ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 122 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-268-277
УДК 517.977

# УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

**© М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин**

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com, nyul@imm.uran.ru, a.r.plaksin@gmail.com

*Аннотация.* Установлена связь между дифференциальной игрой в системах нейтрального типа и функциональным уравнением Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными. Доказано совпадение функционала цены игры и минимаксного решения этого уравнения. Указаны оптимальные стратегии игроков.
*Ключевые слова:* дифференциальные игры; уравнения нейтрального типа; уравнения Гамильтона–Якоби; инвариантные производные

## Введение

В работе рассмотрена позиционная дифференциальная игра [1–9] для динамической системы, описываемой функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла [10]. На основе понятия коинвариантных производных [5, 11] для функционала цены игры выписано функциональное уравнение Гамильтона–Якоби [9]. Нейтральный тип динамической системы диктует особые свойства этого уравнения, которые не позволяют применить к нему результаты, ранее полученные в теории уравнений Гамильтона–Якоби для обыкновенных дифференциальных систем [12] и систем запаздывающего типа [5, 6]. В [9] было показано, что если рассматриваемое уравнение Гамильтона–Якоби имеет классическое решение, удовлетворяющее подходящим условиям гладкости, то оно совпадает с функционалом цены дифференциальной игры. В [13] показано, что у рассматриваемого уравнения Гамильтона–Якоби существует и единственно минимаксное (обобщенное) решение. В данной работе доказано, что функционал цены игры совпадает с минимаксным решением уравнения Гамильтона–Якоби без дополнительного предположения о гладкости цены. При этом оптимальные стратегии игроков могут быть построены по минимаксному решению на основе подходящей модификации [7] метода экстремального сдвига на сопутствующие точки [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3047.2017.1.

## 1. Дифференциальная игра

Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру, в которой движение динамической системы описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(x[\tau]-g(\tau,x_\tau[\cdot])\Big)=f(\tau,x_\tau[\cdot],u[\tau],v[\tau]) \tag{1.1}$$

$$\tau\in[t_0,\vartheta],\quad x[\tau]\in\mathbb{R}^n,\quad u[\tau]\in\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^{n_1},\quad v[\tau]\in\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^{n_2},$$

а показатель качества имеет вид

$$\gamma=\sigma(x_\vartheta[\cdot]). \tag{1.2}$$

Здесь $\tau$ — переменная времени; $x[\tau]$ — вектор состояния в момент времени $\tau$; $t_0$ и $\vartheta$ — фиксированные начальный и терминальный моменты времени; $x_\tau[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке $[\tau-h,\tau]$, то есть $x_\tau[\xi]=x[\tau+\xi]$, $\xi\in[-h,0]$, где $h>0$ — константа запаздывания; $u[\tau]$ и $v[\tau]$ — текущие управляющие воздействия, соответственно, первого и второго игроков; $n_1,n_2\in\mathbb{N}$; $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — компакты.

Цель первого игрока — доставить показателю (1.2) как можно меньшее значение. Цель второго игрока — противоположна.

Всюду ниже угловые скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ используем для обозначения скалярного произведения векторов, а двойные скобки $\|\cdot\|$ — для евклидовой нормы. Через $\mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство липшицевых функций, действующих из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабженное равномерной нормой. Для краткости обозначим $\mathrm{Lip}=\mathrm{Lip}([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Равномерную норму пространства Lip обозначим через $\|\cdot\|_\infty$. Через Comp(Lip) обозначим множество непустых компактных подмножеств пространства Lip. Через $\mathbb{G}=[t_0,\vartheta]\times\mathrm{Lip}$ обозначим множество допустимых позиций системы (1.1).

Полагаем, что для отображений $g\colon\mathbb{G}\mapsto\mathbb{R}^n$, $f\colon\mathbb{G}\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}^n$ и $\sigma\colon\mathrm{Lip}\mapsto\mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

$(g)$ Существуют такие $\alpha_g>0$ и $\lambda_g\in(0,1)$, что имеет место оценка

$$\|g(t,w[\cdot])-g(\tau,r[\cdot])\|\le\alpha_g(1+\|w[\cdot]\|_\infty)|t-\tau|+\lambda_g\|w[\cdot]-r[\cdot]\|_\infty,\quad (t,w[\cdot]),(\tau,r[\cdot])\in\mathbb{G}.$$

$(f.1)$ Отображение $f$ непрерывно.

