ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124
УДК 517.983.23, 517.988.33

Линейные и нелинейные интегральные функционалы в пространстве непрерывных вектор-функций

Мануэль Жоаким АЛВЕС[1] **, Елена Владимировна АЛВЕС**[2] **,**
Жоао Себастьян Паулу МУНЕМБЕ[1] **, Юрий Витальевич НЕПОМНЯЩИХ**[1]

[1] «Университет Эдуардо Мондлане»
1100, Мозамбик, г. Мапуто, Главный кампус, П.Я. 257
[2] «Высший институт наук и технологий Мозамбика»
1100, Мозамбик, г. Мапуто, ул. 1.194, No 332, Центральный С.

Аннотация. Статья посвящена исследованию нелинейного интегрального функционала вида $F(u)=\int_\Omega f(s,u(s))\,ds,$ где Ω — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, порождающая функция $f:\Omega\times X\to\mathbb{R}$ (где X — вещественное сепарабельное банахово пространство) удовлетворяет условиям Каратеодори.

Изучаются действие и ограниченность функционала F на пространстве $C(X)$ непрерывных вектор-функций $u:\Omega\to X$ и на пространстве $L_\infty(X)$ существенно ограниченных вектор-функций (с естественными нормами).

Основными результатами статьи являются 1) эквивалентность действия и ограниченности функционала F на пространствах $C(X)$ и $L_\infty(X)$; 2) равенство для этих пространств числовой характеристики функционала в виде супремума нормы значений функционала на замкнутом шаре; 3) выражение этой числовой характеристики в терминах функции f, порождающей функционал.

Для распространения свойств функционала с $C(X)$ на $L_\infty(X)$ существенно используются результаты И. В. Шрагина об операторе Немыцкого и порождающей функции, а также его идеи и методы, основанные на последовательном доказательстве специальных вспомогательных утверждений, которые используют, в частности, теоремы непрерывного и измеримого выбора.

Полученные для функционала F результаты конкретизируются для случая линейного интегрального функционала на пространствах банаховозначных функций (когда $f(s,x)=a(s)[x]$ для некоторой функции $a:\Omega\to X^*$), в частности, установлено, что норма этого функционала на пространствах $C(X)$ и $L_\infty(X)$ равна $\int_\Omega\|a(s)\|_{X^*}ds$.

Ключевые слова: банахово пространство, ограниченный функционал, норма линейного функционала, сопряжённое пространство

Благодарности: Работа выполнена при поддержке SIDA в рамках подпрограммы «Наращивание потенциала в области математики, статистики и ее приложений» (Подпрограмма 1.4.2)

Для цитирования: *Алвес М.Ж., Алвес Е.В., Мунембе Ж.С.П., Непомнящих Ю.В.* Линейные и нелинейные интегральные функционалы в пространстве непрерывных вектор-функций // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 111–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124

Linear and nonlinear integral functionals on the space of continuous vector functions

Manuel J. ALVES[1] **, Elena V. ALVES**[2] **, João S.P. MUNEMBE**[1] **,**
Yury V. NEPOMNYASHCHIKH[1] **,**
[1] Eduardo Mondlane University
Main Campus, PO. Box 257, Maputo, Mozambique
[2] High Institute of Sciences and Technologies Mozambique
Street 1.194 no. 332, Central C, Maputo 1100, Mozambique

Abstract. The present article is devoted to the study of a nonlinear integral functional of the form $F(u) = \int_\Omega f(s, u(s))\, ds$, where Ω is a closed bounded set in $\mathbb{R}^n$, and the generating function $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ (where X is real separable Banach space) satisfies Carathéodory conditions.

We study the action and boundedness of the functional F on the space $C(X)$ of continuous vector functions $u : \Omega \to X$ and on the space $L_\infty(X)$ of essentially bounded vector functions (with natural norms).

The main results of the article are: 1) the equivalence of the action and boundedness of the functional F on the spaces $C(X)$ and $L_\infty(X)$; 2) equivalence, for these spaces, of the numerical characteristic of the functional in the form of the supremum of the norm of the functional values on a closed ball; 3) expressing this numerical characteristic in terms of the function f that generates the functional.

