Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-26-34
УДК 517.988.8+517.929

О применении методологии i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений

Аркадий Владимирович КИМ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

On application of the i-smooth analysis methodology to elaboration of numerical methods for solving functional differential equations

Arkadii V. KIM
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Аннотация. В статье обсуждается ряд аспектов применения i-гладкого анализа в разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). На конкретных примерах демонстрируется принцип разделения конечномерных и бесконечномерных составляющих в структуре численных схем для ФДУ, а также применение различных типов интерполяции предыстории: Лагранжа и Эрмита. Представлен общий подход к построению численных методов типа Рунге–Кутты для нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Получены условия сходимости и установлен порядок сходимости таких методов.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; численные методы; i-гладкий анализ; системы с последействием

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00352_а).

Для цитирования: *Ким А.В.* О применении методологии i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 26–34. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-26-34.

Abstract. The article discusses a number of aspects of the application of i-smooth analysis in the development of numerical methods for solving functional differential equations (FDE). The principle of separating finite- and infinite-dimensional components in the structure of numerical schemes for FDE is demonstrated with concrete examples, as well as the usage of different types of prehistory interpolation, those by Lagrange and Hermite. A general approach to constructing Runge–Kutta-like numerical methods for nonlinear neutral differential equations is presented. Convergence conditions are obtained and the order of convergence of such methods is established.

Keywords: functional differential equations; numerical methods; i-smooth analysis; systems with delays

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00352_a).

For citation: Kim A.V. O primenenii metodologii i-gladkogo analiza k razrabotke chislennykh metodov resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On application of the i-smooth analysis methodology to elaboration of numerical methods for solving functional differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 26–34. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-26-34. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

С самого начала разработки приближенных методов решения функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) математики, естественно, старались перенести на системы с запаздыванием классические численные схемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для этого, аналогично конечномерному случаю, тем или иным способом аппроксимировали соответствующие члены в разложении решения $x(\cdot)$ в ряд Тейлора

$$X(t_k+\Delta)=x(t_k)+\Delta\dot{x}(t_k)+\ldots+\frac{\Delta^n}{n!}x^{(n)}(t_k)+\ldots .$$

Анализ разработанных подходов показывает, что, пытаясь копировать численные методы ОДУ, математики интуитивно использовали (правда, не осознавая этого и, соответственно, строгого не обосновывая) методологию i-гладкого анализа:

a) копирование по конечномерной переменной численных схем ОДУ,

b) «обработка» запаздывания операторами интерполяции.

На таком пути нередко удавалось получить формальные аналоги численных методов ОДУ, однако, их практическая реализация зачастую осложняется требованием разработки трудоемких процедур счета в точках разрывов и другими проблемами. Такая трудоемкость и «искусственность» многих построений связана была с тем, что классический конечномерный анализ не позволяет адекватно учитывать специфику и особенности динамики решений систем с последействием, функциональная природа которых требует применения специальных функциональных методов. Оказалось, i-гладкий анализ включает инфинитезимальные конструкции и методы, эффективно учитывающие («обрабатывающие») в соответствующих построениях и доказательствах конечномерную составляющую решения и функциональное последействие, что позволило построить завершенную теорию численных методов для ФДУ [1–3], полностью аналогичную конечномерной (ОДУ) теории численных методов: в случае исключения запаздывания, теория [1–3] совпадает с теорией численных методов ОДУ.

В [1–3] рассматривались, в основном, уравнения запаздывающего типа. В настоящей работе обсуждаются некоторые аспекты применения i-гладкого анализа в разработке численных методов для ФДУ нейтрального типа. Принципиальное отличие состоит в том, что для таких уравнений необходимо использовать более гладкую, чем для «обычных» систем с последействием, интерполяцию. В целом же, как показывают примеры конкретных численных схем, общая методология применения i-гладкого анализа в численных методах для ФДУ нейтрального типа аналогична [1–3].