$(f.2)$ Существует такое $\alpha_f>0$, что имеет место оценка

$$\|f(t,w[\cdot],u,v)\|\le\alpha_f(1+\|w[\cdot]\|_\infty),\quad (t,w[\cdot])\in\mathbb{G},\quad u\in\mathbb{U},\quad v\in\mathbb{V}.$$

$(f.3)$ Для любого $D\in\mathrm{Comp(Lip)}$ существует такое $\lambda_f=\lambda_f(D)>0$, что для всех $(t,w[\cdot]),(t,r[\cdot])\in[t_0,\vartheta]\times D$, $u\in\mathbb{U}$ и $v\in\mathbb{V}$ справедливо неравенство

$$\|f(t,w[\cdot],u,v)-f(t,r[\cdot],u,v)\|\le\lambda_f\|w[\cdot]-r[\cdot]\|_\infty.$$

$(f.4)$ Для любых $(t,w[\cdot])\in\mathbb{G}$ и $s\in\mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\langle f(t,w[\cdot],u,v),s\rangle=\max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}}\langle f(t,w[\cdot],u,v),s\rangle.$$

( $\sigma$ ) Для любого $D \in \mathrm{Comp}(\mathrm{Lip})$ существует такое $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(D) > 0$, что

$$|\sigma(w[\cdot]) - \sigma(r[\cdot])| \leq \lambda_\sigma \|w[\cdot] - r[\cdot]\|_\infty, \quad w[\cdot], r[\cdot] \in D.$$

Пусть $t \in [t_0, \vartheta]$. Допустимыми реализациями управляющих воздействий $u[\tau]$ и $v[\tau]$ на промежутке $[t, \vartheta)$ считаем измеримые функции $u[\cdot]\colon [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ и $v[\cdot]\colon [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$. Для позиции $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$ определим множество всех липшицевых продолжений:

$$X(t, w[\cdot]) = \{x[\cdot] \in \mathrm{Lip}([t-h, \vartheta], \mathbb{R}^n)\colon x_t[\cdot] = w[\cdot]\}.$$

Пусть $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$. При условиях $(g)$ и $(f.1)$ – $(f.3)$ действуя, например, по схеме из [6, раздел P1] можно показать, что пара допустимых реализаций $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$ единственным образом порождает движение $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ системы (1.1) — функцию, которая вместе с $u[\tau]$ и $v[\tau]$ почти всюду на $[t, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Формализацию дифференциальной игры (1.1), (1.2) будем проводить в классе позиционных стратегий управления игроков следуя подходу [1–4]. При этом в силу условия седловой точки в маленькой игре $(f.4)$, можно ограничиться классом чистых позиционных стратегий [2] (см., также, [5–7]).

Пусть зафиксирована начальная позиция $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$. Под стратегией управления первого игрока понимаем всякое отображение

$$U = U(\tau, r[\cdot], \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad (\tau, r[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad \varepsilon > 0,$$

Пусть выбраны стратегия первого игрока $U$, число $\varepsilon > 0$ и разбиение отрезка $[t, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \left\{\tau_j : 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leq \delta,\ j = \overline{1, J-1},\ \tau_1 = t,\ \tau_J = \vartheta\right\}.$$

Тройка $\{U, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления первого игрока, который в цепи обратной связи последовательно по шагам разбиения $\Delta_\delta$ формирует кусочно-постоянную (а стало быть, допустимую) реализацию $u[\cdot]\colon [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ по правилу

$$u[\tau] = U(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Из позиции $(t, w[\cdot])$ такой закон в паре с допустимой реализацией $v[\cdot]\colon [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$ однозначно порождает движение системы (1.1). Реализовавшееся при этом значение показателя качества (1.2) обозначим через $\gamma(t, w[\cdot]; U, \varepsilon, \Delta_\delta; v[\cdot])$. Исходя из самых неблагоприятных с точки зрения первого игрока обстоятельств, определим величину гарантированного результата стратегии $U$:

$$\rho_u(t, w[\cdot]; U) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v[\cdot]} \gamma(t, w[\cdot]; U, \varepsilon, \Delta_\delta; v[\cdot]).$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом первого игрока будет величина

$$\rho_u^\circ(t, w[\cdot]) = \inf_U \rho_u(t, w[\cdot]; U). \tag{1.3}$$

Стратегию первого игрока $U^\circ$ назовем оптимальной, если в этом выражении на ней достигается минимум. То есть, справедливо равенство $\rho_u(t, w[\cdot], U^\circ) = \rho_u^\circ(t, w[\cdot])$.

