ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки
Том 23, № 121 2018

УДК 51-76, 517.988
DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-17-30

О СВЯЗИ НЕПРЕРЫВНЫХ И РАЗРЫВНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЙРОННЫХ ПОЛЕЙ С МИКРОСТРУКТУРОЙ: I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

© Е. О. Бурлаков, М. А. Насонкина

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: eb_@bk.ru, nasonkina.margo@gmail.com

Аннотация. Предложен метод, позволяющий исследовать существование и близость между стационарными решениями непрерывных и разрывных уравнений нейронных полей с микроструктурой. Данная часть содержит теорему о разрешимости таких уравнений, основывающуюся на топологической теории степени, а также теорему о непрерывной зависимости решений при переходе от непрерывной функции активации к разрывной, использующую компактность в специальной топологии.
Ключевые слова: математическая нейробиология; уравнения нейронных полей с микроструктурой; разрешимость; непрерывная зависимость решений от параметров

Введение

Неокортекс человека – это верхний слой больших полушарий головного мозга, толщиной 2−4 мм, содержащий около 10^9 нейронов, имеющих 60×10^{12} связей [1]. Кора больших полушарий отвечает за такие высшие нервные функции мозга как, например, память, речь, мышление (см. [2], [3]). Элементарной единицей неокортекса является нейрон, состоящий, в свою очередь, из дендритов, тела нейрона (сомы) и аксона. Сигналы от других нейронов, связанных с данным, через его дендриты поступают в сому. Если сумма полученных сомой сигналов превосходит некоторую пороговую величину, тело нейрона производит электрический импульс, который через аксон распространяется к другим нейронам. Учитывая описанный принцип функционирования, нейронные сети являются естественным инструментом изучения электрической активности в коре больших полушарий (см., например, [4]).

Наиболее известным представителем таких моделей является модель Hopfield [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-41-680975, 18-31-00227)

Обобщение данной модели

$$\dot{z}_i(t) = -z_i(t) + \sum_{j=1}^{N} \omega_{ij} f\Big(z_j\big(t - \tau_{ij}(t)\big)\Big), \quad t \geq 0,\ i = 1, ..., N, \tag{0.1}$$

(см., например, [6]) учитывает конечную скорость распространения электрического сигнала в нейронной сети. Здесь z_i – уровень электрической активности i-го нейрона в сети, ω_{ij} – сила связи между нейронами i и j, неотрицательная функция f отражает процесс активации $f(z)$ нейрона с уровнем электрической активности z и τ_{ij} – неотрицательная функция, определяющая время, необходимое сигналу чтобы достичь i-й от j-го нейрона. В «классической» модели Hopfield $\tau_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, N$.

Однако так как количество нейронов и межнейронных связей даже в небольшом взятом объеме коры мозга огромно, уместно рассматривать непрерывный предел уравнения (0.1) при $N \to \infty$. Таким пределом является модель нейронного поля (строгое обоснование такого предельного перехода дано в [7]). Наиболее известной и простой моделью, описывающей макродинамику нейронного поля, является модель Amari [8]

$$\partial_t u(t, x) = -u(t, x) + \int\limits_{R} \omega(x - y) f(u(t, y)) dy, \quad t \geq 0,\ x \in R. \tag{0.2}$$

Здесь $u(t, x)$ – уровень электрической активности нейрона u в позиции x в момент времени t, ω определяет силу связи между нейронами, f отражает процесс активации $f(u)$ нейрона u. Обычно f – гладкая функция сигмоидальной формы. Корректность (0.2) была показана в [9]. Для случая модели Amari с запаздыванием

$$\partial_t u(t, x) = -u(t, x) + \int\limits_{\Omega} \omega(t, x, y) f(u(t - \tau(x, y), y)) dy, \quad t \geq 0,\ x \in \Omega \tag{0.3}$$

(Ω – компактное подмножество R^m) корректная разрешимость в пространстве квадратично суммируемых функций доказана в [10].

Обычным способом упрощения модели (0.2) является замена гладкой функции активации нейронов функцией Хевисайда с некоторым порогом активации $\theta > 0$

$$H(u) = \begin{cases} 0, & u \leq \theta, \\ 1, & u > \theta. \end{cases} \tag{0.4}$$

Такая замена упрощает численное исследование моделирующего уравнения, а также позволяет получить некоторые важные типы его решений в явном виде (см., например, [8], [11], [12], [13]).

Обычно подразумевается, что приближение гладкой функции активации, имеющей достаточно большую крутизну между порогом активации θ и «точкой насыщения» $\theta_{sat} = \inf\{u, f(u) = 1\}$, функцией Хевисайда сохраняет все свойства соответствующих решений. Однако строгого математического обоснования возможности подобной замены не было дано до работы [14], где была показана непрерывная зависимость локализованного стационарного решения (0.2) при переходе от гладкой функции активации к разрывной функции Хевисайда.

Устойчивость в первом приближении локализованных стационарных решений одномерной модели Amari в случае функции активации Хевисайда исследовалась в работах [15], [16], [17], [18].

Большинство работ в математической нейробиологии рассматривают одномерные модели, однако более реалистичным подходом к моделированию электрической активности в коре больших полушарий является работа со случаем размерности 2.

Радиально симметричные локализованные стационарные решения (0.3), часто именуемые «бампами», в случае 2-D были впервые рассмотрены в работе Taylor [19]. В [20] были использованы методы теории уравнений в частных производных для исследования разбиения бампа на несколько меньших бампов с нарушением общей симметрии. Однако такие методы применимы только в случае, когда преобразование Фурье функции связи ω есть рациональная функция квадрата радиуса. Устойчивость бампов к радиальным возмущениям была исследована в [19], [21]. Однако, как было показано, например в [12] и [17], для корректного исследования устойчивости в первом приближении необходимо рассматрвать всевозможные возмущения границы «бампа». Соответствующие спектры обычно исследуются с помощью преобразований Фурье.