Во втором разделе статьи обсуждается ряд общих аспектов применения i-гладкого анализа в теории численных методов ФДУ.

В третьем и четвертом разделах на примерах конкретных уравнений рассматриваются численные схемы, использующие методологию i-гладкого анализа и различные варианты интерполяции: Лагранжа и Эрмита.

В заключении представлен общий подход, основанный на методологии i-гладкого анализа, к построению численных методов типа Рунге–Кутты для нелинейных ФДУ нейтрального типа.

1. i-гладкий анализ и общий подход к разработке численных методов для ФДУ

Для исследования и описания инфинитезимальных свойств операторов сдвигов теории ФДУ была разработана методология i-гладкого анализа [3–5], состоящая в:

1) разделении конечномерных и бесконечномерных (функциональных) составляющих в структуре и свойствах ФДУ,

2) применении инвариантной производной [3–6].

З а м е ч а н и е 1.1. Удобство и «эффективность» класса инвариантных производных состоит в определенной «универсальности», заключающейся в установленной связи инвариантной производной с обобщенной производной теории распределений (обобщенных функций) и обобщенной производной Соболева [3–5].

Первоначально i-гладкий анализ был разработан [4, 5] для исследования задач устойчивости систем с последействием, но оказалось, что методология i-гладкого анализа позволяет разрабатывать и другие разделы теории ФДУ аналогично (с точностью до обозначений) теории ОДУ. Поэтому, по совету А.Д. Мышкиса, автор начал переизлагать различные разделы теории ФДУ в на основе методологии и конструкций i-гладкого анализа; и к началу 90-годов прошлого столетия у автора сложились *принципы разработки численных методов для ФДУ* на основе методологии i-гладкого анализа:

a) по конечномерной составляющей — численная схема ОДУ,

b) применение инвариантной производной для строго обоснования метода (доказательства сходимости и т.д.).

Примерно в это же время (начало 90-х) инженеры поставили перед автором вопрос о возможности разработки методов численного решения систем с последействием и соответствующего эффективного программного обеспечения для ФДУ. Автор был уверен в правильности приведенных выше принципов разработки численных методов для ФДУ и предложил В. Г. Пименову (в то время доценту УрГУ) совместно поработать в этом направлении. В. Г. Пименов занимался дифференциальными играми систем с запаздыванием и преподавал на кафедре вычислительной математики, в силу чего был специалистом как в теории ФДУ, так и в численных методах. К работе были также привлечены аспиранты А. Б. Ложников и О. В. Онегова. Расчеты, проведенные по нескольким несложным численным схемам, построенным без строгого обоснования, показали эффективность и несложность программирования численных алгоритмов, разрабатываемых на основе i-гладкого анализа. Это придало автору уверенность в правильности предложенного подхода и в окончательном успехе разработки численных методов и программного обеспечения на основе методологии i-гладкого анализа. Поэтому автор обратился к Н. Н. Красовскому и А. Ф. Сидорову (в то время директору ИММ УрО РАН) с предложением о создании группы по разработке численных методов и комплекса программ решения ФДУ. После доклада автора на ученом совете института, 1 сентября 1997 года, в ИММ УрО РАН была официально сформирована группа ФДУ (А. В. Ким, В. Г. Пименов, А. Б. Ложников, О. В. Онегова). К этому времени стала уже понятна структура численных схем типа Рунге–Кутты для нелинейных ФДУ, и компьютерное моделирование показало их работоспособность и эффективность. Теперь уже все сотрудники группы были уверены в правильности подхода и успехе. Так как разработанное программное обеспечение работало эффективно, то теперь основной акцент следовало сделать на строгом математическом обосновании разработанных численных алгоритмов. С этим блестяще справился В. Г. Пименов, и соответствующие результаты были опубликованы в монографии [1]; завершенная и полная теория численных методов ФДУ представлена в [2,3].

