ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-333-339
УДК 517.98; 519.46

О дилатации одного класса вполне положительных отображений

Якуб Витальевич ЭЛЬСАЕВ
ФГБУН «Владикавказский научный центр РАН»
362027, Российская Федерация, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8053-3039, e-mail: zelimus-951@mail.ru

On a dilation of a some class of completely positive maps

Yakub V. ELSAEV
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Science
22 Markusa St., Vladikavkaz 362027, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8053-3039, e-mail: zelimus-951@mail.ru

Аннотация. В работе изучаются полуторалинейные формы, определенные на декартовом квадрате гильбертова C^*-модуля $\mathcal{M}$ над C^*-алгеброй B и принимающие значение в алгебре B. Множество таких полуторалинейных форм обозначается $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. Рассматриваются ковариантные, относительно действия некоторой группы симметрии, вполне положительные отображения, заданные на унитальной локальной C^*-алгебре A и принимающие значение в $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. Данный класс отображений можно интерпретировать как обобщение ковариантных квантовых инструментов, широко применяемых в современной квантовой механике и квантовой теории поля. В статье исследована проблема дилатации для указанного класса отображений. В качестве ее решения строится минимальное представление типа Стайнспринга. Кроме того, удается установить единственность минимального представления с точностью до унитарной эквивалентности гильбертовых C^*-модулей.

Ключевые слова: локальная C*-алгебра; гильбертов A-модуль; вполне положительное отображение; полуторалинейная форма; ковариантное представление Стайнспринга

Для цитирования: *Эльсаев Я.В.* О дилатации одного класса вполне положительных отображений // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 333–339. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-333-339.

Abstract. In this article we investigate sesquilinear forms defined on the Cartesian product of Hilbert C^*-module $\mathcal{M}$ over C^*-algebra B and taking values in B. The set of all such defined sesquilinear forms is denoted by $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. We consider completely positive maps from locally C^*-algebra A to $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. Moreover we assume that these completely positive maps are covariant with respect to actions of a group symmetry. This allow us to view these maps as generalizations covariant quantum instruments which are very important for the modern quantum mechanic and the quantum field theory. We analyze the dilation problem for these class of maps. In order to solve this problem we construct the minimal Stinespring representation and prove that every two minimal representations are unitarily equivalent.

Keywords: locally C^*-algebra; Hilbert C^*-module; completely positive map; sesquilinear form; covariant Stinespring representation

For citation: Elsaev Ya.V. O dilatacii odnogo klassa vpolne polozhitel'nyh otobrazheniy [On a dilation of a some class of completely positive maps]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 333–339. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-333-339. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Вполне положительные отображения в операторных алгебрах и модулях в последние годы все больше привлекают внимание исследователей (см. [1–5]). Причина этого феномена состоит в том, что данный класс отображений используется в теории квантовой информации и квантовых вычислений. Впервые задача о дилатации вполне положительного отображения была изучена в работе [6], где было показано, что вполне положительное отображение $\varphi : A \to L(H)$ из C^*-алгебры A в алгебру $L(H)$ линейных, ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, можно представить в форме $\varphi(\cdot) = S^\star\pi(\cdot)S$, где π это $*$-представление алгебры A в другом гильбертовом пространстве K и S — линейный, ограниченный оператор из H в K.

Настоящая заметка продолжает данный круг исследований и является продолжением работы [1]. Мы установим аналог теоремы Стайнспринга для ковариантных, относительно действия некоторой группы, вполне положительных отображений, заданных на локальной C^*-алгебре, и принимающих значение в пространстве полуторалинейных форм на гильбертовом C^*-модуле. Такие полуторалинейные формы естественно возникают в задачах современной квантовой механики [7].

1. Основные понятия

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию и используемые обозначения. Все необходимые сведения о локальных C^*-алгебрах, гильбертовых C^*-модулях и вполне положительных отображениях можно найти в [8–10]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел. Всюду ниже будем полагать, что внутренние произведения сопряженно линейны по второй переменной и линейны по первой переменной.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть A — инволютивная алгебра и $p : A \to \mathbb{R}_+$ — полунорма на A, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $p(xy) \leq p(x)p(y)$ для любых $x, y \in A$;
2. $p(x) = p(x^*)$ для любого $x \in A$.

