ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки

Том 23, № 121 2018

УДК 517.988.63, 512.562

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© С. Бенараб, Е. С. Жуковский

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: benarab.sarraa@gmail.com, zukovskys@mail.ru

Аннотация. А.В. Арутюновым, Е.С. Жуковским, С.Е. Жуковским исследованы точки совпадения отображений частично упорядоченных пространств (см. Topology and its Applications, 2015, vol. 179, no. 1, pp. 13–33); в частности, доказано что упорядоченно накрывающее и монотонное отображения, действующие из частично упорядоченного пространства $(X, \succeq_X)$ в частично упорядоченное пространство $(Y, \succeq_Y)$ имеют точку совпадения. Показано, что условия этого утверждения можно ослабить: бинарное отношение $\succeq_Y$ не обязано быть порядком. Приведен соответствующий результат и демонстрируется пример отображений, удовлетворяющих его условиям, но к которым не применимы результаты цитируемой работы.

Ключевые слова: точка совпадения; частично упорядоченное пространство; накрывающее отображение; монотонное отображение

Введение

В работах [1]–[4] предложено понятие накрывания для отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах, с использованием этого понятия доказаны теоремы о точках совпадения отображений, из теорем о точках совпадения в частично упорядоченных пространствах выведены известные теоремы о неподвижной точке монотонного отображения в частично упорядоченном пространстве, а также теорема Арутюнова (см. [5]) о точках совпадения в метрических пространствах. В работах [6], [7] определено и исследовано множество упорядоченного накрывания отображений, на основании этих результатов получены аналоги теоремы Чаплыгина о неравенстве для неявных дифференциальных и интегральных уравнений.

В настоящей работе показано, что условия теорем о точках совпадения работ [1], [3] можно ослабить и не требовать, чтобы бинарное отношение в пространстве Y было отношением порядка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-01-00553, 16-01-00386).

1. Теорема о точках совпадения отображений

Пусть задано частично упорядоченное пространство $X = (X, \succeq_X)$. Для элемента $u \in X$ обозначим $\mathcal{O}_X(u) = \{x \in X : x \preceq_X u\}$. Заметим, что

$$\forall x \in \mathcal{O}_X(u) \ \ \mathcal{O}_X(x) \subset \mathcal{O}_X(u). \tag{1.1}$$

Пусть также задано непустое множество Y, на котором определено бинарное отношение $\succeq_Y \in Y^2$, являющееся рефлексивным (то есть для любого $y \in Y$ выполнено $y \succeq_Y y$). Отношение $\succeq_Y$ может не быть ни антисимметричным ни транзитивным. Для элемента $w \in Y$ обозначим $\mathcal{O}_Y(w) = \{y \in X : y \preceq_Y w\}$. В силу отсутствия транзитивности бинарного отношения $\succeq_Y$ соотношение, аналогичное (1.1), для $\mathcal{O}_Y(w)$ может не выполняться.

На отображения, действующие из X в Y, можно распространить определения, используемые для отображений частично упорядоченных пространств, в том числе определение свойства упорядоченного накрывания из [1].

О п р е д е л е н и е 1.1. Отображение $f : X \to Y$ называем изотонным, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \succeq_X x_2$, выполнено $f(x_1) \succeq_Y f(x_2)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Отображение $f : X \to Y$ называем (упорядоченно) накрывающим множество $W \subset Y$, если

$$\forall x_0 \in X \ \ \forall y \in W \ \ y \preceq_Y f(x_0) \ \Rightarrow \ \exists x \in X \ \ f(x) = y \ \text{и} \ x \preceq_X x_0. \tag{1.2}$$

Пусть заданы отображения $\psi, \varphi : X \to Y$. Для произвольного $x_0 \in X$ определим множество

$$\mathcal{X}(x_0, \psi, \varphi) = \mathcal{O}_X(x_0) \cap \psi^{-1}\big(\varphi\big(\mathcal{O}_X(x_0)\big)\big) = \{x \in X : x \preceq_X x_0, \ \psi(x) \in \varphi\big(\mathcal{O}_X(x_0)\big)\}$$