Так как практически все инженеры и многие научные работники знакомы с пакетом прикладных программ MATLAB, то было принято решение разрабатывать комплекс программ в формате Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). Разработка Time-Delay System Toolbox велась совместно со специалистами Control Information System Laboratory (School of Electrical Engineering, Seoul National University), и в 1998 году была выпущена beta-версия Time-Delay System Toolbox (Исходные программы и руководство пользователя можно скачать с www.dropmefiles.com./33omA).

2. Численный метод с интерполяцией Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения на интервале $[t_0,\theta]$ приближенного решения линейного уравнения нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Lx(t) + Mx(t-\tau) + N\dot{x}(t-\tau), \tag{2.1}$$

с постоянными коэффициентами L, M, N, запаздыванием $\tau > 0$, при заданной начальной функции $\phi(\cdot)$.

Зададим на $[t_0,\theta]$ равномерную сетку $\{t_n\}_{n=0}^{N}$ с шагом $\Delta = \frac{\theta-t_0}{n}$. Через $x_n \approx x(t_n)$ будем обозначать значение приближенного решения в узле t_n.

В работе [7] для приближенного решения уравнения (2.1) используется следующий численный метод s-го порядка

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{s} b_i K_{n,i},$$

$$K_{n,i} = \Delta L(u_n + \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} K_{n,j}) + \Delta(Mu_{n-l+\delta} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} K_{n-l+\delta,j}) + NK_{n-l+\delta,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

в котором a_{ij} и b_j — параметры метода ($i, j = 1, 2, \ldots, s$); $l = \left[\frac{\tau}{\Delta}\right]$ (символом $[\,\cdot\,]$ обозначено наименьшее целое число, которое больше заданного числа или равно ему); $\delta = l - \frac{\tau}{\Delta}$; значения $u_{n-l+\delta}$, $K_{n-l+\delta,j}$, $n = 1, 2, \ldots$ определяются через начальную функцию $\phi(\cdot)$ и интерполяцию Лагранжа

$$L_p(\delta) = \prod_{k=-r,\, k\neq p}^{p} \frac{\delta - k}{p - k}$$

($r, q > 0$ — целые числа и $r \le q \le r+2$) соотношениями

$$u_{n-l-\delta} = \begin{cases} \phi(n-l-\delta) & \text{при } n-l-\delta \le 0, \\ \displaystyle\sum_{p=-r}^{q} L_p(\delta) u_{n-l-\delta} & \text{при } n-l-\delta \ge 0; \end{cases}$$

$$K_{n-l+\delta, j} = \begin{cases} \dot{\phi}(n-l-\delta) & \text{при } n-l+\delta \le 0, \\ \sum\limits_{p=-r}^{q} L_p(\delta) K_{n-l+p, j} & \text{при } n-l+\delta \ge 0. \end{cases}$$

Приведенная выше схема является естественным методом типа Рунге–Кутты с применением интерполяции Лагранжа, см. [8]. Отметим, что, в соответствии с методологией i-гладкого анализа, по конечномерной компоненте данная численная схема является s-этапным методом Рунге–Кутты для ОДУ. В сочетании с интерполяцией Лагранжа это дает соответствующую численную схему для уравнения нейтрального типа.

3. Одинарно диагональный неявный метод типа Рунге–Кутты с интерполяцией Эрмита

Для ОДУ

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t))$$

m-этапный одинарно диагональный неявный метод Рунге–Кутты, задается формулами (в точке t_n)

$$k_1 = g(t_n + c_1 h, x_n + h a_{11} k_1),$$

$$k_2 = g(t_n + c_2 h, x_n + h\, a_{21}\, k_1\, h\, a_{22}\, k_2),$$

$$\vdots$$

$$k_i = g(t_n + c_i h, x + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j),$$

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^{m} b_i\, k_j \ \ (i = 1, ..., m).$$

В работе [9] для приближенного решения задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big), \ \ t > t_0,$$

$$x(t) = \phi(t), \ \ t \le t_0$$

(с постоянным запаздыванием $\tau > 0$ и начальной функцией $\phi(\cdot)$) применялся аналог этого метода в форме

$$k_i = f(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j, y(t_n + c_i h - \tau)),$$

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^{q} b_i k_i,$$

и для вычисления значений $x(t_n + c_i h - \tau)$ в правой части ФДУ использовалась интерполяция Эрмита.

