ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-441-447
УДК 517.929

ДОСТИЖИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

© **В. П. Максимов**

ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15
E-mail: maksimov@econ.psu.ru

Аннотация. Для линейной функционально-дифференциальной системы управления с последействием и импульсными воздействиями исследуется задача описания множества достижимости в терминах системы целевых функционалов при наличии полиэдральных ограничений на управления и импульсные воздействия.
Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; задачи управления; множество достижимости

Введение

Продолжая исследования [1–3], мы рассматриваем линейную функционально-дифференциальную систему управления с последействием и импульсными воздействиями в заданные моменты времени, следуя при этом точке зрения на импульсные системы, предложенной в [4] и развитой в последующих работах в рамках теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения [5, 6], см. также обзор [7]. Общность рассматриваемой системы касается как операторов, действующих на фазовую переменную, так и оператора, реализующего управляющие воздействия классического типа. Импульсные воздействия тоже рассматриваются как элементы управления рассматриваемой системой. Что касается цели управления, то она формулируется с помощью заданной конечной системы линейных функционалов общего вида, – целевых функционалов, определенных на траекториях системы, порождаемых обоими видами управляющих воздействий. При отсутствии ограничений на управление общие условия разрешимости задачи управления при заданном начальном состоянии установлены в работах

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00332) и фонда В. Потанина.

[8, 9], специальные эффекты использования импульсной составляющей описаны в [3]. Разрешимость задачи управления относительно заданной системы целевых функционалов при некотором наборе их целевых значений означает, что достижимыми являются любые целевые значения. Очевидно, что наличие ограничений на управляющие воздействия существенно меняет картину и актуальной становится задача описания множества достижимых значений целевых функционалов (в классической постановке – множеств достижимости, см., например [10–12]). В настоящем сообщении мы даем решение такой задачи для случая полиэдральных ограничений на управляющие воздействия.

1. Постановка задачи

Обозначим через $L^n[0,T] = L^n$ пространство измеримых по Лебегу суммируемых на конечном отрезке $[0,T]$ функций со значениями в пространстве R^n n-мерных вектор-столбцов $\alpha = col(\alpha^1, ..., \alpha^n)$ и нормой $||z||_{L^n} = \int_0^T |z(s)|\, ds$, где $|\cdot|$– норма в R^n. $L_2^r[0,T] = L_2^r$ – пространство функций $u : [0,T] \to R^r$ суммируемых с квадратом, оснащенное скалярным произведением $(u,v) = \int_0^T u^\top(s) v(s)\, ds$, где $\cdot^\top$ – символ транспонирования.

Зафиксируем систему точек $t_1, ..., t_m$, $0 < t_1 < ... < t_m < T$, и, следуя [4], введем пространство $DS^n[t_1, ..., t_m] = DS^n(m)$ кусочно абсолютно непрерывных вектор-функций $x : [0,T] \to R^n$, представимых в виде

$$x(t) = x(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k,T]}(t)\Delta_k \; + \; \int_0^t z(s)\, ds.$$

Здесь $\chi_{[t_k,T]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[t_k, T]$, $\Delta_k = \Delta_k x = x(t_k) - x(t_k - 0)$, $z \in L^n$. Норма в пространстве $DS^n(m)$ определяется равенством

$$||x||_{DS^n(m)} = |x(0)| + \sum_{k=1}^{m} |\Delta_k x| + ||\dot{x}||_{L^n}.$$

Определим линейный ограниченный оператор $\mathcal{L} : DS^n(m) \to L^n$ равенством

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^T K(t,s)\dot{x}(s)\, ds - A(t)x(0) - \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\chi_{[t_k,T]}(t)\Delta_k x.$$

Здесь ядро $K(t,s)$ удовлетворяет *условию* $\mathcal{K}$: его элементы $k_{ij}(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ и имеют общую, суммируемую на $[0, T]$, мажоранту:

$$|k_{ij}(t,s)| \leqslant \kappa(t) \quad i,j = 1, \ldots, n, \; t \in [0,T],$$

а $(n \times n)$-матрицы $A, A_1, \ldots, A_m$ имеют суммируемые на $[0, T]$ элементы.

Рассматривается система управления

$$(\mathcal{L}x)(t) = (\mathcal{F}u)(t) + f(t), \; t \in [0,T], \tag{1}$$

где $\mathcal{F} : L_2^r \to L^n$ – линейный ограниченный вольтерров [6] оператор. Начальное состояние системы задано: $x(0) = \alpha$.

