

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-473-478

УДК 519.711.3

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ОКРЕСТНОСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

© Н. М. Мишачев, А. М. Шмырин

ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»

398600, Российская Федерация, г. Липецк, ул. Московская, 30

E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Аннотация. В статье определяются окрестностные структуры (орграфы специального вида) и обсуждается их связь с дискретными системами управления. Перечисляются архетипы окрестностных структур и соответствующие этим архетипам системы управления.

Ключевые слова: дискретная система; окрестностная структура; орграф; архетип

Введение

Классические дискретные системы управления (см. [1]) можно считать специальным классом дискретных динамических систем (обычных, без управления). Действительно, рассмотрим динамическую систему

$$X^{t+1} = \mathcal{F}(X^t), \quad X = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

Назовем такую систему *неполной*, если она не содержит уравнений для некоторых неизвестных X_i и некоторые неизвестные X_j отсутствуют в правых частях уравнений. Обозначим эти две непересекающиеся группы неизвестных через U и W , а остальные неизвестные – через V . Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} V^{t+1} = F(V^t, U^t) \\ W^{t+1} = C(V^t, U^t) \end{cases} \quad (2)$$

и в такой интерпретации это классическая дискретная система управления. На языке графов это элементарное наблюдение может быть переформулировано следующим

образом: динамической системе (1) соответствует полносвязный оргграф, в котором любые две вершины соединены двумя противоположными дугами и каждая вершина имеет петлю; неполной системе (2) соответствует оргграф, в котором могут быть вершины без входящих ребер и вершины без выходящих ребер; при интерпретации неполной системы как системы управления этим вершинам соответствуют входы и выходы. Такие оргграфы имеет смысл рассматривать как самостоятельные объекты; мы называем их окрестностными структурами. Каждой окрестностной структуре соответствует система вида (2). Две версии определения окрестностных структур были даны ранее в [2] и [3]. В настоящей статье мы уточняем эти определения и рассматриваем простейшие окрестностные структуры (архетипы), для которых записываем соответствующие им дискретные системы управления.

1. Определение окрестностной структуры

В определении окрестностной структуры нам будет удобно различать термины «вершина» и «узел» оргграфа: каждый узел мы считаем вершиной, но не каждую вершину – узлом. А именно, узлами мы будем называть только вершины, имеющие как входящие, так и выходящие дуги. Петли, по определению, являются одновременно входящими и выходящими дугами. Дуга оргграфа, не являющаяся петлей, называется *простой дугой*. Символом $*$ мы обозначаем произвольную вершину оргграфа.

Окрестностная структура $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\hat{V})$ над конечным множеством $\hat{V}$ – это оргграф $\mathfrak{N} = (\hat{V}; E)$, содержащий вершины $\hat{V} = U \sqcup V \sqcup W$ трех типов: *входы* U , *узлы* V и *выходы* W , при этом:

- каждая вершина инцидентна, по крайней мере, одной дуге;
- каждый вход $u \in U$ имеет только выходящие дуги $e(u, *)$, где $* \in V \sqcup W$;
- каждый выход $w \in W$ имеет только входящие дуги $e(*, w)$, где $* \in U \sqcup V$;
- каждые две узла $v', v'' \in V$, могут быть соединены между собой не более чем двумя противоположно ориентированными дугами $e(v', v'')$ и $e(v'', v')$;
- каждый узел $v \in V$ может быть *рефлексивным*, то есть может иметь петлю $e(v, v)$;
- каждый узел $v \in V$ имеет входящие и выходящие дуги.

Заметим, что входы и выходы окрестностной структуры по определению не имеют петель. Окрестностная структура называется *рефлексивной*, если все ее узлы имеют петли. В [2] и [3] окрестностные структуры были, по определению, рефлексивными. Дуги окрестностной структуры мы называем также *связями*. На рисунках мы изображаем узлы окружностями, входы и выходы – квадратами. Как обычно в теории графов, *источниками* вершины мы называем все входящие в нее вершины и *стоками* – все исходящие. Все узлы (то есть вершины из V) имеют стоки и источники. Рефлексивные узлы являются сами для себя стоками и источниками. Все входы имеют только стоки и все выходы – только источники. Пример окрестностной структуры изображен на рис. 1. На этом рисунке вершины 1 и 2 – это входы, вершины 8, 9, 10 – выходы, вершины 3, 4, 5, 6, 7 – узлы, узлы 4, 5 и 6 являются рефлексивными.

