ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-503-509
УДК 517.925

КОЛМОГОРОВСКИЕ МАТРИЦЫ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

© **А. И. Перов**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: anperov@mail.ru

Аннотация. В терминах эргодичности усредненных систем с постоянными коэффициентами (и колмогоровской матрицей) указаны признаки эргодичности непрерывных марковских цепей с конечным числом состояний с периодическими и почти периодическими коэффициентами.
Ключевые слова: колмогоровские матрицы; непрерывные марковские цепи с периодическими и почти периодическими коэффициентами

Введение

В [1] дано определение колмогоровских бесконечных матриц в связи с некоторыми задачами теории вероятностей. Изучение непрерывных марковских цепей приводит к счетным системам дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Предпринята попытка использовать здесь теорию полугрупп операторов в банаховом пространстве, которая натолкнулась на существенные трудности, преодолеть которые полностью не удалось и до настоящего времени.

Цель, поставленная в этой статье, значительно скромнее: мы рассматриваем конечные системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих непрерывную марковскую цепь с конечным числом состояний [2], но с переменными коэффициентами [3] (см. также [4]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

1. Основные понятия

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Вектор $\mathbf{p}$ с компонентами $p_1, p_2, ..., p_n$ называется *вероятностным,* если $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, ..., p_n \geq 0$ и $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$; короче $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{1p} = 1$, где $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)$ (строка) [5].

Совокупность всех вероятностных векторов образует симплекс $\mathbf{W}$ размерности $n{-}1$.

Определение 2. Вещественная квадратная матрица $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *марковской*, если

$$\begin{aligned} &m_{ij} \geq 0 \qquad \text{при } 1 \leq i, j \leq n \quad \mathbf{M} \geq \mathbf{0}, \\ &\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1, \qquad 1 \leq j \leq n \qquad \mathbf{1M} = \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Спектр марковской матрицы лежит в единичном круге комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем 1 является ее собственным значением. Для приложений особенно важен тот факт, когда 1 является простым собственным значением марковской матрицы $\mathbf{M}$, а все остальные собственные значения лежат внутри единичного круга (*эргодический случай*). Последнее имеет место тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{M}$ является *примитивной* [6]: $\mathbf{M}^p > 0$ при некотором натуральном p. Эргодичность означает, что $\mathbf{M}^k\mathbf{x} \to \mathbf{p}$ при $k \to \infty$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, где $\mathbf{p}$ – вектор финальных вероятностей.

По теореме Хопфа [7], если марковская матрица $\mathbf{M}$ положительная: $\mathbf{M} > 0$, и $m = \min m_{ij}$ $(0 < m < 1)$, то

$$|\lambda| \leq \frac{1-m}{1+m} \;\; \lambda \in \operatorname{sp}\mathbf{M}\backslash 1. \tag{2}$$

Свойство эргодичности можно сформулировать иначе. Пусть $\mathbf{L}$ – подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности $n{-}1$, определяемое равенством $\mathbf{1x} = \mathbf{0}$. Это подпространство является инвариантным относительно матрицы (оператора) $\mathbf{M}$: $\mathbf{ML} \subseteq \mathbf{L}$. Эргодичность имеет место в том и только в том случае, если оператор $\mathbf{M}|\mathbf{L}$ является сжатием

$$\operatorname{spr}\mathbf{M}|\mathbf{L} < 1. \tag{3}$$

Определение 3. Матрица (оператор) называется *сжатием*, если ее (его) спектральный радиус меньше единицы.

Согласно критерию Деблина эргодичность имеет место, если матрица $\mathbf{M}$ имеет хотя бы одну строку, целиком состоящую из положительных элементов.

Определение 4. Вещественная квадратная матрица $\mathbf{K} = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *колмогоровской*, если

$$\begin{aligned} &k_{ii} \leq 0, \;\; 1 \leq i \leq n; \quad k_{ij} \geq 0 \text{ при } i \neq j, \\ &\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = 0, \;\; 1 \leq i \leq n \qquad \mathbf{1K} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4}$$

Спектр колмогоровской матрицы лежит в левой полуплоскости, причем 0 является ее собственным значением (чисто мнимых собственных значений колмогоровская матрица не имеет). Система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{x} \tag{5}$$

