-contracting mapping Φ with respect to the identity mapping; here ξ is a fixed point of the mapping Φ and u is an arbitrary point of $\mathbb{H}^1_\alpha$. In the paper, we got that $\mathrm{L}_\Phi = 1$ when the mapping Φ is the composition of the left translation and the homogeneous dilation subgroup. Examples of the contracting mappings Φ on the first Heisenberg group such that L_Φ is not less then $C\sqrt{q_2}$ were found; here positive constant C does not depend on the choice of point $u \in \mathbb{H}^1_\alpha$.

Keywords: (q_1, q_2)-quasimetric, Box-quasimetric, canonical Carnot group, contraction mapping, estimates of stability, fixed point

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00319, https://rscf.ru/project/24-21-00319/).

Mathematics Subject Classification: 53C17, 34C05.

For citation: Greshnov A.V. About estimates of stability of contraction mappings on the first Heisenberg group in the fixed point theorem. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 15–27.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-15-27

Введение

(q_1,q_2)-квазиметрическим пространством [1–3] называется пара (X,ρ_X), где X — некоторое множество, содержащее не менее двух элементов, $\rho_X : X\times X \to \mathbb{R}^+\cup 0$ — некоторая функция, удовлетворяющая аксиоме тождества

$$\rho_X(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$$

(в этом случае говорят, что ρ_X — *функция расстояния*) и (q_1,q_2)-*обобщенному неравенству треугольника*, т. е.

$$\rho_X(x,y)\le q_1\rho_X(x,z)+q_2\rho_X(z,y) \quad \forall x,y,z\in X, \quad q_1,q_2>0.$$

Если $q_1=q_2=1$, тогда (X,ρ_X) — квазиметрическое пространство [4]. Если для (q_1,q_2)-квазиметрического пространства (X,ρ_X) выполняется условие *обобщенной симметрии*

$$\rho_X(x,y)\le q_0\rho_X(y,x) \quad \forall x,y\in X,$$

где константа $q_0>0$ не зависит от выбора x, y, то (q_1,q_2)-квазиметрическое пространство (X,ρ_X) является q_0-симметрическим; в случае $q_0=1$ используется понятие симметрического (q_1,q_2)-квазиметрического пространства. Метрическое пространство — это симметрическое $(1,1)$-квазиметрическое пространство.

Нетривиальными примерами (q_1,q_2)-квазиметрических пространств являются пространства $(L_p(E),\rho_{L_p(E)})$, $\rho_{L_p(E)}(f_1,f_2)=\|f_1-f_2\|_p$, где $0<p<1$, E — измеримое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_p$ —стандартная норма пространства $L_p(E)$, и пространства Карно–Каратеодори $\mathcal{M}$, снабженные $\mathrm{Box}_{\mathcal{M}}$-квазиметриками [5–9].

В работах А. В. Арутюнова и А. В. Грешнова [1–3] были введены (q_1,q_2) -квазиметрические пространства и исследованы их свойства, изучены накрывающие отображения, действующие из одного (q_1,q_2)-квазиметрического пространства в другое, получены достаточные условия существования точек совпадения двух отображений, действующих в этих пространствах и удовлетворяющих предположению о том, что одно из этих отображений является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица.

Пусть заданы отображения $\Psi,\Phi : (X,\rho_X)\to(Y,\rho_Y)$, а также вещественные числа $\alpha>\beta\ge 0$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Точка $x\in X$ называется точкой совпадения Ψ,Φ, если

$$\Psi(x)=\Phi(x).$$

Пусть $B_X(x,r)=\{y\in X \mid \rho_X(x,y)\le r\}$.

О п р е д е л е н и е 0.2. Отображение Ψ называется α-накрывающим, если

$$B_Y(\Psi(x),\alpha r)\subseteq \Psi(B_X(x,r)) \; \forall r\ge 0 \; \forall x\in X.$$

О п р е д е л е н и е 0.3. Отображение Φ называется β-липшицевым, если

$$\rho_Y\big(\Phi(x_1),\Phi(x_2)\big)\le \beta\rho_X(x_1,x_2) \; \forall x_1,x_2\in X.$$

Как обычно, $\operatorname{gph}(F)=\{(x,y)\in X\times Y \mid y\in F(x)\}$ — *график* отображения $F : (X,\rho_X)\to(Y,\rho_Y)$.

О п р е д е л е н и е 0.4. Отображение F замкнуто, если для любых последовательностей $\{x_i\}\subset X$ и $\{y_i\}\subset Y$ таких, что они сходятся к точкам x_0 и y_0 соответственно и $(x_i,y_i)\in \mathrm{gph}\,(F)\ \forall\, i,$ выполняется $(x_0,y_0)\in \mathrm{gph}\,(F)$.

