

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179

УДК 519.642.5

## ТЕСТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ $n$ ВОЗРАСТНЫХ ГРУПП

© А. С. Апарцин, И. В. Сидлер

ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева» СО РАН  
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130  
E-mail: apartsyn@isem.irk.ru, inna.sidler@mail.ru

*Аннотация.* Статья посвящена обобщению результатов авторов по исследованию тестовых интегральных уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем, состоящих из двух и трех возрастных групп элементов, на случай произвольного числа групп. Наряду с теоретическими результатами приводятся численные расчеты для модельного примера, иллюстрирующие справедливость теоретических оценок.

*Ключевые слова:* развивающаяся система;  $n$  возрастных групп; тестовое уравнение Вольтерра I рода; численное решение; неустойчивость

### Введение

При построении интегральной модели развивающейся системы, элементы которой принадлежат  $n$  возрастным группам, важную роль играет интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s) x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.1)$$

описывающее баланс между требуемым уровнем развития (правой частью (0.1)) и возможностью его достижения совокупностью элементов системы. В (0.1)

$$a_0(t) \equiv t > a_1(t) > \dots > a_n(t) \geq 0 \quad \forall t > 0, \quad (0.2)$$

$K_i(t, s)$  — непрерывный по  $t, s$  и непрерывно дифференцируемый по  $t$  в области  $\Delta_i = \{t \in [0, T], s \in [a_i(t), a_{i-1}(t)]\}$  коэффициент эффективности функционирования элементов  $x(s)$   $i$ -ой возрастной группы. Специфику (0.1) во многом определяют значения  $a_i(0)$ . Случай  $a_i(0) < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , предполагает задание предыстории

---

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № АААА-А17-117030310446-6) и при частичной поддержке РФФИ (проект 15-01-01425).

$x(t) = x_0(t)$ ,  $t \in [a_n(0), 0)$ . В частности, при  $a_i(t) = t - T_i$ ,  $0 < T_i < \dots < T_n$ ,  $x(t) = x_0(t)$ ,  $t \in [-T_n, 0)$ . В [1], [2] этот случай с  $n = 3$  положен в основу построения долгосрочных стратегий развития электроэнергетической системы России, а в качестве  $y(t)$  принята суммарная располагаемая мощность электростанций.

Принципиально иная ситуация возникает при условии  $a_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , которое означает, что моменту  $t = 0$  соответствует время возникновения системы, так что предыстория отсутствует, все возрастные группы пусты и  $y(0) = 0$ . Ниже рассматривается именно этот случай. Дополнительно к (0.2) предполагаем, что  $a_i(t)$  непрерывно дифференцируемы на  $[0, T]$ ,  $a'_i(t) \geq 0$ ,  $a'_n(0) < \dots < a'_1(0) < 1$ .

В настоящее время теория уравнений (0.1) с указанными свойствами пределов интегрирования еще только создается. В частности, нуждается в тщательном исследовании эффект потери устойчивости к погрешностям начальных данных непрерывного решения (0.1) с ростом длины временного отрезка моделирования.

### 1. Тестовые уравнения для $n = 2, 3$

Пониманию специфики уравнений типа (0.1) способствует рассмотрение простейших тестовых уравнений. Всюду далее полагаем, что  $\delta$  — числовой параметр,

$$a_i(t) = \alpha_i t, \quad 1 = \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n \geq 0.$$

В [3] для случая  $n = 2$  введено тестовое уравнение

$$\int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \int_0^{\alpha_1 t} (1 - \delta s) x(s) ds = t - \frac{\alpha_1^2 \delta}{2} t^2, \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

точное решение которого, а также эквивалентного функционального уравнения

$$x(t) = \alpha_1^2 \delta t x(\alpha_1 t) + 1 - \alpha_1^2 \delta t, \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