Если, кроме того, для любого $x \in A$ справедливо равенство $p(x^*x) = p(x)^2$, то p называется C^**-полунормой.* Инволютивная топологическая алгебра, полная относительно топологии, задаваемой направленным семейством C^*-полунорм $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ называется *локальной* $C^\star$*-алгеброй.*

Рассмотрим некоторые примеры.

П р и м е р 1. Каждая C^*-алгебра является локальной C^*-алгеброй.

П р и м е р 2. Каждая замкнутая $*$-подалгебра локальной C^*-алгебры является локальной C^*-алгеброй.

Напомним, что для локальной C^*-алгебры A элемент $x \in A$ называется *положительным*, если $x = x^*$ и $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$, где $\sigma(x)$ — это спектр элемента x. Множество всех положительных элементов алгебры A обозначается через A_+.

Линейное отображение $\varphi : A \to B$ локальных C^*-алгебр A и B называется *положительным*, если $\varphi(A_+) \subset B_+$. Для локальной C^*-алгебры A через $M_n(A)$ обозначается $*$-алгебра всех квадратных $n \times n$ матриц с элементами из A. Известно, что $M_n(A)$ также является локальной C^*-алгеброй. Отметим, что сложение, инволюция и умножение матриц, а также умножение на элемент основного поля задаются так же, как и в случае скалярных матриц. Отметим также, что матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(A)$ является положительной тогда и только тогда, когда для любого n-набора $c_1, \ldots, c_n$ элементов алгебры A выполняется неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^n c_i^* a_{ij} c_j \geq 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть B некоторая C^*-алгебра. *Предгильбертовым B-модулем* называется комплексное векторное пространство $\mathcal{M}$, которое также является правым B-модулем, снабженное B-значным скалярным произведением, т. е. отображением $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to B$, удовлетворяющим свойствам:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle \text{ для любых } x, y, z \in \mathcal{M};\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

$$\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b \text{ для любых } x, y \in \mathcal{M};\ b \in B; \tag{2}$$

$$\langle x, y \rangle^\star = \langle y, x \rangle \text{ для любых } x, y \in \mathcal{M}; \tag{3}$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ для любого } x \in \mathcal{M}; \tag{4}$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ для любого } x \in \mathcal{M}. \tag{5}$$

Будем говорить, что $\mathcal{M}$ это *гильбертов* C^*-модуль, если $\mathcal{M}$ является банаховым пространством, относительно нормы $\|x\| = \|x\|_{\mathcal{M}} := \sqrt{\|\langle x, x \rangle\|_B}$, $x \in \mathcal{M}$. Для любого подмножества $D \subset \mathcal{M}$ через $[D]$ будем обозначать замкнутый гильбертов C^*-подмодуль, порожденный D.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — гильбертовы C^*-модули над C^*-алгеброй B. Линейный оператор $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *B-линейным*, если для любых $v \in \mathcal{M}$, $b \in B$ справедливо равенство $T(vb) = T(v)b$. Множество всех B-линейных операторов из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ обозначается $L_B(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ или просто $L(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, если ясно, о какой алгебре B идет речь. Говорят, что линейный оператор $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *допускает сопряженный*, если существует линейный оператор $S : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, такой, что $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Sv \rangle$ для любых элементов $u \in \mathcal{M}$, $v \in \mathcal{N}$. Тогда S называется *сопряженным* оператором к T и обозначается T^*. Векторное пространство всех линейных операторов

$T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, допускающих сопряженный, обозначается через $\mathcal{L}_B(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Известно, что каждый линейный оператор, допускающий сопряжение, является B-линейным и $\mathcal{L}_B(\mathcal{M}) = \mathcal{L}_B(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ является C^*-алгеброй (см. [8, гл. 1]).

Определение 4. Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над C^*-алгеброй B. Отображение $\mathcal{P} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to B$ называется $\mathbb{B}$-*полуторалинейной формой*, если для любых элементов $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $u, v, w \in \mathcal{M}$ и $b \in B$ выполняются следующие условия:

1. $P(u, \alpha v + \beta w) = \alpha P(u, v) + \beta P(u, w)$;
2. $P(u, vb) = P(u, v)b$;
3. $P(u, v) = P(v, u)^*$.