Символом $\overline{\rho}$ обозначается *сопряженная* (q_2,q_1)-квазиметрика, определяемая тождеством $\overline{\rho}(x,y)=\rho(y,x)$. Пусть $S(\theta,n)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\theta^i$, $n\in\mathbb{N}$, $S(\theta,0)=0$ и $\beta^0=1$ при $\beta=0$. Для произвольных $q_0,q_1,q_2\geq 1$ положим $m_0=\min\{j\in\mathbb{N}\mid q_2\beta^j<\alpha^j\}$, а в предположении, что $q_0^2\beta<\alpha$ положим $n_0=\min\{j\in\mathbb{N}\mid q_1(q_0^2\beta)^j<\alpha^j\}$.

Теорема 0.1 ([1–3]). *Пусть (q_1,q_2)-квазиметрическое пространство (X,ρ_X) полное, Ψ — α-накрывающее и замкнутое отображение, Φ — β-липшицево отображение. Зафиксируем произвольную точку $x_0\in X$. Тогда у отображений Ψ и Φ существует такая точка совпадения ξ, что имеет место оценка*

$$\varliminf_{\eta\to\xi}\rho_X(x_0,\eta)\leq\frac{q_1^2\alpha^{m_0-1}S\big(q_2\frac{\beta}{\alpha},m_0-1\big)+q_1(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0}-q_2\beta^{m_0}}\rho_Y(\Psi(x_0),\Phi(x_0)).$$

Если пространство (X,ρ_X) является q_0-симметрическим, то для ξ также имеет место оценка

$$\rho_X(x_0,\xi)\leq\frac{q_1^3\alpha^{m_0-1}S\big(q_2\frac{\beta}{\alpha},m_0-1\big)+q_1^2(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0}-q_2\beta^{m_0}}\rho_Y(\Psi(x_0),\Phi(x_0)),$$

а если, кроме того, $q_0^2\beta<\alpha$, то для ξ также имеют место оценки

$$\overline{\rho}_X(x_0,\xi)\leq q_0q_2^2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S\big(q_1q_0^2\frac{\beta}{\alpha},n_0-1\big)+(q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0}-q_1(q_0^2\beta)^{n_0}}\rho_Y(\Psi(x_0),\Phi(x_0)),\tag{0.1}$$

$$\varliminf_{\eta\to\xi}\overline{\rho}_X(x_0,\eta)\leq q_0q_2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S\big(q_1q_0^2\frac{\beta}{\alpha},n_0-1\big)+(q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0}-q_1(q_0^2\beta)^{n_0}}\rho_Y(\Psi(x_0),\Phi(x_0)).\tag{0.2}$$

Теорема 0.2 ([1–3]). *Пусть (X,ρ_X) — полное, Ψ — α-накрывающее и замкнутое, Φ — β-липшицево. Зафиксируем произвольную точку $x_0\in X$.*

1^0 *Пусть $q_1=1$. Тогда у отображений Ψ и Φ существует такая точка совпадения ξ, что имеет место оценка*

$$\varliminf_{\eta\to\xi}\rho_X(x_0,\eta)\leq\frac{\alpha-\beta+q_2\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}\rho_Y(\Psi(x_0),\Phi(x_0)).\tag{0.3}$$

2^0 *Пусть пространство (X,ρ_X) является q_0-симметрическим, $q_0^2\beta<\alpha$ и $q_2=1$. Тогда существует такая точка совпадения ξ, что имеет место оценка*

$$\rho_X(\xi,x_0)\leq q_0\frac{q_1q_0^2\beta+\alpha-q_0^2\beta}{\alpha(\alpha-q_0^2\beta)}\rho_Y(\Psi(x_0),\Phi(x_0)).\tag{0.4}$$

Пусть $X=Y$ и $\Psi=\mathrm{Id}$ — тождественное отображение. Тогда $\alpha=1$, условие $\beta<1$ означает, что отображение Φ является сжимающим, а точка совпадения превращается в неподвижную точку. Используя свойства (q_1,q_2)-квазиметрических пространств, мы получаем следующую теорему, см. [1].

Теорема 0.3 (теорема о неподвижной точке сжимающего отображения)**.** *Замкнутое сжимающее с коэффициентом $\varepsilon \in (0,1)$ отображение Φ полного (q_1, q_2)-квазиметрического пространства (X, ρ_X) в себя имеет неподвижную точку ξ, причем единственную. При этом*

1^0 *пусть $q_1 = 1$. Тогда для произвольной точки $x_0 \in X$ имеет место оценка*

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{1 - \varepsilon + q_2\varepsilon}{1 - \varepsilon}\rho_X(x_0, \Phi(x_0)), \tag{0.5}$$

2^0 *пусть $q_0^2\varepsilon < 1$ и $q_2 = 1$. Тогда для произвольной точки $x_0 \in X$ имеет место оценка*

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq q_0\frac{q_1 q_0^2\varepsilon + 1 - q_0^2\varepsilon}{1 - q_0^2\varepsilon}\rho_X(x_0, \Phi(x_0)). \tag{0.6}$$