$\bar{x}(t) = 1$  для любого конечного  $T$ . Оператор в правой части (1.2), рассматриваемый действующим из  $C_{[0, T]}$  в  $C_{[0, T]}$ , является сжимающим лишь при  $T < T_2^*$  (индекс 2 означает, что рассматривается случай  $n = 2$ ),

$$T_2^* = \frac{1}{\alpha_1^2 |\delta|}.$$

Однако для изучения процессов старения элементов развивающейся системы и замены их новыми необходимо рассматривать отрезок моделирования достаточно большим, так что  $T > T_2^*$ . Предположим, для численного решения (1.1) применен какой-либо сходящийся на  $[0, T_2^*)$  метод квадратур, погрешность которого в точке  $\alpha_1 T_2^* - \varepsilon^h(\alpha_1 T_2^*) \neq 0$  ( $h$  — шаг сетки). В частности, эта погрешность заведомо не меньше погрешности  $\varepsilon$  компьютерных вычислений. Очевидно также, что погрешность сеточного решения в области  $t > T_2^*$  в силу влияния погрешностей аппроксимации интегралов квадратурой и погрешностей округления не меньше, чем погрешность  $\tilde{\varepsilon}(t) = 1 - \tilde{x}(t)$  точного решения  $\bar{x}(t)$  функционального уравнения

$$x(t) = \alpha_1^2 \delta t x(\alpha_1 t) + 1 - \alpha_1^2 \delta t, \quad t \geq T_2^*,$$

если стартовое значение  $\tilde{x}(\alpha_1 T_2^*)$  совпадает со значением сеточного решения  $x^h(\alpha_1 T_2^*)$ .

Введем последовательность точек

$$T_i = \frac{T_2^*}{\alpha_1^i}, \quad i = -1, 0, 1, \dots$$

Так как

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \alpha_1^2 \delta t \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 t), \quad t \geq T_2^*, \quad \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 T_2^*) = \varepsilon^h(\alpha_1 T_2^*), \quad (1.3)$$

то, переходя в (1.3) к оценке по модулю и полагая  $t = T_i$ , получим линейное однородное разностное уравнение первого порядка с переменным коэффициентом

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| = \alpha_1^2 \delta T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-1})|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad |\tilde{\varepsilon}(T_{-1})| = |\varepsilon^h(\alpha_1 T_2^*)|. \quad (1.4)$$

В силу монотонного возрастания коэффициента с ростом  $i$  решение (1.4) превысит любой наперед заданный порог, сколь бы мало ни было отличное от нуля значение  $|\tilde{\varepsilon}(T_{-1})|$ . С точки зрения математического моделирования развития динамической системы отсутствие устойчивости решения задачи Коши (1.4) означает, что если эффективность функционирования элементов старшей возрастной группы превышает (по модулю) эффективность молодых элементов, то такая система не имеет перспектив развития. При этом в случае  $\delta > 0$  эффект потери устойчивости возникает из-за малочисленности группы молодых элементов, в случае  $\delta < 0$  — из-за ее невостремленности.

Из того, что решение (1.4) является оценкой снизу для погрешности любого численного метода решения тестового уравнения (1.1) при  $t > T_2^*$ , следует, что найдется такой узел сетки, в котором погрешность сеточного решения превысит любой априори заданный порог.

Результаты [3] развиты в [4] в различных направлениях. Показано, что полученные результаты сохраняются при любой правой части (1.1), принадлежащей области значений интегрального оператора в левой части (1.1). Рассмотрен случай сверхлинейного роста модуля второго ядра в (1.1). Приведены таблицы с численными результатами, полученными с помощью разработанных в [5], [6] модифицированных методов левых и средних прямоугольников соответственно и показавшими полное соответствие численных расчетов теоретическим оценкам.

Случай  $n = 3$  детально исследовался в [7]. Тестовое уравнение, являющееся естественным обобщением (1.1), имеет вид

$$\int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \int_{\alpha_2 t}^{\alpha_1 t} (1 - \delta_1 s) x(s) ds + \int_0^{\alpha_2 t} (1 - \delta_2 s) x(s) ds = y(t); \quad (1.5)$$

$$1 > \alpha_1 > \alpha_2 > 0; \quad \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \quad t \in [0, T].$$

Для определенности далее будем считать, что  $\delta_2 > \delta_1$ . Полагая  $y(t) \in \mathring{C}_{[0, T]}^{(1)}$ , что означает  $y'(t) \in C_{[0, T]}$ ,  $y(0) = 0$ , выпишем для (1.5) эквивалентное функциональное уравнение

$$x(t) = Wx(t) + y'(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t x(\alpha_1 t) + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) t x(\alpha_2 t) + y'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.6)$$

Оператор  $W$  в (1.6), рассматриваемый действующим из  $C_{[0,T]}$  в  $C_{[0,T]}$ , является сжимающим лишь при

$$T < T_3^* = \frac{1}{\alpha_1^2 \delta_1 + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1)}. \quad (1.7)$$

Пусть  $T > T_3^*$ . Запишем однородное уравнение относительно ошибки  $\tilde{\varepsilon}(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t)$ :