Приведенные выше модели описывают особенности электрической активности коры мозга на макроуровне. Однако они не учитывают неоднородности структуры неокортекса. Для того, чтобы отразить в математической модели микроструктуру коры головного мозга, обычно предполагается, что функция связи может быть представлена в виде $\omega_\varepsilon = \omega(\cdot, \cdot/\varepsilon)$, где неоднородность структуры параметризована $\varepsilon > 0$ (см., например, [22], [23], [24]). В этом случае (0.2) принимает вид

$$\begin{gathered}\partial_t u_\varepsilon(t,x) = -u_\varepsilon(t,x) + \int\limits_{R^m} \omega_\varepsilon(x-y) f(u_\varepsilon(t,y))dy, \\ t \geq 0,\ x \in R^m.\end{gathered} \tag{0.5}$$

В работе [23] было показано, что если микроструктура является периодичной, то при $\varepsilon \to 0$ решения (0.5) сходятся (в определенном смысле) к решению следующего уравнения

$$\begin{gathered}\partial_t u(t,x,x_{\mathrm{f}}) = -u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{R^m}\int\limits_{\mathcal{Y}} \omega(x-y, x_{\mathrm{f}}-y_{\mathrm{f}}) f(u(t,y,y_{\mathrm{f}}))dy_{\mathrm{f}}dy, \\ t \geq 0,\ x \in R^m,\ x_{\mathrm{f}} \in \mathcal{Y},\end{gathered} \tag{0.6}$$

где x_{f} – переменная микроструктуры, принадлежащая некоторому тору $\mathcal{Y}$.

Существование и устойчивость бампов и симметричных двойных бампов в уравнении (0.6) для случая 1-D исследована в [24] и [25], соответственно, в случае функции активации Хевисайда. Численное построение таких решений было проведено в [26] с использованием итерационной схемы.

Целью данной работы является установление условий существования и непрерывной зависимости локализованного стационарного радиально симметричного решения уравнения

$$\begin{gathered}\partial_t u(t,x,x_{\mathrm f}) = -u(t,x,x_{\mathrm f}) + \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathcal Y} \omega(x-y,x_{\mathrm f}-y_{\mathrm f}) f_\lambda(u(t,y,y_{\mathrm f}))dy_{\mathrm f}dy,\\ t\ge 0,\ x\in R^2,\ x_{\mathrm f}\in[0,1)^2,\end{gathered} \tag{0.7}$$

при переходе от непрерывной функции активации f_λ, ($\lambda>0$) к разрывной функции типа Хевисайда f_0.

Полученное свойство непрерывной зависимости решения от крутизны функции активации в частном случае кусочно-линейных функций особенно важно для осуществления перехода от уравнения нейронного поля типа (0.5) к уравнению типа (0.6) (см., например, [24]).

1. Предварительные сведения

Здесь мы приводим используемые обозначения, даем основные определения и формулируем теоремы, необходимые для дальнейшего изложения.

Дли метрического пространства $\mathfrak M$ с метрикой $\rho_{\mathfrak M}$ и произвольного $\mathfrak S\subset\mathfrak M$, $\varepsilon>0$, обозачим $B_{\mathfrak M}(\mathfrak S,\varepsilon)=\bigcup\limits_{\mathfrak s\in\mathfrak S}\{\mathfrak m\in\mathfrak M\mid \rho_{\mathfrak M}(\mathfrak m,\mathfrak s)<\varepsilon\}$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Для произвольного подмножества $\mathfrak S$ метрического пространства $\mathfrak M$ и любого $\epsilon>0$ множество $\mathfrak E$ назовем ϵ-*сетью* множества $\mathfrak S$, если для всех $\mathfrak s\in\mathfrak S$, найдется такое $\mathfrak e\in\mathfrak E$, что $\rho_{\mathfrak M}(\mathfrak e,\mathfrak s)\le\epsilon$ (см. [29]).

Пусть $\mathfrak B$ – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak B}$, $\mathfrak b_0\in\mathfrak B$, D – некоторое открытое ограниченное подмножество $\mathfrak B$. Обозначим ∂D и $\overline D$ – границу и замыкание D в $\mathfrak B$, соответственно. Обозначим $\deg(\Phi,D,\mathfrak b_0)$ топологическую степень оператора $\Phi:\ \overline D\to\mathfrak B$ (в случае, если она определена; подробнее см. [27]).

Зафиксируем $\mathfrak r>0$. Пусть μ – мера Лебега на R^m, Ξ – замкнутое подмножество R^m, $\mathfrak A\subseteq R^m$, $\Omega_{\mathfrak r}=\Xi\bigcap B_{R^m}(0,\mathfrak r)$, тогда:

$L^q(\Xi,\mu,R)$ – пространство функций $\eta:\Xi\to R$, суммируемых с q-й степенью, снабженное следующей нормой $\|\eta\|_{L^q(\Xi,\mu,R)}=\Big(\int\limits_{\Xi}|\eta(x)|^q dx\Big)^{1/q}$, $1\le q<\infty$.

$C^k(\Omega_{\mathfrak r},R)$ – пространство функций $\zeta:\Omega_{\mathfrak r}\to R$ с непрерывными первыми k производными $\zeta^{(n)}$ ($n=0,\dots,k$, $\zeta^{(0)}=\zeta$), с нормой $\|\zeta\|_{C^k(\Omega_{\mathfrak r},R)}=\sum\limits_{n=0}^{k}\max\limits_{x\in\Omega_{\mathfrak r}}|\zeta^{(n)}(x)|$.