Оценки (0.1)–(0.4) можно рассматривать в некотором смысле как оценки устойчивости липшицева отображения по отношению к накрывающему отображению. Такие оценки важны при практическом использовании теорем о точках совпадения накрывающих и липшицевых отображений (теорем о неподвижной точке сжимающих отображений). В работе [1] были построены примеры, доказывающие, что оценки (0.1)–(0.4) имеют универсальный характер и в общем случае не улучшаемы. Таким образом, нахождение оптимальных оценок в (0.1)–(0.4) напрямую связано с нахождением оптимальных значений констант q_1, q_2, в частности, минимального значения константы q_2, см. (0.3), (0.5). С другой стороны, многое зависит от природы (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и рассматриваемых там отображений. Для (важных) частных случаев (q_1, q_2)-квазиметрических может так оказаться, что оценки (0.1)–(0.4) можно улучшить, в частности, оценки устойчивости (0.5), (0.6) из теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения. Именно этот вопрос мы обсуждаем в настоящей работе для сжимающих отображений первой группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, снабженной $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$-квазиметрикой, являющейся симметрической $(1, q_2)$-квазиметрикой, см., например, [8]. А именно, в § 2 мы показываем, что для отображения Φ, являющегося стандартным сжатием δ_ε, $\varepsilon \in (0,1)$, или композицией δ_ε с левым сдвигом группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$, выполняется оценка

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, \xi) \leq \frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}\big(u, \Phi(u)\big)}{1 - \varepsilon} \quad \forall u \in \mathbb{H}^1_\alpha; \tag{0.7}$$

здесь ξ — единственная неподвижная точка отображения Φ. Как мы видим, оценка из (0.7) является более точной, чем оценка (0.5), и по форме она совпадает с классической оценкой для метрических пространств [10]. Но в оценке (0.7) отсутствует формальная связь с тем фактом, что мы имеем дело именно с $(1, q_2)$-квазиметрическим пространством. Естественно, что в этом случае возникает вопрос о существовании на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ сжимающих отображений Φ таких, что

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, \xi) \leq \frac{\mathrm{L}_\Phi \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}\big(u, \Phi(u)\big)}{1 - \varepsilon} \quad \forall u \in \mathbb{H}^1_\alpha,$$

где константа L_Φ зависит от константы q_2. В § 3 мы доказали, что для неоднородных сжатий D_ε первой группы Гейзенберга константа $\mathrm{L}_{D_\varepsilon}$ зависит от значений константы q_2, причем эта зависимость снизу ведет себя как $O(\sqrt{q_2})$ (теоремы 3.1, 3.2, следствие 3.1). В § 4 эти результаты были обобщены для отображений, являющихся композициями левых сдвигов и неоднородных растяжений первой группы Гейзенберга (теоремы 4.1, 4.2). Существенным в наших доказательствах является следующий факт.

Теорема 0.4 (см. [8]). *Пусть* α *— структурная константа первой группы Гейзенберга* $\mathbb{H}^1_\alpha$. *Минимальное значение константы* q_2 *в* $(1, q_2)$ *-обобщенном неравенстве треугольника для группы* $\mathbb{H}^1_\alpha$ *определяется как*

$$q_2 = \begin{cases} 1, & \alpha \le 2, \\ \frac{\alpha}{2}, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Получение оценок для неподвижных точек и точек совпадения отображений (q_1, q_2)-квазиметрических пространств является интересной задачей. В связи с этим отметим работу [11], где для однозначных и многозначных отображений, действующих в метрическом пространстве X и удовлетворяющих условию Липшица, получена оценка снизу расстояния от заданной точки $x_0 \in X$ до неподвижной точки; там же данный результат был распространен на (q_1, q_2)-квазиметрические пространства.

1. Каноническая первая группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$

Канонической конечномерной группой Ли [12] называется аналитическая группа Ли G, экспоненциальное отображение которой является тождественным. Таким образом, G отождествляется с некоторым евклидовым пространством $\mathbb{R}^N$ с координатами $(x_1, \dots, x_N)$, индуцированными координатным репером $(O, e_1, \dots, e_N)$. Поэтому мы можем отождествлять любой элемент $u \in G$ с его координатной записью; в частности, нейтральный элемент группы G — точка $O = (0, \dots, 0)$ (начало координат евклидова пространства $\mathbb{R}^N$), и для любого $u = (x_1, \dots, x_N)$ мы имеем $u^{-1} = (-x_1, \dots, -x_N)$. Групповая операция «$\cdot$» на G (по-другому, левый сдвиг $P^G_u u' = u \cdot u'$ элемента $u' \in G$ на элемент $u \in G$) определяется при помощи формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа [13] и соответствующей таблицы коммутаторов, заданной на базисных ортах $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^N$.

Каноническая группа $\mathbb{H}^1_\alpha$ определяется, см. [8, 14], в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, t), индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3), при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$[e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad \alpha > 0. \tag{1.1}$$

Произвольный элемент $u \in \mathbb{H}^1_\alpha$ отождествляется со своей координатной записью, т. е.

$$u = xe_1 + ye_2 + te_3 = (x, y, t).$$

Используя таблицу (1.1), запишем операцию левого сдвига для $\mathbb{H}^1_\alpha$. Пусть $w = (x, y, t)$, $w' = (x', y', t')$, тогда

$$P^{\mathbb{H}^1_\alpha}_w w' = w \cdot w' = \Big(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y)\Big).$$

Нейтральный элемент O канонической первой группы Гейзенберга совпадает с началом координат евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, т. е. $O = (0, 0, 0)$, и для любого элемента $u = (x, y, t) \in \mathbb{H}^1_\alpha$ мы имеем $u^{-1} = (-x, -y, -t)$.

