

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-437-440

УДК 517.9

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© А. М. Котюков, М. М. Котюков

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: amkotyukov@mail.ru, mmkotyukov@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой второго порядка. Для этой задачи получен принцип максимума Понтрягина и условия его нетривиальности.

Ключевые слова: оптимальное управление; принцип максимума; уравнение второго порядка; условия нетривиальности

1. Введение

В настоящей работе исследуется задача оптимального управления, в которой управляемая система является системой второго порядка. Для этой задачи получен принцип максимума Понтрягина.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, \dot{x}, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, u, t), t \in [t_0, t_1], t_0 < t_1, \quad (2)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in U(t) = \{u \in L_\infty^m[t_0, t_1] : R(u(t), t) = 0 \ \forall t\}, \quad (3)$$

$$x(t_0) = x_{01}, \dot{x}(t_1) = x_{02}, x(t_1) = x_{11}, \dot{x}(t_1) = x_{12}. \quad (4)$$

Здесь t – время, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $\dot{x}(t)$ обозначает производную функции x по времени, u – управление, через $L_\infty^m[t_0, t_1]$ обозначается множество всех измеримых существенно ограниченных функций $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, f^0 – заданная скалярная функция, f – заданная n -мерная вектор-функция.

Функции f^0 и f предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по (x, u) для п.в. $t \in [t_0, t_1]$. Кроме того, эти функции и их частные производные по (x, u) до второго порядка включительно измеримы по t при любых фиксированных (x, u) , а также ограничены и равномерно непрерывны по x, u, t на любом ограниченном множестве.

Ограничение R называется смешанным. Относительно него мы предполагаем, что отображение R непрерывно, а также для него выполнено следующее предположение регулярности:

$$\text{rang} \frac{\partial R}{\partial u}(u, t) = d(R) \quad \forall u \in U(t), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Здесь $d(R)$ – размерность пространства, в которое действует отображение R .

Допустимым процессом мы будем называть пару $(x(t), u(t)), t \in [t_0, t_1]$, которая удовлетворяет всем вышеперечисленным ограничениям. Задача состоит в том, чтобы среди всех допустимых процессов найти тот, при котором функционал J принимает наименьшее значение. Такой процесс мы назовем оптимальным в задаче оптимального управления (1)–(4).

3. Основной результат

Сформулируем необходимые условия оптимальности для задачи (1)–(4).

Теорема 1. Пусть (x^*, u^*) является оптимальным процессом в задаче (1), а смешанное ограничение $R(u, t)$ регулярно. Тогда существуют не равные одновременно нулю $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, $\lambda^0 \geq 0$, абсолютно непрерывная функция $\psi = (\psi^1, \psi^2) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$; $\psi^1, \psi^2 \in \mathbb{R}^n$; измеримая ограниченная функция $r : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $r \in L_\infty^m[t_0, t_1]$, такие, что:

$$\begin{cases} \dot{\psi}^1 = \lambda^0 \frac{\partial f_0(x^*, \dot{x}^*, u_0, t)}{\partial x} - \frac{\partial f(x^*, \dot{x}^*, u_0, t)}{\partial x} \psi^2, \\ \dot{\psi}^2 = \lambda^0 \frac{\partial f_0(x^*, \dot{x}^*, u_0, t)}{\partial \dot{x}} - \psi^1 - \frac{\partial f(x^*, \dot{x}^*, u_0, t)}{\partial \dot{x}} \psi^2, \end{cases} \quad \forall t \in [t_0, t_1]; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi^1(t_0) + \psi^1(t_1) &= 0, \\ \psi^2(t_0) + \psi^2(t_1) &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \max_{u \in U(t)} (\langle f(x^*, \dot{x}^*, u, t), \psi^2 \rangle - \lambda^0 f_0(x^*, \dot{x}^*, u, t)) = \\ &= \langle f(x^*, \dot{x}^*, u^*, t), \psi^2 \rangle - \lambda^0 f_0(x^*, \dot{x}^*, u^*, t) \quad \forall t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (7)$$

причем функция $h(t)$ непрерывна на $[t_0, t_1]$;

$$h(t_0) = 0, \quad h(t_1) = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial f(x^*, \dot{x}^*, u^*, t)^T}{\partial u} \psi^2 - \lambda^0 \frac{\partial f^0(x^*, \dot{x}^*, u^*, t)}{\partial u} = r(t) \frac{\partial R}{\partial u}(u^*, t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]; \quad (9)$$

$$\langle r(t), R(u^*, t) \rangle = 0, \quad r(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (10)$$

Вывод теоремы осуществляется в три этапа: на первом этапе производится замена переменной, понижающая порядок уравнения до первого, после нее для задачи в новом виде применяется уже доказанный в [1, 2] принцип максимума, и затем производится обратная замена переменной, дающая формулировку теоремы в окончательном виде.

