

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-566-574

УДК 517.988.6, 517.929, 517.922

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ НЕЯВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С АВТОРЕГУЛИРУЕМЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

© И. Д. Серова, А. А. Репин

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: irinka_36@mail.ru, aleksejjrepin@rambler.ru

Аннотация. Получены условия разрешимости и оценки решений неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым (то есть зависящим от искомой функции) отклонением аргумента. Используются результаты о накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств.

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение с авторегулируемым отклонением аргумента; задача Коши; упорядоченно накрывающее отображение; дифференциальное неравенство

Введение

Для получения оценок решений дифференциальных уравнений часто применяют известную теорему Чаплыгина о дифференциальном неравенстве (см. [1]). Проблемам распространения этой теоремы на различные классы уравнений посвящены многочисленные статьи. В данной работе предлагается аналог теоремы Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента. Используются предложенное и исследованное в работах [2, 3] понятие упорядоченного накрывания и результаты работ [4, 5] об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений. На основе этих результатов в [6] была доказана теорема типа Чаплыгина для неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Данная работа продолжает это исследование. Рассматриваемое здесь дифференциальное уравнение с авторегулируемым отклонением аргумента возникает, например, в задачах механики при описании взаимодействия быстро движущихся материальных точек

или зарядов (см. [7, 8]). Применение к этому уравнению (даже разрешенному относительно производной) классических методов анализа в нормированных или метрических пространствах затруднено в силу отсутствия непрерывности операторов, порождаемых этих уравнением. Этим обстоятельством можно объяснить ряд необычных свойств этого уравнения (подробнее см. [9, с. 278]). Теорема о дифференциальном неравенстве для явного уравнения с авторегулируемым запаздыванием получена в [10, 11] методами, использующими результаты о вольтерровых операторах и теоремы о неподвижных точках изотонных операторов.

1. Упорядоченно накрывающие отображения

Пусть заданы упорядоченные пространства $(X, \preceq)$, $(Y, \preceq)$. Для элементов $u, x \in X$ в случае $x \preceq u$ используем также обозначение $u \succeq x$. Если $x \preceq u$ и $x \neq u$, то будем писать $x \prec u$. Для элемента $u \in X$ обозначим

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \preceq u\}.$$

Напомним, что отображение $G : X \rightarrow Y$ называют *антитонным* на множестве $U \subset X$, если для любых $x, u \in U$ из $x \preceq u$ следует $G(x) \succeq G(u)$.

О п р е д е л е н и е 1. [2] Отображение $G : X \rightarrow Y$ называется *упорядоченно накрывающим множеством* $V \subset Y$, если

$$\forall u \in X \quad G(\mathcal{O}_X(u)) \supset V \cap \mathcal{O}_Y(G(u)).$$

Отображение G является упорядоченно накрывающим множеством V тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\forall u \in X \quad \forall y \in V \quad y \preceq G(u) \Rightarrow \exists x \in X \quad G(x) = y \text{ \& } x \preceq u.$$

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = y, \tag{1}$$

где $y \in Y$, а отображение $F : X \rightarrow Y$ представимо в виде

$$F(x) = \Upsilon(x, x), \quad \forall x \in X.$$

Здесь отображение $\Upsilon : X^2 \rightarrow Y$ по одному аргументу обладает свойством упорядоченного накрывания, а по другому является антитонным.

Следуя [2, 3], по отображению $\Upsilon : X^2 \rightarrow Y$, множеству $U \subset X$ и элементу $y \in Y$ определим совокупность $\mathcal{S}(\Upsilon, U, y)$ всех цепей $S \subset U$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \forall x \in S \quad \Upsilon(x, x) \succeq y, \\ \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 \prec x_2 \Rightarrow \Upsilon(x_1, x_2) \preceq y. \end{aligned}$$

Достаточные условия разрешимости уравнения (1) и оценки его решений получены в работе [4]. Приведем этот результат.