Однопараметрическая подгруппа растяжений $\delta_\varepsilon : \mathbb{H}^1_\alpha \to \mathbb{H}^1_\alpha$, $\varepsilon \ge 0$, действует на элементы $u = (x, y, t)$ по правилу

$$\delta_\varepsilon u = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t).$$

Определим неотрицательную функцию $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha} : \mathbb{H}^1_\alpha \times \mathbb{H}^1_\alpha \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ следующим образом. Пусть $u, v \in \mathbb{H}^1_\alpha$, тогда $v = u \cdot (u^{-1}v) = uc$, где $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{H}^1_\alpha$. Тогда

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, v) = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Из определения вытекает, что функция $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ удовлетворяет аксиомам тождества и симметрии. Более того, функция $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ является $(1, q_2)$-квазиметрикой [8]. Функция $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}$ — это Box-квазиметрика группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$.

Следующие свойства, называемые инвариантностью Box-квазиметрики относительно действий растяжений и левых сдвигов, являются прямым следствием фактов общей теории групп Карно, см. [15], но их несложно проверить непосредственно:

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\delta_\varepsilon u, \delta_\varepsilon v) = \varepsilon \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, v), \quad \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(P^{\mathbb{H}^1_\alpha}_w u, P^{\mathbb{H}^1_\alpha}_w v) = \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{H}^1_\alpha.$$

2. Однородные сжатия и их композиции с левыми сдвигами группы $\mathbb{H}^1_\alpha$

1^0 Рассмотрим стандартное (субриманово) сжатие $\delta_\varepsilon u = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t)$, $u = (x, y, t)$, $0 < \varepsilon < 1$, группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$. Из определения отображения δ_ε вытекает, что единственная неподвижная точка отображения здесь — начало координат O.

Мы имеем $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O, u) = \max\{|x|, |y|, |t|^{\frac{1}{2}}\}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}\big(u, \delta_\varepsilon u\big) &= \max\left\{|(\varepsilon - 1)x|, |(\varepsilon - 1)y|, |(\varepsilon^2 - 1)t|^{\frac{1}{2}}\right\}\\ &= (1 - \varepsilon) \max\left\{|x|, |y|, \left|\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} t\right|^{\frac{1}{2}}\right\},\end{aligned}$$

откуда мы получаем

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O, u) \le \frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}\big(u, \delta_\varepsilon(u)\big)}{1 - \varepsilon}.$$

2^0 Зафиксируем точку $w = (x_0, y_0, t_0)$. Рассмотрим сжимающее отображение

$$\Phi_1(u) = \delta_\varepsilon \circ P^{\mathbb{H}^1_\alpha}_w(u) = \Big(\varepsilon(x_0 + x), \varepsilon(y_0 + y), \varepsilon^2 t_0 + \varepsilon^2 t + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2}(x_0 y - y_0 x)\Big),$$

где $u = (x, y, t)$, $0 < \varepsilon < 1$. Найдем неподвижную точку $\xi = (x_n, y_n, t_n)$ отображения Φ_1:

$$x_n = \varepsilon(x_0 + x_n) \Rightarrow x_n = \frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon},$$

$$y_n = \varepsilon(y_0 + y_n) \Rightarrow y_n = \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon},$$

$$t_n = \varepsilon^2 t_0 + \varepsilon^2 t_n + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2}(x_0 y_n - y_0 x_n) \Rightarrow t_n = \frac{\varepsilon^2 t_0}{1 - \varepsilon^2}.$$

Мы имеем $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, \xi) = \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O, u^{-1}\xi)$, $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, \Phi_1(u)) = \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O, u^{-1}\Phi_1(u))$, где

$$\begin{aligned}u^{-1}\xi &= (-x, -y, -t)(x_n, y_n, t_n) = (-x, -y, -t)\Big(\frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon}, \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon}, \frac{\varepsilon^2 t_0}{1 - \varepsilon^2}\Big)\\ &= \Big(\frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon} - x, \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon} - y, \frac{\varepsilon^2 t_0}{1 - \varepsilon^2} - t + \frac{\alpha \varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}(-x y_0 + x_0 y)\Big)\\ &= \Big(\frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon} - x, \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon} - y, \frac{\varepsilon^2 t_0 + t(\varepsilon^2 - 1)}{1 - \varepsilon^2} + \frac{\alpha \varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}(x_0 y - x y_0)\Big),\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$u^{-1}\Phi_1(u) = (-x,-y,-t)\Big(\varepsilon(x_0+x),\varepsilon(y_0+y),\varepsilon^2\big(t_0+t+\frac{\alpha}{2}(x_0y-y_0x)\big)\Big)$$
$$= \Big(\varepsilon x_0-(1-\varepsilon)x,\varepsilon y_0-(1-\varepsilon)y,\varepsilon^2t_0+t(\varepsilon^2-1)+(\frac{\alpha\varepsilon}{2}+\frac{\alpha\varepsilon^2}{2})(x_0y-y_0x)\Big). \quad (2.2)$$