Для задания цели управления введем линейный ограниченный вектор-функционал $\ell : DS^n(m) \to R^N$. Общий вид такого вектор-функционала определяется равенством

$$\ell x = \Psi x(0) + \sum_{k=1}^{m} \Psi_k \Delta_k x + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds,$$

где $\Psi, \Psi_1, ..., \Psi_m$ – постоянные $(N \times n)$-матрицы, элементы $(N \times n)$-матрицы $\Phi(s)$ измеримы и ограничены в существенном.

Целью управления с использованием управления $u \in L_2^r$ и «импульсов» $\Delta_1, ..., \Delta_m \in R^n$ является достижение заданного вектора целевых значений $\beta \in R^N$ на траекториях системы (1):

$$\ell x = \beta. \tag{2}$$

При этом управления стеснены следующими ограничениями:

$$G_1 u(t) \le \gamma_1,\ t \in [0\,T];\ \ G_2\Delta \le \gamma_2, \tag{3}$$

где $\Delta = col(\Delta_1, ..., \Delta_m)$; постоянные матрицы G_1 и G_2 размерности $N_1 \times r$ и $N_2 \times (mn)$ соответственно и векторы $\gamma_1 \in R^{N_1}$ и $\gamma_2 \in R^{N_2}$ заданы. Предполагается, что множество $\mathcal{V}_1$ решений системы линейных неравенств $G_1 v \le \gamma_1$ и множество $\mathcal{V}_2$ решений системы линейных неравенств $G_2\Delta \le \gamma_2$ – непустые и ограниченные.

2. Основной результат

Введем следующие обозначения: $X(t), X_1(t), ..., X_m(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, составляющие фундаментальную матрицу $\mathcal{X}(t)$ однородной импульсной системы $(\mathcal{L}x)(t) = 0$:

$$\mathcal{X}(t) = (X(t),\ X_1(t),\ ...\ X_m(t));$$

$C(t,s)$ – матрица Коши, соответствующая ядру $K(t,s)$ [13, 14];

$$\theta(s) = \Phi(s)\ +\ \int_s^T \Phi(t)\, C_t'(t,s)\,dt;$$

$M(t) = (\mathcal{F}^*\theta)(t)$ ($\mathcal{F}^*$ - оператор сопряженный к оператору $\mathcal{F}$); $\Lambda_k = \ell X_k,\ k = 1, ..., m$; $\Lambda = (\,\Lambda_1, ..., \Lambda_m\,)$; $\mu = \ell X \cdot \alpha\ +\ \int_0^T \theta(t) f(t)\,dt$.

Обозначим через $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$ множество всех угловых точек множества $\mathcal{V}_i$. Пусть, далее, для $\lambda \in R^N$

$$z(t,\lambda)\ =\ \max(\lambda^\top \cdot M(t) \cdot v : v \in \mathcal{V}_1).$$

Определим $v(t,\lambda)$ как центр масс системы точек единичной массы, принадлежащих множеству $\mathcal{A}_1$ и доставляющих функционалу $z = \lambda^\top \cdot M(t) \cdot v$ значение $z(t,\lambda)$. Будем предполагать, что $v(\cdot,\lambda) \in L^r$ для каждого $\lambda \in R^N$.

Определим множество S_1 как множество векторов $\rho \in R^N$, удовлетворяющих при каждом $\lambda \in R^N$ неравенству

$$\lambda^\top \rho \ \leq \ \int_0^T \lambda^\top M(t) v(t,\lambda)\, dt.$$

Множество S_2 определим как выпуклую оболочку Λ-образа множества $\mathcal{A}_2 : S_2 = conv(\Lambda \mathcal{A}_2)$.

Теорема 1. *Пусть элементы матрицы* $M(t)$ *кусочно непрерывны на* $[0,\, T]$. *Значение* $\beta \in R^N$ *является достижимым значением целевого вектор-функционала* ℓ *в задаче* (1)–(3) *если и только если оно представимо в виде* $\beta = \delta_1 + \delta_2$, *где* $\delta_1 \in S_1$, $\delta_2 \in S_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Максимов В.П.* Об одном классе задач оптимального управления для функционально-дифференциальных систем // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 131-142.

2. *Максимов В.П.* Управление функционально-дифференциальной системой в условиях импульсных возмущений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 9. С. 70-74.