$C^k(\mathfrak A,R)$ – локально-выпуклое (в общем случае) пространство функций $\zeta:\mathfrak A\to R$ с непрерывными первыми k производными $\zeta^{(n)}$ ($n=0,\dots,k$, $\zeta^{(0)}=\zeta$), с топологией равномерной сходимости функции $\sum\limits_{n=0}^{k}\max|\zeta^{(n)}(\cdot)|$ на компактных подмножествах $\mathfrak A$.

Далее будем опускать индексы $q=1$ и $k=0$ в обозначениях соответствующих пространств.

Лемма 1.1. *Пусть D – открытое ограниченное подмножество банахова пространства $\mathfrak{B}$, Λ – компактное подмножество R, оператор $T : \Lambda \times \overline{D} \to \mathfrak{B}$ непрерывен по совокупности переменных и операторы $T(\lambda, \cdot)$, $\lambda \in \Lambda$, в совокупности компактны (то есть, множество $T(\Lambda, \overline{D})$ обладает конечной ε-сетью в $\mathfrak{B}$ для любого $\varepsilon > 0$). Пусть существуют такие последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda_0$, и $\{\mathfrak{b}_n\} \subset \overline{D}$ что, $T(\lambda_n, \mathfrak{b}_n) = \mathfrak{b}_n$. Тогда уравнение $T(\lambda_0, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ имеет по крайней мере одно решение; последовательность $\{\mathfrak{b}_n\}$ компактна и всякая ее предельная точка является решением этого уравнения, т.е., если для некоторой подпоследовательности $\{\mathfrak{b}_{n_k}\}$ выполнено $\mathfrak{b}_{n_k} \to \mathfrak{b}_0$, то $T(\lambda_0, \mathfrak{b}_0) = \mathfrak{b}_0$ (см. [14]).*

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть D – открытое ограниченное подмножество банахова пространства $\mathfrak{B}$. Семейство операторов $\{h_t\}$, $(t \in [0,1])$ из $\overline{D}$ в $\mathfrak{B}$ назовем *гомотопией*, если отображение $h_{(\cdot)}(\cdot)$ непрерывно по $(t, \mathfrak{b})$ на $[0,1] \times \overline{D}$ (см. [28]).

Лемма 1.2. *Пусть D – открытое ограниченное подмножество банахова пространства $\mathfrak{B}$, семейство $\{h_t\}$ – гомотопия операторов $h_t : \overline{D} \to \mathfrak{B}$ и $h_t - I$ компактен для любого $t \in [0,1]$ (здесь и всюду ниже символом «I» обозначено тождественное отображение). Если $h_t\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}_0$ для всех $\mathfrak{b} \in \partial D$ и $t \in [0,1]$, то $\deg(h_t, D, \mathfrak{b}_0)$ инвариантна относительно $t \in [0,1]$ (см. [28]).*

2. Основные результаты

Рассмотрим следующее усредненное уравнение нейронного поля Amari

$$\begin{gathered}\partial_t u(t,x,x_{\rm f}) = -u(t,x,x_{\rm f}) + \int\limits_{\Xi}\int\limits_{\mathcal{Y}} \omega(|x-y|, x_{\rm f}-y_{\rm f}) f_\lambda(u(t,y)) dy_{\rm f} dy, \\ t>0,\ x \in \Xi \subseteq R^m,\ x_{\rm f} \in \mathcal{Y} \subset R^k, \end{gathered} \tag{2.1}$$

параметризованное $\lambda \in [0,\infty)$. Учитывая типичный выбор функций активации в математической нейробиологии (см., например, [10], [11], [13], [21], [24], [26]), для удобства дальнейшего изложения будем использовать функцию связи $\omega : [0,\infty) \times \mathcal{Y} \to R)$.

Предположим, что функции, содержащиеся в уравнении (2.1), удовлетворяют следующим условиям:

(**A1**) Для любого $x_{\rm f} \in \mathcal{Y}$ $\omega(\cdot, x_{\rm f}) \in C^2([0,\infty), R)$.

(**A2**) Для любого $x \in [0,\infty)$ $\omega(x, \cdot) \in L(\mathcal{Y}, \mu, R)$.

(**A3**) При $\lambda = 0$ функция активации представлена функцией Хевисайда

$$f_0(u) = \begin{cases} 0, & u \le \theta, \\ 1, & u > \theta \end{cases}$$

с некоторым пороговым значением θ.

(**A4**) При $\lambda > 0$ функции семейства $f_\lambda : R \to [0,1]$ являются непрерывными, неубывающими и удовлетворяют следующему условию, по параметру λ:

(i) $f_\lambda \to f_{\widehat{\lambda}}$ равномерно на R при $\lambda \to \widehat{\lambda}$, $\widehat{\lambda} \in (0,\infty)$;

(ii) для любого $\varepsilon > 0$, $f_\lambda \to f_0$ равномерно на $R \setminus B_R(\theta, \varepsilon)$ при $\lambda \to 0$.

В случае, если стационарное решение (2.1) существует и не зависит от переменной микровариации x_{f}, оно удовлетворяет следующему уравнению

$$\begin{gathered} u(x)=\int\limits_{\Xi}\langle\omega\rangle(|x-y|)f_\lambda(u(y))dy,\\ \langle\omega\rangle(x)=\int\limits_{\mathcal{Y}}\omega(x,x_{\mathrm{f}})dx_{\mathrm{f}},\\ x\in\Xi,x_{\mathrm{f}}\in\mathcal{Y}. \end{gathered}\tag{2.2}$$

Определим следующий специфический тип решений, с которыми будем далее работать.

