ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-436-446
УДК 517.928, 517.922

Явление погранслоя в алгебро-дифференциальном уравнении первого порядка

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова»
394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. Рассматривается задача Коши для алгебро-дифференциального уравнения первого порядка

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t,\varepsilon),$$
$$u(t_0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon) \in E_1,$$

где A, B, C, D — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 с всюду плотными в E_1 областями определения, u^0 — голоморфная в точке $\varepsilon = 0$ функция, ε — малый параметр, $t \in [t_0; t_{max}]$. Такими уравнениями описываются, в частности, процессы фильтрации и влагопереноса, поперечные колебания пластин, колебания в молекулах ДНК, явления в электромеханических системах и т. д. Оператор A фредгольмов с нулевым индексом. Целью работы является изучение явления погранслоя, вызываемое наличием малого параметра. Приводятся необходимые сведения и утверждения. Получено уравнение ветвления. Рассматриваются два случая: а) функции погранслоя одного вида, б) функций погранслоя двух видов. Для решения уравнения ветвления применяется диаграмма Ньютона. В обоих случаях выявлены условия, при которых возникает явление погранслоя — это условия регулярности вырождения. Случай а) иллюстрируется примером задачи Коши с конкретными операторными коэффициентами, действующими в пространстве $\mathbb{R}^4$.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальное уравнение первого порядка, малый параметр, фредгольмов оператор, явление погранслоя, уравнение ветвления, условия регулярности вырождения

Для цитирования: *Усков В.И.* Явление погранслоя в алгебро-дифференциальном уравнении первого порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 436–446. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-436-446

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-436-446

Boundary layer phenomenon in a first-order algebraic-differential equation

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. The Cauchy problem for the first-order algebraic differential equation is considered

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t, \varepsilon),$$

$$u(t_0, \varepsilon) = u^0(\varepsilon) \in E_1,$$

where A, B, C, D are closed linear operators acting from a Banach space E_1 to a Banach space E_2 with domains everywhere dense in E_1, u^0 is a holomorphic function at the point $\varepsilon = 0$, ε is a small parameter, $t \in [t_0; t_{max}]$. Such equations describe, in particular, the processes of filtration and moisture transfer, transverse vibrations of plates, vibrations in DNA molecules, phenomena in electromechanical systems, etc. The operator A is the Fredholm operator with zero index. The aim of the work is to study the boundary layer phenomenon caused by the presence of a small parameter. The necessary information and statements are given. A bifurcation equation is obtained. Two cases are considered: a) boundary layer functions of one type, b) boundary layer functions of two types. Newton's diagram is used to solve the bifurcation equation. In both, the conditions under which boundary layer phenomenon arises are obtained — these are the conditions for the regularity of degeneracy. Case a) is illustrated by an example of the Cauchy problem with certain operator coefficients acting in the space $\mathbb{R}^4$.

Keywords: first-order algebraic-differential equation, small parameter, Fredholm operator, boundary layer phenomenon, bifurcation equation, regularity conditions for degeneracy

Mathematics Subject Classification: 34E15.

For citation: Uskov V.I. Boundary layer phenomenon in a first-order algebraic-differential equation. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 436–446. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-436-446 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В статье рассматривается задача Коши

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t,\varepsilon), \tag{0.1}$$

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon) \in E_1, \tag{0.2}$$

где A, B, C, D — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{\operatorname{dom}} A = \overline{\operatorname{dom}} B = \overline{\operatorname{dom}} C = \overline{\operatorname{dom}} D = E_1$, оператор A фредгольмов с нулевым индексом (далее, фредгольмов), u^0 — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция, $t \in \mathfrak{T} = [t_0; t_{max}]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$.

Уравнениями вида (0.1) описываются, в частности, процессы фильтрации и влагопереноса, поперечные колебания пластин, колебания в молекулах ДНК, явления в электромеханических системах и т. д. [1], [2].