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 t) + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) t \tilde{\varepsilon}(\alpha_2 t), \quad t \geq T_3^*, \quad (1.8)$$

с начальными условиями

$$\tilde{\varepsilon}(\alpha_2 T_3^*) = \varepsilon^h(\alpha_2 T_3^*), \quad \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 T_3^*) = \varepsilon^h(\alpha_1 T_3^*),$$

где по-прежнему  $\varepsilon^h$  — ненулевая погрешность любого сходящегося на  $[0, T_3^*)$  численного метода, и если предположить дополнительно, что  $\alpha_2 = \alpha_1^2$  и знаки  $\tilde{\varepsilon}(\alpha_1 T_3^*)$  и  $\tilde{\varepsilon}(\alpha_2 T_3^*)$  совпадают, то, полагая в (1.8)  $t = T_i = T_3^* / \alpha_1^i$ ,  $i = -2, -1, 0, 1, \dots$ , и переходя к оценке по модулю, получим линейное однородное разностное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| = \alpha_1^2 \delta_1 T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-1})| + \alpha_1^4 (\delta_2 - \delta_1) T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-2})|, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

с начальными данными

$$|\tilde{\varepsilon}(T_{-2})| = |\varepsilon^h(\alpha_1^2 T_3^*)|, \quad |\tilde{\varepsilon}(T_{-1})| = |\varepsilon^h(\alpha_1 T_3^*)|.$$

И вновь, как и в случае с (1.4), из монотонного возрастания коэффициентов (1.9) с ростом  $i$  и того, что решение (1.9) дает оценку снизу для погрешности любого численного метода решения (1.5) в области  $t > T_3^*$ , вытекает, что, сколь бы малы ни были начальные данные в (1.9), найдется такой узел сетки, в котором погрешность численного решения превысит сколь угодно большой наперед заданный порог. В [7] приведены результаты расчетов модельных примеров, полностью согласующиеся с теоретическими оценками. Цель настоящей статьи — обобщить развитую в [3], [4], [7] технику на случай произвольного натурального числа возрастных групп. Этой проблематике и посвящен следующий раздел.

## 2. Тестовое уравнение для произвольного числа возрастных групп

Обратимся вначале к исходному уравнению (0.1), представив его в операторной форме

$$V_1 x + \Delta V_1 x = y,$$

где

$$V_1 x = \int_{a_1(t)}^t K_1(t, s) x(s) ds,$$

$$\Delta V_1 x = \sum_{i=2}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s) x(s) ds.$$

Напомним классический результат функционального анализа (см., например, [8, стр. 212]). Достаточным условием ограниченности обратного к линейному ограниченному оператору  $V_1 + \Delta V_1$ , действующему на паре банаховых пространств  $(B_1, B_2)$ , при условии ограниченности  $V_1^{-1}$  является неравенство

$$\|\Delta V_1\|_{B_1 \rightarrow B_2} < \frac{1}{\|V_1^{-1}\|_{B_2 \rightarrow B_1}}. \quad (2.1)$$

Положим  $B_1 = C_{[0,T]}$ ,  $B_2 = \overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}$  и предположим дополнительно относительно ядра  $K_1(t, s)$ , что

$$K_1(t, t) \neq 0, \quad t \in [0, T].$$

Тогда оператор  $V_1^{-1}$ , рассматриваемый на паре  $(\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}, C_{[0,T]})$ , ограничен (см. [9], стр. 129–131), а следовательно, справедливо неравенство (2.1), гарантирующее существование, единственность и устойчивость решения (0.1) в пространстве  $C_{[0,T]}$ . Этот результат, полученный в [10], в важном частном случае, когда коэффициенты эффективности постоянны:  $K_i(t, s) = \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\beta_1 \neq 0$ , переходит в неравенство

$$\sum_{i=2}^n |\beta_{i-1} - \beta_i| \alpha_{i-1} < 1, \quad (2.2)$$

гарантирующее корректность уравнения

$$\beta_1 \int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \sum_{i=2}^n \beta_i \int_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T],$$

на паре  $(C_{[0,T]}, \overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)})$  при любом  $T < \infty$ .