Заметим, что условие (7) теоремы может вырождаться, несмотря на то, что множители Лагранжа λ^0 , ψ^1 , ψ^2 , r одновременно в нуль не обращаются. В этом случае приведенный принцип максимума становится неинформативен и бесполезен для нахождения оптимальных траекторий. Покажем, что, тем не менее, в приведенных предположениях принцип максимума из Теоремы 1 не вырождается.

Теорема 2. Пусть (x^*, u^*) – оптимальный процесс, а смешанное ограничение $R(u, t)$ регулярно. Тогда для любых множителей λ^0 , ψ^1 , ψ^2 , r , соответствующих оптимальному процессу (x^*, u^*) в силу Теоремы 1, выполнено следующее условие не тривиальности:

$$\lambda^0 + \text{meas}\{t \in [t_0, t_1] : |\psi^2(t)| > 0\} > 0, \quad (11)$$

где meas обозначает меру Лебега.

Доказательство теоремы проводится от противного. Предполагая, что (11) не выполнено, мы получаем, что $\lambda^0 = 0$ и $\psi^2 = 0$. Подставляя это в выражения (5)–(10), мы получаем, что все множители Лагранжа обращаются в нуль, что противоречит условиям теоремы.

Представленные в данной статье результаты уточняют результаты работы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005. 384 с.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983. 392 с.
3. Котюков А.М. Принцип максимума Понтрягина для системы второго порядка // Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы: материалы Междунар. молодежной науч. шк. Воронеж, 2017. Вып. 7. Часть 1. 244 с.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Котюков Александр Михайлович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: amkotyukov@mail.ru

Котюков Михаил Михайлович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, младший научный сотрудник Центра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: mmkotyukov@gmail.com

Для цитирования: Котюков А.М., Котюков М.М. Необходимые условия оптимальности в задаче, описываемой уравнением второго порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 437–440. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-437-440

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-437-440

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH SECOND ORDER EQUATION

A. M. Kotyukov, M. M. Kotyukov

RUDN University

6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

E-mail: amkotyukov@mail.ru, mmkotyukov@gmail.com

Abstract. An optimal control problem with second order equation is considered. For this problem Pontryagin maximum principle is obtained. Also non-triviality condition is proved.

Keywords: optimal control; maximum principle; second order equation; non-triviality conditions

REFERENCES

1. Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie* [Optimal Control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 384 p. (In Russian).
2. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 392 p. (In Russian).
3. Kotyukov A.M. Printsip maksimuma Pontryagina dlya sistemy vtorogo poryadka [Pontryagin's maximum principle for second order system]. *Materialy Mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchnoy shkoly «Aktual'nye napravleniya matematicheskogo analiza i smezhnye voprosy»* [Proceedings of the International Youth Scientific School "Current Directions of Mathematical Analysis and Allied Issues"]. Voronezh, 2017, no. 7, pt. 1, 244 p. (In Russian).

Received 18 April 2018

Reviewed 23 May 2018

Accepted for press 19 June 2018

There is no conflict of interests.

Kotyukov Alexandr Mikhailovich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Student, Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: amkotyukov@mail.ru

Kotyukov Mikhail Mikhailovich, RUDN University, Moscow, Russian Federation, Junior Researcher of the Center for Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: mmkotyukov@gmail.com

For citation: Kotyukov A.M., Kotyukov M.M. Neobhodimye usloviya optimalnosti dlya zadachi, opisivayemoy uravneniyem vtorogo poryadka [Necessary optimality conditions for optimal control problems with second grade equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 437–440. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-437-440 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is supported by the Russian Science Foundation (project № 17-11-01168).