Теорема 1. Пусть существует такой элемент $u_0 \in X$, что

$$\Upsilon(u_0, u_0) \succeq y, \quad (2)$$

и выполнены условия:

- (1.1) при любом $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ отображение $\Upsilon(\cdot, x) : X \rightarrow Y$ упорядоченно накрывает множество $V \doteq \{y\}$;
- (1.2) при любом $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ отображение $\Upsilon(x, \cdot) : X \rightarrow Y$ является антитонным на множестве $\mathcal{O}_X(u_0)$;
- (1.3) любая цепь $S \in \mathcal{S}(\Upsilon, \mathcal{O}_X(u_0), y)$ ограничена снизу, и существует ее нижняя граница $\omega \in X$, удовлетворяющая неравенству $\Upsilon(\omega, \omega) \succeq y$.

Тогда множество решений уравнения (1) не пусто, в нем существует минимальный элемент, который принадлежит $\mathcal{O}_X(u_0)$.

Будем обозначать $L_\infty \doteq L_\infty([a, b], \mathbb{R})$ – пространство существенно ограниченных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = \text{vrai sup}_{t \in [a, b]} |x(t)|$, $W \doteq W([a, b], \mathbb{R})$ – пространство измеримых на $[a, b]$ функций. В перечисленных пространствах измеримых функций считаем, что задан "обычный" порядок, то есть для функций x, u полагаем $x \leq u$, если $x(t) \leq u(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$.

Пусть заданы существенно ограниченные функции $\underline{r}, \bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{r} \leq \bar{r}$, и удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Определим многозначное отображение

$$B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad B(t) = [\underline{r}(t), \bar{r}(t)], \quad t \in [a, b].$$

Такое многозначное отображение измеримо (это очевидно следует из [12; теорема 2, с. 342]). Обозначим через $\mathbb{SB}$ множество измеримых сечений этого отображения, то есть $z \in \mathbb{SB}$ тогда и только тогда, когда $z(t) \in [\underline{r}(t), \bar{r}(t)]$ при п.в. $t \in [a, b]$. Очевидно, что $\mathbb{SB} \subset L_\infty$. Будем полагать, что на $\mathbb{SB}$ также задан "обычный" порядок.

Определим оператор Немыцкого

$$N_g : \mathbb{SB} \rightarrow W, \quad (N_g x)(t) = g(t, x(t)), \quad t \in [a, b].$$

В [3, 4] получены утверждения об упорядоченном накрывании оператора Немыцкого в случае $\underline{r}(t) = \text{const}$, $\bar{r}(t) = \text{const}$. Приведем аналог этих утверждений для рассматриваемой здесь более общей ситуации измеримых функций $\underline{r}$, $\bar{r}$. Пусть задана измеримая функция $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Теорема 2. Если при п.в. $t \in [a, b]$ функция $g(t, \cdot) : B(t) \rightarrow \mathbb{R}$ упорядоченно накрывает одноточечное множество $\{y(t)\} \subset \mathbb{R}$, то соответствующий оператор Немыцкого $N_g : \mathbb{SB} \rightarrow W$ упорядоченно накрывает множество $\{y\} \subset W$.

Доказательство. Пусть для некоторой функции $u \in \mathbb{SB}$ выполнено неравенство $N_g u \geq y$, то есть $g(t, u(t)) \geq y(t)$ для п.в. $t \in [a, b]$. Так как $g(t, \cdot)$ упорядоченно накрывает одноточечное множество $\{y(t)\}$, то $y(t) \in g(t, [\underline{r}(t), u(t)])$ для п.в.

$t \in [a, b]$. Отсюда, по теореме Филиппова (см., например, [13, п. 1.5.2]), существует измеримая функция $\bar{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\bar{x}(t) \in [\underline{x}(t), u(t)], \quad g(t, \bar{x}(t)) = y(t) \text{ при п.в. } t \in [a, b].$$

Это означает, что имеют место соотношения: $\bar{x} \in \mathbb{SB}$, $\bar{x} \leq u$ и $N_g \bar{x} = y$. Таким образом, оператор N_g упорядоченно накрывает множество $\{y\}$. $\square$

2. Дифференциальное неравенство для уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента

Здесь на основании теорем 1 и 2 получено утверждение о существовании и оценке решения неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента.

Обозначим $AC_\infty \doteq AC_\infty([a, b], \mathbb{R})$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, что $\dot{x} \in L_\infty$; для произвольного измеримого многозначного отображения $B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}$ определим $AC_\infty(B) \doteq AC_\infty([a, b], B)$ — подмножество AC_∞ , содержащее функции $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, производная которых $\dot{x} \in \mathbb{SB}$, то есть $\dot{x}(t) \in B(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$.