Отметим особую роль параметра  $\alpha_1$ , определяющего первую группу — группу молодых элементов развивающейся системы. Выбор  $\alpha_1$  достаточно малым, чтобы обеспечить преобладание элементов первой группы, гарантирует выполнение оценки (2.2). В общем же случае переменных ядер наличие в (2.2) хотя бы одного слагаемого с монотонно возрастающей с ростом  $T$  операторной нормой неизбежно приведет к нарушению (2.1), сколь бы мало ни было априори выбранное  $\alpha_1$ . Этот эффект и лежит в основе построения соответствующих тестовых примеров.

Естественное обобщение (1.1), (1.5) на случай произвольного  $n$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \sum_{i=2}^n \int_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} (1 - \delta_{i-1} s) x(s) ds &= y(t); \\ 1 > \alpha_1 > \dots > \alpha_{n-1} > 0; \\ \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t &\in [0, T], \end{aligned} \quad (2.3)$$

а эквивалентное (2.3) функциональное уравнение

$$x(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t x(\alpha_1 t) + \sum_{i=3}^n \alpha_{i-1}^2 (\delta_{i-1} - \delta_{i-2}) t x(\alpha_{i-1} t) + y'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

Не уменьшая общности, считаем  $\delta_i > \delta_{i-1} > 0$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ .

Оператор в правой части (2.4), рассматриваемый действующим в  $C_{[0,T]}$ , является сжимающим лишь при  $T < T_n^*$ ,

$$T_n^* = \frac{1}{\alpha_1^2 \delta_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 (\delta_i - \delta_{i-1})}.$$

Пусть  $T > T_n^*$ . Линейное однородное уравнение относительно ошибки  $\tilde{\varepsilon}(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t)$  имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 t) + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 (\delta_i - \delta_{i-1}) t \tilde{\varepsilon}(\alpha_i t) \quad (2.5)$$

с начальными условиями

$$\tilde{\varepsilon}(\alpha_k T_n^*) = \varepsilon^h(\alpha_k T_n^*), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где  $\varepsilon^h(\alpha_k T_n^*)$  — погрешность любого сходящегося на  $[0, T_n^*)$  численного метода решения (2.3). Предположим дополнительно, что

$$\alpha_k = \alpha_1^k, \quad k = 2, \dots, n-1 \quad (2.6)$$

и

$$\text{sign } \varepsilon^h(\alpha_k T_n^*) = \text{const}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (2.7)$$

Тогда, полагая в (2.5)  $t = T_i = T_n^*/\alpha_1^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , переходя к оценке по модулю и учитывая (2.6), (2.7), получим линейное однородное разностное уравнение с переменными коэффициентами  $n-1$ -го порядка

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| = \alpha_1^2 \delta_1 T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-1})| + \sum_{j=2}^{n-1} \alpha_1^{2j} (\delta_j - \delta_{j-1}) T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-j})|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

и начальными данными

$$|\tilde{\varepsilon}(T_{-k})| = |\varepsilon^h(T_{-k})|, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

С ростом  $i$  коэффициенты в (2.8) монотонно возрастают, поэтому найдется такое  $i = i^*$ , для которого  $|\tilde{\varepsilon}(T_{i^*})|$  впервые превысит любой сколь угодно большой порог  $M$ , сколь бы малы ни были (2.9). Переобозначим такое  $T_{i^*}$  как  $T_{i_M^*}^h$ . В силу погрешности аппроксимации интегралов в (2.3) квадратурой, а также неизбежной погрешности вычислений, найдется такой номер  $k_M^*$  узла  $T_{k_M^*}^h$  равномерной сетки, что

$$|\varepsilon_k^h| = |\bar{x}(T_k^h) - x_k^h| < M, \quad k = \overline{0, k_M^* - 1}; \quad |\varepsilon_{k_M^*}^h| \geq M, \quad (2.10)$$

( $x_k^h$  — сеточное решение уравнения (2.3) в  $k$ -м узле) и при этом

$$T_{k_M^*}^h < T_{i_M^*}^h. \quad (2.11)$$

Справедлива

**Теорема 2.1.** Пусть стартовые значения для рекурсии (2.8) удовлетворяют условиям (2.7), (2.9) и выполнено равенство (2.6). Пусть  $M$  — сколь угодно большое наперед заданное число. Тогда для любого сходящегося на  $[0, T_n^*)$  численного метода решения тестового уравнения (2.3) найдется такой номер  $k_M^*$  узла  $T_{k_M^*}^h$  равномерной сетки, что выполнены неравенства (2.10), (2.11).

