ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-293-315
УДК 517.927

О разрешимости каузальных функциональных включений с бесконечным запаздыванием

Марина Михайловна КУЛМАНАКОВА[1] **, Елена Леонидовна УЛЬЯНОВА**[2]
[1] ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
394064, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4291-8704, e-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. 20 лет Октября, 84
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-1159, e-mail: ulhelen@mail.ru

On the solvability of causal functional inclusions with infinite delay

Marina M. KULMANAKOVA[1] **, Elena L. ULIANOVA**[2]
[1] "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy"
54A Staryih bolshevikov St., Voronezh 394064, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4291-8704, e-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
[2] Voronezh State Technical University
84, 20 letiya Oktyabrya St., Voronezh 394006, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-1159, e-mail: ulhelen@mail.ru

Аннотация. В данной статье развиваются результаты работ, посвященных исследованию задач для функционально-дифференциальных уравнений и включений с каузальными операторами, на случай бесконечного запаздывания. Во введении обосновывается актуальность темы исследования и приведены ссылки на соответствующие работы А. Н. Тихонова, C. Corduneanu, А. И. Булгакова, Е. С. Жуковского, В. В. Обуховского и P. Zecca. Во втором разделе представлена необходимая информация из теории уплотняющих многозначных отображений и мер некомпактности, также вводится понятие многозначного каузального оператора с бесконечным запаздыванием, которое иллюстрируется примерами. В следующем разделе формулируется задача Коши для функционального включения, содержащего композицию многозначного и однозначного каузальных операторов; изучаются свойства мультиоператора, неподвижные точки которого являются решениями задачи. В частности, для этого мультиоператора получены достаточные условия уплотняемости относительно соответствующей меры некомпактности. На этой основе в четвертом разделе получаем локальную и глобальную теоремы существования решений и показываем непрерывную зависимость множества решений от начальных данных. Далее рассматривается случай включений с полунепрерывными снизу мультиоператорами. В последнем разделе обобщаются некоторые результаты для полулинейных дифференциальных включений и интегро-дифференциальных включений Вольтерры с бесконечным запаздыванием.

Ключевые слова: каузальный оператор; функциональное включение; задача Коши; интегро-дифференциальное включение Вольтерры; мера некомпактности; неподвижные точки; уплотняющие отображения

Для цитирования: *Кулманакова М.М., Ульянова Е.Л.* О разрешимости каузальных функциональных включений с бесконечным запаздыванием // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 293–315. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-293-315.

Abstract. In the present article we develop the results of works devoted to the study of problems for functional differential equations and inclusions with causal operators, in case of infinite delay. In the introduction of the article we substantiates the relevance of the research topic and provides links to relevant works A. N. Tikhonov, C. Corduneanu, A. I. Bulgakov, E. S. Zhukovskii, V. V. Obukhovskii and P. Zecca. In section two we present the necessary information from the theory of condensing multivalued maps and measures of noncompactness, also introduced the concept of a multivalued causal operator with infinite delay and illustrated it by examples. In the next section we formulate the Cauchy problem for functional inclusion, containing the composition of multivalued and single-valued causal operators; we study the properties of the multiopera-tor whose fixed points are solutions of the problem. In particular, sufficient conditions under which this multioperator is condensing on the respective measures of noncompacness. On this basis, in section four we prove local and global results and continuous dependence of the solution set on initial data. Next the case of inclusions with lower semicontinuous causal multioperators is considered. In the last section we generalize some results for semilinear differential inclusions and Volterra integro-differential inclusions with infinite delay.

Keywords: causal operator; functional inclusion; Cauchy problem; Volterra integro-differential inclusion; measure of noncompactness; fixed point; condensing map

For citation: Kulmanakova M.M., Ulianova E.L. O razreshimosti kauzalnyh funkcionalnyh vklyuchenij s beskonechnym zapazdyvaniem [On the solvability of causal functional inclusions with infinite delay]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 293–315. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-293-315. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение

Исследование систем, описываемых дифференциальными и функциональными уравнениями с каузальными операторами, привлекает внимание многих исследователей. Понятие каузального (или вольтеррового по А.Н. Тихонову [1]) оператора берет свое начало в математической физике и технике и оказывается весьма эффективным при решении задач в дифференциальных уравнениях, интегро-дифференциальных уравнениях, функционально-дифференциальные уравнениях с конечным или бесконечным запаздыванием, интегральных уравнениях Вольтерры, функциональных уравнениях нейтрального типа и др. (см., например, [2]).

Исследованию каузальных операторов различного типа посвящены работы [3], [4], уравнений с каузальными операторами — [5], [6], включений с каузальными операторами — [7], [8], теоремам существования решений и описанию их качественных свойств и различным приложениям [9], [10] и др. Отметим также ряд работ, в которых изучались различные задачи для операторных и функционально-дифференциальных уравнений и включений с каузальными операторами (см., например, [2], [11] и имеющиеся там ссылки).

В настоящей статье, развивая результаты работы [11], мы вводим понятие многозначного каузального оператора с бесконечным запаздыванием и рассматриваем задачу Коши в банаховом пространстве для различных классов функциональных включений с каузальными операторами. Методы теории топологической степени уплотняющих отображений применяются к получению результатов о существовании локальных и глобальных решений для этой задачи и исследования непрерывной зависимости множества решений от начальных данных. В качестве приложения мы получаем обобщения некоторых теорем существования для полулинейных функционально-дифференциальных включений и интегро-дифференциальных включений Вольтерры с бесконечным запаздыванием.

2. Предварительные сведения

2.1. Многозначные отображения и меры некомпактности

Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, символом $P(Y)$ обозначим совокупность всех непустых подмножеств Y. Обозначим

$$C(Y) = \{W \in P(Y) : W \text{ замкнутое множество}\};$$

$$Cv(Y) = \{W \in C(Y) : W \text{ выпуклое множество}\};$$

$$K(Y) = \{W \in P(Y) : W \text{ компактное множество}\};$$

$$Kv(Y) = \{W \in K(Y) : W \text{ выпуклое множество}\}.$$

Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ будем также обозначать $\mathcal{F} : X \multimap Y$. Напомним некоторые понятия (см., например, [12], [13]).

О п р е д е л е н и е 2.1.1. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ называется

- (i) *полунепрерывным сверху (пн.св.),* если $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V}) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset \mathcal{V}\}$ является открытым подмножеством X для каждого открытого множества $\mathcal{V} \subset Y$;
- (ii) *полунепрерывным снизу (пн.сн.),* если $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{W})$ является замкнутым подмножеством X для каждого замкнутого множества $\mathcal{W} \subset Y$;
- (iii) *замкнутым,* если его график $G_F = \{(x,y) : x \in X,\, y \in F(x)\}$ является замкнутым подмножеством $X \times Y$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства.

Лемма 2.1.1. *[13, Theorem 1.1.12]. Пусть замкнутое мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ является квазикомпактным, т. е. для каждого компактного множества $K \subset X$ множество $\mathcal{F}(K) = \cup_{x\in K} F(x)$ относительно компактно в Y. Тогда мультиотображение $\mathcal{F}$ пн.св.*

О п р е д е л е н и е 2.1.2. Мультифункция $\mathcal{F} : [a,b] \subset \mathbb{R} \to K(Y)$ называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение отрезка $[a,b]$ на конечное семейство непересекающихся измеримых подмножеств $\{I_j\}$, $\bigcup_j I_j = [a,b]$, что $\mathcal{F}$ постоянно на каждом I_j.

О п р е д е л е н и е 2.1.3. Мультифункция $\mathcal{F} : [a, b] \subset \mathbb{R} \to K(Y)$ называется *сильно измеримой*, если существует последовательность $\mathcal{F}_n : [a, b] \to K(Y)$, $n = 1, 2, \ldots$ ступенчатых мультифункций, таких что

$$\lim_{n\to\infty} h(\mathcal{F}_n(t), \mathcal{F}(t)) = 0 \quad \text{для} \quad \mu-\text{п.в. } t \in [a, b],$$

где μ — мера Лебега на $[a, b]$ и h — хаусдорфова метрика на $K(Y)$.