Пусть заданы функции $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \setminus [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и число $\gamma \geq 0$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$f\left(t, x(h(t, x(t))), \dot{x}(t)\right) = 0, \quad t \in [a, b]; \quad x(\xi) = \varphi(\xi), \text{ если } \xi \notin [a, b], \quad (3)$$

с начальным условием

$$x(a) = \gamma. \quad (4)$$

Решением (3) будем считать функцию $x \in AC_\infty([a, b], \mathbb{R})$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [a, b]$.

Обозначим

$$H : AC_\infty \rightarrow L_\infty, \quad (Hx)(t) \doteq \begin{cases} x(h(t, x(t))), & \text{если } h(t, x(t)) \in [a, b], \\ \varphi(h(t, x(t))), & \text{если } h(t, x(t)) \notin [a, b]. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть существуют $u_0 \in AC_\infty$, $v_0 \in AC_\infty$, удовлетворяющие начальному условию $u_0(a) = v_0(a) = \gamma$, для которых при п.в. $t \in [a, b]$ справедливы неравенства:

$$0 \leq \dot{u}_0(t) \leq \dot{v}_0(t), \quad (5)$$

$$f\left(t, (Hv_0)(t), \dot{v}_0(t)\right) \geq 0, \quad (6)$$

$$f\left(t, (Hu_0)(t), \dot{u}_0(t)\right) \leq 0. \quad (7)$$

Определим многозначное отображение $B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}$ равенством $B(t) = [\dot{u}_0(t), \dot{v}_0(t)]$.

Пусть выполнены условия:

- (3.1) для функции f при любых $u, v \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [a, b]$ имеем: $f(\cdot, v, u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима, $f(t, \cdot, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не возрастает и непрерывна справа, $f(t, v, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна;

- (3.2) для функции h при любых $v \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [a, b]$ имеем: $h(\cdot, v) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ измерима, $h(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает и непрерывна справа;
- (3.3) функция $\varphi : \mathbb{R} \setminus [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает;
- (3.4) справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \varphi(a-0) \leq u_0(a) \quad \text{или} \quad h(t, u_0(t)) \geq a \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b], \\ \varphi(b+0) \geq v_0(b) \quad \text{или} \quad h(t, v_0(t)) \leq b \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Тогда существует решение $x \in AC_\infty([a, b], B)$ задачи Коши (3), (4) (то есть существует решение, удовлетворяющее неравенствам $\dot{u}_0(t) \leq \dot{x}(t) \leq \dot{v}_0(t)$, $t \in [a, b]$)

Доказательство. Из предположения (3.2) следует измеримость функции $t \mapsto h(t, x(t))$ для любой непрерывной функции x (см. [14]). Отсюда, учитывая предположение (3.3), получаем, что функция Hx также является измеримой. Наконец, условие (3.1) гарантируют измеримость функции $t \mapsto f(t, (Hx)(t), \dot{x}(t))$ для любого $x \in AC_\infty$ (см. [14]).

Запишем задачу (3), (4) в виде операторного уравнения (1) относительно производной решения рассматриваемой задачи. Такое представление позволит применить теорему 1 к установлению разрешимости задачи (4), (5). С этой целью определим оператор Немыцкого

$$N_f : \mathbb{SB} \times L_\infty \rightarrow W, \quad (N_f(u_1, u_2))(t) \doteq f(t, u_2(t), u_1(t)), \quad t \in [a, b],$$

и композицию

$$\Upsilon : \mathbb{SB} \times \mathbb{SB} \rightarrow W, \quad \Upsilon(u_1, u_2) \doteq N_f\left(u_1, H\left(\gamma + \int_a^{(\cdot)} u_2(s) ds\right)\right).$$

Тогда задача (3), (4) запишется в виде уравнения

$$\Upsilon(u, u) \equiv N_f\left(u, H\left(\gamma + \int_a^{(\cdot)} u(s) ds\right)\right) = 0 \quad (8)$$