Из теоремы 2.1 вытекает важное

**Следствие 2.1.** Для любого метода квадратур численного решения (2.3), реализованного на компьютере с погрешностью округления  $\varepsilon^*$ , и заданного порога  $M < \infty$  справедлива априорная оценка

$$T_{k_M^*}^h < T_{i_M^*} \quad \forall h \in (0, \alpha_1^{n-1} T^*],$$

если положить  $|\tilde{\varepsilon}(\alpha_k T^*)| = |\varepsilon^*|$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ .

### 3. Численные результаты

Реализация стандартных квадратурных методов численного решения неклассического интегрального уравнения (0.1) приводит к тому, что из-за несовпадения узлов равномерной сетки со значениями пределов интегрирования уже в первом узле сетки может возникнуть уравнение с  $n$  неизвестными. В работах [5], [6] предложены модификации методов левых и средних прямоугольников соответственно (обозначаемые далее как ммлп и ммсп), основанные на преобразовании исходного уравнения к эквивалентному, у которого переменными являются только верхние пределы. Построенные численные схемы для эквивалентного уравнения на каждом шаге численного решения сводятся к уравнению с одним неизвестным и при  $T < T^*$  имеют первый (ммлп) и второй (ммсп) порядки сходимости по шагу сетки, как и в классическом случае. Программная реализация ммлп и ммсп использована для приводимых ниже результатов.

**Пример 3.1.** Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \int_{\alpha_2 t}^{\alpha_1 t} (1 - \delta_1 s) x(s) ds + \int_{\alpha_3 t}^{\alpha_2 t} (1 - \delta_2 s) x(s) ds + \int_0^{\alpha_3 t} (1 - \delta_3 s) x(s) ds = \\ = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} (\alpha_1^3 \delta_1 + \alpha_2^3 (\delta_2 - \delta_1) + \alpha_3^3 (\delta_3 - \delta_2)) t^3, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\delta_1 = 100, \quad \delta_2 = 200, \quad \delta_3 = 300,$$

$$0 < \alpha_1 < 1, \quad \alpha_i = \alpha_1^i, \quad i = 2, 3,$$

точное решение которого  $\bar{x}(t) = t$ ,  $T_4^* = \frac{1}{\alpha_1^2 \delta_1 + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) + \alpha_3^2 (\delta_3 - \delta_2)}$ . В таблицах 1 и 2 приведены результаты решения (3.1) для различных  $\alpha_1$  с использованием ммлп и ммсп соответственно. В столбцах 4-9 таблицы 1 и 4, 5, 7, 8, 10, 11 таблицы 2 указаны значения  $T_{k_M^*}^h$  и  $T_{i_M^*}^h$  из теоремы 2.1 для  $M = 10^i$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Сравнение столбцов 4 с 5, 6 с 7, 8 с 9 таблицы 1 и 4 с 5, 7 с 8, 10 с 11 таблицы 2 показывает справедливость неравенства (2.11). Видно, что с уменьшением шага  $h$  значения  $T_{k_M^*}^h$  и  $T_{i_M^*}^h$  увеличиваются за счет уточнения решения.

Таблица 1

| 1          | 2        | 3        | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              |
|------------|----------|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\alpha_1$ | $T_4^*$  | $h$      | $T_{k=10^0}^h$ | $T_{i=10^0}^h$ | $T_{k=10^1}^h$ | $T_{i=10^1}^h$ | $T_{k=10^2}^h$ | $T_{i=10^2}^h$ |
| 1/2        | 0,030476 | 0,003810 | 0,3467         | 0,9752         | 0,6019         | 0,9752         | 0,9448         | 1,9505         |
|            |          | 0,001915 | 0,4152         | 0,9752         | 0,7048         | 0,9752         | 1,0933         | 1,9505         |
|            |          | 0,000952 | 0,4552         | 0,9752         | 0,7848         | 1,9505         | 1,2038         | 1,9505         |
| 2/3        | 0,013703 | 0,000508 | 0,1522         | 0,2341         | 0,2274         | 0,3512         | 0,1487         | 0,5268         |
|            |          | 0,000254 | 0,1718         | 0,3512         | 0,2535         | 0,3512         | 0,1675         | 0,5268         |
|            |          | 0,000127 | 0,1937         | 0,3512         | 0,2769         | 0,5268         | 0,1880         | 0,5268         |
| 3/4        | 0,009462 | 0,000148 | 0,0980         | 0,1680         | 0,1339         | 0,2240         | 0,1774         | 0,2987         |
|            |          | 0,000074 | 0,1059         | 0,2240         | 0,1452         | 0,2240         | 0,1883         | 0,2987         |
|            |          | 0,000037 | 0,1176         | 0,1680         | 0,1569         | 0,2240         | 0,2046         | 0,2987         |
| 8/9        | 0,005242 | 0,000008 | 0,0356         | 0,0437         | 0,0431         | 0,0553         | 0,0513         | 0,0622         |
|            |          | 0,000005 | 0,0377         | 0,0491         | 0,0455         | 0,0553         | 0,0538         | 0,0622         |
|            |          | 0,000002 | 0,0399         | 0,0491         | 0,0479         | 0,0553         | 0,0564         | 0,0622         |

