ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-479-487
УДК 519.711.3

ОКРЕСТНОСТНЫЕ МЕТАСИСТЕМЫ НА ОРГРАФАХ

© **Н. М. Мишачев, А. М. Шмырин**

ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»
398600, Российская Федерация, г. Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Аннотация. В статье обсуждаются окрестностные системы на ориентированных графах. Вводятся понятия окрестностной метасистемы и метаструктурной идентификации. Рассматриваются связанные с этими понятиями вопросы идентификации систем управления.
Ключевые слова: окрестностная система; окрестностная структура; орграф; метаструктурная идентификация

Введение

Системы на графах, или системы уравнений, ассоциированные с графами, в той или иной версии нередко возникают в приложениях (см., например, [1] или [2]), но эти версии, как правило, отражают специфику соответствующих приложений. В [3] и [4] были определены *окрестностные системы*, которые являются достаточно общим классом систем на графах, и им было посвящено значительное количество публикаций. Заметим, что в более ранней работе [3] термин «окрестностные системы» отсутствовал, но соответствующие классы систем и графов уже обсуждались. Термин «окрестностные системы» появился в [4], но в этой работе отсутствовало, хотя и подразумевалось, описание ассоциированных с такими системами графов. Позднее, начиная с [5], внимание было перенесено на эти графы, которые были названы *окрестностными структурами*, а разные типы окрестностных систем рассматривались уже как надстройки над окрестностными структурами. Определение окрестностной структуры последовательно видоизменялось в [6] и [7], окончательная версия была предложена в [8]. Параллельно были определены два класса систем над окрестностными структурами: *вертексные*, когда уравнения системы соответствуют вершинам структуры, и *реляционные*, когда уравнения соответствуют дугам; в обоих случаях системы могут быть как статическими, так и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00854 а).

динамическими. При этом окрестностные системы из [3] и [4] интерпретировались как статические вертексные системы.

1. Окрестностные системы в пространстве состояний

В работах [3] и [4] ставилась задача обобщения классических дискретных систем управления

$$\begin{cases} X^{t+1} = F(X^t, U^t) \\ W^{t+1} = C(X^t, U^t) \end{cases} \tag{1.1}$$

на случай распределенных систем, при этом система (1.1) считалась заданной на конечном подграфе $G_{[0,T]}$ бесконечного линейного орграфа $G_{\mathbb{Z}}$ над $\mathbb{Z}$ с дугами $(n, n+1)$. Идея обобщения состояла в замене орграфа $G_{[0,T]}$ произвольным орграфом. Моменты дискретного времени $t \in \{0, \dots, T\}$ заменялись элементами v некоторого конечного множества V (узлами), векторы состояний X^t и входов U^t в момент времени t – векторами состояний X^v и входов U^v в узлах v, а система уравнения (1.1) – мультисистемой, состоящей из $|V|$ подсистем, соответствующих узлам $v \in V$ и включающих в себя переменные состояний и входов (управлений) из «окрестностей по состояниям и управлениям» этих узлов. Эти окрестности задавались двумя орграфами G_X и G_U над V, которые, как уже упоминалось, были явно описаны в [3] и неявно присутствовали в [4]. На самом деле такая система, записанная в координатном виде или, другими словами, «в пространстве состояний», может быть интерпретирована как система уравнений

$$\begin{cases} \widetilde{X} = \widetilde{F}(\widetilde{X}, \widetilde{U}) \\ \widetilde{W} = \widetilde{C}(\widetilde{X}, \widetilde{U}) \end{cases} \qquad \text{или, в неявной форме,} \qquad \begin{cases} \widehat{F}(\widetilde{X}, \widetilde{U}) = 0 \\ \widehat{C}(\widetilde{X}, \widetilde{U}) = 0 \end{cases}$$