О п р е д е л е н и е 2.1.4. Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство, $(\mathcal{A}, \geq)$ — частично упорядоченное множество. Функция $\beta : P(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется *мерой некомпактности (МНК)* в $\mathcal{E}$, если

$$\beta(\overline{co}\,\Omega) = \beta(\Omega) \quad \text{для каждого } \Omega \in P(\mathcal{E}),$$

где $\overline{co}\,\Omega$ обозначает выпуклое замыкание множества Ω.

Мера некомпактности β называется

1) *монотонной*, если для $\Omega_0, \Omega_1 \in P(\mathcal{E})$ из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;

2) *несингулярной*, если $\beta(\{e\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ для каждого $e \in \mathcal{E}$, $\Omega \in P(\mathcal{E})$;

3) *инвариантной относительно объединения с компактным множеством*, если $\beta(\{K\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ для каждого относительно компактного множества $K \subset \mathcal{E}$, $\Omega \in P(\mathcal{E})$;

4) *вещественной*, если $\mathcal{A} = [0, +\infty]$ с естественным порядком и для любого ограниченного множества $\Omega \in P(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\Omega) < \infty$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в нормированном пространстве, то мера некомпактности β называется

5) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in P(\mathcal{E})$;

6) *правильной*, если $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности Ω.

Мерой некомпактности, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является *мера некомпактности Хаусдорфа*

$$\chi_{\mathcal{E}}(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

В качестве других примеров рассмотрим меры некомпактности, определенные на пространстве непрерывных функций $C([a, b]; E)$ со значениями в банаховом пространстве E:

(1) *модуль послойной некомпактности:*

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [a,b]} \chi_E(\Omega(t)),$$

где χ_E — мера некомпактности Хаусдорфа в E и $\Omega(t) = \{y(t) : y \in \Omega\}$;

(2) *затухающий модуль послойной некомпактности:*

$$\gamma(\Omega) = \sup_{t \in [a,b]} e^{-Lt} \chi_E(\Omega(t)),$$

где $L > 0$ заданное число;

(3) *модуль равностепенной непрерывности:*

$$\operatorname{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{y\in\Omega} \max_{|t_1-t_2|\le\delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Эти меры некомпактности удовлетворяют всем вышеперечисленным свойствам, кроме правильности.

О п р е д е л е н и е 2.1.5. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется *уплотняющим относительно меры некомпактности* β (или β*-уплотняющим*), если для каждого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, которое не является относительно компактным, выполняется $\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ — непустое выпуклое замкнутое множество, V — непустое ограниченное (относительно) открытое подмножество $\mathcal{D}$, β — монотонная несингулярная МНК в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \overline{V} \to Kv(\mathcal{D})$ — пн.св., β-уплотняющее мультиотображение, такое, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in \partial V$, где $\overline{V}$ и ∂V обозначают замыкание и границу множества V в индуцированной топологии $\mathcal{D}$.

В таких предположениях определена относительная топологическая степень

$$\deg_{\mathcal{D}}\left(i - \mathcal{F}, \overline{V}\right)$$

соответствующего многозначного векторного поля $i-\mathcal{F}$, удовлетворяющая стандартным свойствам (см., например, [13], [14]). В частности, условие

$$\deg_{\mathcal{D}}\left(i - \mathcal{F}, \overline{V}\right) \ne 0$$

равносильно тому, что множество неподвижных точек $Fix\mathcal{F} = \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ непустое компактное подмножество V.

Применение теории топологической степени приводит к следующим принципам неподвижной точки, которые будут использованы в дальнейшем.

Теорема 2.1.1. *[13, Corollary 3.3.1]. Пусть $\mathcal{M}$ — непустое ограниченное выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — пн.св., β-уплотняющее мультиотображение. Тогда множество $Fix\mathcal{F}$ его неподвижных точек не пусто.*

Теорема 2.1.2. *[13, Theorem 3.3.4]. Пусть $a \in V$ — внутренняя точка; пн.св. β-уплотняющее мультиотображение $\mathcal{F} : \overline{V} \to Kv(D)$ удовлетворяет граничному условию*

$$x - a \notin \lambda(\mathcal{F}(x) - a)$$

для всех $x \in \partial V$ и $0 < \lambda \le 1$. Тогда $Fix\mathcal{F}$ — непустое компактное множество.

2.2. Фазовое пространство бесконечных запаздываний

Мы будем использовать аксиоматическое определение фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное J.K. Hale и J. Kato (см. [15], [16]). Пространство $\mathcal{B}$ будет рассматриваться как линейное топологическое пространство функций, заданных на $(-\infty, 0]$, со значениями в банаховом пространстве E, наделенное полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.

Для любой функции $x\colon (-\infty, T] \to E$, где $T > 0$, и каждого $t \in [0, T]$ x_t представляет собой функцию из $(-\infty, 0]$ в E, заданную как

$$x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in (-\infty, 0].$$

Будем предполагать, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

($\mathcal{B}1$) если функция $x : (-\infty; T] \to E$ непрерывна на $[0;T]$ и $x_0 \in \mathcal{B}$, то для любого $t \in [0;T]$ выполнено:

- (i) $x_t \in \mathcal{B}$;
- (ii) функция $t \mapsto x_t$ непрерывна;
- (iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \le K(t) \sup_{0\le\tau\le t} \|x(\tau)\| + M(t)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$, где функции $K, M : [0;T] \to [0;+\infty)$ не зависят от x, функция K строго положительна и непрерывна, а M локально ограничена.

($\mathcal{B}0$) существует $l > 0$ такое, что $\|\psi(0)\|_E \le l\|\psi\|_{\mathcal{B}}$, для всех $\psi \in \mathcal{B}$.

Отметим, что при данных условиях пространство C_{00} всех непрерывных функций из $(-\infty,0]$ в E с компактным носителем входит в любое фазовое пространство $\mathcal{B}$ [16, Proposition 1.2.1].

Будем предполагать дополнительно, что выполнено следующее условие:

($\mathcal{BC}1$) если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_{00}$ сходится к функции ψ компактно (т. е. равномерно на каждом компактном подмножестве $(-\infty, 0]$), то $\psi \in \mathcal{B}$ и $\lim_{n\to+\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Из условия ($\mathcal{BC}1$) вытекает, что банахово пространство ограниченных непрерывных функций $BC = BC((-\infty, 0]; E)$ непрерывно вложено в $\mathcal{B}$. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *[16, Proposition 7.1.1].*

- (i) $BC \subset \overline{C_{00}}$, *где* $\overline{C_{00}}$ *обозначает замыкание* C_{00} *в* $\mathcal{B}$;
- (ii) *если равномерно ограниченная последовательность* $\{\psi_n\}$ *в* BC *сходится к функции* ψ *компактно на* $(-\infty, 0]$, *то* $\psi \in \mathcal{B}$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$;
- (iii) *найдется константа* $L > 0$ *такая, что* $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \le L\|\psi\|_{BC}$ *для всех* $\psi \in BC$.

Наконец, будем предполагать выполненным следующее условие:

($\mathcal{BC}2$) если $\psi \in BC$ и $\|\psi\|_{BC} \ne 0$, то $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \ne 0$.

Из этого предположения вытекает, что пространство BC, наделенное $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, является нормированным пространством. Мы будем обозначать его $\mathcal{BC}$.

Рассмотрим примеры фазовых пространств, удовлетворяющих всем вышеуказанным условиям.

(1) Для $\gamma > 0$ пусть $\mathcal{B} = C_\gamma$ — пространство непрерывных функций $\varphi : (-\infty; 0] \to E$, имеющих предел $\lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta)$ и

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-\infty<\theta\le 0} e^{\gamma\theta}\|\varphi(\theta)\|.$$

(2) (Пространства с «затухающей памятью») Пусть $\mathcal{B} = C_\rho$ — пространство таких функций $\varphi : (-\infty; 0] \to E$, что при некотором $k > 0$ выполнено:

(a) функция φ непрерывна на $[-k; 0]$;

(b) функция φ измерима по Лебегу на $(-\infty; -k)$ и найдется положительная интегрируемая по Лебегу функция $\rho : (-\infty; -k) \to \mathbb{R}_+$ такая, что функция $\rho\varphi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty; -k)$; более того, найдется локально ограниченная функция $P : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $\xi \le 0$ справедливо $\rho(\xi + \theta) \le P(\xi)\rho(\theta)$ при п.в. $\theta \in (-\infty; -k)$.