Таблица 2

| 1          | 2        | 3        | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
|------------|----------|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\alpha_1$ | $T_4^*$  | $h$      | $T_{k=10^0}^h$ | $T_{i=10^0}^h$ | $T_{i=10^0}^*$ | $T_{k=10^1}^h$ | $T_{i=10^1}^h$ | $T_{i=10^1}^*$ | $T_{k=10^2}^h$ | $T_{i=10^2}^h$ | $T_{i=10^2}^*$ |
| 1/2        | 0,030476 | 0,008707 | 0,4920         | 0,9752         |                | 0,8577         | 1,9505         |                | 1,4150         | 1,9505         |                |
|            |          | 0,004064 | 0,7172         | 0,9752         |                | 1,0017         | 1,9505         |                | 1,7006         | 1,9505         |                |
|            |          | 0,001966 | 0,8759         | 0,9752         | 62,42          | 1,4226         | 1,9505         | 62,42          | 1,9397         | 3,9010         | 62,42          |
| 2/3        | 0,013703 | 0,003916 | 0,1703         | 0,2341         |                | 0,2486         | 0,3512         |                | 0,3465         | 0,5268         |                |
|            |          | 0,001827 | 0,2165         | 0,3512         |                | 0,3079         | 0,3512         |                | 0,4120         | 0,5268         |                |
|            |          | 0,000884 | 0,2674         | 0,3512         | 4,0003         | 0,3753         | 0,5268         | 6,0005         | 0,5052         | 0,7902         | 6,0005         |
| 3/4        | 0,009462 | 0,000610 | 0,1407         | 0,1680         |                | 0,1859         | 0,2240         |                | 0,2359         | 0,2987         |                |
|            |          | 0,000300 | 0,1660         | 0,2240         |                | 0,2155         | 0,2987         |                | 0,2714         | 0,2987         |                |
|            |          | 0,000149 | 0,1932         | 0,2240         | 1,6783         | 0,2488         | 0,2987         | 1,6783         | 0,3100         | 0,3983         | 2,2377         |
| 8/9        | 0,005242 | 0,000338 | 0,0373         | 0,0437         |                | 0,0448         | 0,0491         |                | 0,0533         | 0,0622         |                |
|            |          | 0,000166 | 0,0419         | 0,0491         |                | 0,0498         | 0,0552         |                | 0,0583         | 0,0622         |                |
|            |          | 0,000083 | 0,0465         | 0,0491         | 0,1795         | 0,0549         | 0,0622         | 0,2019         | 0,0621         | 0,0670         | 0,2019         |

В целом применение ммсп позволяет увеличить примерно в два раза длину коридора погрешности численного решения, не превышающей заданный порог  $M$ . Вместе с тем, согласно следствию 2.1, никакой численный метод не может преодолеть барьер  $T_{i_M}^*$ , полученный по (2.8) (2.9) с  $|\tilde{\varepsilon}(T_{-k})| = \varepsilon^* = 10^{-16}$ ,  $k = 1, 2, 3$  при вычислениях на компьютере с двойной точностью. В столбцах 6, 9 и 12 таблицы 2 указаны значения  $T_{i_M}^*$  для  $M = 10^i$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Характер неустойчивости численного решения (1.7) иллюстрирует рис. 1.