Moreover, to extend the properties of the functional from $C(X)$ to $L_\infty(X)$, we essentially use the results of I. V. Shragin on the study of the Nemytskii operator and its generating function, as well as his ideas and methods based on the consistent proof of special auxiliary statements that use, in particular, continuous and measurable choice theorems.

The results thus obtained for the functional F are specified for the case of a linear integral functional on spaces of Banach-valued functions (when $f(s, x) = a(s)[x]$ for some function $a : \Omega \to X^*$), and in particular, it is established that the norm of this functional on the spaces $C(X)$ and $L_\infty(X)$ is equal to $\int_\Omega \|a(s)\|_{X^*} ds$.

Keywords: Banach space, bounded functional, norm of linear functional, dual space

Acknowledgements: The work is supported by SIDA under the subprogram Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications (Subprogram 1.4.2)

Mathematics Subject Classification: 47B38, 47H.

For citation: Alves M.J., Alves E.V, Munembe J.S.P., Nepomnyashchikh Y.V. Linear and nonlinear integral functionals on the space of continuous vector functions. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 111–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследование свойств нелинейных функционалов на пространствах непрерывных и существенно ограниченных функций является важной задачей функционального анализа, которая находит многочисленные приложения, в частности, в теории оптимального управления. Статья посвящена исследованию нелинейного интегрального функционала вида

$$F(u)=\int_\Omega f(s,u(s))\,ds,$$

где Ω — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, порождающая функция $f:\Omega\times X\to\mathbb{R}$ (где X — вещественное сепарабельное банахово пространство) удовлетворяет условиям Каратеодори. Исследуется действие и ограниченность функционала F на пространствах непрерывных и ограниченных вектор-функций $u:\Omega\to X$.

В статье используются ряд известных понятий из теории меры и функционального анализа (например, банахово пространство, сопряженное пространство, мера Лебега, линейный функционал), с которыми мы будем оперировать без ссылок и которые описаны в классических монографиях (см., например, [1–3]). При использовании менее известных понятий и теорем стараемся давать точные ссылки.

В первом параграфе вводятся основные обозначения, общие для всей статьи.

Во втором параграфе доказывается ряд специальных утверждений для функционала F, связанных с распространением некоторых свойств функционала с пространства непрерывных функции на пространство существенно ограниченных функций. При этом существенно используются результаты и идеи доказательств работ И. В. Шрагина [4–7] (см. также [8–11]), в том числе связанные с применением теорем непрерывного выбора Майкла и измеримого выбора (см., например, [12], теорема Д1 и следствие 1 на с. 328–329, теорема Д5 на с. 332–333), а также некоторые идеи из [13, с. 146–149] и [14].

В третьем параграфе приводятся критерии действия и ограниченности функционала F на пространствах непрерывных и существенно ограниченных функций, а также эквивалентность этих свойств для указанных пространств. Доказательство проводится путем непосредственного применения утверждений предыдущего параграфа.

В четвертом параграфе конкретизируются результаты предыдущего для случая линейного интегрального функционала.

Полученные в статье результаты исследования интегрального функционала F могут быть использованы для исследования линейных и нелинейных интегральных операторов в функциональных пространствах.

1. Основные обозначения

В работе будем использовать следующие основные обозначения:

Ω — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ с классической мерой Лебега μ на σ-алгебре Σ измеримых по Лебегу подмножеств Ω.

χ_E — характеристическая функция множества $E\subset\Omega$ ($\chi_E(s)=1$, если $s\in E$, и $\chi_E(s)=0$, если $s\notin E$).

X — вещественное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Функция $u:\Omega\to X$ называется измеримой, если прообраз любого борелевского множества в X измерим по Лебегу.