относительно неизвестного $u \in \mathbb{SB}$. Покажем, что отображение Υ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Из неравенства (6) следует неравенство $\Upsilon(\dot{v}_0, \dot{v}_0) \geq 0$, то есть выполнено условие (2). Для произвольной измеримой функции $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ при п.в. $t \in [a, b]$ функция $f(t, v(t), \cdot)$ непрерывна на отрезке $[\dot{u}_0(t), \dot{v}_0(t)]$. Поэтому из неравенств (6), (7) следует существование точки $\tilde{u} \in [\dot{u}_0(t), \dot{v}_0(t)]$ такой, что $f(t, v(t), \tilde{u}) = 0$, то есть функция $f(t, v(t), \cdot)$ упорядоченно накрывает множество $V(t) = \{0\}$. Тогда согласно теореме 2 при любом $z \in \mathbb{SB}$ отображение

$$\Upsilon(\cdot, z) = N_f\left(\cdot, H\left(\gamma + \int_a^{(\cdot)} z(s) ds\right)\right) : \mathbb{SB} \rightarrow W$$

упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset W$. Таким образом, выполнено условие (1.1) теоремы 1.

Согласно условиям (3.1) и (3.2) для любого $u \in \mathbb{SB}$ функция $f(t, \cdot, u(t))$ при п.в. $t \in [a, b]$ является невозрастающей. Поэтому, а также в силу предположения (3.4) отображение $\Upsilon(u, \cdot) : \mathbb{SB} \rightarrow W$ антитонное, и условие (1.2) теоремы 1 выполнено.

Рассмотрим произвольную цепь $S \subset \mathbb{SB} \subset L_\infty$ такую, что для любого $w \in S$ выполнено

$$\Upsilon(w, w) = N_f(w, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} w(s)ds)) \geq 0.$$

Как и любая ограниченная снизу цепь в L_∞ , цепь S имеет точную нижнюю границу, обозначим $\underline{w} = \inf S$. Очевидно, выполнено $\underline{w} \in \mathbb{SB}$. Выделим из этой цепи убывающую последовательность $\{w_i\} \subset S$ такую, что $\inf\{w_i\} = \inf S = \underline{w}$ (см. [15, гл. IV, §12, следствие 7]). Следовательно, при п.в. $t \in [a, b]$ справедливо

$$\underline{w}(t) = \inf\{w_i(t)\} = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i(t).$$

Так как отображение $\Upsilon(w_i, \cdot) : \mathbb{SB} \rightarrow W$ антитонное, получаем

$$N_f(w_i, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} \underline{w}(s)ds)) \geq N_f(w_i, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} w_i(s)ds)) \geq 0, \quad t \in [a, b].$$

Вследствие непрерывности функции $f(t, (H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} \underline{w}(s)ds))(t), \cdot)$ выполнено

$$\begin{aligned} (\Upsilon(\underline{w}, \underline{w}))(t) &= f\left(t, \left(H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} \underline{w}(s)ds)\right)(t), \underline{w}(t)\right) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} f\left(t, \left(H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} \underline{w}(s)ds)\right)(t), w_i(t)\right) \geq 0, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Итак, условие (1.3) теоремы 1 также выполнено.

Таким образом, из теоремы 1 следует, что существует решение $x \in AC_\infty([a, b], B)$ задачи (3), (4). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С.А. Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919. 18 с.
2. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. Vol. 201. P. 330-343.
3. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475-478.
4. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610-1627.
5. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96-127.
6. Серова И.Д. О неявных дифференциальных неравенствах с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 21. Вып. 3. С. 571-578. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-571-578.

7. Писаренко В.Г. Уравнения с отклоняющимся аргументом, возникающие в проблеме многих тяготеющих электрически заряженных тел при учете запаздывания сил взаимодействия // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977. С. 255-269.
8. Driver R.D. A functional-differential system of neutral type arising in a two body-problem of classical electrodynamics // Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics. N. Y.: Acad. Press, 1963. P. 474-484.
9. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
10. Гусаренко С.А., Жуковский Е.С., Максимов В.П. К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровыми операторами // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 268-272.
11. Жуковский Е.С. Операторные неравенства и функционально-дифференциальные уравнения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1983.
12. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
13. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.
14. Шрагин И.В. Условия измеримости суперпозиций // Доклады Академии наук СССР. 1971. Т. 197. № 2. С. 295-298.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИИЛ, 1962. 896 с.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Серова Ирина Дмитриевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, студентка института математики, естественных и информационных технологий, e-mail: irinka _ 36@mail.ru

Репин Алексей Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: aleksejjrepin@rambler.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-566-574

ABOUT EXISTENCE AND ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATION WITH AUTOADJUSTABLE DEVIATION ARGUMENT

I. D. Serova, A. A. Repin

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: irinka_36@mail.ru, aleksejrepin@rambler.ru

Abstract. Conditions of a solubility and assessment of solutions of an implicit differential equation with autoadjustable (that is depending on required function) argument deviation are received. Results about the covering displays of partially ordered spaces are used.