Рассмотрим последние координаты в (2.1) и в (2.2); заметим, что

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\Big(\frac{\varepsilon^2t_0+t(\varepsilon^2-1)}{1-\varepsilon^2}+\frac{\alpha\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}(x_0y-xy_0)\Big)$$
$$= \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\Big(\varepsilon^2t_0+t(\varepsilon^2-1)+(\frac{\alpha\varepsilon}{2}+\frac{\alpha\varepsilon^2}{2})(x_0y-y_0x)\Big). \quad (2.3)$$

Учитывая (2.3), мы выводим

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,\xi) \le \frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,\Phi_1(u))}{1-\varepsilon}.$$

3⁰ Зафиксируем точку $w=(x_0,y_0,t_0)$. Рассмотрим сжимающее отображение

$$\Phi_2(u) = P_w^{\mathbb{H}^1_\alpha}\circ\delta_\varepsilon(u) = \big(\varepsilon x+x_0,\varepsilon y+y_0,t_0+\varepsilon^2t+\frac{\alpha\varepsilon^2}{2}(x_0y-y_0x)\big),$$

где $u=(x,y,t)$, $0<\varepsilon<1$. Найдем неподвижную точку $\xi=(x_n,y_n,t_n)$ отображения Φ_2:

$$x_n=\varepsilon x_n+x_0 \;\Rightarrow\; x_n=\frac{x_0}{1-\varepsilon}, \qquad y_n=\varepsilon y_n+x_0 \;\Rightarrow\; y_n=\frac{y_0}{1-\varepsilon},$$

$$t_n=t_0+\varepsilon^2t_n+\frac{\alpha\varepsilon^2}{2}(x_0y_n-y_0x_n) \;\Rightarrow\; t_n=\frac{t_0}{1-\varepsilon^2}.$$

Мы имеем $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,\xi)=\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u^{-1}\xi)$, $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,\Phi_1(u))=\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u^{-1}\Phi_1(u))$, где

$$u^{-1}\xi=(-x,-y,-t)(x_n,y_n,t_n)=(-x,-y,-t)\Big(\frac{x_0}{1-\varepsilon},\frac{y_0}{1-\varepsilon},\frac{t_0}{1-\varepsilon^2}\Big)$$
$$=\Big(\frac{x_0}{1-\varepsilon}-x,\frac{y_0}{1-\varepsilon}-y,\frac{t_0}{1-\varepsilon^2}-t+\frac{\alpha}{2(1-\varepsilon)}(-xy_0+x_0y)\Big)$$
$$=\Big(\frac{\varepsilon x_0}{1-\varepsilon}-x,\frac{\varepsilon y_0}{1-\varepsilon}-y,\frac{t_0+t(\varepsilon^2-1)}{1-\varepsilon^2}+\frac{\alpha}{2(1-\varepsilon)}(x_0y-xy_0)\Big), \quad (2.4)$$

$$u^{-1}\Phi_2(u)=(-x,-y,-t)\Big(\varepsilon x+x_0,\varepsilon y+y_0,t_0+\varepsilon^2t+\frac{\alpha\varepsilon}{2}(x_0y-y_0x)\Big)$$
$$=\Big(x_0-(1-\varepsilon)x,y_0-(1-\varepsilon)y,\varepsilon^2t_0+t(\varepsilon^2-1)+(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\varepsilon}{2})(x_0y-y_0x)\Big). \quad (2.5)$$

Рассмотрим последние координаты в (2.4) и в (2.5); заметим, что

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\Big(\frac{t_0+t(\varepsilon^2-1)}{1-\varepsilon^2}+\frac{\alpha}{2(1-\varepsilon)}(x_0y-xy_0)\Big)$$
$$=\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\Big(\varepsilon^2t_0+t(\varepsilon^2-1)+(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\varepsilon}{2})(x_0y-y_0x)\Big). \quad (2.6)$$

Учитывая (2.6), мы выводим

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,\xi) \le \frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,\Phi_2(u))}{1-\varepsilon}.$$

3. Неоднородные сжатия группы $\mathbb{H}^1_\alpha$

О п р е д е л е н и е 3.1. Отображение

$$D_\varepsilon : (x,y,t) \to (\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 y, \varepsilon_1\varepsilon_2 t), \quad 0<\varepsilon_1,\varepsilon_2<1, \quad \varepsilon_1\neq\varepsilon_2, \quad \varepsilon=\max_{i=1,2}\{\varepsilon_i\},$$

назовем неоднородным сжатием группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$.

Далее для определенности полагаем, что $\varepsilon_1>\varepsilon_2$.