Через $L_0(X)$, $L_\infty(X)$, $L_\infty^c(X)$, $C(X)$ будем обозначать множества функций $u : \Omega \to X$, состоящие, соответственно: из всех измеримых функций, измеримых ограниченных функций, измеримых функций, множество значений которых относительно компактно в X, и непрерывных функций. Обратим внимание на цепочку вложений линейных подпространств $C(X) \subset L_\infty^c(X) \subset L_\infty(X) \subset L_0(X)$, где первые три из них являются банаховыми пространствами с sup-нормой: $\|u\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} \|u(t)\|$. Если $D \subset X$ и V любой из символов $L_0(X)$, $L_\infty^c(X)$ или $C(X)$, то $V(D) = \{u \in V(X) \colon u(\Omega) \subset D\}$.

$\mathrm{L}_\infty(X)$ — фактор-пространство пространства $L_\infty(X)$, то есть пространство классов μ-эквивалентных существенно ограниченных функций $u : \Omega \to X$ с нормой $\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega} \|u(t)\|_X$.

2. Некоторые свойства нелинейного интегрального функционала

Утверждения этого параграфа существенно используются для получения критерия действия и ограниченности нелинейного интегрального функционала на пространствах $C(X)$ и $\mathrm{L}_\infty(X)$, но, на наш взгляд, имеют и самостоятельный интерес. Различные приемы доказательств были почерпнуты из работ И. В. Шрагина об исследовании оператора суперпозиции (Немыцкого) в функциональных пространствах и порождающих его функций [4–7] (см. также [8–11]), но при использовании в наших целях имеют особенности, поэтому приводим полные доказательства утверждений. Использованы также некоторые идеи доказательств из [13, с. 146–149] и [14].

Лемма 2.1. *Пусть множество $D \subset X$ выпукло и замкнуто, и пусть $u \in L_0(D)$. Тогда существуют такие компактные множества $A_n \in \Sigma$ и функции $u_n \in C(D)$ (где $n \in \mathbb{N}$), что*

$$\mu(\Omega \setminus A_n) < 1/n \quad \text{и} \quad u_n|_{A_n} = u|_{A_n}.$$

В частности, $u_n \to u$ почти всюду на множестве Ω (и по мере).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем согласно C-свойству Лузина (его формулировка для функций со значениями в банаховом пространстве имеется, например, в [12, с. 40]) такое замкнутое множество $A_n \in \Sigma$, что $\mu(\Omega \setminus A_n) < 1/n$ и функция $u|_{A_n}$ непрерывна. В силу следствия из теоремы Майкла о непрерывном выборе (см., например, [12, с. 329]) существует непрерывное продолжение u_n функции $u|_{A_n}$ с замкнутого подмножества A_n компакта Ω на все Ω с сохранением замкнутой выпуклой оболочки множества значений. По построению, $u_n \in C(D)$ и $u_n|_{A_n} = u|_{A_n}$. □

Пусть функция $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то есть

(C1) $\forall x \in X$ функция $f(\cdot, x)$ измерима;

(C2) $\forall s \in \Omega$ функция $f(s, \cdot)$ непрерывна.

Функционал F, порожденный функцией f, формально определим равенством

$$F(u) = \int_\Omega f(s, u(s))\, ds. \tag{2.1}$$

Если конечный интеграл в (2.1) существует для всех функций $u : \Omega \to X$ из некоторого подмножества $V \subset L_0(X)$, то выражение (2.1) определяет функционал $F : V \to \mathbb{R}$, который, вообще говоря, нелинеен.

З а м е ч а н и е 2.1. В литературе часто вместо условия (C2) рассматривают более слабое условие (C2a) непрерывности $f(s,\cdot)$ при почти всех s. Однако предположение (C2) вместо (C2a) не ограничивает общности. Действительно, если f удовлетворяет условию (C2a), то, переопределив функцию f, положив ее равной нулю на множестве $N_0 \times X$ для некоторого множества $N_0 \subset \Omega$ нулевой меры, получим функцию, удовлетворяющую условию (C2) и порождающую тот же функционал F.