Цель работы: исследовать задачу (0.1), (0.2) на наличие явления погранслоя, выявить условия, при которых имеет место явление погранслоя.

Работа продолжает исследование [3]. В [3] предполагалось, что оператор A обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом, рассматривался случай двумерного ядра. Результат применялся к исследованию жесткости динамической системы, описываемой системой уравнений в частных производных первого порядка. В настоящей работе оператор A фредгольмов; исследование обобщается случаем ядра оператора A произвольной (конечной) размерности.

Для решения поставленной задачи в пункте 1. приводятся необходимые определения и утверждения, а в пункте 2. выводится уравнение ветвления, позволяющее определить вид функций погранслоя. Исследование явления погранслоя проводится в пункте 3. Здесь рассматриваются два случая погранслоя: а) случай одного вида функций погранслоя и б) случай двух видов функций погранслоя. Случай а) иллюстрируется примером, приведенным в заключающем статью пункте 4.

1. Необходимые определения и утверждения

Приведем сведения по явлению погранслоя.

О п р е д е л е н и е 1.1. [4] Ограниченная функция $(t,\varepsilon) \in \mathfrak{T} \times (0;\varepsilon_0) \mapsto v(t,\varepsilon) \in E_1$ называется *функцией погранслоя* вблизи точки $t = t_0$, если $v(t,\varepsilon)$ стремится равномерно (по норме в банаховом пространстве E_1) к нулю при $\varepsilon \to 0$ на $[t'; t_{max}]$ для любых $t' \in (t_0; t_{max})$, и не стремится равномерно к нулю на $\mathfrak{T}$.

Введем новую переменную $\tau = \tau(t,\varepsilon)$ и будем рассматривать функции погранслоя, зависящие только от τ.

О п р е д е л е н и е 1.2. [5, с. 20] В задаче (0.1), (0.2) наблюдается *явление погранслоя*, если решение этой задачи представляется в виде

$$u(t,\varepsilon) = \bar{u}(t) + v(\tau),$$

где v — функция погранслоя, $\bar{u}$ — решение предельной задачи

$$A\frac{d\bar{u}}{dt} = B\bar{u}(t), \quad \bar{u}(t_0) = \bar{u}^0.$$

Далее, нам потребуются сведения о фредгольмовском операторе.

Свойство 1.1. [6] Фредгольмов оператор $A : E_1 \to E_2$ вполне определяется свойством

$$E_1 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A,$$

где $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A, $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к ядру, $\operatorname{Coker} A$ — дефект, $\operatorname{Im} A$ — образ, причем выполнено $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A (= n) < \infty$ и сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$.

Введем проектор Q на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q) : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$. Разложим элемент $e \in \operatorname{Ker} A$, $e \neq 0$, по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и элемент $\varphi \in \operatorname{Coker} A$ по базису $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$:

$$e = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i. \tag{1.1}$$

В $\operatorname{Coker} A$ введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, что

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.1. [7] *Уравнение* $Av = w$, $v \in E_1$, $w \in E_2$, *равносильно системе*

$$v = A^- w + e,$$
$$\langle Qw, \varphi_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $f_{ij}(x, y)$ — скалярные вещественные функции, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим следующие функции, построенные с помощью определителя:

$$F(x, y) = \det(f_{ij}(x, y))_{n \times n},$$

$$F_n(x, y) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{i_1 + j_1} f_{11}(x, y)}{\partial x^{i_1} \partial y^{j_1}} & \dfrac{\partial^{i_1 + j_1} f_{12}(x, y)}{\partial x^{i_1} \partial y^{j_1}} & \ldots & \dfrac{\partial^{i_1 + j_1} f_{1n}(x, y)}{\partial x^{i_1} \partial y^{j_1}} \\ \dfrac{\partial^{i_2 + j_2} f_{21}(x, y)}{\partial x^{i_2} \partial y^{j_2}} & \dfrac{\partial^{i_2 + j_2} f_{22}(x, y)}{\partial x^{i_2} \partial y^{j_2}} & \ldots & \dfrac{\partial^{i_2 + j_2} f_{2n}(x, y)}{\partial x^{i_2} \partial y^{j_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^{i_n + j_n} f_{n1}(x, y)}{\partial x^{i_n} \partial y^{j_n}} & \dfrac{\partial^{i_n + j_n} f_{n2}(x, y)}{\partial x^{i_n} \partial y^{j_n}} & \ldots & \dfrac{\partial^{i_n + j_n} f_{nn}(x, y)}{\partial x^{i_n} \partial y^{j_n}} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $P(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ полиномиальный коэффициент.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть все частные производные функций* $f_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *не зависят от порядка дифференцирования. Тогда справедлива следующая формула частной производной*

$$\frac{\partial^{r+s} F(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_n \geqslant 0,\ i_1 + i_2 + \ldots + i_n = r \\ j_1, j_2, \ldots, j_n \geqslant 0,\ j_1 + j_2 + \ldots + j_n = s}} P(i_1, i_2, \ldots, i_n) P(j_1, j_2, \ldots, j_n) F_n(x, y).$$

Пусть K_i, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ — линейные операторы, действующие в одном пространстве. Обозначим через $S^{K_0,K_1,K_2}_{i_1,i_2,i_3}$ сумму по всевозможным перестановкам из i_1 элементов K_0, i_2 элементов K_1, i_3 элементов K_2.

Справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Степень $m \in \mathbb{N}$ от суммы $K_0 + K_1 + K_2$ определяется формулой*
$$(K_0 + K_1 + K_2)^m = \sum_{i_1,i_2,i_3 \geqslant 0,\ i_1+i_2+i_3=m} S^{K_0,K_1,K_2}_{i_1,i_2,i_3}.$$

Теперь рассмотрим операторные пучки
$$\mathcal{K}_1(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1, \quad \mathcal{K}_2(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2, \quad \mathcal{K}_3(\varepsilon) = \mathcal{K}_2^m(\varepsilon),$$
$$\mathcal{K}_4(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i K_i. \tag{1.3}$$
Предполагается, что ряд (1.3) сходится.

Из [8, лемма 3.6] вытекает следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.3. *Для производной от произведения $\mathcal{K}_1(\varepsilon)\mathcal{K}_4(\varepsilon)$ справедлива формула*
$$(\mathcal{K}_1(\varepsilon)\mathcal{K}_4(\varepsilon))' = \mathcal{K}_1'(\varepsilon)\mathcal{K}_4(\varepsilon) + \mathcal{K}_1(\varepsilon)\mathcal{K}_4'(\varepsilon).$$

Предложение 1.2 влечет следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.4. *Производные первого и второго порядка оператора $\mathcal{K}_3(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ определяются по формулам*
$$\mathcal{K}_3'(0) = S^{K_0,K_1,K_2}_{m-1,1,0}, \quad \mathcal{K}_3''(0) = 2(S^{K_0,K_1,K_2}_{m-1,0,1} + S^{K_0,K_1,K_2}_{m-2,2,0}).$$

2. Уравнение ветвления

Для уравнения (0.1) выведем уравнение ветвления. Подстановка
$$u(t,\varepsilon) = \exp(t - t_0/\lambda)v(\varepsilon), \tag{2.1}$$
где $\lambda \in \mathbb{C}$ — достаточно малые по модулю числа, $v(\varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция при $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$, $v(\varepsilon) \neq 0$, в (0.1) приводит к уравнению
$$Av(\varepsilon) = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)v(\varepsilon).$$
Это уравнение в силу леммы 1.1 равносильно системе
$$[I - \lambda A^-(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]v(\varepsilon) = e, \tag{2.2}$$
$$e \neq 0, \tag{2.3}$$
$$\langle Q(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)v(\varepsilon), \varphi_j\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Далее полагаем, что выполнены следующие два условия.