О п р е д е л е н и е 2.1. Зафиксируем произвольное $\theta>0$. Будем говорить, что $u\in C^1(\Xi,R)$ удовлетворяет θ*-условию*, если

(**B1**) множество $\Theta=\{x\in\Xi,\ u(x)>\theta\}$ непусто и ограничено;

(**B2**) для любой точки x, принадлежащей границе $\mathcal{B}$ множества Θ, выполнено $u'(x)\neq 0$;

(**B3**) найдутся такие $\sigma>0$ и $r>0$, что $u(x)<\theta-\sigma$ для всех $x\in\Xi\setminus B_{R^m}(\Theta,r)$.

Предположим, что для $\lambda=0$ существует стационарное решение $U\in C^1(R^m,R)$ уравнения (2.2), при $\Xi=R^m$, удовлетворяющее θ-условию. Нас будут интересовать условия существования решений u_λ уравнений (2.2) для $\lambda>0$ (то есть, в случае непрерывных функций f_λ) и условия сходимости этих решений к U при $\lambda\to 0$. Следующая теорема дает условия сходимости вышеописанных решений u_λ (при условии, что они существуют) к стационарному решению U при $\lambda=0$.

Теорема 2.1. *(Непрерывная зависимость) Пусть выполнены условия* (**A1**)$-$(**A4**)*, задано некоторое $\theta>0$ и $U\in C^1(R^m,R)$ удовлетворяет θ-условию. Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что для любого достаточно большого $\mathfrak{r}>0$, если существуют решения $u_\lambda\in B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon)$ уравнения* (2.2) *для всех $\lambda\in(0,1]$, при $\Xi=\Omega_{\mathfrak{r}}$, то существует решение этого уравнения при $\lambda=0$, являющееся предельной точкой множества $\{u_\lambda\}$. Более того, если решение* (2.2) *при $\lambda=0$ и $\Xi=\Omega_{\mathfrak{r}}$ единственно (обозначим его u_0), тогда $\|u_\lambda-u_0\|_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}\to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 1.1. Для этого представим (2.2) в виде операторного уравнения с параметром

$$u=F_\lambda u,$$

где

$$F_\lambda=\mathcal{W}\circ\mathcal{N}_\lambda.\tag{2.3}$$

Здесь для любого $\lambda\in[0,\infty)$

$$(\mathcal{N}_\lambda u)(x)=f_\lambda(u(x)),\tag{2.4}$$

– оператор Немыцкого,

$$(\mathcal{W}u)(x) = \int\limits_{\Xi} \langle \omega \rangle (x-y) u(y) dy \tag{2.5}$$

– линейный интегральный оператор.

В силу своего определения, множество Θ может быть представлено конечным набором связных открытых ограниченных множеств, то есть $\Theta = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Theta_i$. Тогда $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathcal{B}_i$, причем из выполнения $(\mathbf{B2})$ следует $\mathcal{B}_i \bigcap \mathcal{B}_j = \emptyset$ для всех таких $i, j = 1, \dots, N$, что $i \neq j$.

Для любого $\varepsilon > 0$ определим открытые множества $\Theta^{+\varepsilon} \subset R^m$ и $\Theta^{-\varepsilon} \subset R^m$, таким образом, что $U(x) > \theta + \varepsilon$ на $\Theta^{+\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{N^{+\varepsilon}} \Theta_i^{+\varepsilon}$ и $U(x) > \theta - \varepsilon$ на $\Theta^{-\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{N^{-\varepsilon}} \Theta_i^{-\varepsilon}$, соответственно. Границы этих множеств обозначим через $\mathcal{B}^{+\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{N^{+\varepsilon}} \mathcal{B}_i^{+\varepsilon}$ и $\mathcal{B}^{-\varepsilon} = \bigcup\limits_{i=1}^{N^{-\varepsilon}} \mathcal{B}_i^{-\varepsilon}$, соответственно.

В силу замечания 2.1 и того, что $U \in C^1(R^m, R)$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{B1})$ – $(\mathbf{B3})$, существует такое $\varepsilon_0 \in (0, \sigma/2)$, что

$$N^{+\varepsilon_0} = N^{-\varepsilon_0} = N, \ \mathcal{B} \subset \Theta^{-\varepsilon_0} \setminus \Theta^{+\varepsilon_0},$$

$$\mathcal{B}_i^{-\varepsilon_0} \bigcap \mathcal{B}_j^{-\varepsilon_0} = \emptyset \text{ for any } i, j = 1, \dots, N, \ i \neq j.$$

При таком выборе $\mathfrak{r}$, что $\Theta^{-\varepsilon_0} \subset \Omega_{\mathfrak{r}}$, для любого $u \in B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}}, R)}(U, \varepsilon_0)$ выполнены условия $(\mathbf{B1})$, $(\mathbf{B2})$ и следующее условие, заменяющее $(\mathbf{B3})$:

$(\mathbf{B3}_{(\Omega_{\mathfrak{r}})})$ $u(x) < \theta - \sigma/2$ для всех $x \in \Omega_{\mathfrak{r}} \setminus \Theta^{-\varepsilon_0}$.