Лемма 2.2. *Для любой измеримой функции $u : \Omega \to X$ функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $\varphi(s) = f(s, u(s))$, является измеримой. Более того, если $u_n \in L_0(X)$ и $u_n \to u$ почти всюду на множестве Ω (по мере), то последовательность функций $\varphi_n(s) = f(s, u_n(s))$ сходится к функции φ почти всюду на Ω (по мере, соответственно).*

Утверждение леммы хорошо известно и вытекает, например, из теорем 2 и 3 работы [6] и теоремы 2.5 работы [8] (см. также [5]).

Лемма 2.3. *Для любого замкнутого множества $D \subset X$ функция $\psi : \Omega \to [0,\infty]$, определяемая равенством $\psi(s) = \sup_{x\in D} |f(s,x)|$, является измеримой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n \colon n = 1,2,\ldots\}$ счетное всюду плотное в D множество. Зафиксируем произвольное $c \in \mathbb{R}$. Множества $E_n = \{s \in \Omega \colon |f(s,x_n)| > c\}$ измеримы по условию (C1). По условию (C2) $[\ \psi(s) > c \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ |f(s,x_n)| > c\ ]$. Поэтому

$$\{s \in \Omega \colon \psi(s) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma.$$

Измеримость функции ψ доказана. □

По лемме 2.3, для любого замкнутого множества $D \subset X$ корректно определена величина

$$I(D) = \int_\Omega \sup_{x\in D} |f(t,x)|\, dx,$$

которая может принимать конечное неотрицательное значение или значение $+\infty$. Обозначение $I(D)$ нам будет удобно использовать в формулировках утверждений этого и следующего параграфов.

Утверждение 2.1. *Для любого замкнутого множества $D \subset X$ имеет место равенство*

$$\sup_{u\in L_0(D)} \int_\Omega |f(s,u(s))|\, ds = I(D). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\psi(s) = \sup_{x\in D} |f(s,x)|$. По леммам 2.1 и 2.2 величины (конечные или бесконечные) в левой и правой частях равенства (2.2) существуют. Очевидно, что

$$\sup_{u\in L_0(D)} \int_\Omega |f(s,u(s))|\, ds \le I(D). \tag{2.3}$$

Через $\mathcal{B}(X)$ обозначим σ-алгебру борелевских множеств в X и через $\Lambda = \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ произведение σ-алгебр Σ и $\mathcal{B}(X)$ (то есть наименьшую σ-алгебру, содержащую все произведения $A \times D$, где $A \in \Sigma$ и $D \in \mathcal{B}(X)$). По теореме 3 работы [6] функция $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ измерима (в смысле $\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $f^{-1}(B) \in \Lambda$).

Рассмотрим множества

$$A = \{s \in \Omega \colon \psi(s) < \infty\}, \quad A_0 = \{s \in \Omega \colon \psi(s) = +\infty\},$$

которые, по лемме 2.3, измеримы. Далее рассмотрим раздельно два случая.

1-й случай. Пусть $\mu A_0 = 0$. Определим множества $W_n \subset \Omega \times X$ $(n = 1, 2, \dots)$ равенством

$$W_n = \{(s, x) \in A \times D \colon |f(s, x)| \geq \psi(s) - 1/n\} \cup (A_0 \times D).$$

Из измеримости функций f и ψ следует $W_n \in \Lambda$. Более того, из условия (C2) вытекает, что $\forall s \in \Omega$ множество $W_n(s) = \{x \in X \colon (s, x) \in W_n\}$ непусто и замкнуто в X. По теореме измеримого выбора [12, с. 332] существует измеримая функция $u_n : \Omega \to D$ такая, что $(s, u_n(s)) \in W_n$ для всех $s \in \Omega$.