Аналогично, с понятными изменениями, для второго игрока рассматриваем стратегию управления $V = V(t, w[\cdot], \varepsilon) \in \mathbb{V}$, $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $\varepsilon > 0$, закон управления $\{V, \varepsilon, \Delta_\delta\}$, формирующий кусочно-постоянную реализацию $v[\cdot]\colon [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$ по правилу

$$v[\tau] = V(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1},$$

величину гарантированного результата стратегии $V$

$$\rho_v(t, w[\cdot]; V) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{\delta \downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u[\cdot]} \gamma(t, w[\cdot]; u[\cdot]; V, \varepsilon, \Delta_\delta),$$

и величину оптимального гарантированного результата второго игрока

$$\rho_v^\circ(t, w[\cdot]) = \sup_V \rho_v(t, w[\cdot]; V). \tag{1.4}$$

Стратегия $V^\circ$ — оптимальна, если в этом выражении на ней достигается максимум.

Непосредственно из соотношений (1.3) и (1.4) вытекает $\rho_u^\circ(t, w[\cdot]) \geq \rho_v^\circ(t, w[\cdot])$. В случае, когда справедливо равенство $\rho_u^\circ(t, w[\cdot]) = \rho_v^\circ(t, w[\cdot])$ говорят, что дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет цену в точке $(t, w[\cdot])$, а пару оптимальных стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ называют седловой точкой игры.

Следуя работе [7] приведем следующие вспомогательные построения. Обозначим

$$F_*(t, w[\cdot], \alpha) = \{f \in \mathbb{R}^n\colon \|f\| \leq \alpha(1 + \|w[\cdot]\|_\infty)\}, \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad \alpha > 0.$$

Пусть зафиксирована позиция $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$. Для числа $\alpha > 0$ определим множество

$$X_*(t, w[\cdot], \alpha) = \Big\{x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])\colon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(x[\tau] - g(\tau, x_\tau[\cdot])\Big) \in F_*(\tau, x_\tau[\cdot], \alpha) \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta]\Big\}.$$

Пользуясь условием $(g)$ можно показать, что множество $X_*(t, w[\cdot], \alpha)$ является непустым компактом в $\mathrm{Lip}([t-h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$. Тогда, учитывая условие $(f.1)$ существует такое $\overline{\alpha}_f \geq \alpha_f$, что справедливо неравенство

$$\|f(\tau, x_\tau[\cdot], u, v)\| \leq \overline{\alpha}_f, \quad \tau \in [t, \vartheta], \quad x[\cdot] \in X_*(t, w[\cdot], \alpha_f), \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V},$$

где число $\alpha_f$ взято из условия $(f.3)$. Определим множество

$$G(t, w[\cdot]) = \{(\tau, x_\tau[\cdot]) \in \mathbb{G}\colon \tau \in [t, \vartheta],\ x[\cdot] \in X_*(t, w[\cdot], \overline{\alpha}_f)\}.$$

Отметим, что $G(t, w[\cdot]) \in \mathrm{Comp}(\mathrm{Lip})$. Для $(\tau, r[\cdot]) \in G(t, w[\cdot])$ и $\varepsilon > 0$ через $Z(\tau, r[\cdot], \varepsilon)$ обозначим множество таких функций $z[\cdot] \in \mathrm{Lip}$, что справедливы соотношения

$$(\tau, z[\cdot]) \in G(t, w[\cdot]), \ \ \|r[0] - g(\tau, r[\cdot]) - z[0] + g(\tau, z[\cdot])\| \leq \epsilon(\tau), \ \ \|r[\cdot] - z[\cdot]\|_\infty \leq \epsilon(\tau)/(1 - \lambda_g),$$

где $\epsilon(\tau) = \sqrt{\varepsilon + (\tau - t_0)\varepsilon}$, а константа $\lambda_g$ взята из условия $(g)$. Отметим, что множество $Z(\tau, r[\cdot], \varepsilon)$ будет компактно в Lip. Определим стратегии игроков экстремальным сдвигом на сопутствующие точки, выбираемые по величинам $\rho_u^\circ$ и $\rho_v^\circ$ согласно правилу:

$$\begin{aligned} U^*(\tau, r[\cdot], \varepsilon) &\in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(\tau, r[\cdot], u, v), s^u \rangle, \\ V^*(\tau, r[\cdot], \varepsilon) &\in \operatorname*{argmax}_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(\tau, r[\cdot], u, v), s^v \rangle, \end{aligned} \qquad (\tau, y[\cdot]) \in G(t, w[\cdot]), \quad \varepsilon > 0, \tag{1.5}$$