3. *Максимов В.П.* Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последействием // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика. 2009. Вып. 1 (1). С. 96-100.

4. *Анохин А.В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1037-1040.

5. *Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F.* Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Memoirs on Diff. Equat. and Math. Phys. 1996. Vol. 8. P. 1-102.

6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

7. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M.* Theory of functional differential equations and applications // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. Vol. 69. № 2. P. 203-235.

8. *Maksimov V.P.* Theory of functional Differential equations and some problems in economic dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications. New York; Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2006. P. 74-82.

9. *Maksimov V.P.* On the property of controllability with respect to a family of linear functional // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16. № 3. P. 517-527.

10. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

11. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

12. *Костоусова Е.К.* О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 195-210.

13. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 4. С. 601-606.

14. *Максимов В.П.* Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. 306 с.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Максимов Владимир Петрович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: maksimov@econ.psu.ru

Для цитирования: *Максимов В.П.* Достижимые значения целевых функционалов для функционально-дифференциальной системы с импульсным воздействием // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 441–447. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-441-447

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-441-447

ATTAINABLE VALUES OF ON-TARGET FUNCTIONALS FOR A FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEM WITH IMPULSES

V. P. Maksimov

Perm State University
15 Bukirev St., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: maksimov@econ.psu.ru

Abstract. For a linear functional differential system with aftereffect and impulses, a description of the attainability set is given. The attainability is considered in the term of a given system of on-target functionals in the case of polyhedral constraints with respect to control and impulses.
Keywords: functional differential equations; control problems; attainability set

REFERENCES

1. Maksimov V.P. Ob odnom klasse zadach optimal'nogo upravleniya dlya funktsional'no-differentsial'nykh sistem [On a class of optimal control problems for functional differential systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 131-142. (In Russian).

2. Maksimov V.P. Upravlenie funktsional'no-differentsial'noy sistemoy v usloviyakh impul'snykh vozmushcheniy [Control of functional differential system in conditions of impulse disturbances]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2013, no. 9, pp. 70-74. (In Russian).

3. Maksimov V.P. Impul'snaya korrektsiya upravleniya dlya dinamicheskikh modeley s posledeystviem [Impulse correction of control for dynamic models with aftereffect]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Ekonomika – Perm University Herald. Economy*, 2009, no. 1 (1), pp. 96-100. (In Russian).

4. Anokhin A.V. O lineynykh impul'snykh sistemakh dlya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On linear impulse systems for functional-differential equations]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1986, vol. 286, no. 5, pp. 1037-1040. (In Russian).

5. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. Theory of linear abstract functional differential equations and applications. *Memoirs on Diff. Equat. and Math. Phys.*, 1996, vol. 8, pp. 1-102.

6. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Elements of Functional-Differentional Equations Modern Theory]. Moscow, Institute of Computer Science Publ., 2002, 384 p. (In Russian).

7. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Theory of functional differential equations and applications. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2011, vol. 69, no. 2, pp. 203-235.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00332) and the Vladimir Potanin Fund.

8. Maksimov V.P. Theory of functional Differential equations and some problems in economic dynamics. *Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications*. New York, Cairo, Hindawi Publishing Corporation, 2006, pp. 74-82.

9. Maksimov V.P. On the property of controllability with respect to a family of linear functional. *Functional Differential Equations*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 517-527.

10. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p. (In Russian).

11. Kurzhanskiy A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [The Control and Observation Under Conditions of Indefiniteness]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p. (In Russian).

12. Kostousova E.K. O poliedral'nykh otsenkakh mnozhestv dostizhimosti differentsial'nykh sistem s bilineynoy neopredlennost'yu [On polyhedral estimates for reachable sets of differential systems with bilinear uncertainty]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 195-210. (In Russian).

13. Maksimov V.P. O formule Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya [The Cauchy formula for a functional-differential equation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 601-606. (In Russian).

14. Maksimov V.P. *Voprosy obshchey teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Questions of the General Theory of Functional Differential Equations]. Perm, Perm State University Publ., 2003, 306 p. (In Russian).

Received 18 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Maksimov Vladimir Petrovich, Perm State University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: maksimov@econ.psu.ru

For citation: Maksimov V.P. Dostizhimye znacheniya tselevykh functsionalov dlya functsionalno-differentsialnoi sistemy s impulsnym vozdeistviem [Attainable values of on-target functionals for a functional differential system with impulses]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 441–447. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-441-447 (In Russian, Abstr. in Engl.).