для стационарных состояний дискретной динамической модели

$$\begin{cases} \widetilde{X}^{t+1} = \widetilde{F}(\widetilde{X}^t, \widetilde{U}^t) = \widetilde{X}^t + \widehat{F}(\widetilde{X}^t, \widetilde{U}^t) \\ \widetilde{W}^{t+1} = \widetilde{C}(\widetilde{X}^t, \widetilde{U}^t) = \widetilde{W}^t + \widehat{C}(\widetilde{X}^t, \widetilde{U}^t) \end{cases} \tag{1.2}$$

вида (1.1), где «мультивекторные» переменные $\widetilde{X}$ и $\widetilde{U}$ содержат все векторы состояний X^v и все векторы входов U^v, при этом орграфы G_X и G_U «структурируют» систему, то есть задают для каждого из уравнений наборы переменных, входящих в это уравнение.

2. Окрестностные системы и окрестностные структуры

Описанная выше интерпретация окрестностных систем позволяет считать связанные с ними структурные графы не альтернативой для переменной времени, а средством описания вхождения пространственных переменных в уравнения системы (1.1). Основным объектом изучения становятся окрестностные структуры (орграфы) и ассоциированные с ними вертексные и реляционные системы. Эти системы, в отличие от статических окрестностных систем из [4], уже по происхождению являются динамическими, поскольку переменная времени T сохраняется, а не «растворяется» в вершинах графа V. Статические системы при этом возникают, как обычно, в виде моделей для стационарных состояний динамических систем. Конечно, динамику во времени можно ввести и в классе окрестностных систем из [4], но, чтобы формально оставаться в этом классе, нужно перейти от графов G_X и G_U к счетным графам $G_X \times G_{\mathbb{Z}}$ и $G_U \times G_{\mathbb{Z}}$. В новой интерпретации окрестностных систем подобный переход также имеет смысл, но действует в обратном направлении, превращая динамические (вертексные или реляционные) системы в статические, и может рассматриваться как аналог перехода к расширенному фазовому пространству. Укажем еще одно отличие новой идеологии от старой: вместо двух орграфов G_X и G_U над V мы рассматриваем один орграф над $\widehat{V} = U \sqcup V \sqcup W$, где U и W – это входы и выходы, что соответствует структуре системы (1.1). Пример окрестностной структуры см. на рис. 1. На этом рисунке вершины 1 и

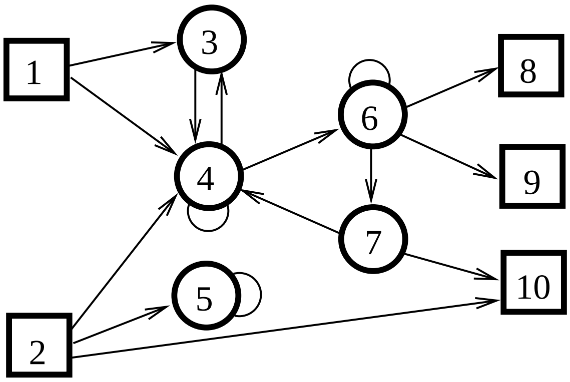

Рис. 1: Окрестностная структура

2 – это входы, вершины 8, 9, 10 – выходы, вершины 3, 4, 5, 6, 7 – внутренние узлы, узлы 4, 5 и 6 имеют петли («самодействия»). Узел 5 является, в нашей терминологии, *рефлексивным выходом.*