Keywords: the implicit differential equation with autoadjustable deviation argument; Cauchy's task; the covering display is ordered; differential inequality

REFERENCES

1. Chaplygin S.A. *Osnovaniya novogo sposoba priblizhennogo integrirvaniya differentsial'nykh uravneniy* [Foundations of New Method of Approximate Integration of Differential Equations]. Moscow, 1919, 18 p. (In Russian).
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*, 2016, vol. 201, pp. 330-343.
3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochках sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On points of convergence of reflections in partly ordered spaces]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2013, vol. 453, no. 5, pp. 475-478. (In Russian).
4. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh [On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1610-1627. (In Russian).
5. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i integral'nykh neravenstvakh tipa Chaplygina [About orderly covering mappings and Chaplygin's type integral inequalities]. *Algebra i analiz – St. Petersburg Mathematical Journal*, 2018, vol. 30, no. 1, pp. 96-127. (In Russian).
6. Serova I.D. O neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh s otklonyayushchimsya argumentom [About implicit differential inequalities with deviating argument]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 21, no. 3, pp. 571-578. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-571-578.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-41-680975).

7. Pisarenko V.G. Uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom, vznikayushchiye v probleme mnogikh tyagoteyushchikh elektricheskikh zaryazhennykh tel pri uchete zapazdyvaniya sil vzaimodeystviya [Equations with divergent argument that emerge in problem of many ponderable electrically charged bodies with an allowance for delay of forces of interaction]. *Differentsial'nyye uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom* [Differential Equations with Divergent Argument]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1977, pp. 255-269. (In Russian).

8. Driver R.D. A functional-differential system of neutral type arising in a two body-problem of classical electrodynamics. *Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*. New York, Acad. Press, 1963, pp. 474-484.

9. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Metody i prilozheniya* [Elements of Modern Theory of Functional and Differential Equations. Methods and Applications]. Moscow, Institute of Computer Science, 2002, 384 p. (In Russian).

10. Gusarenko S.A., Zhukovskiy E.S., Maksimov V.P. K teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s lokal'no vol'terrovymi operatorami [To the theory of functional and differential equations with local Volterra operators]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1986, vol. 287, no. 2, pp. 268-272. (In Russian).

11. Zhukovskiy E.S. *Operatornyye neravenstva i funktsional'no-differentsial'nyye uravneniya: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Operator Inequality and Functional and Differential Equations. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Perm, 1983. (In Russian).

12. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach* [Theory of Extremal Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. (In Russian).

13. Borisovich J.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obuhovskiy V.V. *Vvedeniye v teoriyu mnogo-znachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vkluycheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Reflection and Differential Inclusion]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).

14. Shragin I.V. Usloviya izmerimosti superpozitsiy [Conditions for measurability of superpositions]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1971, vol. 197, no. 2, pp. 295-298. (In Russian).

15. Dunford N., Schwartz J.T. *Lineynyye operatory. T. 1. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. Vol. 1. General Theory]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1962, 896 p. (In Russian).

Received 13 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 19 June 2018

There is no conflict of interests.

Serova Irina Dmitrievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Student of the Institute Mathematic, Natural Sciences and Information Technologies, e-mail: irinka_36@mail.ru

Repin Alexey Anatol'evich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, e-mail: aleksejjrepin@rambler.ru

For citation: Serova I.D., Repin A.A. O sushchestvovanii i otenkakh reshenij neyavnogo differentsial'nogo uravneniya s avtoreguliruemym otklonenien argumenta [About existence and estimates of solutions of the implicit differential equation with autoadjustable deviation argument]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 566–574. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-566-574 (In Russian, Abstr. in Engl.).