В частности, в приложении к линейному ФДУ

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) + \mu x(t-\tau), \ \ t \ge t_0,$$

с начальным условием

$$\dot{x}(t) = \phi(t), \ \ t \leq t_0,$$

полином Эрмита наименьшей степени, согласованный с x и $\dot{x}$ в точках $t_0, \ldots, t_n$, является полиномом максимально степени $2n+1$, определяемым как

$$p_{2n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n} H_{n,j}(t)x(t_j) + \sum_{j=0}^{m} \overline{H}_{n,j}\dot{x}(t_j),$$

где

$$H_{n,j} = [1 - 2(t - t_j)L'_{n,j}]L^2_{n,j},$$
$$\overline{H}_{n,j}(t) = (t - t_j)L^2_{n,j}(t),$$

и

$$L_j(t) = \prod_{j=r}^{s} \frac{t-l}{j-l} \ \ (j \neq l);$$

в этом случае коэффициенты 3-точечной интерполяции Эрмита равны

$$H_{2.0} = (c) = 0.25(4+3c)c^2(c-1)^2,$$

$$H_{2.1} = (c+1)^2 c(c-1)^2,$$
$$H_{2.2} = 0.25(1+c)^2c^2(c-1)^2,$$
$$\overline{H}_{2.0}(c) = 0.25(1+c)^2c^2(c-1)^2,$$
$$\overline{H}_{2.1}(c) = (1+c)(c-1)^2,$$
$$\overline{H}_{2.2}(c) = 0.25(1+c)^2c^2(c-1)^2.$$

4. Общая схема численных методов типа Рунге–Кутты для ФДУ нейтрального типа

Дифференциальные уравнения нейтрального типа формируют специальный класс ФДУ, в которых правая часть дифференциального уравнения зависит от значений производной в предшествующие моменты времени. В данном разделе представлена общая схема методов типа Рунге–Кутты для решения ФДУ нейтрального типа. С применением методологии i-гладкого анализа обоснование результатов данного раздела проводится аналогично случаю ФДУ запаздывающего типа [1–3].

Задача Коши для уравнения нейтрального типа состоит в решении уравнения

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t+s), \dot{x}(t+s)), \ \ -\tau \leq s < 0, \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \tag{4.2}$$

$$x(t_0 + s) = y^0(s), \ \ -\tau \leq s < 0, \tag{4.3}$$

где $F(f, x, y(\cdot), \dot{y}(\cdot)) : [t_0, \theta] \times R^n \times Q[-\tau, 0) \times Q[-\tau, 0) \to R^n$, $\theta > 0$, $Q[-\tau, 0)$ — множество кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ функций, x^0 — начальная точка, $y^0(\cdot)$ — начальное запаздывание (см., например, [3, 5]).

Предполагаем, что для задачи (4.1)–(4.3) выполняются условия, гарантирующие существование и единственность решения задачи Коши, например [10].

Для простоты будем рассматривать одномерный случай: (4.1) — уравнение нейтрального типа. Отметим, что все результаты с соответствующими изменениями (в частности заменой R на R^n) обобщаются на случай n-мерной системы ФДУ.

Для численного решения уравнения (4.1) зададим на $[t_0, t_0+\theta]$ временну́ю сетку $t_k = t_0 + \Delta k$, $k = 0, 1, \ldots, N$ с равномерным шагом $\Delta = \frac{\theta}{N}$ (N — целое число). Для простоты будем предполагать, что отношение $\frac{\tau}{\Delta} = m$ является натуральным числом. Численный метод основывается на введении дискретной численной модели u_l уравнения (4.1). Будем через $x_l \in R$ обозначать значение точного решения $x(t_l) = x_l$ в точке t_l.