где

$$
\begin{aligned}
s^u &= r[0] - g(\tau, r[\cdot]) - z^u[0] + g(\tau, z^u[\cdot]), \quad z^u[\cdot] \in \operatorname*{argmin}_{z[\cdot]\in Z(\tau, r[\cdot], \varepsilon)} \rho_u^\circ(\tau, z[\cdot]), \\
s^v &= z^v[0] - g(\tau, z^v[\cdot]) - r[0] + g(\tau, r[\cdot]), \quad z^v[\cdot] \in \operatorname*{argmax}_{z[\cdot]\in Z(\tau, y[\cdot], \varepsilon)} \rho_v^\circ(\tau, z[\cdot]).
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

Из результатов работы [7] следует, что при условиях $(g)$, $(f.1)$–$(f.4)$ и $(\sigma)$ справедлива

**Теорема 1.1.** *Дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет цену, а пара стратегий $\{U^*, V^*\}$ составляют седловую точку игры. То есть, имеют место равенства*

$$
\rho^\circ(t, w[\cdot]) := \rho_u^\circ(t, w[\cdot]) = \rho_u(t, w[\cdot]; U^*) = \rho_v^\circ(t, w[\cdot]) = \rho_v(t, w[\cdot]; V^*), \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}.
$$

*Кроме того, функционал цены $\rho^\circ\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывен и для него справедливы свойства*

$(\rho_\lambda)$ *Для любого $D \in \mathrm{Comp(Lip)}$ существует такое $\lambda_\rho = \lambda_f(D) > 0$, что справедливо*

$$
\|\rho^\circ(t, w[\cdot]) - \rho^\circ(t, r[\cdot])\| \le \lambda_\rho \|w[\cdot] - r[\cdot]\|_\infty, \quad (t, w[\cdot]), (t, r[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times D
$$

$(\rho_u)$ *Для любых $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $\tau \in [t, \vartheta]$, $\varepsilon > 0$ и любой допустимой реализации $v[\cdot]\colon [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$ существует такая допустимая реализация $u[\cdot]\colon [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$, что для движения $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ системы (1.1), порожденного этими реализациями, справедливо неравенство $\rho^\circ(\tau, x_\tau[\cdot]) \le \rho^\circ(t, w[\cdot]) + \varepsilon$.*

$(\rho_v)$ *Для любых $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $\tau \in [t, \vartheta]$, $\varepsilon > 0$ и любой допустимой реализации $u[\cdot]\colon [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ существует такая допустимая реализация $v[\cdot]\colon [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$, что для движения $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ системы (1.1), порожденного этими реализациями, справедливо неравенство $\rho^\circ(\tau, x_\tau[\cdot]) \ge \rho^\circ(t, w[\cdot]) - \varepsilon$.*

## 2. Минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби

Следуя [5, 11], будем говорить, что функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ коинвариантно-дифференцируем (ci-дифференцируем) в точке $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, если существуют число $\partial_t\varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}$ и вектор $\nabla\varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}^n$, такие, что для любой функции $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ имеет место равенство

$$
\varphi\big(\tau, x_\tau[\cdot]\big) - \varphi\big(t, w[\cdot]\big) = \partial_t\varphi\big(t, w[\cdot]\big)(\tau - t) + \langle x_\tau[0] - w[0], \nabla\varphi\big(t, w[\cdot]\big)\rangle + o(\tau - t), \quad \tau \in [t, \vartheta],
$$

где величина $o(\tau - t)$ зависит от $\{t, x[\cdot]\}$, и $o(\tau - t)/(\tau - t) \to 0$ при $\tau \to t + 0$. Число $\partial_t\varphi(t, w[\cdot])$ и вектор $\nabla\varphi(t, w[\cdot])$ называются ci-производными $\varphi$ в точке $(t, w[\cdot])$.

Аналогично, отображение $\mathbb{G} \ni (t, w[\cdot]) \mapsto \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$ ci-дифференцируемо в точке $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, если в этой точке ci-дифференцируемы функционалы $\psi_i\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. При этом, полагаем $\partial_t\psi = \big(\partial_t\psi_1, \ldots, \partial_t\psi_n\big)$, $\nabla\psi = \big(\nabla\psi_1, \ldots, \nabla\psi_n\big)$.