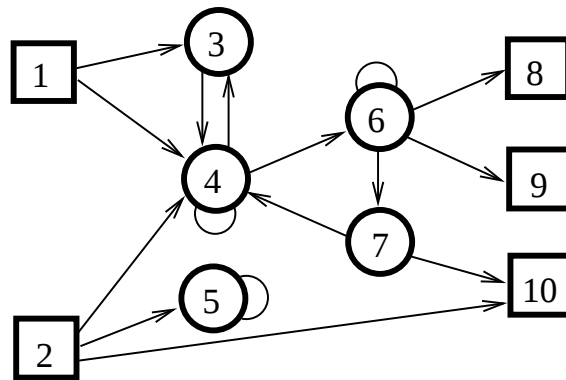


Рис. 1: Окрестностная структура

З а м е ч а н и е 1. *Связность окрестностной структуры.* Как правило, мы рассматриваем связные окрестностные структуры, но в определении не требуем связности орграфа $\mathfrak{N}$. В частности, определенные выше окрестностные структуры могут иметь изолированные рефлексивные узлы. Несвязные структуры полезны в некоторых случаях, например, при описании иерархических окрестностных структур.

З а м е ч а н и е 2. *Рефлексивные входы и выходы.* Узлы без входящих *простых* дуг и узлы без выходящих *простых* дуг допустимы в силу определения окрестностной структуры, но должны иметь петли, то есть должны быть рефлексивными. Узел без входящих дуг мы называем также *рефлексивным входом*, узел без выходящих дуг – *рефлексивным выходом*, см. рис. 2. Окрестностная структура на рис. 1 не имеет рефлексивных входов и имеет один рефлексивный выход.



Рис. 2: Рефлексивный вход и рефлексивный выход

2. Архетипы окрестностных структур

Классификацию окрестностных структур можно рассматривать как классификацию орграфов специального типа. Перечислим все *окрестностные архетипы* – структуры самого начального уровня с не более чем одной вершиной в каждом из множеств входов U , узлов V и выходов W .

Имеется единственная структура-архетип с одной вершиной: это узел с петлей. Мы будем называть эту структуру *окрестностной монадой*, см. рис. 3. Далее, имеются три структуры-архетипа с двумя вершинами (*окрестностные диады*): диада с рефлексивным входом, диада с рефлексивным выходом и простая диада; см. рис. 4. Структуры-архетипы с тремя вершинами (*окрестностные триады*) распадаются на два класса: основные и составные. Основные триады – это главная триада, сквозная триада (или

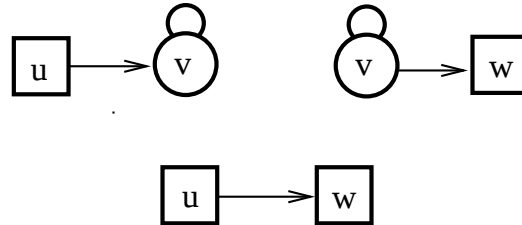
Рис. 3: Монада: единственная окрестностная структура с $|\hat{V}| = 1$ 

Рис. 4: Окрестностные диады

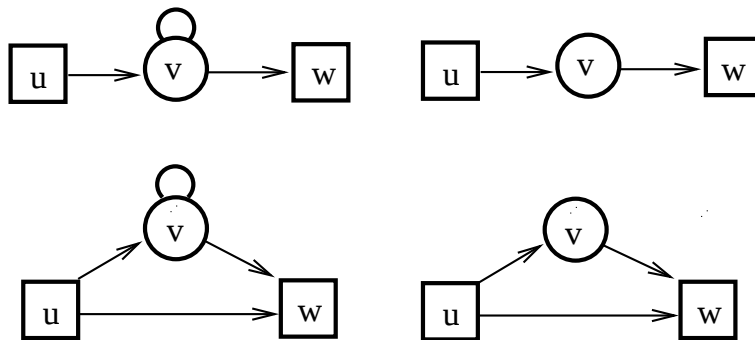


Рис. 5: Основные окрестностные триады

триада без рекурсий), полная главная триада и полная сквозная триада; см. рис. 5 (перечисление триад на рисунке – слева направо и сверху вниз). Составные триады являются производными от диад. Это триада с рефлексивным входом, триада с рефлексивным выходом и сепарабельная триада; см. рис. 6. Первые две составные триады – это склейки диады с рефлексивным выходом/входом и простой диады; третья – это несвязное объединение монады и простой диады. Любая окрестностная структура