Сделаем несколько пояснений относительно используемых обозначений.

1. Для обозначения числовых последовательностей часто используется индекс n, например, x_n. Для простоты в данном разделе мы рассматриваем одномерное уравнение нейтрального типа, но в общем случае x может быть и n-мерным вектором, поэтому для обозначения последовательностей будем использовать нижний индекс l, например x_l, в то время как n зарезервируем для обозначения размерности системы.

2. Отметим, что дискретная модель обозначается буквой u, а ее значение в момент t_l через u_l, в то время как x_l обозначает значение точного решения в этот же момент.

В соответствии с базовыми принципами методологии i-гладкого анализа [3, 5], общий подход к построению численных методов для уравнений нейтрального типа аналогичен случаю ФДУ запаздывающего типа [1–3], поэтому рассмотрим только ключевые понятия и конструкции.

В численном методе необходимо вычислять значения правой части ФДУ (отображения f) на основе конечного набора значений $\{u_i\}_k = \{u_i : i \geq 0,\ k - N \leq i \leq k\}$, называемого предысторией дискретной модели в момент t_k и определяющего дальнейшую динамику дискретной модели. Для вычисления f необходимо использовать процедуру интерполяции. Для ФДУ запаздывающего типа интерполяция сплайнами является одним из наиболее эффективных способов интерполяции предыстории (см, например, [1–3]). Так как в правые части уравнений нейтрального типа входят производная решения $x(t)$ в предшествующие моменты времени, то при интерполяции следует учитывать и согласованность производных в узлах интерполяции. Для этого удобно использовать интерполяцию Эрмита. В дальнейшем, для определенности, под интерполяцией Эрмита понимаются интерполяционные многочлены Эрмита, построенные методами, описанными в [11]. Отображение $I : \{u_l\} \to u_H(\cdot)$ будем называть оператором интерполяции Эрмита. Так как мы применяем только интерполяцию Эрмита, то букву H (Hermite) в интерполяционном полиноме $u_H(\cdot)$ будем опускать и просто писать $u(\cdot)$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Оператор интерполяции I имеет порядок погрешности p на точном решении $x(t)$, если найдутся константы C_1 и C_2 такие, что для всех $l = 0, 1, \ldots, N$ и $t \in [t_l - \tau, t_l]$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - u(t)\| \leq C_1 \max_{l-m \leq i \leq l} \|u_i - x_i\| + C_2 \Delta^p.$$

О п р е д е л е н и е 4.2. Для любого $a > 0$ оператором экстраполяции E предыстории численной модели называется отображение $E : \{u_i\}_l \to u(\cdot) \in Q[t_i, t_i + a\Delta]$.

Оператор экстраполяции получается, например, продолжением интерполяционного многочлена Эрмита на $[t_i, t_i + a\Delta]$, что и предполагается в дальнейшем.

Определение 4.3. Экстраполяция предыстории модели имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_3 и C_4 такие, что для всех $a > 0$ и всех $i = 0, 1, \ldots, N-1$ и $t \in [t_l, t_l + a\Delta]$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - u(t)\| \leq C_3 \max_{l-m \leq i \leq l} \|u_i - x_i\| + C_4 \Delta^p.$$

Опишем общую схему численных методов типа Рунге–Кутты численного решения функционально-дифференцируемых уравнений нейтрального типа.

Определение 4.4. Явным m-стадийным методом типа Рунге–Кутты (с оператором интерполяции-экстраполяции IE) называется дискретная модель

$$u_0 = x_0, \tag{4.4}$$

$$u_{l+1} = u_l + \Delta \sum_{i=1}^{k} \sigma_i h_i(u_{t_i}), \quad l = 1, \ldots, N-1, \tag{4.5}$$

$$h_1(u_l, u_{t_l}(\cdot)) = f(t_l, u_l, u_{t_l}(\cdot), \dot{u}_{t_l}(\cdot)), \tag{4.6}$$

$$h_i(u_l, u_{t_l}(\cdot)) = f(t_i + a_i\Delta, u_i + \Delta \sum_{j=1}^{i} b_{ij} h_j(u_l, u_{t_l}, u_{t_l + a_i\Delta}(\cdot), \dot{u}_{t_l}(\cdot)). \tag{4.7}$$

Числа a_i, σ_i, b_{ij} называются коэффициентами метода.