Теперь покажем, что оператор $\mathcal{N}_\lambda : B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}}, R)}(U, \varepsilon_0) \to L(\Omega_{\mathfrak{r}}, \mu, R)$ заданный (2.4) непрерывен по $\widehat{\lambda}$ равномерно относительно $u \in B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}}, R)}(U, \varepsilon_0)$. Для $\widehat{\lambda} \in [0, \infty)$ и $u \in B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}}, R)}(U, \varepsilon_0)$ оценим $\|N_\lambda u - N_{\widehat{\lambda}} u\|_{L(\Omega_{\mathfrak{r}}, \mu, R)}$ при $\lambda \to \widehat{\lambda}$. Случай $\widehat{\lambda} \in (0, \infty)$ тривиален, т.к., в силу $(\mathbf{A4})$, получаем

$$\int\limits_{\Omega_{\mathfrak{r}}} |f_\lambda(u(x)) - f_{\widehat{\lambda}}(u(x))| dx \to 0, \ \lambda \to \widehat{\lambda}$$

равномерно по $u \in B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}}, R)}(U, \varepsilon_0)$. Рассмотрим более интересный случай $\widehat{\lambda} = 0$.

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega_{\mathfrak{r}}} |f_\lambda(u(x)) - f_0(u(x))| dx = \\ = \int\limits_{\Theta^{+\varepsilon_0} \bigcup (\Omega_{\mathfrak{r}} \setminus \Theta^{-\varepsilon_0})} |f_\lambda(u(x)) - f_0(u(x))| dx + \int\limits_{\Theta^{-\varepsilon_0} \setminus \Theta^{+\varepsilon_0}} |f_\lambda(u(x)) - f_0(u(x))| dx. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Для всех $x \in \Theta^{+\varepsilon_0} \bigcup (\Omega_{\mathfrak{r}} \setminus \Theta^{-\varepsilon_0})$ и любых $u \in B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}}, R)}(U, \varepsilon_0)$, $u(x)$ принадлежит $R \setminus B_R(\theta, \varepsilon_0)$. Учитывая $(\mathbf{A4})$ первое слагаемое в правой части (2.6) сходится к 0 равномерно в $B_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}(U,\varepsilon_0)$ при $\lambda\to 0$. Далее,

$$\int\limits_{\Theta^{-\varepsilon_0}\setminus\Theta^{+\varepsilon_0}} |f_\lambda(u(x))-f_0(u(x))|dx<\frac{1}{c_0}\int\limits_{-\|U\|_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}}^{\|U\|_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}}|f_\lambda(s)-f_0(s)|ds,$$

где $0<c_0<|u'(x)|$ для всех $x\in\Theta^{+\varepsilon_0}\bigcup(\Omega_\mathfrak{r}\setminus\Theta^{-\varepsilon_0})$ и любых $u\in B_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}(U,\varepsilon_0)$ (предполагаем здесь, что $\varepsilon_0<\min\limits_{x\in\Theta^{-\varepsilon_0}\setminus\Theta^{+\varepsilon_0}}|U'(x)|$, так как в противном случае можем повторить вышеописанную процедуру с новым $\varepsilon_0=\varepsilon_1<\min\limits_{x\in\Theta^{-\varepsilon_1}\setminus\Theta^{+\varepsilon_1}}|U'(x)|$). Наконец заметим, что условие $(\mathbf{A4})$ гарантирует сходимость к 0 выражения в правой части последнего неравенства при $\lambda\to 0$.

Таким образом, для любого достаточно большого радиуса $\mathfrak{r}$, оператор Немыцкого $\mathcal{N}_\lambda: B_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}(U,\varepsilon_0)\to L(\Omega_\mathfrak{r},\mu,R)$ непрерывен при любом $\widehat{\lambda}\in[0,\infty)$ равномерно в шаре $B_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}(U,\varepsilon_0)$, что означает ограниченность оператора $\mathcal{N}_\lambda: B_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}(U,\varepsilon_0)\to L(\Omega_\mathfrak{r},\mu,R)$ при любом $\lambda\in[0,\infty)$. Отметим также, что при выполнении условий $(\mathbf{A1})$ и $(\mathbf{A2})$, оператор $\mathcal{W}$, заданный (2.5), при $\Xi=\Omega_\mathfrak{r}$, есть линейный непрерывный оператор, действующий из $L(\Omega_\mathfrak{r},\mu,R)$ в $C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)$.

Итак, для любого $\lambda\in[0,\infty)$, $F_\lambda: B_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}(U,\varepsilon_0)\to C^1(R^m,R)$ и

$$\|F_\lambda u-F_{\widehat{\lambda}}\widehat{u}\|_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}\to 0,\ \lambda\to\widehat{\lambda},\ \|u-\widehat{u}\|_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}\to 0,\ \text{где } \widehat{u}\in B_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}(U,\varepsilon_0).$$

Далее покажем, что операторы $F_\lambda: B_{C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)}(U,\varepsilon_0)\to C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)$ ($\lambda\in[0,\infty)$) в совокупности компактны.

В силу условий $(\mathbf{A3})$, $(\mathbf{A4})$, достаточно показать, что для любого $\epsilon>0$ множество функций $\big\{x\mapsto\int\limits_{\Omega_\mathfrak{r}}\langle\omega\rangle(|x-y|)\vartheta(y)dy\big\}$, где ϑ пробегает множество всех суммируемых функций из $\Omega_\mathfrak{r}$ в $[0,1]$, обладает конечной ϵ-сетью в $C^1(\Omega_\mathfrak{r},R)$. Представим $\langle\omega\rangle=\big(\langle\omega\rangle_1,\ldots,\langle\omega\rangle_m\big)$, где $\langle\omega\rangle_l\in C^2(\Omega_{\mathfrak{r}l},R)$, $\Omega_{\mathfrak{r}l}$ – ортогональная проекция $\Omega_\mathfrak{r}$ на ось OX_l $(l=1,\ldots,m)$.