Норма в этом пространстве определяется формулой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-k \le \theta \le 0} \|\varphi(\theta)\| + \int\limits_{-\infty}^{-k} \rho(\theta)\|\varphi(\theta)\| d\theta.$$

Простой пример последнего пространства получается, если положить $\rho(\theta) = e^{d\theta}$, $d \in \mathbb{R}$.

2.3. Каузальные мультиоператоры с бесконечным запаздыванием

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $L^1([0,T]; E)$ — банахово пространство всех суммируемых по Бохнеру функций $f : [0,T] \to E$ с обычной нормой

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^T \|f(s)\|_E \, ds.$$

В обозначении данного пространства при $E = \mathbb{R}$ будем опускать этот символ, а конус неотрицательных суммируемых функций в пространстве $L^1([0,T])$ будем обозначать $L^1_+([0,T])$.

Для произвольного $\mathcal{N} \subset L^1([0,T]; E)$ и любого $\tau \in (0,T)$ определим сужение $\mathcal{N}$ на $[0,\tau]$ как множество

$$\mathcal{N}\,|_{[0,\tau]} = \{f\,|_{[0,\tau]} : f \in \mathcal{N}\}.$$

Обозначим символом $\mathcal{C}((-\infty; T]; E)$ нормированное пространство ограниченных непрерывных функций $x : (-\infty; T] \to E$, наделенное нормой

$$\|x\|_{\mathcal{C}} = \|x_0\|_{\mathcal{B}} + \|x\,|_{[0;T]}\|_C,$$

где $\|\cdot\|_C$ — обычная sup-норма пространства $C([0;T]; E)$.

О п р е д е л е н и е 2.3.1. Мультиотображение $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty, T]; E) \multimap L^1([0,T]; E)$ будем называть *каузальным мультиоператором*, если для каждого $\tau \in (0,T)$ и для любых $u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ условие $u\,|_{(-\infty,\tau]} = v\,|_{(-\infty,\tau]}$ влечет $\mathcal{Q}(u)\,|_{[0,\tau]} = \mathcal{Q}(v)\,|_{[0,\tau]}$.

Приведем примеры каузальных мультиоператоров.

П р и м е р 2.3.1. Предположим, что мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для любого $\psi \in \mathcal{BC}$ мультифункция $F(\cdot, \psi) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathcal{BC} \to Kv(E)$ пн.св.;

$(F3)$ для любого $r > 0$ найдется функция $\alpha_r \in L^1_+[0,T]$ такая, что

$$\|F(t,\psi)\|_E := \sup\left\{\|z\|_E : z \in F(t,\psi)\right\} \le \alpha_r(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \le r$.

Из условий $(F1)-(F3)$ и $(\mathcal{B}1)$ вытекает, что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to P(L^1([0,T];E))$, заданный как

$$\mathcal{P}_F(x) = \{f \in L^1([0,T];E) : f(t) \in F(t,x_t) \text{ при п.в. } t \in [0,T]\} \tag{2.3.1}$$

корректно определен (см., например, [12], [13]). Ясно, что мультиоператор $\mathcal{P}_F$ является каузальным.

П р и м е р 2.3.2. Пусть $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ — мультиотображение, удовлетворяющее условиям $(F1)-(F3)$ Примера 2.3.1. Предположим, что $\{K(t,s) : 0 \le s \le t \le T\}$ является непрерывным (с соответствующей нормой) семейством ограниченных линейных операторов в E и $m \in L^1([0,T];E)$ — заданная функция. Рассмотрим интегральный мультиоператор Вольтерры $\mathcal{G} : \mathcal{C}\left((-\infty,T];E\right) \multimap L^1\left([0,T];E\right)$, определенный соотношением

$$\mathcal{G}(u)(t) = m(t) + \int_0^t K(t,s)F(s,u_s)ds,$$

т. е.

$$\mathcal{G}(u) = \left\{y \in L^1\left([0,T];E\right) : y(t) = m(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds,\ f \in \mathcal{P}_F(u)\right\}. \tag{2.3.2}$$

Также очевидно, что мультиоператор $\mathcal{G}$ является каузальным.

П р и м е р 2.3.3. Пусть фазовое пространство $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию $(\mathcal{B}1)$, мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to K(E)$ удовлетворяет условию $(F3)$ и следующему условию *почти полунепрерывности снизу*:

(F_L) существует последовательность непересекающихся компактных подмножеств $\{J_n\}$, $J_n \subseteq [0,T]$, $n = 1,2,\ldots$ такая, что $\mu\left([0,T] \setminus \bigcup_n J_n\right) = 0$ и сужение F на каждое множество $J_n \times \mathcal{BC}$ пн.сн.

Тогда (см., например, [12], [13], [17]) суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}\left((-\infty,T];E\right) \multimap L^1\left([0,T];E\right)$ корректно определен и является каузальным.

3. Функциональные включения с каузальными операторами

Будем предполагать, что каузальный оператор $\mathcal{Q} : \mathcal{C}\left((-\infty,T];E\right) \to C\left(L^1\left([0,T];E\right)\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(\mathcal{Q}1)$ $\mathcal{Q}$ является слабо замкнутым в следующем смысле: условия $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}\left((-\infty,T];E\right)$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1\left([0,T];E\right)$, $f_n \in \mathcal{Q}(u_n)$, $n \ge 1$, $u_n \to u_0$, $f_n \rightharpoonup f_0$ влекут $f_0 \in \mathcal{Q}(u_0)$;

$(\mathcal{Q}2)$ для любого $r > 0$ найдется функция $\delta_r(\cdot) \in L^1_+\left([0,T]\right)$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}(u)(t)\|_E \le \delta_r(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и $\|u\|_{\mathcal{C}} \le r$.

($\mathcal{Q}3$) существует функция $\omega : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что

($\omega 1$) для любого $x \in \mathbb{R}_+$ $\omega(\cdot, x) \in L^1_+([0,T])$;

($\omega 2$) для п.в. $t \in [0,T]$ функция $\omega(t,\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является непрерывной, неубывающей и однородной в том смысле, что $\omega(t, \lambda x) = \lambda \omega(t,x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \geq 0$;

($\omega 3$) для каждого ограниченного множества $\Delta \subset \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ выполнено

$$\chi\left(\mathcal{Q}\left(\Delta\right)(t)\right) \leq \omega\Big(t, \sup_{s\in[0,t]} \varphi\left(\Delta_s\right)\Big) \text{ для п.в. } t \in [0,T],$$

где $\Delta_s = \{y_s : y \in \Delta\} \subset \mathcal{BC}$ и φ — модуль послойной некомпактности в $\mathcal{BC}$.

Заметим, что условие ($\omega 2$) означает, что $\omega(t,0) = 0$ для п.в. $t \in [0,T]$, и в качестве примера такой функции мы можем рассмотреть $\omega(t,x) = k(t) \cdot x$, где $k(\cdot) \in L^1_+([0,T])$.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$, который является каузальным в том смысле, что для каждого $\tau \in (0,T]$ и $f, g \in L^1([0,T];E)$ условие $f(t) = g(t)$ для п.в. $t \in [0,\tau]$ влечет $(\mathcal{S}f)(t) = (\mathcal{S}g)(t)$ для всех $t \in [0,\tau]$. Следуя [13], наложим следующие условия на оператор $\mathcal{S}$:

($\mathcal{S}1$) существует $D \geq 0$ такое, что

$$\|\mathcal{S}f(t) - \mathcal{S}g(t)\|_E \leq D \int_0^t \|f(s) - g(s)\|_E ds$$

для любых $f, g \in L^1([0,T];E)$, $\quad 0 \leq t \leq T$;

($\mathcal{S}2$) для любого компакта $K \subset E$ и последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ такой, что $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ для п.в. $t \in [0,T]$ слабая сходимость $f_n \rightharpoonup f_0$ влечет $\mathcal{S}f_n \to \mathcal{S}f_0$.