3. Метаструктурная идентификация

В связи с описанным выше изменением точки зрения на окрестностные системы мы фактически возвращаемся к задаче моделирования объектов классическим системам вида (1.1), но при этом в качестве первого этапа моделирования рассматриваем задачу «метаструктурной идентификации», имея в виду определение узлов модели, связей между узлами и наборов соответствующих переменных. Данная задача, конечно, всегда так или иначе решается в процессе моделирования, и в этом смысле здесь нет ничего принципиально нового. Однако, как мы считаем, полезно выделить и до определенной степени формализовать этот «метаструктурный» этап построения модели объекта. Конечно, любая формализация данного этапа будет в какой-то степени ограничивать класс используемых моделей, и наша «вертексно-реляционная» – не исключение, но это неизбежное свойство всякой формализации. Поясним происхождение термина «метаструктурная идентификация». *Структурная* идентификация моделируемой системы, как правило, может быть разделена на два этапа. На первом этапе мы определяем узлы модели, связи между ними и соответствующие этим узлам и связям наборы переменных. Эта информация эквивалентным образом может быть представлена в виде *метасистемы*, являющейся прототипом для окончательной аналитической системы. Прототип (метасистема) определяет наборы переменных и их вхождения в уравнения модели. На втором этапе выбирается аналитический тип уравнений модели и, по возможности, минимизируется количество неизвестных параметров, подлежащими дальнейшей параметрической идентификации. Мы сохраняем термин «структурная идентификация» для второго этапа, а первый предлагаем называть *метаструктурной идентификацией* и определяем ее как построение окрестностной структуры (орграфа), указание переменных модели, которые мы называем *оснащениями* структуры, и определение типа взаимодействий между узлами структуры. Наш опыт математического моделирования показывает, что во многих случаях имеет смысл различать два типа таких взаимодействий: *вертексный*, когда уравнения модели задают состояния узлов структуры в зависимости от состояний входов и все выходы из узлов совпадают с их состояниями, и *реляционный*, когда уравнения модели задают состояния выходов из узлов (свое состояние для каждого выхода) в зависимости от состояний входов в эти узлы. В первом случае уравнения и оснащения соответствуют узлам окрестностной структуры, во втором – ее дугам. Метаструктурную идентификацию мы считаем завершенной в тех случаях, когда все переменные модели (оснащения) становятся *метаскалярными*, то есть используются в уравнениях как единые символы, независимо от их сколь угодно сложной внутренней структуры (векторной, матричной и т. п.). Для описания вертексных и реляционных систем над заданной окрестностной структурой очень удобным оказалось понятие метаграфа (см. [9]). В статье [8] мы определили указанные два типа моделей, используя язык метаграфов, и описали связи между этими моделями. Заметим, что идеология метаструктурной идентификации остается в силе и для непрерывных систем.

4. Метаструктурная идентификация и структурно-графовые модели

Метаструктурная идентификация находится в промежутке между абстрактной общей теорией систем, в которой применение графов обсуждается на уровне общих рекомендаций, и специализированными структурно-графовыми моделями, подобными моделям потоковых графов или сигнальных графов (см., например, [1] и [2]). В этом промежутке находятся также и классические структурные схемы систем управления (см., например, [10]). Наши окрестностные структуры имеют с этими схемами довольно много общего. Укажем на следующие важные различия, которые, в смысле указанного выше порядка, сводятся к тому, что окрестностные структуры находятся ближе к левому концу (общей теории систем), а классические структурные схемы – ближе к правому. Структурные схемы обычно рисуют по уже имеющейся математической модели, в то время как окрестностные структуры возникают на этапе построения модели, когда еще не определены переменные и тем более нет никаких уравнений. Далее, в идеологии структурных схем основное внимание уделяется линейным моделям и алгебраическим операциям – сложению и умножению, в то время как основное назначение окрестностных структур, снабженных наборами переменных (оснащениями), – это описание последовательности вхождений (в том числе рекурсивных вхождений) переменных в уравнения, конкретный тип которых на этапе метаструктурной идентификации не обсуждается. Еще одним отличием окрестностных структур от классических структурных схем является возможность выбора между вертексными и реляционными моделями.