У с л о в и е 2.1. Операторы QB, QC, QD, A^-B, A^-C, A^-D ограничены.

Условие 2.2. Числа $\lambda \in \mathbb{C}$ достаточно малые по модулю и таковы, что

$$0 < \|\lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\| < 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0).$$

Тогда уравнение (2.2) разрешимо:

$$v(\varepsilon) = [I - \lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]^{-1} e. \tag{2.5}$$

Подставив (2.5) в (2.4), получим

$$\langle Q(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)[I - \lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]^{-1} e, \varphi_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Определим

$$R_{ij}(\lambda, \varepsilon) = \langle Q(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)[I - \lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]^{-1} e_i, \varphi_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Теперь, подставив первое разложение (1.1) в (2.6), получим систему уравнений относительно c_i

$$\sum_{i=1}^{n} c_i R_{ij}(\lambda, \varepsilon) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Из этой системы вытекает искомое уравнение ветвления

$$R(\lambda, \varepsilon) = \det(R_{ij}(\lambda, \varepsilon))_{n \times n} = 0, \tag{2.7}$$

так как иное влечет $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что противоречит (2.3).

3. Исследование явления погранслоя в задаче (0.1), (0.2)

Рассмотрим уравнение (2.7) для исследования явления погранслоя. Для этого в выражении $R(\lambda, \varepsilon)$ разложим $[I - \lambda A^{-}(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)]^{-1}$ в ряд Неймана; получившееся выражение разложим в ряд Маклорена по степеням параметров λ, ε, использовав для частных производных предложение 1.1. Затем решим уравнение (2.7) относительно λ, применив диаграмму Ньютона [9, § 38].

Исследуем два случая погранслоя.

Случай одного вида функций погранслоя. Пусть выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial^i R}{\partial \varepsilon^i}(0,0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1, \quad \frac{\partial^p R}{\partial \varepsilon^p}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0) \neq 0. \tag{3.1}$$

Тогда имеет место асимптотическое разложение

$$R(\varepsilon, \lambda) = \lambda \frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0) + \frac{\varepsilon^p}{p!} \frac{\partial^p R}{\partial \varepsilon^p}(0,0) + o(\lambda) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $o(\lambda)$ вмещает в себя нормы ограниченных операторов (условие 2.1).

Этому случаю соответствует следующая диаграмма Ньютона (см. рис. 1).

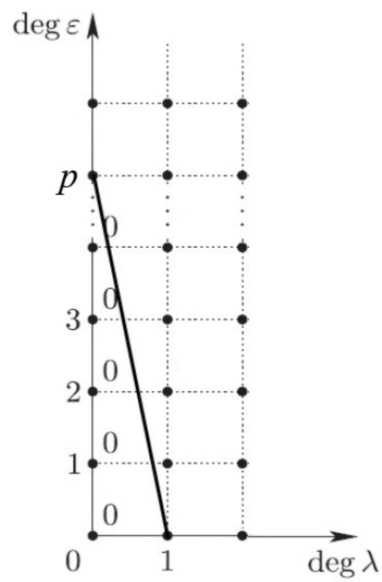

Рис. 1. Диаграмма Ньютона

Применение диаграммы дает решение уравнения (2.7)

$$\lambda = -\frac{\varepsilon^p}{p!} \cdot \frac{\frac{\partial^p R}{\partial \varepsilon^p}(0,0)}{\frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0)}.$$

Подстановка его в (2.1) приводит к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены соотношения* (3.1). *Тогда при выполнении условия*

$$\operatorname{Re} \frac{\frac{\partial^p R}{\partial \varepsilon^p}(0,0)}{\frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0)} > 0 \tag{3.2}$$

в задаче (0.1), (0.2) *возникает явление погранслоя, и функции погранслоя имеют переменную* $\tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon^p}$.