Предположим также, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет соотношению

($\mathcal{S}3$) $(\mathcal{S}f)(0) = 0$ для каждой функции $f \in L^1([0,T];E)$.

Заметим, что из условия ($\mathcal{S}1$) следует, что оператор $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию Липшица

($\mathcal{S}1'$) $\|\mathcal{S}f - \mathcal{S}g\|_C \leq D\|f - g\|_{L^1}$.

В качестве примера рассмотрим следующий важный класс операторов.

Пусть замкнутый (не обязательно ограниченный) линейный оператор $A\colon D(A) \subset E \to E$ является производящим оператором C_0-полугруппы ограниченных линейных операторов $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$. Оператор $\mathcal{L} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$, определенный формулой

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds, \tag{3.0.1}$$

называется *оператором Коши.*

Заметим, что, взяв $A = 0$, мы получим, как частный случай, «обычный» интегральный оператор $\mathcal{L}_I : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$,

$$\mathcal{L}_I f(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Лемма 3.0.1. *[13, Lemma 4.2.1]. Оператор Коши $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)-(\mathcal{S}3)$.*

Предположим, что $\psi \in \mathcal{BC}$ заданная функция. Для каждого $h \in (0,T]$ и функции $y \in C([0,h];E)$ такой, что $y(0)=\psi(0)$, определим функцию $y[\psi] \in \mathcal{C}((-\infty,h];E)$ равенством

$$y[\psi](t) = \begin{cases} \psi(t), & -\infty \le t < 0, \\ y(t), & 0 \le t \le h\,. \end{cases} \tag{3.0.2}$$

Обозначим $\mathcal{D}_h$ замкнутое выпуклое подмножество $C([0,h];E)$, состоящее из всех функций y, удовлетворяющих условию $y(0)=\psi(0)$.

Из каузальности операторов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ следует, что для каждого $h \in (0,T]$ корректно определены и каузальны сужения $\mathcal{Q}: \mathcal{C}((-\infty,h];E) \multimap L^1([0,h];E)$ и $\mathcal{S}: L^1([0,h];E) \to C([0,h);E)$. Для простоты обозначаем эти сужения теми же символами.

Рассмотрим следующую задачу Коши для функциональных включений с каузальными операторами $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$. При вышеуказанных предположениях будем искать функцию $y \in \mathcal{D}_h$, $0 < h \le T$, удовлетворяющую включению

$$y \in g + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]), \tag{3.0.3}$$

где $g \in \mathcal{D}_h$ заданная функция.

Очевидно, что для каждого y, удовлетворяющего включению (3.0.3), функция $y[\psi]$ имеет вид

$$y[\psi](t) = \begin{cases} \psi(t), & -\infty \le t \le 0, \\ g(t) + (\mathcal{S}f)(t), & 0 < t \le h\,, \end{cases} \tag{3.0.4}$$

где $f \in \mathcal{Q}(y[\psi])$.

Для описания свойств оператора $\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}$ нам понадобятся некоторые дополнительные понятия и утверждения.

Определение 3.0.1. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ называется *полукомпактной*, если она интегрально ограничена, т. е. существует функция $\xi \in L^1_+([0,T])$ такая, что $\|f_n(t)\|_E \le \xi(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$, $n = 1,2\ldots$ и множество $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно для п.в. $t \in [0,T]$.

Лемма 3.0.2. *[13, Proposition 4.2.1.]. Каждая полукомпактная последовательность слабо компактна в $L^1([0,T];E)$.*

Лемма 3.0.3. *[13, Theorem 5.1.1.]. Пусть оператор $\mathcal{S}: L^1([0,T];E) \to C([0,T);E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1')$ и $(\mathcal{S}2)$. Тогда для каждой полукомпактной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ последовательность $\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна в $C([0,T];E)$ и, более того, слабая сходимость $f_n \rightharpoonup f_0$ влечет $\mathcal{S}f_n \to \mathcal{S}f_0$.*

Теперь мы можем рассмотреть следующие свойства мультиоператора $\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}$.

Теорема 3.0.1. *Пусть мультиоператор $\mathcal{Q}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}1)-(\mathcal{Q}3)$ а оператор $\mathcal{S}$ — условиям $(\mathcal{S}1)$, $(\mathcal{S}2)$. Тогда композиция $\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}: \mathcal{C}((-\infty,T];E) \multimap C([0,T];E)$ является пн.св. мультиотображением с компактными значениями.*

Доказательство. Покажем, что мультиоператор $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ является замкнутым. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}((-\infty,T];E)$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$, $x_n \to x_0$, $y_n \in \mathcal{S}\circ\mathcal{Q}(x_n)$, $n \geq 1$, и $y_n \to y_0$. Возьмем произвольную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ такую, что $f_n \in \mathcal{Q}(x_n)$, $y_n = \mathcal{S}(f_n)$, $n \geq 1$. Из условия $(\mathcal{Q}2)$ следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегрально ограничена. Условие $(\mathcal{Q}3)$ означает, что для п.в. $t \in [0,T]$ выполнено

$$\chi\left(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \omega\Big(t, \sup_{s\in[0,t]} \varphi\left(\{(x_n)_s\}_{n=1}^{\infty}\right)\Big) = \omega(t,0) = 0$$

и, следовательно, последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полукомпактна.

Из леммы 3.0.2 следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо компактна, поэтому мы можем предположить, без ограничения общности, что $f_n \rightharpoonup f_0$. Лемма 3.0.3 влечет $y_n = \mathcal{S}f_n \to \mathcal{S}f_0 = y_0$. С другой стороны, применяя условие $(\mathcal{Q}1)$, получаем $f_0 \in \mathcal{Q}(x_0)$ и, более того, $y_0 \in \mathcal{S}\circ\mathcal{Q}(x_0)$, то есть мультиоператор $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ замкнут.

Условия $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$ означают, что для каждого $x \in \mathcal{C}((-\infty,T];E)$ замкнутая в $\mathcal{Q}(x)$ последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полукомпактной и, по лемме 3.0.3, последовательность $\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$ относительно компактна. Компактность множества $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}(u)$ следует из его замкнутости.

И наконец, если рассмотрим сходящуюся последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}((-\infty,T];E)$, произвольную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E,)$ такую, что $f_n \in \mathcal{Q}(x_n)$, то последовательность $\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$ относительно компактна. Следовательно, мультиотображение $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ квазикомпактно и согласно лемме 2.1.1 оно пн.св. □

Замечание 3.0.1. Согласно [13, теорема 1.1.8] из каузальности мультиоператора $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ следует, что при выполнении условий теоремы 3.0.1 для каждого $h \in (0,T)$ отображение $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,h];E) \multimap C([0,h];E)$ обладает теми же свойствами.

Теперь перейдем к нахождению условий, при которых мультиоператор $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ будет являться уплотняющим относительно соответствующей вещественной МНК. Предположим, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию $(\mathcal{S}1)$. Тогда очевидно, что сужение $\mathcal{S} : L^1([0,h];E) \to C([0,h];E)$ для каждого $h \in (0,T)$ удовлетворяет этому же условию. Это также верно и для условия $(\mathcal{S}2)$.

В самом деле, пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,h];E)$ — такая последовательность, что для п.в. $t \in [0,h]$ выполнено $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ для заданного компакта $K \subset E$, и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо сходящейся к функции $f_0 \in L^1([0,h];E)$. Легко видеть, что последовательность продолжений $\{\widetilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ определенная как

$$\widetilde{f}_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & 0 \leq t \leq h, \\ 0 & h < t \leq T, \end{cases}$$

слабо сходится к функции $\widetilde{f}_0 \in L^1([0,T];E)$, определенной таким же образом. Тогда по условию $(\mathcal{S}2)$ имеем $\mathcal{S}\widetilde{f}_n \to \mathcal{S}\widetilde{f}_0$, из чего в силу каузальности следует, что $\mathcal{S}f_n \to \mathcal{S}f_0$.