Обозначим через $\mathbb{G}_*$ множество всех точке $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, в которых отображение $g$ ci-дифференцируемо. По отображению $f$ из (1.1) определим Гамильтониан

$$
H(t, w[\cdot], s) = \min_{u\in\mathbb{U}} \max_{v\in\mathbb{V}} \langle f(t, w[\cdot], u, v), s\rangle, \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad s \in \mathbb{R}^n.
$$

Рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными

$$\partial_t\varphi(t,w[\cdot]) + \langle \partial_t g(t,w[\cdot]), \nabla\varphi(t,w[\cdot])\rangle + H(t,w[\cdot],\nabla\varphi(t,w[\cdot])) = 0, \quad (t,w[\cdot]) \in \mathbb{G}_*, \tag{2.1}$$

при условии на правом конце

$$\varphi(\vartheta,w[\cdot]) = \sigma(w[\cdot]), \quad w[\cdot] \in \mathrm{Lip}, \tag{2.2}$$

где функционал $\sigma$ взят из показателя качества (1.2).

Несмотря на то, что уравнение (2.1) рассматривается только на $\mathbb{G}_*$, искомым в задаче (2.1), (2.2) является функционал $\varphi$, определенный на $\mathbb{G}$. Согласно [13] определим минимаксное (обобщенное) решение задачи (2.1), (2.2). Для это по отображению $f$ из системы (1.1) определим следующие отображения

$$\begin{aligned} &F_+(t,w[\cdot],v) = \mathrm{co}\{f(t,w[\cdot],u,v) \in \mathbb{R}^n \colon u \in \mathbb{U}\},\\ &F_-(t,w[\cdot],u) = \mathrm{co}\{f(t,w[\cdot],u,v) \in \mathbb{R}^n \colon v \in \mathbb{V}\}, \end{aligned} \qquad (t,w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \tag{2.3}$$

Пусть $(t,w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$. Определим множества

$$X_+(t,w[\cdot],v) = \Big\{x[\cdot] \in X(t,w[\cdot]) \colon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(x[\tau] - g(\tau,x_\tau[\cdot])\Big) \in F_+(\tau,x_\tau[\cdot],v) \text{ при п.в. } \tau \in [t,\vartheta]\Big\}.$$

$$X_-(t,w[\cdot],u) = \Big\{x[\cdot] \in X(t,w[\cdot]) \colon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(x[\tau] - g(\tau,x_\tau[\cdot])\Big) \in F_-(\tau,x_\tau[\cdot],u) \text{ при п.в. } \tau \in [t,\vartheta]\Big\}.$$

Отметим, что в силу условий $(f.1)-(f.4)$ отображения $F_+$ и $F_-$ удовлетворяют таким условиям (см., например, [13]), при которых множества $X_+(t,w[\cdot],v)$ и $X_-(t,w[\cdot],u)$ являются компактами в $\mathrm{Lip}([t-h,\vartheta],\mathbb{R}^n)$.

Минимаксным решением задачи (2.1), (2.2) будем называть непрерывный функционал $\varphi\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию (2.2), а также следующим двум условиям:

($\varphi_+$) Пусть $(t,w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, $\tau \in (t,\vartheta]$ и $v \in \mathbb{V}$. Тогда существует такая функция $x[\cdot] \in X_+(t,w[\cdot],v)$, что справедливо неравенство $\varphi(\tau,x_\tau[\cdot]) \le \varphi(t,w[\cdot])$.

($\varphi_-$) Пусть $(t,w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, $\tau \in (t,\vartheta]$ и $u \in \mathbb{U}$. Тогда существует такая функция $x[\cdot] \in X_-(t,w[\cdot],u)$, что справедливо неравенство $\varphi(\tau,x_\tau[\cdot]) \ge \varphi(t,w[\cdot])$.

В работе [13] показано, что справедлива следующая

**Теорема 2.1.** *У задачи (2.1), (2.2) существует единственное минимаксное решение* $\varphi\colon \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$.