Определение 4.5. Невязкой (погрешностью аппроксимации) метода типа Рунге–Кутты называется

$$\psi(t_l) = \frac{x_{l+1} - x_l}{\Delta} - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i h_i(x_l, x_{t_l}(\cdot)).$$

Определение 4.6. Невязка имеет порядок p, если $\psi(t_l) \leq C\Delta^p$ для некоторой константы $C > 0$ при всех $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Теорема 4.1. *Если:*

- *метод* (4.4)–(4.7) *имеет невязку порядка* $p_1 > 0$,
- *интерполяция предыстории модели имеет порядок* $p_2 > 0$,
- *экстраполяция модели имеет порядок* $p_3 > 0$,

то метод сходится, причем порядок сходимости p *метода удовлетворяет условию*

$$p \geq \min\{p_1, p_2, p_3\}.$$

References

[1] A. V. Kim, V. G. Pimenov, *Numerical Methods for Delay Differential Equations. Application of i-Smooth Analysis.* V. 44, Lecture Notes Series, Research Institute of Mathematics. Global Analysis Research Center. Seoul National Univertsity, Seoul, 1999.

[2] А. В. Ким, В. Г. Пименов, *i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений*, Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», М.-Ижевск, 2004, 256 с. [A. V. Kim, V. G. Pimenov, *i-Smooth Analysis and Numerical Methods for Solving Functional Differential Equations*, Research and Publishing Center "Regular and Chaotic Dynamics", Moscow–Izhevsk, 2004 (In Russian), 256 pp.]

[3] A. V. Kim, *i-Smooth Analysis. Theory and Applications*, Wiley Publ., New Jersey, 2015.

[4] А. В. Ким, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием*, Уральский ГУ, Екатеринбург, 1992. [A. V. Kim, *The Direct Lyapunov Method in the Theory of Stability of Systems with Aftereffect*, Ural State University Publ., Yekaterinburg, 1992 (In Russian)].

[5] А. В. Ким, *i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения*, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1996, 234 с. [A. V. Kim, *i-Smooth Analysis and Functional Differential Equations*, IMM UB RAS, Yekaterinburg, 1996 (In Russian), 234 pp.]

[6] А. В. Ким, "О решении нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **23**:9 (1987), 1503–1510. [A. V. Kim, "The solution of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations", *Differ. Uravn.*, **23**:9 (1987), 1504–1510 (In Russian)].

[7] Guang-Da Hu, "Delay-dependent stability of Runge-Kutta methods for linear neutral systems with multiple delays", *Kybernetika*, **54**:4 (2018), 718–735.

[8] A. Bellen, M. Zennaro, *Numerical Methods for Delay Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[9] F. Ismail, R. Ali Al-Khasa, A. San Lwin, M. Suleiman, "Numerical treatment of delay differential equations by Runge-Kutta methods using hermite interpolation", *Matematika*, **18** (2002), 79–90.

[10] V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov, *Stability of Functional Differential Equations*, Academic Publ., London, 1986.

[11] А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Численные методы*, Наука, М., 1989. [A. A. Samarskiy, A. V. Gulin, *Numerical Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1989].

Информация об авторе

Ким Аркадий Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: avkim@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 25.12.2020 г.
Поступила после рецензирования 12.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the author

Arkadii V. Kim, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Scientific Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation. E-mail: avkim@imm.uran.ru

Received 25.12.2020
Reviewed 12.02.2021
Accepted for press 05.03.2021