Выполнение условия $(\mathcal{S}3)$ для сужения $\mathcal{S} : L^1([0,h];E) \to C([0,h];E)$ очевидно.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 3.0.4. *[13, Theorem 4.2.2.]. Пусть последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,h];E)$, $h \in (0,T]$, *интегрально ограничена и существует функция* $\upsilon \in L^1_+([0,h])$ *такая, что*

$$\chi\big(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\big) \leq \upsilon(t) \text{ для п.в. } t \in [0,h].$$

Если оператор $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)$ и $(\mathcal{S}2)$, то

$$\chi\big(\{\mathcal{S}f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\big) \le 2D\int_0^t \upsilon(s)ds \tag{3.0.5}$$

для всех $t \in [0,h]$, где D — константа из условия $(\mathcal{S}1)$.

Для заданного $h \in (0,T]$ рассмотрим меру некомпактности ν в пространстве $C([0,h];E)$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$. На ограниченном подмножестве $\Omega \subset C([0,h];E)$ значения ν определим следующим образом:

$$\nu(\Omega) = \max_{\mathfrak{D}\in\Xi(\Omega)} \left(\gamma\left(\mathfrak{D}\right), mod_{\mathcal{C}}\left(\mathfrak{D}\right)\right),$$

где $\Xi(\Omega)$ — семейство всех счетных подмножеств Ω, mod_C — модуль равностепенной непрерывности и γ — затухающий модуль послойной некомпактности

$$\gamma(\mathfrak{D}) = \sup_{t\in[0,h]} e^{-Lt}\chi(\mathfrak{D}(t)).$$

Здесь константа $L > 0$ выбрана так, что

$$q = \sup_{t\in[0,h]} \big[2D\int_0^t e^{-L(t-s)}\omega(s,1)ds\big] < 1, \tag{3.0.6}$$

где константа D взята из условия $(\mathcal{S}1)$, а функция ω — из условия $(\mathcal{Q}3)$.

Легко видеть, что МНК ν монотонна, несингулярна и алгебраически полуаддитивна. Из теоремы Арцела-Асколи следует, что она также правильная.

Для заданного $h \in (0,T]$ рассмотрим мультиоператор $\Gamma : \mathcal{D}_h \multimap \mathcal{D}_h$ определенный соотношением

$$\Gamma(y) = g + \mathcal{S}\circ\mathcal{Q}(y[\psi]).$$

Теорема 3.0.2. *Пусть каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \multimap L^1([0,T];E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}2)$, $(\mathcal{Q}3)$, каузальный оператор $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ — условиям $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. Тогда мультиоператор Γ является ν-уплотняющим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как МНК ν является алгебраически полуаддитивной и правильной, достаточно доказать утверждение для композиции $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$. Для некоторого $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}_h$ обозначим $\mathcal{N}[\psi]$ подмножество $\mathcal{C}((-\infty,h];E)$ определенное равенством

$$\mathcal{N}[\psi] = \{y[\psi] : y \in D\}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}_h$ ограниченное множество такое, что

$$\nu\left(\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}\left(\Omega[\psi]\right)\right) \ge \nu\left(\Omega\right). \tag{3.0.7}$$

Покажем, что тогда множество Ω является относительно компактным.

Пусть максимум левой части неравенства (3.0.7) достигается на счетном множестве $\mathfrak{D}' = \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,h];E)$. Тогда

$$s_n = \mathcal{S}f_n, \quad f_n \in \mathcal{Q}(y_n[\psi]), \quad n \ge 1,$$

где $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$.

Неравенство (3.0.7) означает, что

$$\gamma(\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty}) \geq \gamma(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}). \tag{3.0.8}$$

Применяя условие $(\mathcal{Q}3)$ и используя свойства функции ω, для п.в. $t \in [0, h]$ получаем

$$\chi\left(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \omega\Big(t, \sup_{s\in[0,t]} \varphi\left(\{y_n[\psi]_s\}_{n=1}^{\infty}\right)\Big) = \omega\left(t, \varphi\left(\{y_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right)\right) =$$

$$= \omega\left(t, e^{Lt}e^{-Lt}\varphi\left(\{y_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right)\right) \leq \omega\left(t, e^{Lt}\gamma\left(\{y_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right)\right) \leq$$
$$\leq \omega\left(t, e^{Lt}\gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right)\right) \leq \omega\left(t, e^{Lt}\right) \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right).$$

По лемме 3.0.4 для каждого $t \in [0, h]$ имеем

$$\chi\left(\{\mathcal{S}f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq 2D\int_0^t \omega\left(s, e^{Ls}\right) ds \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq 2D\int_0^t e^{Ls}\omega\left(s, 1\right) ds \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right). \tag{3.0.9}$$

Теперь из неравенств (3.0.8) и (3.0.9) следует, что

$$\gamma(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq 2D \sup_{t\in[0,h]} \int_0^t e^{-L(t-s)}\omega\left(s, 1\right) ds \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = q \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right),$$

то есть

$$\gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0,$$

и следовательно

$$\varphi\left(\{y_n[\psi]_t\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0$$

для всех $t \in [0, h]$.

Из условий $(\mathcal{Q}2)$, $(\mathcal{Q}3)$ следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полукомпактна, и значит, по лемме 3.0.3, относительно компактностна последовательность $\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно

$$mod_{\mathcal{C}}(\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0,$$

то есть

$$\nu\left(\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}\left(\Omega[\psi]\right)\right) = (0, 0),$$

и из (3.0.7) мы имеем

$$\nu(\Omega) = (0, 0),$$

завершая доказательство. □

4. Существование и непрерывная зависимость решений

Найдем условия, при которых задача Коши (3.0.3) имеет локальные и глобальные решения. Начнем со следующего утверждения.

Теорема 4.0.1. *Пусть каузальный оператор* $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty, T]; E) \to Cv(L^1([0, T]; E))$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{Q}1)$ – $(\mathcal{Q}3)$, *а для линейного каузального оператора* $\mathcal{S} : L^1([0, T]; E) \to C([0, T]; E)$ *выполнены условия* $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. *Тогда существует* $h \in (0, T]$ *такое, что включение* (3.0.3) *имеет решение* $y \in \mathcal{D}_h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $r = \max\left\{\|\psi\|_{\mathcal{B}}, \|g\|_C + \varepsilon\right\}$. Предположим, что $\delta_r \in L^1_+([0,T])$ является функцией, соответствующей r из условия $(\mathcal{Q}2)$, и возьмем $h \in (0,T]$ достаточно малое, для того чтобы

$$D\int_0^h \delta_r(t)dt \le \varepsilon,$$

где D константа из условия $(\mathcal{S}1)$.

Рассмотрим замкнутое ограниченное выпуклое множество

$$\mathcal{M} = \{y \in \mathcal{D}_h : \|y - g\|_C \le \varepsilon\} \subset \mathcal{D}_h.$$

Покажем, что мультиоператор Γ переводит множество $\mathcal{M}$ в себя.

Пусть $z \in \Gamma(y)$ для $y \in \mathcal{M}$. Тогда

$$z(t) = g(t) + \mathcal{S}f(t), \quad t \in [0,h],$$

где $f \in \mathcal{Q}(y)$. Заметим, что $\|y[\psi]\|_{\mathcal{C}} \le r$. Применяя $(\mathcal{Q}2)$, оценим

$$\|f(t)\|_E \le \delta_r(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0,h].$$

Используя условие $(\mathcal{S}1)$ и тот факт, что оператор $\mathcal{S}$ является линейным, при всех $t \in [0,h]$ получим:

$$\|z(t) - g(t)\|_E = \|\mathcal{S}f(t)\|_E \le D\int_0^t \|f(s)\|_E ds \le D\int_0^h \delta_r(s)ds \le \varepsilon.$$

Таким образом, $z \in \mathcal{M}$.