Случай двух видов функций погранслоя. Теперь зададим натуральные числа p_0, p_1, p_2, q_1, q_2 такие, что $p_0 < p_1 < p_2$, $q_1 < q_2$, и выполнено следующее условие.

Условие 3.1.

$$\frac{p_2 - p_1}{q_1} > \frac{p_1 - p_0}{q_2 - q_1}.$$

Пусть выполнены соотношения:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^j R}{\partial \varepsilon^j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p_2 - 1, \quad \frac{\partial^{p_2} R}{\partial \varepsilon^{p_2}} \neq 0, \\
\frac{\partial^{i+j} R}{\partial \lambda^i \varepsilon^j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q_1 - 1, \quad j = 0, 1, \ldots, p_2, \\
\frac{\partial^{q_1+j} R}{\partial \lambda^{q_1} \partial \varepsilon^j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p_2 - 1, \\
\frac{\partial^{i+j} R}{\partial \lambda^i \varepsilon^j} = 0, \quad i = q_1 + 1, \ldots, q_2 - 1, \quad j = 0, 1, \ldots, p_1, \\
\frac{\partial^{q_2+j} R}{\partial \lambda^{q_2} \partial \varepsilon^j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p_0.
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Тогда имеет место асимптотическое разложение

$$R(\varepsilon,\lambda)=\frac{\varepsilon^{p_2}}{p_2!}\frac{\partial^{p_2}R}{\partial\varepsilon^{p_2}}(0,0)+\frac{\lambda^{q_1}\varepsilon^{p_1}}{q_1!p_1!}\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\partial\varepsilon^{p_1}}(0,0)+\frac{\lambda^{q_2}\varepsilon^{p_0}}{q_2!p_0!}\frac{\partial^{q_2+p_0}R}{\partial\lambda^{q_2}\partial\varepsilon^{p_0}}(0,0)+o(\lambda^{q_2}\varepsilon^{p_0}) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Этому случаю соответствует следующая диаграмма Ньютона (см. рис. 2).

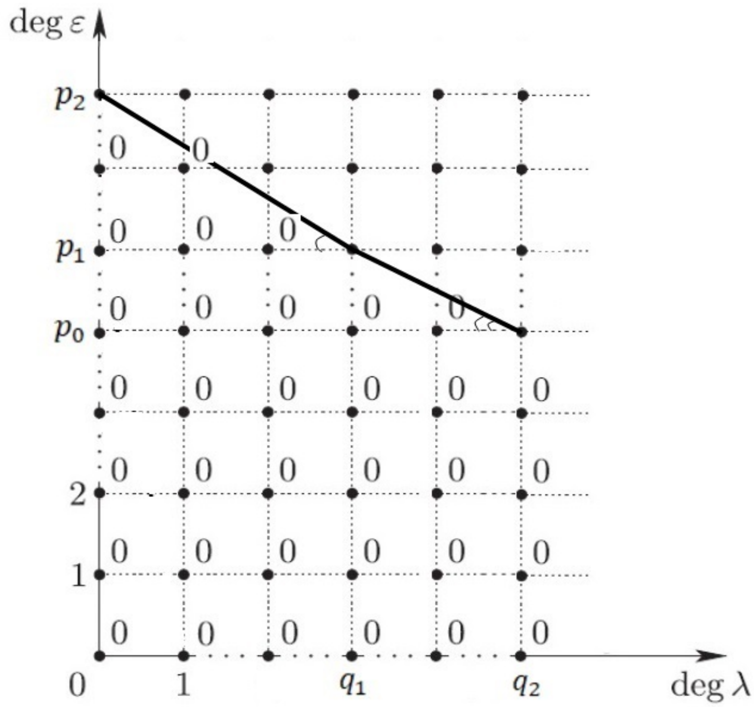

Рис. 2. Диаграмма Ньютона

Применение диаграммы дает решения уравнения (2.7)