Выберем произвольное $\widehat{l}$. Без ограничения общности рассуждений считая множество $\Omega_\mathfrak{r}$ связным, обозначим $\Omega_{\mathfrak{r}\widehat{l}}=[a,b]$,

$$\int\limits_{[a,b]}\langle\omega\rangle_{\widehat{l}}(|a-s|)ds=A,$$

$$\int\limits_{[a,b]}\langle\omega\rangle'_{\widehat{l}}(|a-s|)ds=A',$$

$$\max_{t\in[a,b]}\int\limits_{[a,b]}\langle\omega\rangle''_{\widehat{l}}(|t-s|)ds=M.$$

Тогда ϵ-сетью для множества $\big\{x\mapsto\int\limits_{\Omega_\mathfrak{r}}\langle\omega\rangle_{\widehat{l}}(|x-y|)\vartheta_l(y)dy\big\}$, где ϑ_l пробегает множество всех суммируемых функций из $[a,b]$ в $[0,1]$, может служить, например, множество функций

$$\Big\{ \phi_{ij} : \Omega_{\mathfrak{r}} \to R,\ \phi_{ij}(x) = \alpha_i + \kappa_j x,\ x \in [a,b],\ \alpha_i = i\frac{A+(b-a)\mathbf{A}'}{[(A+(b-a)\mathbf{A}')/\epsilon]+1},$$

$$\kappa_j = j\frac{\mathbf{A}'}{[\mathbf{A}'/\epsilon]+1},\ i = 0,1,\ldots,[(A+(b-a)\mathbf{A}')/\epsilon]+1,\ j=0,1,\ldots,[\mathbf{A}'/\epsilon]+1,\ t\in[a,b]\Big\}$$

($\mathbf{A}' = A' + (b-a)M$, через $[z]$ обозначена целая часть числа $z \in R$). Из произвольности выбора компоненты $\int\limits_{\Omega_{\mathfrak{r}}} \langle\omega\rangle_{\widehat{l}}(|x-y|)dy$ интеграла $\int\limits_{\Omega_{\mathfrak{r}}} \langle\omega\rangle(|x-y|)dy$ $(l = 1,\ldots,m)$ следует совокупная компактность всей композиции $F_\lambda = \mathcal{W}\circ\mathcal{N}_\lambda$ ($\lambda \in [0,\infty)$), как действующей из $B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_0)$ в $C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)$.

Теперь, учитывая показанные выше свойства и полагая $T(\lambda,\mathfrak{b}) = F_\lambda u$, $\Lambda = [0,1]$, $D = \overline{B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_1)}$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, пользуясь леммой 1.1, доказываем данную теорему. □

Зачастую исследовать существование решений (2.2) , удовлетворяющих θ -условию, проще в случае $\lambda = 0$. Некоторые специфические типы решений (удовлетворяющие θ -условию) для частных случаев (2.2) получены в явном виде в работах [8], [11], [12], [24], [25], [30].

Следующая теорема позволяет исследовать разрешимость (2.2) для $\lambda \in (0,\infty)$, используя информацию о решении данного уравнения при $\lambda = 0$.

Теорема 2.2. *(Существование) Пусть выполнены условия теоремы 2.1, множество* $\Omega_{\mathfrak{r}}$ *и константа* ε_1 *также взяты из теоремы 2.1. Пусть существует решение* $U \in C^1(R^m,R)$ *уравнения* (2.2) *при* $\lambda = 0$ *, удовлетворяющее* θ *-условию и единственное в* $\overline{B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_2)}$ *(*$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$*), и* $\deg(I - F_0, B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_2), 0) \neq 0$ *, где оператор* $F_0 : B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_1) \to C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)$ *задан равенством* (2.3) *. Тогда для любого* $\lambda \in (0,1]$ *существует решение* $u_\lambda \in B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_2)$ *уравнения* (2.2) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что семейство отображений $\{h_\lambda\}$, $\lambda \in [0,1]$,

$$h_\lambda = I - F_\lambda \tag{2.7}$$

является гомотопией. Непрерывность $h_{(\cdot)}(\cdot)$ на $[0,1]\times B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_1)$ следует из доказательства теоремы 2.1. Остается показать, что $h_\lambda(u) \neq 0$ для любого $\lambda \in [0,1]$ и $u \in \partial B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_2)$.

По причине совокупной компактности операторов $F_\lambda : B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_1) \to C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)$ ($\lambda \in [0,\infty)$), показанной в доказательстве теоремы 2.1, для любой последовательности $\{u_{\lambda_n}\} \subset B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_1)$ ($\lambda_n \to 0$) решений (2.2) есть две возможности:

1) u_{λ_n} сходится к U при $\lambda_n \to 0$;

2) существует такое $\widehat{n}$, что для любого $n > \widehat{n}$, $\|u_{\lambda_n} - U\|_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)} > \varepsilon_2$ (без ограничения общности, считаем $\lambda_{\widehat{n}} > 1$).

Таким образом, $(I - F_\lambda)(u) \neq 0$ для любых $\lambda \in [0,1]$ и $u \in \partial B_{C^1(\Omega_{\mathfrak{r}},R)}(U,\varepsilon_1)$.

Наконец, применяя лемму 1.2 к гомотопии (2.7) , доказываем существование решений (2.2) при всех $\lambda \in (0,1]$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The Synaptic Organization of the Brain / ed. by G.M. Shepherd. Oxford: Oxford University Press, 2004. 719 p.

2. *Lui J.H., Hansen D.V., Kriegstein A.R.* Development and evolution of the human neocortex // Cell. 2011. Vol. 146. Iss. 1. P. 18–36.

3. *Swenson R.S.* Review of clinical and functional neuroscience // Educational Review Manual in Neurology / ed. by G.L. Holmes. N. Y.: Castle Connolly Graduate Medical Publishing, 2006.