Из линейности $\mathcal{S}$ и теоремы 3.0.1 следует, что мультиоператор Γ имеет компактные выпуклые значения и является пн.св., также из теоремы 3.0.2 следует, что он является ν-уплотняющим. Осталось применить теорему 2.1.1, чтобы завершить доказательство. □

Для получения условий существования глобального решения, заменим условие интегральной ограниченности $(\mathcal{Q}2)$ на следующее более сильное условие подлинейного роста:

$(\mathcal{Q}2')$ существует функция $\alpha \in L^1_+([0,T])$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}\,(u)\,(t)\,\|_E \le \alpha\,(t)\,(1 + \|u\|_{\mathcal{C}}) \quad \text{для п.в. } t \in [0,T]$$

для всех $u \in \mathcal{C}((-\infty,T];E)$.

Теорема 4.0.2. *Пусть каузальный мультиоператор* $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to Cv(L^1([0,T];E))$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{Q}1)$, $(\mathcal{Q}2')$, $(\mathcal{Q}3)$, *линейный каузальный оператор* $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. *Тогда множество* Σ_ψ *всех решений задачи* (3.0.3) *является непустым компактным подмножеством* $\mathcal{D}_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что множество всех решений $y \in \mathcal{D}_T$ однопараметрического включения

$$y \in g + \lambda\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]), \quad \lambda \in [0,1] \tag{4.0.1}$$

априори ограничено. Действительно, если $y \in \mathcal{D}_T$ удовлетворяет включению (4.0.1), то для каждого $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$\|y(t)\|_E \le \|g(t)\|_E + D\int_0^t \|f(s)\|_E ds,$$

где $f \in \mathcal{Q}(y[\psi])$, следовательно, по условию $(\mathcal{Q}2')$ выполнено неравенство

$$\|f(s)\|_E \leq \alpha(s)(1 + \|y[\psi]\|_{\mathcal{C}}).$$

Тогда

$$\|y(t)\|_E \leq \|g\,(t)\,\|_E + D\int_0^t \alpha\,(s)\,(1 + \|y[\psi]\|_{\mathcal{C}})\,ds$$

$$\leq \|g\|_C + D\int_0^t \alpha\,(s)\left(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}} + \sup_{\tau\in[0,s]} \|y\,(\tau)\,\|_E\right)ds.$$

Последнее выражение является неубывающей функцией от t, таким образом получаем

$$\sup_{0\leq\tau\leq t} \|y\,(\tau)\,\| \leq \|g\|_C + D\int_0^t \alpha\,(s)\left(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}} + \sup_{\tau\in[0,s]} \|y\,(\tau)\,\|_E\right)ds.$$

Это означает, что функция $v(t) = \sup_{\tau\in[0,s]} \|y(\tau)\|_E$ удовлетворяет оценке

$$v(t) \leq \|g\|_C + D\,(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}})\,\|\alpha\|_{L^1} + D\int_0^t \alpha(s)v(s)ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла, получаем искомую априорную ограниченность:

$$\|y\|_{\mathcal{C}} \leq Ne^{D\|\alpha\|_{L^1}},$$

где $N = \|g\|_C + D\,(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}})\,\|\alpha\|_{L^1}$.

Теперь возьмем $R > 0$ достаточно большое, чтобы гарантировать, что множество

$$V = \{y \in \mathcal{D}_T : \|y - g\|_C < R\} \subset \mathcal{D}_T$$

содержит все решения включения (4.0.1). Тогда мультиоператор Γ удовлетворяет на ∂V условию теоремы 2.1.2 с $a = g$. Применение этого утверждения завершает доказательство. □

Изучим зависимость множества решений задачи (3.0.3) от начальной функции ψ и функции g. Для заданного $\psi \in \mathcal{BC}$ обозначим

$$\mathcal{D}_T^{\psi} = \{y \in C([0,T];E) : y(0) = \psi(0)\}.$$

Определим замкнутые множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{BC} \times C([0,T];E)$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{BC} \times C([0,T];E) \times C([0,T];E)$ соотношениями

$$\mathcal{V} = \{(\psi, g) : g \in \mathcal{D}_T^{\psi}\},\quad \mathcal{W} = \{(\psi, g, y) : g \in \mathcal{D}_T^{\psi}, y \in \mathcal{D}_T^{\psi}\}.$$

Для данных $(\psi, g) \in \mathcal{V}$ обозначим $\Sigma_{\psi,g}$ множество всех решений задачи (3.0.3) на $[0,T]$.

Теорема 4.0.3. *При выполнении условий теоремы 4.0.2 мультиотображение*

$$\Sigma : \mathcal{V} \to K\,(C\,([0,T];E))\,,\quad (\psi, g) \mapsto \Sigma_{\psi,g}$$

является пн.св.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим мультиоператор $\widetilde{\Gamma} : \mathcal{W} \multimap C([0,T];E)$

$$\widetilde{\Gamma}(\psi, g, y) = g + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]).$$

Используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 3.0.1, можем проверить, что мультиотображение $\widetilde{\Gamma}$ является замкнутым.

Из теоремы 4.0.2 следует, что для любого $(\psi, g) \in \mathcal{V}$ множество $\Sigma_{\psi,g}$ непусто и компактно.

Предположим вопреки утверждению, что существует $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $\{(\psi_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{V}$, $(\psi_n, g_n) \to (\psi_0, g_0) \in \mathcal{V}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$, $y_n \in \Sigma_{\psi_n, g_n}$, $n \geq 1$, $y_n \to y_0$ такие, что

$$y_0 \notin U_{\varepsilon_0}\left(\Sigma_{\psi_0, g_0}\right), \tag{4.0.2}$$

где U_{ε_0} обозначает открытую ε_0-окрестность множества.

Каждая функция y_n может быть представлена в виде

$$y_n(t) = g_n(t) + \mathcal{S} f_n(t), \;\; t \in [0,T],$$

где $f_n \in \mathcal{Q}(y_n[\psi_n])$, $n \geq 1$. Следовательно,

$$y_n \in \widetilde{\Gamma}(\psi_n, g_n, y_n), \;\; n \geq 1.$$

В силу замкнутости мультиотображения $\widetilde{\Gamma}$ выполнено включение

$$y_0 \in \widetilde{\Gamma}(\psi_0, g_0, y_0),$$

то есть

$$y_0 \in \Sigma_{\psi_0, g_0},$$

что противоречит (4.0.2). □

Следствие 4.0.1. *При выполнении условий теоремы 4.0.2 оператор сдвига $P : \mathcal{V} \to K(\mathcal{C})$ вдоль траектории задачи* (3.0.3)*, определенный как*

$$P(\psi, g) = e \circ \Sigma_{\psi,g},$$

где $e(y) = y[\psi]_T$, является пн.св.

5. Включения с полунепрерывными снизу каузальными мультиоператорами

Напомним следующие понятия (см., например, [12], [13], [18], [19]).

О п р е д е л е н и е 5.0.1. Множество $\mathcal{N} \subset L^1([0,T];E)$ называется *разложимым*, если для каждых $f_0, f_1 \in \mathcal{N}$ и каждого измеримого подмножества $m \subset [0,T]$ функция

$$t \mapsto \kappa_m(t) f_0(t) + \kappa_{[0,T]\setminus m}(t) f_1(t),$$

где κ — характеристическая функция множества, принадлежит $\mathcal{N}$.

Семейство всех непустых замкнутых разложимых подмножеств $L^1([0,T];E)$ обозначим $D(L^1([0,T];E))$.

Нам понадобится следующее утверждение о непрерывном сечении.

Лемма 5.0.1. *[18], [19]. Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Тогда каждое пн.сн. мультиотображение $\mathfrak{F}: X \to D(L^1([0,T];E))$ допускает непрерывное сечение $\mathfrak{f}: X \to L^1([0,T];E)$, $\mathfrak{f}(x) \in \mathfrak{F}(x)$ для любого $x \in X$.*

Рассмотрим задачу существования решений включения (3.0.3) при следующем предположении на каузальный оператор $\mathcal{Q}$:

$(\mathcal{Q}_L)$ мультиоператор $\mathcal{Q}: \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,T];E))$ является пн.сн.

Очевидно, что для каждого $h \in (0,T]$, сужение $\mathcal{Q}: \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,h];E))$ сохраняет то же свойство.