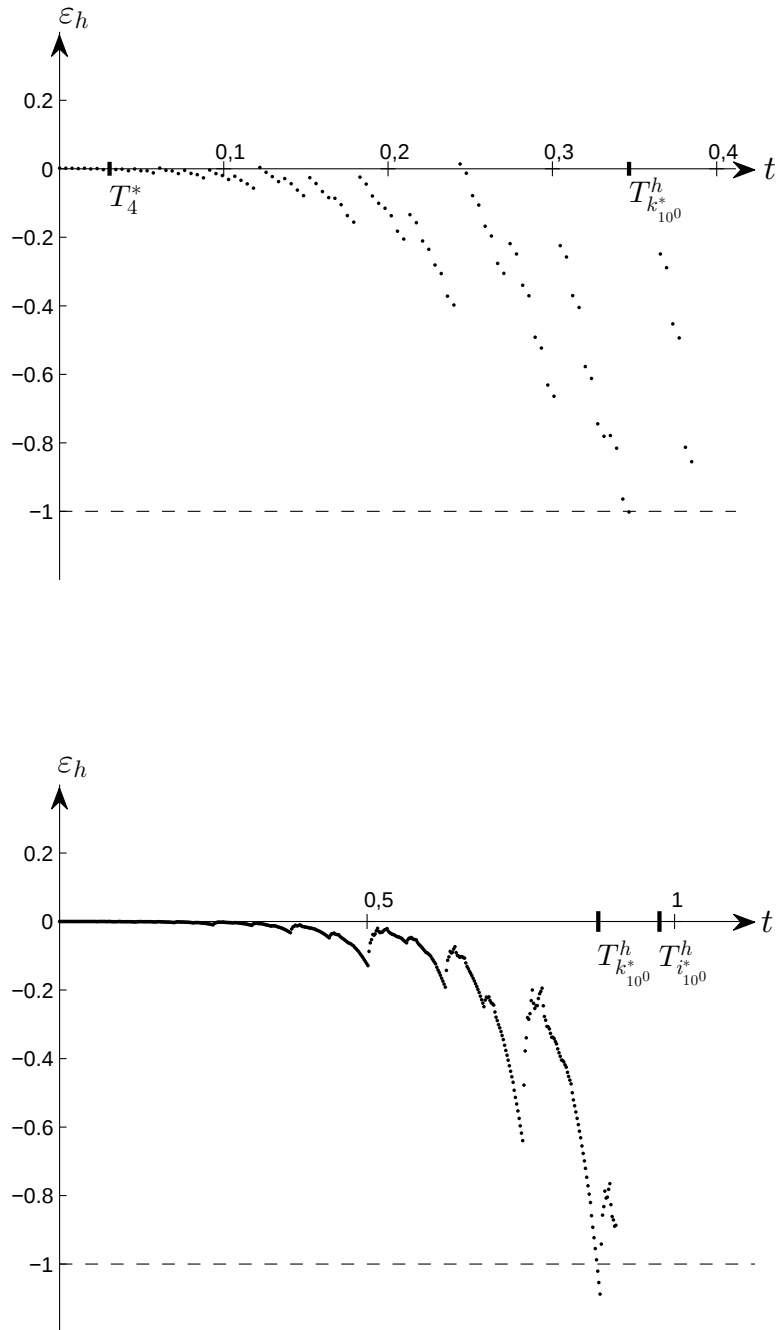


Рис. 1. Погрешность численного решения уравнения (3.1) модифицированными методами левых (верхний график) и средних прямоугольников ( $\alpha_1 = 1/2$ ,  $\delta_1 = 10^2$ ,  $\delta_2 = 2 \cdot 10^2$ ,  $\delta_3 = 3 \cdot 10^2$ ,  $M = 10^0$ ,  $T^* = 0,0305$ ,  $h = 0,002$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3-16.
2. Труфанов В.В., Апарцин А.С., Маркова Е.В., Сидлер И.В. Интегральные модели для разработки стратегии технического перевооружения генерирующих мощностей // Электричество. 2017. № 3. С. 4-11.
3. Апарцин А.С. К теории интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 5. С. 824-839.
4. Апарцин А.С., Сидлер И.В. О тестовых уравнениях Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 4. С. 31-45.
5. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Численное решение уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Обобщенные постановки и решения задач управления: сб. тр. 7 Междунар. симп. М.: АНО «Издательство физико-математической литературы», 2014. С. 21-25.
6. Апарцин А.С., Сидлер И.В. О численном решении неклассических уравнений Вольтерра I рода // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. 9 Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2014. С. 59-64.
7. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Исследование тестовых уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Труды УРО РАН, 2018. № 2. С. 24-33.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 759 с.
9. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.
10. Apartsyn A.S. On the theory of non-classical Volterra equations of the first kind // Abstract of the 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium (IPDO-2013). France, June 26-28. Albi, 2013. P. A6353AA.