Если кроме того $P(u, u) \geq 0$ для любого элемента $u \in \mathcal{M}$, то форма P называется *положительной*. Множества всех полуторалинейных и положительных полуторалинейных форм на $\mathcal{M}$ обозначается $S_B(\mathcal{M})$ и $S_B(\mathcal{M})_+$ соответственно. Пусть теперь A — локальная C^*-алгебра. Линейное отображение $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ называется *положительным*, если $\Phi(A_+) = S_B(\mathcal{M})_+$. Рассмотрим квадратную матрицу $(P(i, j))_{i,j=1}^n$ элементами которой являются полуторалинейные формы на $\mathcal{M}$. Для множества всех таких матриц будем использовать обозначение $M_n(S_B(\mathcal{M}))$. Ясно, что в случае $n = 1$ имеет место равенство $M_n(S_B(\mathcal{M})) = S_B(\mathcal{M})$. Матрица $(P(i, j))_{i,j=1}^n$ называется *положительной*, если для любого n-набора $v_1, \ldots, v_n$ элементов модуля $\mathcal{M}$ выполняется включение

$$(P(i, j)(v_i, v_j))_{i,j=1}^n \in M_n(B)_+.$$

Определение 5. Линейное отображение $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ называется *вполне положительным*, если линейное отображение $\Phi^n : M_n(A) \to M_n(S_B(\mathcal{M}))$, заданное формулой

$$\Phi^n([a_{ij}]_{i,j=1}^n) = [\Phi(a_{ij})]_{i,j=1}^n$$

является положительным для любого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 6. Пусть G — группа, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над C^*-алгеброй B и A — унитальная локальная C^*-алгебра. Через $\mathrm{Aut}(A)$ и $GL_B(\mathcal{M})$ обозначим группы всех $*$-автоморфизмов A и всех B-линейных биекций модуля $\mathcal{M}$ соответственно. *Действием* G на A называется гомоморфизм групп $\eta : G \to \mathrm{Aut}(A)$. *Представлением* группы G в $\mathcal{M}$ называется гомоморфизм $U : G \to GL_B(\mathcal{M})$. Вполне положительное отображение $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ называется (η, U)-*ковариантным*, если равенство

$$\Phi_{\eta(g)x}(u, v) = \Phi_x(U(g^{-1})u, U(g^{-1})v)$$

выполняется для любых $g \in G$, $x \in A$, $u, v \in \mathcal{M}$.

2. Основные результаты

В настоящем разделе мы докажем основной результат — теорему о дилатации вполне положительного, ковариантного отображения. Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

П р е д л о ж е н и е 1. *[1, Теорема 1] Пусть A — унитальная локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над унитальной C^*-алгеброй B, $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ — вполне положительное отображение. Тогда существует гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над алгеброй B, линейный оператор $\mathcal{D} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $*$-гомоморфизм $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ такие, что для любых $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$ выполняются условия:*

1. $\Phi_x(u, v) = \langle \mathcal{D}u, \pi(x)\mathcal{D}v\rangle$;
2. $\mathcal{N} = [\pi(A)\mathcal{D}(\mathcal{M})]$.

Тройка $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \pi)$, удовлетворяющая условию 1 предложения 1, называется *представлением Стайнспринга* вполне положительного отображения Φ. Представление Стайнспринга называется *минимальным*, если, кроме того, выполняется условие 2 предложения 1. Два представления Стайнспринга $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \pi)$ и $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \pi')$ вполне положительного отображения Φ называются унитарно эквивалентными, если существует унитарный оператор $R : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, такой, что $\mathcal{D}' = R\mathcal{D}$ и $R\pi(a) = \pi'(a)R$ для любого $a \in A$.