и обозначим через $\mathcal{S}(x_0, \psi, \varphi)$ совокупность цепей $S \subset X$ таких, что

$$S \subset \mathcal{X}(x_0, \psi, \varphi), \quad \forall x \in S \ \ \psi(x) \succeq_Y \varphi(x), \quad \forall x_1, x_2 \in S \ \ x_2 \prec_X x_1 \ \Rightarrow \ \psi(x_2) \preceq_Y \varphi(x_1).$$

Приведем утверждение о точках совпадения отображений, аналогичное теореме 1 из [1], но в котором не требуется, чтобы Y было частично упорядоченным пространством. Напомним, что точкой совпадения отображений ψ, φ называют элемент $\xi \in X$ такой, что $\psi(\xi) = \varphi(\xi)$.

Теорема 1.1. *Пусть для некоторого элемента $x_0 \in X$ имеет место неравенство $\psi(x_0) \succeq \varphi(x_0)$ и выполнены следующие условия:*
(a) *отображение $\psi : X \to Y$ является накрывающим множество $W = \varphi\big(\mathcal{O}_X(x_0)\big)$;*
(b) *отображение $\varphi : X \to Y$ является изотонным;*
(c) *для любой цепи $S \in \mathcal{S}(x_0, \psi, \varphi)$ существует элемент $u \in X$ такой, что*

$$\forall x \in S \ \ u \preceq_X x, \quad \psi(u) \succeq_Y \varphi(u).$$

Тогда существует точка совпадения отображений ψ, φ, принадлежащая $\mathcal{O}_X(x_0)$, то есть справедливо соотношение

$$\exists \xi \in X \ : \ \psi(\xi) = \varphi(\xi) \ \ \text{и} \ \ \xi \preceq_X x_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству [1; теорема 1].

При доказательстве [1; теорема 1] на множестве

$$U = \{x \in \mathcal{X}(x_0, \psi, \varphi) : \psi(x) \succeq_{Y} \varphi(x)\}$$

определяется бинарное отношение $\trianglelefteq$ следующим образом:

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad u_2 \trianglelefteq u_1 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = u_1 \text{ или } u_2 \prec_{X} u_1, \; \psi(u_2) \preceq_{Y} \varphi(u_1).$$

В условиях [1; теорема 1] отношение $\trianglelefteq$ является порядком на U, однако, в условиях данного утверждения отношение $\trianglelefteq$ может не являться транзитивным, поскольку таким свойством не обладает отношение $\preceq_{Y}$. Поэтому при доказательстве данного утверждения мы определяем иной порядок:

$$\forall u_1, u_2 \in U \quad u_2 \trianglelefteq u_1 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = u_1 \text{ или } u_2 \prec_{X} u_1, \; \exists x \prec_{X} u_1 : \psi(u_2) \preceq_{Y} \varphi(x).$$

В остальном рассуждения, устанавливающие справедливость настоящего утверждения, повторяют доказательство [1; теорема 1]. □

2. Примеры

Приведем примеры отображений ψ, φ, действующих из частично упорядоченного пространства во множество, не являющееся частично упорядоченным, удовлетворяющих условиям полученного утверждения. К таким отображениям нельзя применить результаты [1], тем не менее, теорема 1 гарантирует существование точки совпадения.

В примере 2.1 бинарное отношение на Y не является транзитивным.