описывает непрерывную марковскую цепь с n состояниями [7]. В силу свойства *внедиагональной неотрицательности* колмогоровской матрицы $k_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ матрицант $e^{t\mathbf{K}}$ является неотрицательным при $t \geq 0$. Для приложений весьма важен тот случай, когда $e^{t\mathbf{K}}\mathbf{x}$ при любом $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ и $t \to \infty$ имеет предел $\mathbf{p} \in \mathbf{W}$ и этот предел не зависит от $\mathbf{x}$ (свойство *эргодичности*). Указанное свойство имеет место тогда и только тогда, когда 0 является простым собственным значением матрицы $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} \in \mathbf{W}, \quad \mathbf{p} > \mathbf{0}. \tag{6}$$

($\mathbf{p}$ – вектор финальных вероятностей).

Свойство эргодичности можно сформулировать иначе. Подпространство $\mathbf{L}$ является инвариантным относительно матрицы (оператора) $\mathbf{K}$: $\mathbf{K}\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}$. Эргодичность имеет место в том и только в том случае, когда оператор $\mathbf{K}|\mathbf{L}$ является *гурвицевым*

$$\operatorname{spa} \mathbf{K}|\mathbf{L} < 0. \tag{7}$$

О п р е д е л е н и е 5. Матрица (оператор) называется *гурвицевой*, если ее (его) спектральная абсцисса отрицательна.

Рассмотрим непрерывную марковскую цепь с конечным числом n состояний, описываемую системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)x_j, \quad 1 \leq i \leq n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}, \tag{8}$$

где $\mathbf{K}(t) = (k_{ij}(t))$. Мы предположим, что это система ω-периодична

$$k_{ij}(t+\omega) = k_{ij}(t), \quad \mathbf{K}(t+\omega) = \mathbf{K}(t) \tag{9}$$

(например, суточные, недельные или месячные колебания).

Мы предположим, что $k_{ij}(t)$ – измеримые суммируемые на отрезке $[0, \omega]$ функции, причем матрица $\mathbf{K}(t)$ при любом t является колмогоровской

$$\begin{aligned} &k_{ii}(t) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq n; \quad k_{ij}(t) \geq 0 \ \text{ при } \ i \neq j, \\ &\sum_{i=1}^{n} k_{ij}(t) = 0, \qquad\qquad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \tag{10}$$

Наряду с системой с периодическими коэффициентами (8) рассмотрим усредненную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_j, \quad 1 \leq i \leq n; \quad \dot{\xi} = \mathbf{C}\xi, \tag{11}$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} k_{ij}(t)dt, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} \mathbf{K}(t)dt. \tag{12}$$

Из (10) вытекает, что $\mathbf{C}$ – колмогоровская матрица

$$\begin{array}{ll} c_{ii} \le 0, \ \ 1 \le i \le n; & c_{ij} \ge 0 \ \text{ при } \ i \ne j, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ij} = 0, & \quad 1 \le i \le n. \end{array} \tag{13}$$

Теорема 1. *Пусть колмогоровская матрица* $\mathbf{C}$ *(12) является эргодической. Тогда система (8) имеет единственное вероятностное решение* $\mathbf{p}(t)$, *которое является положительным* $\mathbf{p}(t) > 0$, *и периодическим,* $\mathbf{p}(t+\omega) = \mathbf{p}(t)$, *причем*

$$||\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(t)|| \le Ne^{-\varepsilon(t-s)} \sum_{k=0}^{n-1} ||\mathbf{x}(s) - \mathbf{p}(s)||, \tag{14}$$

при $t \ge s$, *где* N, ε *– некоторые положительные числа, где* $\mathbf{x}(t)$ *любое другое решение системы (8) с* $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{W}$.

Рассмотрим систему (8) в предположении почти периодичности (в смысле Бора [8]) ее коэффициентов. В этом случае коэффициенты усредненной системы (11) определяются по следующему правилу

$$c_{ij} = \lim_{0<b-a\to\infty} \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b k_{ij}(t)dt, \quad \mathbf{C} = \lim_{0<b-a\to\infty} \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \mathbf{K}(t)dt. \tag{15}$$

Из (10) вытекает, что матрица $\mathbf{C}$ – колмогоровская. Аналогично теореме 1 имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Рассмотрим систему (8) с почти периодическими коэффициентами. Пусть колмогоровская матрица* $\mathbf{C}$, *элементы которой получены по правилу (15), является эргодической. Тогда система (8) имеет единственное вероятностное решение* $\mathbf{p}(t)$, *которое является положительным* $\mathbf{p}(t) > 0$, *и почти периодическим, причем имеет место оценка (14). Группа частот почти периодического решения* $\mathbf{p}(t)$ *содержится в группе частот системы (8).*