Поступила в редакцию 19 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Апарцин Анатолий Соломонович, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: [apartsyn@isem.irk.ru](mailto:apartsyn@isem.irk.ru)

Сидлер Инна Владимировна, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: [inna.sidler@mail.ru](mailto:inna.sidler@mail.ru)

**Для цитирования:** Апарцин А.С., Сидлер И.В. Тестовое уравнение Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем, содержащих  $n$  возрастных групп // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 168–179. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179

## THE TEST VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND IN INTEGRAL MODELS OF DEVELOPING SYSTEMS CONTAINING $n$ AGE GROUPS

A. S. Apartsyn, I. V. Sidler

Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences  
130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation  
E-mail: apartsyn@isem.irk.ru, inna.sidler@mail.ru

*Abstract.* The paper addresses the test integral Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems. Earlier, models consisted of two and three age groups of elements. Here the authors generalized the results to the case of an arbitrary number of groups. Along with the theoretical results, numerical calculations are given for the test example. Calculations illustrate the validity of theoretical estimates.

*Keywords:* developing system; age groups; test Volterra equations of the first kind; numerical solution; instability

### REFERENCES

1. Apartsin A.S., Sidler I.V. Primenenie neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda dlya modelirovaniya razvivayushchihsya sistem [Using the Nonclassical Volterra equations of the first kind to model the developing systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2013, no. 6, pp. 3-16. (In Russian).
2. Trufanov V.V., Apartsin A.S., Markova E.V., Sidler I.V. Integral'nye modeli dlya razrabotki strategii tekhnicheskogo perevooruzheniya generiruyushchih moshchnostey [Integrated Models for the Development of Technical Modernization of Generating Capacities Strategy]. *Elektrichestvo – Electricity*, 2017, no. 3, pp. 4-11. (In Russian).
3. Apartsin A.S. K teorii integral'nykh uravneniy Vol'terra I roda s razryvnymi yadrami [To the theory of volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 5, pp. 824-839. (In Russian).
4. Apartsin A.S., Sidler I.V. O testovykh uravneniyah Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchihsya sistem [On the Test Volterra Equations of the First Kind in the Integral Models of Developing Systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2018, no. 4, pp. 31-45. (In Russian).
5. Apartsin A.S., Sidler I.V. Chislennoe reshenie uravneniy Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchihsya sistem [Numerical Solution of the Volterra Equations of the First Kind in Integral Models of Developing Systems]. *Sbornik trudov 7 Mezhdunarodnogo simpoziuma «Obobshchennye postanovki i resheniya zadach upravleniya»* [Proceedings of the 7 International

---

The work was carried out within the framework of the scientific project III.17.3.2 of the program of fundamental research of the SB RAS, reg. No. AAAA-A17-117030310446-6 and is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 15-01-01425).

Symposium “Generalized Statements and Solutions of Control Problems”]. Moscow, Autonomous Noncommercial Organization “Publishing House of Physical and Mathematical Literature”, 2014, pp. 21-25. (In Russian).

6. Apartsin A.S., Sidler I.V. O chislennom reshenii neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda [On the numerical solution of the nonclassical Volterra equations of the first kind]. *Sbornik statey 9 Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Analiticheskie i chislennyye metody modelirovaniya estestvennonauchnykh i sotsial'nykh problem»* [Proceedings of the Ninth International Conference “Analytical and Numerical Methods of Modeling of Natural Science and Social Problems”]. Penza, 2014, pp. 59-64. (In Russian).

7. Apartsin A.S., Sidler I.V. Issledovanie testovykh uravneniy Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem [Investigation of the test Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 24-33. (In Russian).

8. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 759 p.

9. Apartsyn A.S. *Nonclassical linear Volterra equations of the first kind*. Utrecht, Boston, VSP, 2003, 168 p.

10. Apartsyn A.S. On the theory of non-classical Volterra equations of the first kind. *Abstract of the 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium (IPDO-2013)*. France, Albi, 2013, p. A6353AA.

Received 19 March 2018

Reviewed 23 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Apartsyn Anatoly Solmonovich, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, e-mail: apartsyn@isem.irk.ru

Sidler Inna Vladimirovna, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Technics, Senior Researcher, e-mail: inna.sidler@mail.ru

**For citation:** Apartsyn A.S., Sidler I.V. Testovoye uravneniye Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem, sodержashchikh  $n$  vozrastnykh grupp [The test Volterra equation of the first kind in integral models of developing systems containing  $n$  age groups]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 168–179. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179 (In Russian, Abstr. in Engl.).