4. *Graben P.B., Kurths J.* Simulating global properties of electroencephalograms with minimal random neural networks // Neurocomp. 2008. Vol. 71. Iss. 4. P. 999–1007.

5. *Hopfield J.J.* Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties // Proc. Nat. Acad. Sci. 1982. Vol. 79. P. 2554–2558.

6. *Van den Driesche P., Zou X.* Global attractivity in delayed Hopfield neural network models // SIAM J. Appl. Math. 1998. Vol. 58. P. 1878–1890.

7. *Burlakov E., Zhukovskiy E., Ponosov A., Wyller J.* Existence, uniqueness and continuous dependence on parameters of solutions to neural field equations // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. 2015. Vol. 65. P. 35–55.

8. *Amari S.* Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields // Biol. Cybern. 1977. Vol. 27. P. 77–87.

9. *Potthast R., Graben P.B.* Existence and properties of solutions for neural field equations // Math. Methods Appl. Sci. 2010. Vol. 8. P. 935–949.

10. *Faye G., Faugeras O.* Some theoretical and numerical results for delayed neural field equations // Physica D. 2010. Vol. 239. P. 561–578.

11. *Laing C.R., Troy W.* Two-bump solutions of Amari-type models of neuronal pattern formation // Physica D. 2003. Vol. 178. P. 190–218.

12. *Owen M.R., Laing C.R., Coombes S.* Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities // New J. Phys. 2007. Vol. 9. P. 378.

13. *Blomquist P., Wyller J., Einevoll G.T.* Localized activity patterns in two-population neuronal networks // Physica D. 2005. Vol. 206. P. 180–212.

14. *Oleynik A., Ponosov A., Wyller J.* On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 398. P. 335–351.

15. *Pinto D., Ermentrout G.B.* Spatially structured activity in synaptically coupled neuronal networks: II. Lateral inhibition and standing pulses // SIAM J. Appl. Math. 2001. Vol. 62. P. 226–243.

16. *Coombes S., Owen M.R.* Evans functions for integral neural field equations with Heaviside firing rate function // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2004. Vol. 4. P. 574–600.

17. *Folias S.E., Bressloff P.C.* Breathing pulses in an excitatory neural network // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2004. Vol. 3. P. 378–407.

18. *Guo Y., Chow C.C.* Existence and stability of standing pulses in neural networks: II. Stability // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2005. Vol. 4. P. 249–281.

19. *Taylor J.G.* Neural bubble dynamics in two dimensions: foundations // Biol. Cybern. 1999. Vol. 80. P. 393–409.

20. *Laing C.R., Troy W.C.* PDE methods for nonlocal models // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2003. Vol. 2. P. 487–516.

21. *Werner H., Richter T.* Circular stationary solutions in two-dimensional neural fields // Biol. Cybern. 2001. Vol. 85. P. 211–217.

22. *Coombes S., Laing C., Schmidt H., Svanstedt N., Wyller J.* Waves in random neural media // Discr. Cont. Dyn. Syst., Series A. 2011. Vol. 32. P. 2951–2970.

23. *Svanstedt N., Woukeng J.L.* Homogenization of a Wilson-Cowan model for neural fields // Nonlin. Anal. Real World Appl. 2013. Vol. 14. Iss. 3. P. 1705–1715.

24. *Svanstedt N., Wyller J., Malyutina E.* A one-population Amari model with periodic microstructure // Nonlinearity. 2014. Vol. 27. P. 1394–1417.

25. *Malyutina E., Wyller J., Ponosov A.* Two bump solutions of a homogenized Amari model with periodic microstructure // Physica D. 2014. Vol. 271. P. 19–31.

26. *Malyutina E., Ponosov A., Wyller J.* Numerical analysis of bump solutions for neural field equations with periodic microstructure // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 260. P. 370–384.

27. *Granas A.* The Leray-Schuder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs // Bull. Soc. Math. France, 1972. vol. 100. P. 209–228.

28. *Hutson V., Pym J.S., Cloud M.J.* Applications of Functional Analysis and Operator Theory. Amsterdam: Elsevier Science, 2005. 432 p.

29. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Vol. 1. N. Y.: Dover Publications Inc., 1961. 128 p.

30. *Burlakov E., Wyller J., Ponosov A.* Two-dimensional Amari neural field model with periodic microstructure: Rotationally symmetric bump solutions // Commun. Nonl. Sci. Num. Simul. 2016. Vol. 32. P. 81–88.

Поступила в редакцию 15 января 2018 г.
Прошла рецензирование 08 февраля 2018 г.
Принята в печать 20 февраля 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Бурлаков Евгений Олегович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, PhD, научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», e-mail: eb_@bk.ru

Насонкина Маргарита Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант по направлению подготовки «Математика», e-mail: nasonkina.margo@gmail.com

Для цитирования: *Бурлаков Е.О., Насонкина М.А.* О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: I. Общая теория // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 121. С. 17–30. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-17-30

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-17-30

ON CONNECTION BETWEEN CONTINUOUS AND DISCONTINUOUS NEURAL FIELD MODELS WITH MICROSTRUCTURE I. GENERAL THEORY

© E. O. Burlakov, M. A. Nasonkina

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: eb_@bk.ru, nasonkina.margo@gmail.com

Abstract. We suggest a method allowing to investigate existence and the measure of proximity between the stationary solutions to continuous and discontinuous neural fields with microstructure. The present part involves a theorem on solvability of such equations based on topological degree theory, and a theorem on continuous dependence of the solutions under the transition from continuous to discontinuous activation function using compactness in a special topology.
Keywords: mathematical neuroscience; neural field models with microstructure; solvability; continuous dependence on parameters

REFERENCES

1. Shepherd G.M. (ed.). *The Synaptic Organization of the Brain.* Oxford, Oxford University Press, 2004, 719 p.

2. Lui J.H., Hansen D., Kriegstein A.R. Development and evolution of the human neocortex. *Cell*, 2011, vol. 146, issue 1, pp. 18–36.