П р е д л о ж е н и е 2. *[1, Теорема 2] Пусть A, B, $\mathcal{M}$, $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ такие же, как и в предложении 1. Тогда любые два минимальных представления Стайнспринга вполне положительного отображения Φ унитарно эквивалентны.*

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть A — унитальная локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над унитальной C^*-алгеброй B, G — группа, η — действие G на A, U — представление G в $\mathcal{M}$ и $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ — (η, U)-ковариантное, вполне положительное отображение. Тогда существует: гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над алгеброй B, линейный оператор $\mathcal{D} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, представление $\overline{U} : G \to \mathcal{U}_B(\mathcal{N})$ и $*$-гомоморфизм $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ такие, что для любых $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$ выполняются условия:*

1. $\mathcal{N} = [\pi(A)\mathcal{D}(\mathcal{M})]$;
2. $\Phi_x(u, v) = \langle \mathcal{D}u, \pi(x)\mathcal{D}v\rangle$, $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$;
3. $\mathcal{D}U(g) = \overline{U}(g)\mathcal{D}$ *для любого* $g \in G$;
4. $\overline{U}(g)\pi(x) = (\pi \circ \eta(g)(x)\overline{U}(g)$ *для любых* $g \in G$, $x \in A$.

Если кроме того $(\mathcal{N}', \pi', \mathcal{D}', U')$ — другая другая четверка, удовлетворяющая условиям $(1) - (4)$ теоремы 1, то существует унитарный оператор $W : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, такой, что $W\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, $W\pi(x) = \pi'(x)W$ для всех $x \in A$ и $W\overline{U}(g) = \overline{U}'(g)W$ для всех $g \in G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя предложение 1 найдем тройку $(\mathcal{N}, \pi, \mathcal{D})$, где $\mathcal{N}$ — гильбертов C^*-модуль над алгеброй B, $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ — $*$-гомоморфизм и $\mathcal{D}$ — линейный оператор из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ такие, что выполняются условия 1 и 2 теоремы 1. Возьмем теперь произвольный элемент g группы G. Покажем, что тройка $(\mathcal{N}, \rho, \mathcal{R})$, где $\rho = \pi \circ \eta(g)$ и $\mathcal{R} = \mathcal{D}U(g)$, также удовлетворяет тем же условиям 1 и 2. Действительно в силу элементарных тождеств:

$$x = \eta(g)(\eta(g^{-1})x),\ u = U(g^{-1})(U(g)u),\ v = U(g^{-1})(U(g)v),$$

имеем

$$\Phi_x(u,v) = \Phi_{\eta(g^{-1})(\eta(g)x)}(U(g^{-1})(U(g)u), U(g^{-1})(U(g)v)) =$$
$$\Phi_{\eta(g)x}(U(g)U(g^{-1})(U(g)u), U(g)U(g^{-1})(U(g)v)) =$$
$$\Phi_{\eta(g)x}(U(g)u, U(g)v) = \langle \mathcal{D}U(g)u, \pi(\eta(g)(x))\mathcal{D}U(g)v\rangle =$$
$$\langle \mathcal{R}u, \rho(x)\mathcal{R}v\rangle.$$

Так как множество $\{\pi(x)\mathcal{D}(u) : x \in A,\ u \in \mathcal{M}\}$ совпадает с множеством $\{\pi\circ\eta(g)(x)\mathcal{D}U(g)(u) : x \in A,\ u \in \mathcal{M}\}$, то совпадают порожденные ими замкнутые подмодули в $\mathcal{N}$, в силу чего

$$[\pi(A)\mathcal{D}(\mathcal{M})] = [\rho(A)\mathcal{R}(\mathcal{M})] = \mathcal{N}.$$

В силу предложения 2 существует унитарный оператор $\overline{U}(g) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, такой, что $\overline{U}(g)\mathcal{D} = \mathcal{D}U(g)$ и $\overline{U}(g)\pi(x) = (\pi \circ \eta(g)(x)\overline{U}(g)$. Кроме того

$$\overline{U}(gh) = \overline{U}(g)\overline{U}(h),\ \ g, h \in G.$$

Таким образом задан гомоморфизм $\overline{U} : G \to GL_B(\mathcal{M})$, удовлетворяющий условию 3 теоремы 1. Пусть теперь $(\mathcal{N}', \pi', \mathcal{D}', \overline{U}')$ — другая четверка, удовлетворяющая условиям $(1)-(4)$ теоремы 1 и пусть $W : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ — унитарный оператор, такой, что $W\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ и $W\pi(x) = \pi'(x)W$ для любых $x \in A$. Заметим, что существование такого оператора гарантируется предложением 2. Тогда для любых $g \in B, x \in A$ и $v \in \mathcal{M}$ можем написать

$$W\overline{U}(g)\pi(x)\mathcal{D}v = W\pi(\eta(g)x)\mathcal{D}U(g)v =$$
$$\pi'(\eta(g)x)\mathcal{D}'U(g)v = U'(g)v\pi'(x)\mathcal{D}'v =$$
$$U'(g)W\pi(x)\mathcal{D}v.$$