П р и м е р 2.1. Определим множество $X = \{w, x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots\}$, на котором зададим частичный порядок, полагая для натуральных $i \leq j$ выполненными неравенства $x_i \succ_{X} x_j \succ_{X} w$, $u_i \succ_{X} u_j \succ_{X} w$, а элементы x_i, u_j при любых i, j полагаем несравнимыми. Далее, определим множество $Y = \{z, y_1, y_2, y_3\}$ и на нем зададим бинарное отношение

$$\succeq_{Y} = \big\{(y_1, y_2), (y_2, y_3), (y_3, y_1), (z, z), (y_i, y_i), (y_i, z), \; i = 1, 2, 3\big\}.$$

Это отношение не обладает свойством транзитивности (так как $y_1 \succeq_{Y} y_2$, $y_2 \succeq_{Y} y_3$, но $y_1 \not\succeq_{Y} y_3$) таким образом, множество Y не является упорядоченным.

Определим отображение $\varphi : X \to Y$ соотношениями:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1) = y_2, \quad \varphi(x_2) = y_3, \quad \varphi(x_3) = \varphi(x_4) = \ldots = z, \\ &\varphi(u_1) = y_3, \quad \varphi(u_2) = y_1, \quad \varphi(u_3) = \varphi(x_4) = \ldots = z, \quad \varphi(w) = z. \end{aligned}$$

Это отображение изотонное, то есть выполнено условие (b) теоремы 1.1.

Теперь определим отображение $\psi : X \to Y$ следующим образом. Каждому натуральному i поставим в соответствие $\bar{i} \in \{1, 2, 3\}$ так, что $i \equiv \bar{i} (\bmod 3)$. Полагаем

$$\forall i = 1, 2, \ldots \quad \psi(x_i) = \psi(u_i) = y_{\bar{i}}, \quad \psi(w) = z.$$

Это отображение является накрывающим. Действительно, если $y \in Y$ удовлетворяет неравенству $y \prec_Y y_{\bar{i}} = \psi(x_i)$, то $y = y_{\overline{i+1}}$ или $y = z$. В первом случае для $x = x_{i+1}$ выполнено (1.2), так как $x_{i+1} \prec_X x_i$ и $\psi(x_{i+1}) = y$; во втором случае для $x = w$ также очевидно выполнение соотношения (1.2). Аналогично проверяется соотношение (1.2) для $y \prec_Y y_{\bar{i}} = \psi(u_i)$. Итак, выполнено условие (a) теоремы 1.1.

Справедливость условия (c) теоремы 1.1 следует из того, что любая цепь $S \subset X$ имеет нижнюю границу w, для которой справедливо $\psi(w) = \varphi(w)$.

Наконец, для элемента $x_1 \in X$ выполнено $\psi(x_1) = y_1 \succ_Y y_2 = \varphi(x_1)$. Это соотношение завершает проверку условий теоремы 1.1.

В следующем примере бинарное отношение на Y не является антисимметричным.

П р и м е р 2.2. Зададим множества $X = \{w, x_1, , x_2, \ldots\}$, $Y = \{z, y_1, y_2\}$. Определим на множестве X упорядоченность, полагая, что выполнено $x_i \succ_X x_j \succ_X w$ при любых натуральных $i \leq j$. Пространство $X = (X, \succeq_X)$ линейно упорядочено. На Y определим бинарное отношение $\succeq_Y = \big\{(y_1, y_2), (y_2, y_1), (z, z), (y_i, y_i), (y_i, z),\ i = 1, 2\big\}$. Это отношение не обладает свойством антисимметричности (так как $y_1 \succeq_Y y_2$ и $y_2 \succeq_Y y_1$), таким образом, множество Y не является упорядоченным.

Каждому натуральному i поставим в соответствие $\bar{i} \in \{1, 2\}$ так, что $i \equiv \bar{i} (\mathrm{mod}\, 2)$. Определим отображения $\psi, \varphi : X \to Y$ соотношениями:

$$\forall i = 1, 2, \ldots \quad \psi(x_i) = y_{\bar{i}}, \quad \psi(w) = z; \quad \varphi(x_i) = y_{\overline{i+1}}, \quad \varphi(w) = z.$$

При таком определении отображение ψ является накрывающим (проверка не отличается от проверки накрывания отображения ψ в примере 2.1), а отображение φ — изотонным. Таким образом, выполнены условия (a), (b) теоремы 1.1.