5. Пример

Динамическая вертексная метасистема, соответствующая окрестностной структуре на рис. 1, имеет вид:

$$\begin{cases} X^{t+1}(3) = F_3(U^t(1), X^t(4)) \\ X^{t+1}(4) = F_4(U^t(1), U^t(2), X^t(3), X^t(4), X^t(7)) \\ X^{t+1}(5) = F_5(U^t(2), X^t(5)) \\ X^{t+1}(6) = F_6(X^t(4), X^t(6)) \\ X^{t+1}(7) = F_7(X^t(6)) \\ W^{t+1}(8) = C_8(X(6)) \\ W^{t+1}(9) = C_9(X(6)) \\ W^{t+1}(10) = C_{10}(U(2), X(7)) \end{cases}$$

Динамическая реляционная метасистема, соответствующая структуре на рис. 1, имеет вид:

$$\begin{cases} Y^{t+1}(3,4) = F_{3,4}(U^t(1,3)), Y^t(4,3)) \\ \begin{cases} Y^{t+1}(4,3) = F_{4,3}(U^t(1,4), U^t(2,4), Y^t(3,4), Y^t(4,4), Y^t(7,4)) \\ Y^{t+1}(4,4) = F_{4,4}(U^t(1,4), U^t(2,4), Y^t(3,4), Y^t(4,4), Y^t(7,4)) \\ Y^{t+1}(4,6) = F_{4,6}(U^t(1,4), U^t(2,4), Y^t(3,4), Y^t(4,4), Y^t(7,4)) \end{cases} \\ Y^{t+1}(5,5) = F_{5,5}(U^t(2,5)), Y^t(5,5)) \\ \begin{cases} Y^{t+1}(6,6) = F_{6,6}(Y^t(4,6), Y^t(6,6)) \\ Y^{t+1}(6,7) = F_{6,7}(Y^t(4,6), Y^t(6,6)) \\ Y^{t+1}(6,8) = F_{6,8}(Y^t(4,6), Y^t(6,6)) \\ Y^{t+1}(6,9) = F_{6,9}(Y^t(4,6), Y^t(6,6)) \end{cases} \\ \begin{cases} Y^{t+1}(7,4) = F_{7,4}(Y^t(6,7)) \\ Y^{t+1}(7,10) = F_{7,10}(Y^t(6,7)) \end{cases} \\ W^{t+1}(8) = C_8(Y(6,8)) \\ W^{t+1}(9) = C_9(Y(6,9) \\ W^{t+1}(10) = C_{10}(U(1,10), Y(7,1)) \end{cases}$$

Все переменные в этих уравнениях считаются метаскалярными. Присутствуя в уравнениях как скаляры, они могут иметь сколь угодно сложную внутреннюю структуру.

6. Нестационарные динамические системы

Выше мы предполагали, что правые части динамических систем (1.1) или (1.2) не зависят явно от (дискретного) времени, то есть рассматривали стационарные динамические системы. Данное ограничение не является обязательным. Можно считать, что такая зависимость в (1.1) или (1.2) имеется. При этом, однако, должна сохраняться окрестностная структура, то есть схема вхождения переменных в уравнения. Отказ от этого условия приводит к классу систем над «динамическими» окрестностными структурами, то есть структурами, зависящими от времени. Стандартный переход к расширенному фазовому пространству позволяет свести такие окрестностные структуры к обычным «статическим», но со счетным количеством узлов.

7. Заключение

Во многих случаях начальный этап математического моделирования объекта можно формализовать как *метаструктурную идентификацию*: построение окрестностной структуры (орграфа), определение переменных модели (оснащений) и определение способа взаимодействия вершин графа (вертексного или реляционного). Результатом метаструктурной идентификации является окрестностная метасистема уравнений вида (1.1). Термин *окрестностная* в данном контексте указывает на распределенность системы, которая математически выражается в разреженности вхождений переменных в уравнения системы, эта разреженность кодируется орграфом. Полезным, хотя и не обязательным, критерием завершенности метаструктурной идентификации является метаскалярность переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кафаров В.В., Мешалкин В.П.* Анализ и синтез химико-технологических систем. М.: Химия, 1991. 432 с.