## 3. Связь цены игры и минимаксного решения

**Теорема 3.1.** *Для функционала цены* $\rho^\circ$ *дифференциальной игры (1.1), (1.2) и минимаксного решения* $\varphi$ *задачи (2.1), (2.2) справедливо равенство*

$$\rho^\circ(t,w[\cdot]) = \varphi(t,w[\cdot]), \quad (t,w[\cdot]) \in \mathbb{G}.$$

Доказательство. По теореме 1 функционал цены $\rho^\circ$ дифференциальной игры (1.1), (1.2) существует. По теореме 2 минимаксное решение задачи (2.1), (2.2) единственно. Таким образом, для доказательство данной теоремы достаточно показать, что для функционала цены $\rho^\circ$ выполнены условия (2.2) и $(\varphi_+)$, $(\varphi_-)$.

Выполнение условия (2.2) вытекает из определения функционала цены $\rho^\circ$. Докажем выполнение условия $(\varphi_+)$. Пусть $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, $\tau \in (t, \vartheta]$ и $v \in \mathbb{V}$. Пусть выбрано $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Обозначим $\delta_k = (\tau - t)/k$ и $\tau_j = t + j\delta_k$, $j = \overline{0, k}$. Пользуясь на каждом отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = \overline{0, k-1}$ свойством $(\rho_u)$, определим такую реализацию $u^{(k)}[\cdot]\colon [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$, что для движения $x^{(k)}[\cdot]\colon [t-h, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$ порожденного из позиции $(t, w[\cdot])$ реализациями $u^{(k)}[\cdot]$ и $v[\cdot]\colon [t, \vartheta] \mapsto \{v\}$ будут справедливы неравенства

$$\rho^\circ(\tau, x^{(k)}_\tau[\cdot]) = \rho^\circ(\tau_k, x^{(k)}_{\tau_k}[\cdot]) \leq \rho^\circ(\tau_{k-1}, x^{(k)}_{\tau_{k-1}}[\cdot]) + 1/k^2 \qquad (3.1)$$

$$\leq \rho^\circ(\tau_{k-2}, x^{(k)}_{\tau_{k-2}}[\cdot]) + 2/k^2 \leq \ldots \leq \rho^\circ\big(t, w[\cdot]\big) + 1/k.$$

Тогда, учитывая определение (2.3) отображения $F_+$, справедливо включение $x^{(k)}[\cdot] \in X_+(t, w[\cdot], v)$. В силу компактности множества решений $X_+(t, w[\cdot], v)$ у последовательности $x^{(k)}[\cdot]$ существует сходящаяся подпоследовательность, которую будем обозначать также, а предел ее обозначим через $x^\circ[\cdot] \in X_+(t, w[\cdot], v)$. В силу свойства $(\rho_\lambda)$, полагая в нем $D = \{x^{(k)}_\tau[\cdot], k \in \mathbb{N}\} \cup \{x^\circ[\cdot]\}$ найдется такое $\lambda_\rho = \lambda_\rho(D) > 0$, что справедливо

$$\|\rho^\circ(\tau, x^\circ_\tau[\cdot]) - \rho^\circ(\tau, x^{(k)}_\tau[\cdot])\| \leq \lambda_\rho \|x^\circ_\tau[\cdot] - x^{(k)}_\tau[\cdot]\|_\infty, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (3.2)$$

Переходя в соотношениях (3.1), (3.2) к пределу при $k \to \infty$ получаем неравенство $\rho^\circ(\tau, x^\circ_\tau[\cdot]) \leq \rho^\circ(t, w[\cdot])$. Выполнение условия $(\varphi_+)$ доказано. Аналогично можно показать выполнение условия $(\varphi_-)$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 вытекает, что если известно минимаксное решение $\varphi$ задачи (2.1), (2.2), то оно является ценой дифференциальной игры (1.1), (1.2) и, более того, оптимальные стратегии в этой игре могут быть построены согласно правилу (1.5), (1.6), в котором полагаем $\rho^\circ_u(\tau, z[\cdot]) = \rho^\circ_u(\tau, z[\cdot]) = \varphi(\tau, z[\cdot])$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.

3. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under lack of information. Berlin: Birkhäuser, 1995. 322 p.

4. *Осипов Ю.С.* К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35. № 2. С. 300-311.

5. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения типа Гамильтона–Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией // Доклады РАН. 2000. Т. 371. № 4. С. 457-461.

6. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона-Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011. 243 с.

7. *Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 101-112.

8. *Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.* К вопросу численного решения дифференциальных игр для линейных систем нейтрального типа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 75-87.