Как и в примере 2.1, справедливость условия (c) теоремы 1.1 следует из того, что любая цепь $S \subset X$ имеет нижнюю границу w, для которой справедливо $\psi(w) = \varphi(w)$. И наконец, для элемента $x_1 \in X$ выполнено $\psi(x_1) = y_1 \succ_Y y_2 = \varphi(x_1)$. Итак, все условия теоремы 1.1 выполнены.

В примерах 2.1, 2.2 отображения ψ, φ, конечно, имеют точки совпадения, и это гарантируется выполнением условий теоремы 1.1. Однако, множество Y не является частично упорядоченным, что не позволяет воспользоваться результатами [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and Its Applications. 2015. Vol. 179. № 1. P. 13–33. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.013.

2. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and Its Applications. 2016. Vol. 201. P. 330–343. DOI: 10.1016/j.topol.2015.12.044.

3. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.

4. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.

5. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

6. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.

7. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96–127.

Поступила в редакцию 15 января 2018 г.
Прошла рецензирование 06 февраля 2018 г.
Принята в печать 20 февраля 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Бенараб Сарра, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: benarab.sarra@gmail.com

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Для цитирования: *Бенараб С., Жуковский Е.С.* Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 121. С. 10–16. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16

ABOUT THE CONDITIONS OF EXISTENCE COINCIDENCE POINTS FOR MAPPING IN PARTIALLY ORDERED SPACES

© **S. Benarab, E. S. Zhukovskiy**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: benarab.sarra@gmail.com, zukovskys@mail.ru

Abstract. A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovsky, S.E. Zhukovskii studied the coincidence points for mappings of partially ordered spaces in particular, it was proved that an covering and monotone mapping, acting from a partially ordered space $(X, \succeq_X)$ to a partially ordered space $(Y, \succeq_Y)$, have a coincidence point. It is shown that the conditions of this assertion can be weakened: the binary relation $\succeq_Y$ should not be in order. We give an appropriate result and and demonstrate an example of mappings satisfying its conditions, but to which the results of the cited work are not applicable.
Keywords: coincidence point; partially ordered space; covering map; monotonic mapping

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and Its Applications*, 2015, vol. 179, no. 1, pp. 13–33. DOI: 10.1016/j.topol.2014.08.013.

2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces. *Topology and Its Applications*, 2016, vol. 201, pp. 330–343. DOI: 10.1016/j.topol.2015.12.044.

3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkakh sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 727–729. (In Russian).

4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Tochki sovpadeniya mnogoznachnykh otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On coincidence points of mappings in partially ordered spaces]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 710–713. (In Russian).

5. Arutyunov A.V. Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki [Covering mappings in metric spaces and fixed points]. *Doklady Akademii nauk – Doklady Mathematics*, 2007, vol. 76, no. 2, pp. 665–668. (In Russian).

6. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh [On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities]. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1539–1556. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 17-01-00553, 16-01-00386).

7. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i integral'nykh neravenstvakh tipa Chaplygina [About orderly covering mappings and Chaplygin's type integral inequalities]. *Algebra i analiz – St. Petersburg Mathematical Journal*, 2018, vol. 30, no. 1, pp. 96–127. (In Russian).

Received 15 January 2018
Reviewed 06 February 2018
Accepted for press 20 February 2018
There is no conflict of interests.

Benarab Sarra, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

For citation: Benarab S., Zhukovskiy E.S. Ob usloviyah sushchestvovaniya tochek sovpadeniya otobrazhenij v chastichno uporyadochennyh prostranstvah [About the conditions of existence coincidence points for mapping in partially ordered spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 10–16. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-121-10-16 (In Russian, Abstr. in Engl.).