2. *Татур Т.А.* Основы теории электрических цепей. М.: Высшая школа, 1980. 274 с.

3. *Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырин Д.А.* Смешанное управление смешанными системами. Липецк: ЛГТУ, 1998. 80 с.

4. *Блюмин, С.Л. Шмырин А.М.* Окрестностные системы. Липецк: ЛЭГИ, 2005. 131 с.

5. *Шмырин А.М., Мишачев Н.М., Косарева А.С.* Кластеризация окрестностной структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 459-464. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-459-464.

6. *Шмырин А.М., Мишачев Н.М.* Окрестностные системы и алгоритм Качмажа // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2113-2120. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120.

7. *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Параметрическая идентификация окрестностных систем вблизи номинальных режимов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 558-564. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564.

8. *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Окрестностные структуры и метаструктурная идентификация // Таврический вестник информатики и математики. 2017. Т. 37. Вып. 4. С. 87-95.

9. *Basu A., Blanning R.* Metagraphs and their applications. N. Y.: Springer, 2007.

10. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Мишачев Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Для цитирования: *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Окрестностные метасистемы на орграфах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 479–487. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-479-487

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-479-487

NEIGHBORHOOD METASYSTEMS ON DIGRAPHS

N. M. Mishachev, A. M. Shmyrin

Lipetsk State Technical University
30 Moskovskaya St., Lipetsk 398600, Russian Federation
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Abstract. The article discusses neighborhood systems on oriented graphs. The concepts of the neighborhood metasystem and metastructural identification are introduced. The questions of identification of control systems related to these concepts are considered.
Keywords: neighborhood system; neighborhood structure; digraph; metastructural identification

REFERENCES

1. Kafarov V.V., Meshalkin V.P. *Analiz i sintez khimiko-tekhnologicheskikh system* [Analysis and Synthesis of Chemical-Technological Systems]. Moscow, Khimiya Publ., 1991, 432 p. (In Russian).

2. Tatur T.A. *Osnovy teorii elektricheskikh tsepey* [Fundamentals of the Theory of Electrical Circuits]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1980, 274 p. (In Russian).

3. Blyumin S.L., Shmyrin A.M., Shmyrin D.A. *Smeshannoe upravlenie smeshannymi sistemami* [Mixed Control of Mixed Systems]. Lipetsk, Lipetsk State Technical University Publ., 1998, 80 p. (In Russian).

4. Blyumin S.L., Shmyrin A.M. *Okrestnostnye sistemy* [Neighborhood Systems]. Lipetsk, Lipetsk Environmental and Cultural Institute Publ., 2005, 131 p. (In Russian).

5. Shmyrin A.M., Mishachev N.M., Kosareva A.S. Klasterizatsiya okrestnostnoy struktury [Clustering of neighborhood structure]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 459-464. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-459-464.

6. Shmyrin A.M., Mishachev N.M. Okrestnostnye sistemy i algoritm Kachmazha [Neighborhood systems and Kaczmarz algorithm]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2113-2120. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120.

7. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Parametricheskaya identifikatsiya okrestnostnykh sistem vblizi nominal'nykh rezhimov [Parametric identification of neighborhood systems near nominal modes]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 558-564. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564.

8. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Okrestnostnye struktury i metastrukturnaya identifikatsiya [Neighborhood Structures and Metastructural Identification]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i*

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00854 a).

matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics, 2017, vol. 37, no. 4, pp. 87-95. (In Russian).

9. Basu A., Blanning R. *Metagraphs and their applications.* New York, Springer, 2007.

10. Krasovskiy A.A. (ed.). *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* [A Handbook on the Theory of Automatic Control]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 712 p. (In Russian).

Received 18 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Shmyrin Anatoliy Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

For citation: Mishachev N.M., Shmyrin A. M. Okrestnostnye metasistemy na orgrafah [Neighborhood metasystems on digraphs]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 479–487. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-479-487 (In Russian, Abstr. in Engl.).