$$\lambda_1=-\varepsilon^{\frac{p_2-p_1}{q_1}}\cdot\frac{q_1!p_1!}{p_2!}\cdot\frac{\frac{\partial^{p_2}R}{\partial\varepsilon^{p_2}}(0,0)}{\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\partial\varepsilon^{p_1}}(0,0)},$$

$$\lambda_2=-\varepsilon^{\frac{p_1-p_0}{q_2-q_1}}\cdot\frac{q_2!p_0!}{q_1!p_1!}\cdot\frac{\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\partial\varepsilon^{p_1}}(0,0)}{\frac{\partial^{q_2+p_0}R}{\partial\lambda^{q_2}\partial\varepsilon^{p_0}}(0,0)},$$

отвечающие двум отрезкам ломаной.

Подстановка этих решений в (2.1) приводит к следующему результату.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условие 3.1 и соотношения (3.3). Тогда при выполнении условий*

$$\operatorname{Re}\frac{\frac{\partial^{p_2}R}{\partial\varepsilon^{p_2}}(0,0)}{\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\partial\varepsilon^{p_1}}(0,0)}>0,\quad \operatorname{Re}\frac{\frac{\partial^{q_1+p_1}R}{\partial\lambda^{q_1}\varepsilon^{p_1}}(0,0)}{\frac{\partial^{q_2+p_0}R}{\partial\lambda^{q_2}\partial\varepsilon^{p_0}}(0,0)}>0 \tag{3.4}$$

в задаче (0.1), (0.2) возникает явление погранслоя, и функции погранслоя имеют переменные

$$\tau_1=\frac{t-t_0}{\varepsilon^{\frac{p_2-p_1}{q_1}}},\quad \tau_2=\frac{t-t_0}{\varepsilon^{\frac{p_1-p_0}{q_2-q_1}}}.$$

Неравенства (3.2), (3.4) являются *условиями регулярности вырождения.*

4. Пример исследования явления погранслоя

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dt}+\frac{du_2}{dt}+\frac{du_3}{dt}+\frac{du_4}{dt}=(1+\varepsilon+\varepsilon^2 d_1)u_1(t,\varepsilon)+\varepsilon^2 d_2 u_4(t,\varepsilon),\\
&\frac{du_1}{dt}+\frac{du_2}{dt}+\frac{du_3}{dt}+\frac{du_4}{dt}=(1+\varepsilon+\varepsilon^2)u_2(t,\varepsilon),\\
&\frac{du_1}{dt}+\frac{du_2}{dt}+\frac{du_3}{dt}+\frac{du_4}{dt}=(1+\varepsilon c+\varepsilon^2)u_3(t,\varepsilon),\\
&b_1u_1(t,\varepsilon)+(b_2+\varepsilon+\varepsilon^2)u_4(t,\varepsilon)=0,\\
&u_i(t_0,\varepsilon)=u_i^0(\varepsilon),\quad i=1,2,3,4,
\end{aligned}\tag{4.1}$$

где b_1,b_2,c,d_1,d_2 — заданные вещественные числа, $u_i^0(\varepsilon)$ — голоморфные в окрестности точки $\varepsilon=0$ функции.

Задача (4.1) — это задача вида (0.1), (0.2) с операторами $A,B,C,D:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\b_1&0&0&b_2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&c&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}d_1&0&0&d_2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

искомой вектор-функцией $u(t,\varepsilon)=\big(u_i(t,\varepsilon)\big)\in\mathbb{R}^4$ и начальной вектор-функцией $u^0(\varepsilon)=\big(u_i^0(\varepsilon)\big)\in\mathbb{R}^4$.

Оператор A, очевидно, фредгольмов. Имеем

$$\operatorname{Ker}A=\{v_2e_1+v_3e_2+v_4e_3\},\quad e_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Coim}A=\begin{pmatrix}v_1+v_2+v_3+v_4\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \operatorname{Im}A=\begin{pmatrix}w_1\\w_1\\w_1\\0\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Coker}A=\{(w_2-w_1)\varphi_1+(w_3-w_1)\varphi_2+w_4\varphi_3\},\quad \varphi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \varphi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Для элементов φ_i, $i=1,2,3$, выполнено условие (1.2).