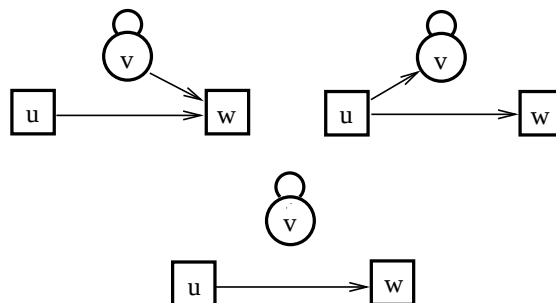


Рис. 6: Составные окрестностные триады

(и соответствующая ей система/модель) может быть отнесена к одному из перечисленных архетипов. Например, архетипом моделей без входа и выхода является монада,

архетипом регрессионных моделей является простая диада, архетипом нейронных сетей прямого распространения является сквозная триада. Для каждого архетипа очевидным образом записывается соответствующая дискретная система управления (см. таблицу).

$V^{t+1} = F(V^t)$	монада
$V^{t+1} = F(V^t, U^t)$	диада с рефлексивным входом
$V^{t+1} = F(V^t), W^t = C(V^t)$	диада с рефлексивным выходом
$W^{t+1} = G(U^t)$	простая диада
$V^{t+1} = F(V^t, U^t), W^t = C(V^t)$	главная триада
$V^{t+1} = F(U^t), W^t = C(V^t)$	сквозная триада
$V^{t+1} = F(V^t, U^t), W^t = C(V^t, U^t)$	полная главная триада
$V^{t+1} = F(U^t), W^t = C(V^t, U^t)$	полная сквозная триада
$V^{t+1} = F(V^t), W^t = C(V^t, U^t)$	триада с рефлексивным входом
$V^{t+1} = F(V^t, U^t), W^t = C(U^t)$	триада с рефлексивным выходом
$V^{t+1} = F(V^t), W^t = C(U^t)$	сепарабельная триада

Приведенную классификацию архетипов и соответствующих им систем можно рассматривать как формализацию и уточнение бинарной классификации систем управления (2) по наличию и отсутствию обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.
2. *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Окрестностные структуры и метаструктурная идентификация // Таврический вестник информатики и математики. 2017. Т. 37. Вып. 4. С. 87-95.
3. *Шмырин А.М., Мишачев Н.М., Канюгина А.С.* Квазистатические окрестностные системы // Современные наукоемкие технологии. 2018. Вып. 4. С. 137-142.

Поступила в редакцию 23 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 24 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Мишачев Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-473-478

DISCRETE SYSTEMS AND NEIGHBORING STRUCTURES

N. M. Mishachev, A. M. Shmyrin

Lipetsk State Technical University
30 Moskovskaya St., Lipetsk 398600, Russian Federation
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Abstract. In the article, neighborhood structures (digraphs of a special type) are defined and their relationship with discrete control systems is discussed. The archetypes of the neighborhood structures and the control systems corresponding to these archetypes are listed.

Keywords: discrete system; neighborhood structure; digraph; archetype

REFERENCES

1. Pervozvanskiy A.A. *Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Course of Automatic Control Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 616 p. (In Russian).
2. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Okrestnostnye struktury i metastrukturalnaya identifikatsiya [Neighborhood Structures and Metastructural Identification]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2017, vol. 37, no. 4, pp. 87-95. (In Russian).
3. Shmyrin A.M., Mishachyov N.M., Kanyugina A.S. Kvazistaticheskie okrestnostnye sistemy [Quasi-static neighborhood systems]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii – Modern High Technologies*, 2018, no. 4, pp. 137-142. (In Russian).

Received 23 April 2018

Reviewed 24 May 2018

Accepted for press 19 June 2018

There is no conflict of interests.

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Shmyrin Anatoliy Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

For citation: Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Diskretnye sistemy i okrestnostnye struktury [Discrete systems and neighboring structures]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 473–478. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-473-478 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00854 a).