С в о й с т в о 3.1. Отображение D_ε : 1^0 является ε-липшицевым, 2^0 имеет единственную неподвижную точку, совпадающую с началом координат O.

Д о к а з а т е л ь с т в о.
1^0 Несложно проверить непосредственно, что

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(D_\varepsilon(u), D_\varepsilon(v)) \le \varepsilon \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,v).$$

Пусть $u_1=(x_1,0,0)$, $u_2=(x_2,0,0)$, тогда

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(D_\varepsilon(u_1), D_\varepsilon(u_2)) = \varepsilon_1|x_1-x_2| = \varepsilon_1\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,v).$$

2^0 Очевидно. □

Теорема 3.1. *Для произвольной точки* $u=(x,y,t)\in\mathbb{H}^1_\alpha$ *имеет место оценка*

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u) \le \sqrt{q_2}\,\frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,D_\varepsilon u)}{1-\varepsilon}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы имеем $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u)=\max\{|x|,|y|,|t|^{\frac12}\}$,

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,D_\varepsilon u) = \big(x(\varepsilon_1-1), y(\varepsilon_2-1), \frac{\alpha}{2}xy(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-t(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\big).$$

Если $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u)=|x|$ или $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u)=|y|$, то в этом случае очевидно выполняется оценка

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u) \le \frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,D_\varepsilon u)}{1-\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Пусть $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u)=|t|^{\frac12}$. Если при этом $xy=0$, то оценка (3.2) очевидно выполняется. Далее полагаем, что $xy\neq0$. Обозначим $k=\frac{1-\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$. Отметим, что $k>1$.

Предположим, что

$$\frac{|t|(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)}{k} \le \frac{\alpha}{2}|xy|(\varepsilon_1-\varepsilon_2).$$

Мы имеем

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,D_\varepsilon u) \ge \max\{|x|(1-\varepsilon_1), |y|(1-\varepsilon_2)\},$$

тогда

$$|t| \le \frac{\alpha}{2}|xy| \le \frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{Box}^2_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,D_\varepsilon u)}{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} \;\Rightarrow\; |t|^{\frac12} \le \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u,D_\varepsilon u)}{1-\varepsilon},$$

откуда, с учетом теоремы 0.4, вытекает оценка (3.1).

Теперь пусть
$$\frac{|t|(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)}{k} > \frac{\alpha}{2}|xy|(\varepsilon_1-\varepsilon_2),$$
тогда
$$\left|\frac{\alpha}{2}xy(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-t(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\right| \geq |t|(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\Big(1-\frac{1}{k}\Big) = |t|(1-\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2).$$
Откуда получаем
$$|t|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, D_\varepsilon u)}{\sqrt{(1-\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}} \leq \frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, D_\varepsilon u)}{1-\varepsilon}.$$
□

В общем случае оценку (3.1) нельзя назвать более точной, чем оценка (0.5); все зависит от выбора ε и q_2.

Теорема 3.2. *Имеет место оценка*
$$\mathrm{L}_{D_\varepsilon} \geq \sqrt{q_2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2}}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $u=(x,y,t)\in\mathbb{H}^1_\alpha$.

Случай 1. Пусть $q_2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2} \geq 1$. В этом случае всегда найдется точка u такая, что $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u)=|t|^{\frac{1}{2}}$, $xy\neq 0$, и при этом выполняется тождество
$$t(\varepsilon_1\varepsilon_2-1)+\frac{\alpha}{2}xy(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0,$$
тогда
$$t=\frac{\alpha}{2}xy\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2},$$
$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, D_\varepsilon u)=\max\{|x|(1-\varepsilon_1), |y|(1-\varepsilon_2)\}.$$
Можно при этом рассматривать такую точку u, что $x=y$. Тогда
$$|t|=\frac{\alpha}{2}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)^2}\mathrm{Box}^2_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, D_\varepsilon u),$$
откуда, учитывая неравенство $\varepsilon=\varepsilon_1>\varepsilon_2$ и теорему 0.4, вытекает тождество
$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u)=\sqrt{q_2\frac{\varepsilon-\varepsilon_2}{1-\varepsilon\varepsilon_2}}\frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(u, D_\varepsilon u)}{1-\varepsilon}.$$
Покажем, см. (0.5), что
$$\sqrt{q_2\frac{\varepsilon-\varepsilon_2}{1-\varepsilon\varepsilon_2}} \leq 1+\varepsilon(q_2-1) \;\Leftrightarrow\; q_2\frac{\varepsilon-\varepsilon_2}{1-\varepsilon\varepsilon_2} \leq 1+2\varepsilon(q_2-1)+\varepsilon^2(q_2-1)^2. \tag{3.4}$$
Пусть $f(\varepsilon_2)=q_2\frac{\varepsilon-\varepsilon_2}{1-\varepsilon\varepsilon_2}$, тогда
$$f'(\varepsilon_2)=q_2\frac{-1+\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon_2)^2}<0, \quad f(0)=q_2\varepsilon<1+2\varepsilon(q_2-1)+\varepsilon^2(q_2-1)^2,$$
поэтому неравенство (3.4) выполняется.