9. *Плаксин А.Р.* Об уравнении Гамильтона–Якоби–Айзекса–Беллмана для систем нейтрального типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 2. С. 222-237.

10. *Hale J.K.* Theory of functional differential equations. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1977. 365 p.

11. *Kim A.V.* Functional differential equations. Application of $i$-smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.

12. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.

13. *Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* Минимаксное решение функциональных уравнений Гамильтона–Якоби для систем нейтрального типа // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476. № 2. С. 136-139.

Поступила в редакцию 26 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 27 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Гомоюнов Михаил Игоревич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела динамических систем, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, член-корреспондент Российской академии наук, директор, e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, научный сотрудник отдела динамических систем, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

**Для цитирования:** *Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.* Уравнения Гамильтона–Якоби в задачах динамической оптимизации систем нейтрального типа // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 268–277. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-268-277

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-268-277

# HAMILTON–JACOBI EQUATIONS IN DYNAMICAL OPTIMIZATION PROBLEMS FOR NEUTRAL-TYPE SYSTEMS

**M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin**

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com, nyul@imm.uran.ru, a.r.plaksin@gmail.com

*Abstract.* The relation between a differential game for neutral-type systems and a Hamilton–Jacobi functional equation with coinvariant derivatives is established. It is proved that the value functional of the game coincides with the minimax solution of this equation. Optimal strategies for the players are described.
*Keywords:* differential games; neutral-type equations; Hamilton–Jacobi equations; invariant derivatives

REFERENCES

1. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian).

2. Krasovskiy N.N. *Upravlenie dinamicheskoy sistemoy* [Control of a Dynamic System]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 516 p. (In Russian).

3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information.* Berlin, Birkhäuser, 1995. 322 p.

4. Osipov Yu.S. K teorii differentsial'nykh igr sistem s posledeystviem [On the theory of differential games of systems with aftereffect]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, no. 2, pp. 300-311. (In Russian).

5. Lukoyanov N.Yu. Funktsional'nye uravneniya tipa Gamil'tona–Yakobi i differentsial'nye igry s nasledstvennoy informatsiey [Functional Hamilton–Jacobi type equations and differential games with hereditary information]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2000, vol. 371, no. 4, pp. 457-461. (In Russian).

6. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoy informatsiey* [Functional Hamilton–Jacobi Equations and Control Problems with Hereditary Information]. Yekaterinburg, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin Publ., 2011, 243 p. (In Russian).

7. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Sushchestvovanie tseny i sedlovoy tochki v pozitsionnykh differentsial'nykh igrakh dlya sistem neytral'nogo tipa [Existence of the value and saddle point in positional differential games for neutral-type systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 101-112. (In Russian).

This work is supported by the Grant of the President of the Russian Federation (project MK-3047.2017.1).

8. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. K voprosu chislennogo resheniya differentsial'nykh igr dlya lineynykh sistem neytral'nogo tipa [On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 75-87. (In Russian).

9. Plaksin A.R. Ob uravnenii Gamil'tona–Yakobi–Ayzeksa–Bellmana dlya sistem neytral'nogo tipa [On Hamilton–Jacobi–Isaacs–Bellman equation for neutral type systems]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 222-237. (In Russian).

10. Hale J.K. *Theory of functional differential equations.* New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1977, 365 p.

11. Kim A.V. *Functional differential equations. Application of i-smooth calculus.* Dordrecht, Kluwer, 1999, 165 p.

12. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective.* Boston, Birkhäuser, 1995, 312 p.

13. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Minimaksnoe reshenie funktsional'nykh uravneniy Gamil'tona–Yakobi dlya sistem neytral'nogo tipa [Minimax solutions of Hamilton–Jacobi functional equations for neutral-type systems]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2017, vol. 476, no. 2, pp. 136-139. (In Russian).

Received 26 March 2018
Reviewed 27 April 2018
Accepted for press 5 June 2018
There is no conflict of interests.

Gomoyunov Mikhail Igorevich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Dynamical Systems Department, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Lukoyanov Nikolay Yurievich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Director, e-mail: nyul@imm.uran.ru

Plaksin Anton Romanovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, Researcher of the Dynamical Systems Department, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

**For citation:** Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Uravneniya Ggamiltona–Yakobi v zadachah dinamicheskoj optimizacii sistem nejtralnogo tipa [Hamilton–Jacobi equations in dynamical optimization problems for neutral-type systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 268–277. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-268-277 (In Russian, Abstr. in Engl.).