По лемме 5.0.1 $\mathcal{Q}$ допускает непрерывное сечение $q: \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to L^1([0,h];E)$. Таким образом, соответствующий мультиоператор $\Gamma: \mathcal{D}_h \multimap \mathcal{D}_h$,

$$\Gamma(y) = g + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]),$$

имеет непрерывное сечение $\gamma: \mathcal{D}_h \to \mathcal{D}_h$ вида

$$\gamma(y) = g + \mathcal{S} \circ q(y[\psi]).$$

Ясно, что q удовлетворяет условию $(\mathcal{Q}2)$.

Из монотонности МНК Хаусдорфа следует

$$\chi(q(\Delta)(t)) \le \chi(\mathcal{Q}(\Delta)(t))$$

для каждого ограниченного множества $\Delta \subset \mathcal{C}((-\infty,T];E)$ и $t \in [0,h]$, и следовательно условие $(\mathcal{Q}3)$ также наследуется q. Но тогда из теоремы 3.0.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.0.1. *Пусть каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}: \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,h];E))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}_L)$, $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$, каузальный оператор $\mathcal{S}: L^1([0,h] \to C([0,h];E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. Тогда оператор Γ является ν-уплотняющим.*

Теперь мы можем сформулировать аналоги теорем 4.0.1 и 4.0.2, которые могут быть доказаны с использованием «однозначных» версий теорем 2.1.1 и 2.1.2.

Теорема 5.0.2. *Пусть каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}: \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,T];E))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}_L)$, $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$, линейный каузальный оператор $\mathcal{S}: L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. Тогда существует $h \in (0,T]$ такой, что задача (3.0.3) имеет решение $y \in \mathcal{D}_h$.*

Теорема 5.0.3. *Пусть каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}: \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,T];E))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}_L)$, $(\mathcal{Q}2')$, $(\mathcal{Q}3)$, линейный каузальный оператор $\mathcal{S}: L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. Тогда существует решение $y \in \mathcal{D}_T$ задачи (3.0.3).*

6. Дифференциальные и интегро-дифференциальные включения с бесконечным запаздыванием

6.1. Полулинейные дифференциальные включения

Рассмотрим следующую задачу Коши в банаховом пространстве E :

$$y'(t) \in Ay(t) + F(t, y_t), \quad t \in [0, d]; \tag{6.1.1}$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in (-\infty, 0]. \tag{6.1.2}$$

где $\psi \in \mathcal{BC}$ — заданная начальная функция.

Предположим, что выполнено условие

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый линейный оператор, порождающий C_0-полугруппу ограниченных линейных операторов $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$.

Мультиотображение $F : [0, T] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ удовлетворяет условиям $(F1)$ – $(F3)$ примера 2.3.1 и следующему условию χ-регулярности:

$(F4)$ существует функция $\omega_F : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяющая условиям $(\omega 1) - (\omega 3)$ и такая, что для каждого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{BC}$ выполнено

$$\chi(F(t, \Omega)) \leq \omega_F(t, \varphi(\Omega)) \text{ для п.в. } t \in [0, T].$$

В соответствии с [13], скажем, что $y \in C((-\infty, h]; E)$, $0 < h \leq T$ является *интегральным решением задачи* (6.1.1)–(6.1.2), если оно представимо в виде:

$$y(t) = \begin{cases} e^{At}\psi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds, & t \in [0, h], \quad f \in \mathcal{P}_F(y[\psi]), \\ \psi(t), & t \in (-\infty, 0], \end{cases} \tag{6.1.3}$$

где $\mathcal{P}_F$ — суперпозиционный мультиоператор, определенный в (2.3.1).

Тот факт, что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty, T]; E) \multimap L^1([0, T]; E)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{Q}1)$ может быть проверен по [13, Лемма 5.1.1]. Условия $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$ для $\mathcal{P}_F$ немедленно следуют из $(F3)$ и $(F4)$, соответственно. Принимая во внимание лемму 3.0.1, мы можем рассмотреть отношение (6.1.3) как частный случай функционального включения (3.0.3), где $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_F$; $\mathcal{S} = \mathcal{L}$ – оператор Коши и $g(t) = e^{At}\psi(0)$.

Как прямые следствия теорем 4.0.1 и 4.0.2 получим следующие результаты, которые обобщают [13, теоремы 5.2.1 и 5.2.2].

Теорема 6.1.1. *При выполнении условий* (A) *и* $(F1)$ – $(F4)$ *существует* $h \in (0, T]$ *такое, что задача* (6.1.1)–(6.1.2) *имеет интегральное решение на* $[0, h]$.

Теорема 6.1.2. *Пусть выполнены условия* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$ *и условие*

$(F3')$ *существует функция* $\alpha \in L^1_+([0, T])$ *такая, что для каждого* $c \in \mathcal{BC}$

$$\|F(t, c)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|c\|_{\mathcal{B}}) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T].$$

Тогда множество интегральных решений задачи (6.1.1)–(6.1.2) — *непустое компактное подмножество пространства* $C((-\infty, T]; E)$.

Теперь предположим, что многозначная нелинейность $F:[0,T]\times\mathcal{BC}\to K(E)$ удовлетворяет условию почти пн.сн. (F_L) вместо условий Каратеодори $(F1)$ и $(F2)$. В этой ситуации известно (см., например, [13], [17]), что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F$ имеет замкнутые разложимые значения и является пн.сн. Тогда из теорем 5.0.2 и 5.0.3 вытекает следующие теоремы существования.

Теорема 6.1.3. *При выполнении условий* (A), (F_L), $(F3)$, $(F4)$ *существует интегральное решение задачи* (6.1.1)–(6.1.2) *на некотором интервале* $[0,h]$, $0<h\le T$.

Теорема 6.1.4. *При выполнении условий* (A), (F_L), $(F3')$, $(F4)$ *существует интегральное решение задачи* (6.1.1)–(6.1.2) *на интервале* $(-\infty,T]$.

6.2. Интегро-дифференциальные включения Вольтерры

Рассмотрим следующую задачу в банаховом пространстве E:

$$y'(t)\in m(t)+\int_0^t K(t,s)F(s,y_s)ds,\qquad t\in[0,T],\tag{6.2.1}$$

с начальным условием

$$y(t)=\psi(t),\qquad t\in(-\infty,0].\tag{6.2.2}$$

Пусть мультиотображение $F:[0,T]\times\mathcal{BC}\to Kv(E)$ удовлетворяет условиям $(F1)$ – $(F4)$, $\{K(t,s):0\le s\le t\le T\}$ — непрерывное семейство ограниченных линейных операторов в E, $m\in L^1([0,T];E)$ — заданная функция и $\psi\in\mathcal{BC}$ — заданная начальная функция.

Для простоты предположим, что пространство E является сепарабельным, и ограничимся только локальным результатом.

Итак, под *решением задачи* (6.2.1)–(6.2.2) на интервале $[0,h]$, $0<h\le T$ будем понимать функцию $y\in C([0,h];E)$, имеющую следующий вид:

$$y(t)=\psi(0)+\int_0^t z(s)ds,\quad t\in[0,h],$$

где

$$z(t)=m(t)+\int_0^t K(t,s)f(s)ds,\quad f\in\mathcal{P}_F(y[\psi]).$$

Рассмотрим интегральный мультиоператор Вольтерры $\mathcal{G}$, определенный в (2.3.2), как каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}$.

Лемма 6.2.1. *Интегральный мультиоператор Вольтерры* $\mathcal{G}$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{Q}1)$ – $(\mathcal{Q}3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

(a) Очевидно, что достаточно проверить условие $(\mathcal{Q}1)$ для композиции

$$\mathcal{J}\circ\mathcal{P}_F:\mathcal{C}((-\infty,T];E)\multimap C([0,T];E)\hookrightarrow L^1([0,T];E),$$

где $\mathcal{J}$ определен как интегральный оператор

$$\mathcal{J}f(t)=\int_0^t K(t,s)f(s)ds.$$

Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}\left((-\infty, T]; E\right)$, $\{j_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1\left([0,T]; E\right)$, $j_n \in \mathcal{J} \circ \mathcal{P}_F(x_n)$, $n \geq 1$, $x_n \to x_0$, и $j_n \rightharpoonup j_0$. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{P}_F(x_n)$, $n \geq 1$ такую, что $j_n = \mathcal{J}(f_n)$, $n \geq 1$. По условиям $(F3)$ и $(F4)$, из сходимости последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полукомпактной и значит, по лемме 3.0.2 является слабо компактной. Поэтому без ограничения общности можем предположить, что $f_n \rightharpoonup f_0 \in \mathcal{P}_F(x_0)$.