Случай 2. Теперь пусть $q_2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2}<1$. Всегда найдется точка u такая, что $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O,u)=\max\{|x|,|y|\}$, и в этом случае выполняется выполняется неравенство (3.2).

Неравенство (3.3) следует из случаев 1, 2. □

Следствие 3.1.
$$\sqrt{q_2\frac{\varepsilon-\varepsilon_2}{1-\varepsilon\varepsilon_2}} \leq \mathrm{L}_{D_\varepsilon} \leq 1+\varepsilon(q_2-1).$$

4. Композиции неоднородных сжатий и левых сдвигов группы $\mathbb{H}^1_\alpha$

4.1 Композиция $P_w^{\mathbb{H}^1_\alpha} \circ D_\varepsilon$

Зафиксируем точку $w = (x_0, y_0, t_0)$, $x_0 y_0 \neq 0$. Рассмотрим сжимающее отображение

$$\widetilde{\Phi}_2(u) = P_w^{\mathbb{H}^1_\alpha} \circ D_\varepsilon(u) = \big(\varepsilon_1 x + x_0, \varepsilon_2 y + y_0, t_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 t + \frac{\alpha}{2}(\varepsilon_2 x_0 y - \varepsilon_1 y_0 x)\big),$$

где $u = (x, y, t)$. Нетрудно убедиться в том, что отображение $\widetilde{\Phi}_2$ является ε-липшицевым, где $\varepsilon = \varepsilon_1$. Найдем неподвижную точку $\xi = (x_n, y_n, t_n)$ отображения $\widetilde{\Phi}_2$. Мы имеем

$$\varepsilon_1 x_n + x_0 = x_n \ \Rightarrow \ x_n = \frac{x_0}{1-\varepsilon_1},$$

$$\varepsilon_2 y_n + y_0 = y_n \ \Rightarrow \ y_n = \frac{y_0}{1-\varepsilon_2},$$

$$t_n = t_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2 t_n + \frac{\alpha x_0 y_0}{2}\Big(\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\Big) \ \Rightarrow \ t_n = \frac{t_0}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2} - \frac{\alpha x_0 y_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}.$$

Теорема 4.1.

$$\mathrm{L}_{\widetilde{\Phi}_2} \geq C\sqrt{q_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2}}$$

для некоторой положительной константы $C = C(x_0, y_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v = (0, 0, t)$. Тогда

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\xi, v) = \max\Big\{\Big|\frac{x_0}{1-\varepsilon_1}\Big|, \Big|\frac{y_0}{1-\varepsilon_2}\Big|, \Big|\frac{t_0}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2} - \frac{\alpha x_0 y_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)} - t\Big|^{\frac{1}{2}}\Big\},$$

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(v, \widetilde{\Phi}_2(v)) = \max\{|x_0|, |y_0|, \big|t_0 + (\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)t\big|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Выберем t таким образом, чтобы выполнялось равенство $t_0 + (\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)t = 0$. В этом случае

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\xi, v) = \max\Big\{\Big|\frac{x_0}{1-\varepsilon_1}\Big|, \Big|\frac{y_0}{1-\varepsilon_2}\Big|, \Big|\frac{\alpha x_0 y_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}\Big|^{\frac{1}{2}}\Big\},$$

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(v, \widetilde{\Phi}_2(v)) = \max\{|x_0|, |y_0|\} = m.$$

В случае, если $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\xi, v) = \max\Big\{\Big|\frac{x_0}{1-\varepsilon_1}\Big|, \Big|\frac{y_0}{1-\varepsilon_2}\Big|\Big\}$, то очевидно выполняется оценка

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\xi, v) \leq \frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(v, \widetilde{\Phi}_2(v))}{1-\varepsilon}.$$

Пусть $\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\xi, v) = \Big|\frac{\alpha x_0 y_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}\Big|^{\frac{1}{2}}$, тогда

$$\mathrm{Box}^2_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\xi, v) = \frac{\alpha}{2}\mathrm{Box}^2_{\mathbb{H}^1_\alpha}(v, \widetilde{\Phi}_2(v))\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)}\frac{|x_0 y_0|}{(1-\varepsilon_1)^2 m^2}\frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2}$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\xi, v) = C\sqrt{q_2\frac{(\varepsilon-\varepsilon_2)}{(1-\varepsilon\varepsilon_2)}}\frac{\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(v, \widetilde{\Phi}_2(v))}{(1-\varepsilon)},$$

где $C = C(x_0, y_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — некоторая положительная константа. Откуда и следует теорема 4.1. □

4.2 Композиция $D_\varepsilon \circ P_w^{\mathbb{H}^1_\alpha}$

Зафиксируем точку $w=(x_0,y_0,t_0)$, $x_0y_0\neq 0$. Рассмотрим сжимающее отображение

$$\widetilde{\Phi}_1(u)=D_\varepsilon\circ P_w^{\mathbb{H}^1_\alpha}(u)=\Big(\varepsilon_1(x+x_0),\varepsilon_2(y+y_0),\varepsilon_1\varepsilon_2\big(t_0+t+\frac{\alpha}{2}(x_0y-y_0x)\big)\Big),$$