3. Swenson R.S. Review of clinical and functional neuroscience. In: Holmes G.L. (ed.) *Educational Review Manual in Neurology.* New York, Castle Connolly Graduate Medical Publishing, 2006.

4. Graben P.B., Kurths J. Simulating global properties of electroencephalograms with minimal random neural networks. *Neurocomp.*, 2008, vol. 71, issue 4, pp. 999–1007.

5. Hopfield J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1982, vol. 79, pp. 2554–2558.

6. Van den Driesche P., Zou X. Global attractivity in delayed Hopfield neural network models. *SIAM J. Appl. Math.*, 1998, vol. 58, pp. 1878–1890.

7. Burlakov E., Zhukovskiy E., Ponosov A., Wyller J. Existence, uniqueness and continuous dependence on parameters of solutions to neural field equations. *Mem. Diff. Eq. Math. Phys.*, 2015, vol. 65, pp. 35–55.

8. Amari S. Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields. *Biol. Cybern.*, 1977, vol. 27, pp. 77–87.

9. Potthast R., Graben P.B. Existence and properties of solutions for neural field equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2010, vol. 8, pp. 935–949.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 17-41-680975, 18-31-00227).

10. Faye G., Faugeras O. Some theoretical and numerical results for delayed neural field equations. *Physica D.*, 2010, vol. 239, pp. 561–578.

11. Laing C.R., Troy W. Two-bump solutions of Amari-type models of neuronal pattern formation. *Physica D.*, 2003, vol. 178, pp. 190–218.

12. Owen M.R., Laing C.R., Coombes S. Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities. *New J. Phys.*, 2007, vol. 9, p. 378.

13. Blomquist P., Wyller J., Einevoll G.T. Localized activity patterns in two-population neuronal networks. *Physica D.*, 2005, vol. 206, pp. 180–212.

14. Oleynik A., Ponosov A., Wyller J. On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models. *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 398, pp. 335–351.

15. Pinto D., Ermentrout G.B. Spatially structured activity in synaptically coupled neuronal networks: II. Lateral inhibition and standing pulses. *SIAM J. Appl. Math.*, 2001, vol. 62, pp. 226–243.

16. Coombes S., Owen M.R. Evans functions for integral neural field equations with Heaviside firing rate function. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2004, vol. 4, pp. 574–600.

17. Folias S.E., Bressloff P.C. Breathing pulses in an excitatory neural network. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2004, vol. 3, pp. 378–407.

18. Guo Y., Chow C.C. Existence and stability of standing pulses in neural networks: II. Stability. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2005, vol. 4, pp. 249–281.

19. Taylor J.G. Neural bubble dynamics in two dimensions: foundations. *Biol. Cybern.*, 1999, vol. 80, pp. 393–409.

20. Laing C.R., Troy W.C. PDE methods for nonlocal models. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2003, vol. 2, pp. 487–516.

21. Werner H., Richter T. Circular stationary solutions in two-dimensional neural fields. *Biol. Cybern.*, 2001, vol. 85, pp. 211–217.

22. Coombes S., Laing C., Schmidt H., Svanstedt N., Wyller J. Waves in random neural media. *Discr. Cont. Dyn. Syst., Series A*, 2011, vol. 32, pp. 2951–2970.

23. Svanstedt N., Woukeng J.L. Homogenization of a Wilson-Cowan model for neural fields. *Nonlin. Anal. Real World Appl.*, 2013, vol. 14, issue 3, pp. 1705–1715.

24. Svanstedt N., Wyller J., Malyutina E. A one-population Amari model with periodic microstructure. *Nonlinearity*, 2014, vol. 27, pp. 1394–1417.

25. Malyutina E., Wyller J., Ponosov A. Two bump solutions of a homogenized Amari model with periodic microstructure. *Physica D.*, 2014, vol. 271, pp. 19–31.

26. Malyutina E., Ponosov A., Wyller J. Numerical analysis of bump solutions for neural field equations with periodic microstructure. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 260, pp. 370–384.

27. Granas A. The Leray-Schuder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs. *Bull. Soc. Math. France*, 1972, vol. 100, pp. 209–228.

28. Hutson V., Pym J.S., Cloud M.J. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory.* Amsterdam, Elsevier Science Publ., 2005, 432 p.

29. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Vol. 1.* New York, Dover Publications Inc., 1961, 128 p.

30. Burlakov E., Wyller J., Ponosov A. Two-dimensional Amari neural field model with periodic microstructure: Rotationally symmetric bump solutions. *Commun. Nonl. Sci. Num. Simul.*, 2016, vol. 32, pp. 81–88.

Received 15 January 2018
Reviewed 08 February 2018
Accepted for press 20 February 2018
There is no conflict of interests.

Burlakov Evgenii Olegovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, PhD, Researcher at the Research and Educational Centre «Fundamental mathematical research», e-mail: eb_@bk.ru

Nasonkina Margarita Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Master's Degree Student on Training Direction «Mathematics», e-mail: nasonkina.margo@gmail.com

For citation: Burlakov E.O., Nasonkina M.A. O svyazi nepreryvnyh i razryvnyh modeley neyronnyh poley s mikrostrukturoy I. Obshaya teoriya [On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure I. General theory]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 17–30. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-17-30 (In Russian, Abstr. in Engl.).