Далее, имеем

$$Q(A)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad A^-=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

И в результате вычислений, использующих предложения 1.1, 1.3 и 1.4, получаем, что

$$R(0,0) = -b_1 + 3b_2, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0) = -b_1 + 2b_2, \quad \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}(0,0) = (-b_1 + 2b_2)c - b_1 + 4b_2 + 3,$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2}(0,0) = (-2b_1 + 4b_2 + 4)c - 4(b_1 d_2 - b_2 d_1) - 4b_1 + 10b_2 + 14.$$

Рассмотрим следующие случаи поведения решения при $\varepsilon \to 0$.

Случай 1. Пусть

$$b_1 \neq 3b_2.$$

Тогда решение допредельной задачи (4.1) равномерно сходится к решению предельной задачи, поскольку диаграмма Ньютона вырождается в точку, расположенную в начале координат.

Случай 2. Теперь пусть

$$b_1 = 3b_2, \quad b_2 \neq 0. \tag{4.2}$$

Имеем

$$\frac{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}(0,0)}{\frac{\partial R}{\partial \lambda}(0,0)} = \frac{-b_2(c-1) + 3}{-b_2} = c - 1 - \frac{3}{b_2}.$$

Тогда в силу теоремы 3.1 явление погранслоя возникает при выполнении условия

$$c - \frac{3}{b_2} > 1,$$

и функции погранслоя имеют переменную $\tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon}$.

Случай 3. Пусть выполнены соотношения (4.2) и

$$c - \frac{3}{b_2} = 1.$$

Тогда в силу теоремы 3.1 явление погранслоя возникает при выполнении условия

$$\frac{b_2}{(2b_1 - 4b_2 - 4)c + 4(b_1 d_2 - b_2 d_1) + 4b_1 - 10b_2 - 14} < 0,$$

и функции погранслоя имеют переменную $\tau = \dfrac{t - t_0}{\varepsilon^2}$.

References

[1] P. L. Christiansen, P. S. Lomdahl, V. Muto, “On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom”, *Nonlinearity*, **4**:2 (1991), 477–501.

[2] Нгуен Хак Диеп, В. Ф. Чистяков, “О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных”, *Вестник ЮурГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*, **6**:1 (2013), 98–111. [Nguyen Hak Diep, V. F. Chistyakov, “On modeling using partial differential-algebraic equations”, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical modelling, programming and computer software*, **6**:1 (2013), 98–111 (In Russian)].

[3] В. И. Усков, “Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:34 (2021), 172–181. [V. I. Uskov, “Study of rigidity of a first-order algebro-differential system with perturbation in the right-hand side”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:34 (2021), 172–181 (In Russian)].

[4] С. П. Зубова, “О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной”, *Доклады Российской Академии наук*, **454**:4 (2014), 383–386; англ. пер:S. P. Zubova, “The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative”, *Doklady Mathematics*, **89** (2014), 72–75.

[5] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973. [A. B. Vasilyeva, V. F. Butuzov, *Asymptotic Expansions of Solutions to Singularly Perturbed Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russian)].

[6] С. М. Никольский, “Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах”, *Известия Академии наук СССР. Серия математическая*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. M. Nikolsky, “Linear equations in normed linear spaces”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **7**:3 (1943), 147–166 (In Russian)].

[7] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай”, *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 393–404; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, “Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case”, *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

[8] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1971. [S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russian)].

[9] Н. Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций*, Либроком, М., 2009. [N. G. Chebotarev, *Theory of Algebraic Functions*, Librokom Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 18.10.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematical Department, Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G.F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 15.05.2023
Reviewed 18.10.2023
Accepted for press 23.11.2023