где $u=(x,y,t)$. Нетрудно убедиться в том, что отображение $\widetilde{\Phi}_1$ является ε-липшицевым, где $\varepsilon=\varepsilon_1$. Найдем неподвижную точку $\xi=(x_n,y_n,t_n)$ отображения $\widetilde{\Phi}_1$. Мы имеем

$$x_n=\varepsilon_1(x_0+x_n)\ \Rightarrow\ x_n=\frac{\varepsilon_1x_0}{1-\varepsilon_1},$$

$$y_n=\varepsilon_2(y_n+y_0)\ \Rightarrow\ y_n=\frac{\varepsilon_2y_0}{1-\varepsilon_2},$$

$$t_n=t_0+\varepsilon_1\varepsilon_2t_n+\frac{\alpha x_0y_0}{2}\Big(\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}-\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}\Big)\ \Rightarrow\ t_n=\frac{t_0}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2}-\frac{\alpha x_0y_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}.$$

Теорема 4.2.

$$\mathrm{L}_{\widetilde{\Phi}_1}\geq C\sqrt{q_2\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2}}$$

для некоторой положительной константы $C=C(x_0,y_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v=(0,0,t)$. Тогда

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(\xi,v)=\max\Big\{\Big|\frac{\varepsilon_1x_0}{1-\varepsilon_1}\Big|,\Big|\frac{\varepsilon_2y_0}{1-\varepsilon_2}\Big|,\Big|\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2t_0}{1-\varepsilon_1\varepsilon_2}-\frac{\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2x_0y_0(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{2(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)}-t\Big|^{\frac12}\Big\},$$

$$\mathrm{Box}_{\mathbb{H}^1_\alpha}(v,\widetilde{\Phi}_2(v))=\max\big\{|\varepsilon_1x_0|,|\varepsilon_2y_0|,\big|\varepsilon_1\varepsilon_2(t_0+t)-t\big|^{\frac12}\big\}.$$

Выберем t таким образом, чтобы выполнялось равенство $\varepsilon_1\varepsilon_2(t_0+t)-t=0$. Далее, действуя так же как и при доказательстве теоремы 4.1, получаем теорему 4.2. □

References

[1] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “(q_1,q_2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “(q_1,q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izvestiya Mathematics*, **82**:2 (2018), 245–272.

[2] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1,q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Доклады РАН*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “The theory of (q_1,q_2)-quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[3] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “(q_1,q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results”, *Fixed Point Theory*, **23**:2 (2022), 473–486.

[4] W. A. Wilson, “On quasi-metric spaces”, *American J. of Math.*, **53** (1931), 675–684.

[5] А. В. Грешнов, “(q_1,q_2)-Квазиметрики, билипшицево эквивалентные 1-квазиметрикам”, *Матем. труды*, **20**:1 (2017), 81–96; англ. пер.:A. V. Greshnov, “(q_1,q_2)-quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics”, *Siberian Adv. Math.*, **27**:4 (2017), 253–262.

[6] S. K. Vodopyanov, “Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings”, *Contemporary Mathematics*, **424** (2007), 247–301.

[7] S. G. Basalaev, S. K. Vodopyanov, “Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces”, *Eurasian Math. J.*, **4**:2 (2013), 10–48.

[8] А. В. Грешнов, М. В. Трямкин, “Точные значения констант в обобщенном неравенстве треугольника для некоторых $(1, q_2)$-квазиметрик на канонических группах Карно”, *Матем. заметки*, **98**:4 (2015), 635–639; англ. пер.:A. V. Greshnov, M. V. Tryamkin, “Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$-quasimetrics on canonical Carnot groups”, *Math. Notes*, **98**:4 (2015), 694–698.

[9] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, “Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties”, *Acta Mathematica*, **155**:1–2 (1985), 103–147.

[10] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады РАН*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[11] М. В. Борзова, Е. С. Жуковский, Н. Ю. Черникова, “Одна оценка неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **22**:6, 1255–1259. [M. V. Borzova, E. S. Zhukovskiy, N. Yu. Chernikova, “One estimate of fixed points and coincidence points of mappings of metric spaces”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1255–1260 (In Russian)].

[12] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. [L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[13] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр 5. Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1982; англ. пер.:M. M. Postnikov, *Lectures In Geometry: Semester V – Lie Group And Lie Algebras*, Mir Publ., Moscow, 1986.

[14] A. Agrachev, D. Barilari, U.Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, 2020.

[15] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian*, Berlin–Heidelberg, Springer–Verlag, 2007.

Информация об авторе

Грешнов Александр Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1218-2767

Поступила в редакцию 10.01.2025 г.
Поступила после рецензирования 25.02.2025 г.
Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the author

Alexandr V. Greshnov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation.
E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1218-2767

Received 10.01.2025
Reviewed 25.02.2025
Accepted for press 13.03.2025