Отсюда выводим, что $W\overline{U}(g) = \overline{U}'(g)W$ для любых $g \in B$. $\square$

Список литературы

[1] А. В. Калиниченко, И. Н. Малиев, М. А. Плиев, “Модульные полуторалинейные формы и обобщенное представление Стайнспринга”, *Известия вузов. Математика*, **62**:12 (2018), 50–59.

[2] И. Н. Малиев, М. А. Плиев, “О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными C^*-алгебрами”, *Известия вузов. Математика*, **56**:12 (2012), 51–58.

[3] М. А. Плиев, И. Д. Цопанов, “О представлении типа Стайнспринга для n-наборов вполне положительных отображений в гильбертовых C^*-модулях”, *Известия вузов. Математика*, **58**:11 (2014), 41–49.

[4] J. P. Pellonpaa, K. Ylinen, “Modules, completely positive maps, and a generalized KSGNS construction”, *Positivity*, **15**:3 (2011), 509–525.

[5] M. S. Moslehian, A. G. Kusraev, M. A. Pliev, “Matrix KSGNS construction and a Radon-Nikodym type theorem”, *Indagationes Mathematicae*, **28**:5 (2017), 938–952.

[6] F. Stinspring, "Positive functions on C^*-algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**:2 (1955), 211–216.

[7] D. A. Dubin, J. Kiukas, J. P. Pellonpaa, K. Ylinen, "Operator integrals and sesquilinear forms", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **413** (2014), 250–268.

[8] V. Manuilov, E. Troitsky, *Hilbert C^*-modules*, American Mathematical Society, Providence, 2005.

[9] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., San Diego; Academic Press Limited, London, 1990.

[10] M. Fragoulopoulou, *Topological Algebras with Involution.* V. 200, 1st ed., Elsevier, North Holland, 2005.

References

[1] A. V. Kalinichenko, I. N. Maliev, M. A. Pliev, "Modular sesquilinear forms and generalized stinespring representation", *Russian Mathematics*, **62**:12 (2018), 42–49.

[2] I. N. Maliev, M. A. Pliev, "A stinespring type representation for operators in Hilbert modules over local $C*$-algebras", *Russian Mathematics*, **56**:12 (2012), 43–49.

[3] M. A. Pliev, I. D. Tsopanov, "On representation of Stinespring's type for n-tuples of completely positive maps in Hilbert C^*-modules", *Russian Mathematics*, **58**:11 (2014), 36–42.

[4] J. P. Pellonpaa, K. Ylinen, "Modules, completely positive maps, and a generalized KSGNS construction", *Positivity*, **15**:3 (2011), 509–525.

[5] M. S. Moslehian, A. G. Kusraev, M. A. Pliev, "Matrix KSGNS construction and a Radon-Nikodym type theorem", *Indagationes Mathematicae*, **28**:5 (2017), 938–952.

[6] F. Stinspring, "Positive functions on C^*-algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**:2 (1955), 211–216.

[7] D. A. Dubin, J. Kiukas, J. P. Pellonpaa, K. Ylinen, "Operator integrals and sesquilinear forms", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **413** (2014), 250–268.

[8] V. Manuilov, E. Troitsky, *Hilbert C^*-modules*, American Mathematical Society, Providence, 2005.

[9] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., San Diego; Academic Press Limited, London, 1990.

[10] M. Fragoulopoulou, *Topological Algebras with Involution.* V. 200, 1st ed., Elsevier, North Holland, 2005.

Информация об авторе

Эльсаев Якуб Витальевич, аспирант. Владикавказский научный центр РАН, г. Владикавказ, Российская Федерация. E-mail: zelimus-951@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8053-3039

Поступила в редакцию 20 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 18 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Information about the author

Yakub V. Elsaev, Post-Graduate student. Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Science, Vladikavkaz, Russian Federation. E-mail: zelimus-951@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8053-3039

Received 20 May 2019
Reviewed 18 June 2019
Accepted for press 23 August 2019