Приведем достаточное условие эргодичности, состоящее в том, что

$$(-1)^{n-1}\mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & ... & j-1 & j+1 & ...n \\ 1 & ... & j-1 & j+1 & ...n \end{pmatrix} > 0, \quad 0 \le j \le n \tag{15}$$

(при $j = 1$ и $j = n$ нужно заменить соответствующие вероятности). Условие (15) означает, что все главные миноры порядка $n-1$ матрицы $\mathbf{C}$ должны быть положительны. Заметим, что единственный минор n-го порядка равен нулю.

Если в системе (8) матрица (10) является трехдиагональной (якобиевой), то есть $k_{ij}(t) = 0$ при $|i-j| > 1$, то матрицант $\mathbf{U}(t)$ при $t > 0$ ($\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$) является осцилляционной матрицей со всеми вытекающими отсюда спектральными свойствами (и, в частности, с чисто вещественным спектром) [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИИЛ, 1962. 832 с.

2. *Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я.* Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. М.: Высшая школа, 1971. 216 с.

3. *Перов А.И.* Признаки эргодичности колмогоровских почти периодических систем // ДАН. 2001. Т. 380. № 1. С. 9-12.

4. *Перов А.И.* Признаки эргодичности марковских почти периодических систем // ДАН. 2002. Т. 384. № 4. С. 455-459.

5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 369 с.

6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

8. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. 360 с.

9. *Seneta E.* Non-negative Matrices and Markov Chains. Sydney: Springer, 2006. 292 p.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Перов Анатолий Иванович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, e-mail: anperov@mail.ru

Для цитирования: *Перов А.И.* Колмогоровские матрицы и непрерывные марковские цепи с конечным числом состояний // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 503–509. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-503-509

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-503-509

KOLMOGOROV MATRIX, AND A CONTINUOUS MARKOV CHAIN WITH A FINITE NUMBER OF STATES

A. I. Perov

Voronezh State University
1, Universitetskaya sq., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: anperov@mail.ru

Abstract. In terms of ergodicity of averaged systems with constant coefficients (and Kolmogorov matrix), the signs of ergodicity of continuous Markov chains with a finite number of States with periodic and almost periodic coefficients are indicated.
Keywords: Kolmogorov matrices; continuous Markov chains with periodic and almost periodic coefficients

REFERENCES

1. Hille E., Phillips R. *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semigroups]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1962, 832 p. (In Russian).

2. Blokh E.L., Loshinskiy L.I., Turin V.Ya. *Osnovy lineynoy algebry i nekotorye ee prilozheniya* [The Basics of Linear Algebra and Some of Its Applications]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1971, 216 p. (In Russian).

3. Perov A.I. Priznaki ergodichnosti kolmogorovskikh pochti periodicheskikh sistem [Signs of ergodicity of Kolmogorov almost periodic systems]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2001, vol. 380, no. 1, pp. 9-12. (In Russian).

4. Perov A.I. Priznaki ergodichnosti markovskikh pochti periodicheskikh sistem [Signs of ergodicity of Markov almost periodic systems]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2002, vol. 384, no. 4, pp. 455-459. (In Russian).

5. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to the Theory of Matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 369 p. (In Russian).

6. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 576 p. (In Russian).

7. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on Mathematical Stability Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 472 p. (In Russian).

8. Gantmacher F.R., Krein M.G. *Ostsillyatsionnye matritsy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskikh sistem* [Oscillatory Matrices and Kernels and Small Oscillations of Mechanical Systems]. Moscow, Leningrad, State Publ. of Technical and Theoretical Literature, 1950, 360 p. (In Russian).

9. Seneta E. *Non-negative Matrices and Markov Chains.* Sydney, Springer, 2006, 292 p.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-00197).

Received 18 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Perov Anatoly Ivanovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of System Analysis and Management, e-mail: anperov@mail.ru

For citation: Perov A.I. Kolmogorovskie matritsy i nepreryvnye markovskie tsepi s konechnym chislom sostoyaniy [Kolmogorov matrix, and a continuous Markov chain with a finite number of States]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 503–509. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-503-509 (In Russian, Abstr. in Engl.).