С другой стороны, линейный непрерывный оператор $\mathcal{J}$ также является непрерывным в слабой топологии, таким образом имеем $j_0 = \mathcal{J}(f_0)$, это означает, что $j_0 \in \mathcal{P}_F(x_0)$.

(б) Условие $(F3)$ означает, что для каждого $r > 0$ существует функция $\eta_r \in L^1_+([0,T])$ такая, что для любой функции $x \in \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ из неравенства $\|x\|_{\mathcal{C}} \leq r$ следует, что

$$\|f(t)\|_E \leq \eta_r(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0,T].$$

Но тогда, обозначая

$$M = \max\{\|K(t,s)\| : 0 \leq s \leq t \leq T\},$$

мы имеем

$$\|\mathcal{G}(x)(t)\|_E \leq \|m(t)\|_E + M\int_0^t \eta_r(s)ds := \delta_r(t).$$

(в) Пусть $\Delta \subset \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ непустое ограниченное подмножество. Согласно условию $(F4)$, для каждого $t \in [0,T]$ и п.в. $s \in [0,t]$ имеем

$$\chi\left(K\left(t,s\right)F\left(s,\Delta_s\right)\right) \leq M\chi\left(F\left(s,\Delta_s\right)\right) \leq M\omega_F\left(s,\varphi\left(\Delta_s\right)\right).$$

Применяя теорему о χ-оценке многозначного интеграла [13, Theorem 4.2.3], получаем

$$\chi\left(\mathcal{G}\left(\Delta\left(t\right)\right)\right) \leq \chi\left(\int_0^t K(t,s)F\left(s,\Delta_s\right)ds\right) \leq$$

$$\leq M\int_0^t \omega_F\left(s,\varphi_{\mathcal{C}}\left(\Delta\right)\right)ds \leq M\int_0^t \omega_F(s,1)ds \cdot \varphi_{\mathcal{C}}\left(\Delta\right).$$

Очевидно, что функция

$$\omega(t,x) = M\int_0^t \omega_F(s,1)ds \cdot x$$

удовлетворяет условиям $(\omega 1)$–$(\omega 3)$ из $(\mathcal{Q}3)$ и, следовательно, для $\mathcal{G}$ выполнено предположение $(\mathcal{Q}3)$. □

Доказанная лемма, лемма 3.0.1 и теорема 4.0.1 приводят к следующему утверждению.

Теорема 6.2.1. *При вышеприведенных предположениях, задача* (6.2.1)–(6.2.2) *имеет решение на некотором интервале* $(-\infty, h]$, $0 < h \leq T$.

Список литературы

[1] А. Н. Тихонов, "О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики", *Бюлл. Моск. ун-та*, **1**, Секц. А. Вып.8 (1938), 1–25.

[2] C. Corduneanu, *Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications*, 2002.

[3] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, "Об операторах Вольтерра в банаховых функциональных пространствах", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **6**:2 (2001), 147–149.

[4] Е. С. Жуковский, М. Ж. Алвеш, "Абстрактные вольтерровы операторы", *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 3, 3–17.

[5] Е. С. Жуковский, "К теории уравнений Вольтерра", *Дифференциальные уравнения*, **25**:9 (1989), 1599–1605.

[6] Е. С. Жуковский, "Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве", *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 10, 17–28.

[7] А. И. Булгаков, А. А. Григоренко, Е. А. Панасенко, "Возмущение вольтерровых включений импульсными операторами", *Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ*, **1**:39 (2012), 17–20.

[8] А. И. Булгаков, В. П. Максимов, "Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами", *Дифференциальные уравнения*, **17**:8 (1981), 1362–1374.

[9] Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский, "Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами", *Изв. вузов. Матем.*, 2010, № 8, 16–29.

[10] Е. С. Жуковский, "Обобщенно вольтерровые операторы в метрических пространствах", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:3 (2009), 501–508.

[11] V. Obukhovskiii, P. Zecca, "On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, **74**:8 (2011), 2765–2777.

[12] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2, ЛИБРОКОМ, М., 2011.

[13] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

[14] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, "Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений", *УМН*, **35**:1(211) (1980), 59–126.

[15] J. K. Hale, J. Kato, "Phase space for retarded equations with infinite delay", *Funkc. Ekvac.*, 1978, № 21, 11–41.

[16] Y. Hito, S. Murakami, T. Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Lecture Notes in Mathematics, **1473**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[17] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, **1**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[18] A. Bressan, G. Colombo, "Extensions and selections of maps with decomposable values", *Studia Math.*, **90**:1 (1988), 69–86.

[19] A. Fryszkowski, "Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps", *Studia Math.*, **76**:2 (1983), 163–174.

References

[1] A. N. Tikhonov, "On functional equations of Volterra type and their applications to some problems of mathematical physics", *Byull. Mosk. un-ta*, **1**, Sect A. Vyp 8 (1938), 1–25 (In Russian).

[2] C. Corduneanu, *Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications*, 2002.

[3] T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, "About Volterra operators in Banach function space", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **6**:2 (2001), 147–149 (In Russian).

[4] E. S. Zhukovskiy, M. Z. Alvesh, "Abstract Volterra operators", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **52**:3 (2008), 1–14.

[5] E. S. Zhukovskiy, "On the theory of Volterra equations", *Differ. Equ.*, **25**:9 (1989), 1132–1137.

[6] E. S. Zhukovskiy, "Non-linear Volterra equation in a Banach functional space", *Izv. vuzov. Matem.*, 2005, № 10, 17–28 (In Russian).

[7] A. I. Bulgakov, A. A. Grigorenko, E. A. Panasenko, "Perturbations of Volterra inclusions by pulse operators", *Izvestiya In-ta matem. i inform. UdGU*, **1**:39 (2012), 17–20 (In Russian).

[8] A. I. Bulgakova, V. P. Maksimov, "Functional and functional-differential inclusions with Volterra operators", *Differ. Uravn.*, **17**:8 (1981), 1362–1374 (In Russian).

[9] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, "Continuous dependence on parameters of solutions Volterra equations with locally compressing operators", *Izv. vuzov. Matem.*, 2010, № 8, 16–29 (In Russian).

[10] E. S. Zhukovskiy, "Generalized Volterra operators in metric spaces", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:3 (2009), 501–508 (In Russian).

[11] V. Obukhovskiii, P. Zecca, "On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, **74**:8 (2011), 2765–2777.

[12] Y. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, *Introduction to the theory multivalued mappings and differential inclusions*, Moscow, 2, LIBROKOM, 2011 (In Russian).

[13] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

[14] Y. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, "Topological methods in the theory of fixed points of multivalued maps", *Russian Math. Surveys*, **35**:1 (1980), 65–143.

[15] J. K. Hale, J. Kato, "Phase space for retarded equations with infinite delay", *Funkc. Ekvac.*, 1978, № 21, 11–41.

[16] Y. Hito, S. Murakami, T. Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Lecture Notes in Mathematics, **1473**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[17] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*. V. 1, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[18] A. Bressan, G. Colombo, "Extensions and selections of maps with decomposable values", *Studia Math.*, **90**:1 (1988), 69–86.

[19] A. Fryszkowski, "Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps", *Studia Math.*, **76**:2 (1983), 163–174.

Информация об авторах

Кулманакова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики. Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4291-8704

Ульянова Елена Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики. Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: ulhelen@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-1159

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Кулманакова Марина Михайловна
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

Поступила в редакцию 20 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 17 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Information about the authors

Marina M. Kulmanakova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics Department. N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation. E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4291-8704

Elena L. Ulianova, Candidate of Physics and Mathematics. Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department. Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: ulhelen@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-1159

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Marina M. Kulmanakova
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

Received 20 May 2019
Reviewed 17 June 2019
Accepted for press 23 August 2019