По построению, $u_n \in L_0(D)$ и

$$\int_\Omega |f(s, u_n(s))|\, ds \geq \int_\Omega (\psi(s) - 1/n)\, ds = I(D) - \mu\Omega/n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по всем $n \in \mathbb{N}$, получаем неравенство

$$\sup_{u \in L_0(D)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds \geq I(D). \tag{2.4}$$

2-й случай. Пусть $\mu A_0 > 0$. В этом случае, очевидно

$$I(D) = +\infty. \tag{2.5}$$

Определим множества $Z_n \subset \Omega \times X$ $(n = 1, 2, \dots)$ равенством

$$Z_n = \{(s, x) \in A_0 \times D \colon |f(s, x)| \geq n\} \cup (A \times D).$$

В силу измеримости функций f и ψ имеем $Z_n \in \Lambda$, а в силу условия (C2) $\forall s \in \Omega$ множество $Z_n(s) = \{x \in X \colon (s, x) \in Z_n\}$ непусто и замкнуто в X. По теореме измеримого выбора существует измеримая функция $v_n : \Omega \to D$ такая, что $(s, v_n(s)) \in Z_n$ для всех $s \in \Omega$.

По построению, $v_n \in L_0(D)$ и

$$\int_\Omega |f(s, v_n(s))|\, ds \geq n \cdot \mu A_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{u \in L_0(D)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds = +\infty,$$

что вместе с (2.5) доказывает (2.4).

Из (2.3) и (2.4) вытекает (2.2). □

Следующее утверждение в несколько иной формулировке установлено И. В. Шрагиным [4], [7], схема его доказательства заимствована из этих работ.

Утверждение 2.2. *Если множество* $D \subset X$ *замкнуто и выпукло, и* $F : C(D) \to \mathbb{R}$, *то* $F : L^c_\infty(D) \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, то есть для некоторого $u \in L^c_\infty(D)$ значение $F(u)$ либо не определено, либо имеет одно из значений $\pm\infty$. По лемме 2.1, функция $f(\cdot, u(\cdot))$ измерима, поэтому равенство

$$\lambda(E) = \int_E |f(s, u(s)|\, ds, \quad E \in \Sigma,$$

корректно определяет меру $\lambda : \Sigma \to [0, \infty]$. По нашему предположению

$$\lambda(\Omega) = \infty. \tag{2.6}$$

Докажем существование $s^* \in \Omega$ такого, что для любой открытой окрестности U точки s^* имеем $\lambda(U) = \infty$. Предположим противное. Для каждого $s \in \Omega$ выберем открытую окрестность U_s точки s такую, что $\lambda(U_s) < \infty$. Из открытого покрытия $\{U_s \colon s \in \Omega\}$ компакта Ω извлечем конечное подпокрытие $\{U_{t_1}, \ldots, U_{t_k}\}$. По свойству счетной полуаддитивности меры имеем $\lambda(\Omega) \le \sum_{i=1}^k \lambda(U_{t_i}) < \infty$, что противоречит соотношению (2.6).

Обозначим через K замыкание множества $u(\Omega)$. Очевидно, что множество K компактно. Поэтому для любого натурального n существует конечное покрытие $\sigma_n = \{D^k_n \colon k = 1, 2, \ldots, M_n\} \subset X$ множества K замкнутыми шарами D^k_n диаметра, меньшего чем $1/n$.

Замыкание любого множества $E \subset \Omega$ будем обозначать символом $\overline{E}$.

Через V_i обозначим открытый шар с центром в точке s^* радиуса $1/i$. В силу выбора точки s^* и по свойству счетной аддитивности меры $\sum_{i=1}^\infty \lambda(V_i \setminus \overline{V}_{i+1}) = \lambda(V_1) = \infty$. Поэтому найдется такая подпоследовательность $\{i_n\}$, что для множеств $E_n = V_{i_n} \setminus \overline{V}_{i_{n+1}}$ имеет место

$$\lambda(E_n) > M_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем согласно C-свойству Лузина такие компактные множества $E^j_n \subset E_n$, что $\mu(E_n \setminus E^j_n) \to 0$, когда $j \to \infty$, и функции $u|_{E^j_n}$ непрерывны. В силу непрерывности меры λ e (2.7) найдутся такие $j = j(n) \in \mathbb{N}$, что $\lambda(E^{j(n)}_n) > M_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$, из определения покрытий σ_n следует $\cup_{k=1}^{M_n} u^{-1}(D^k_n) \cap E^{j(n)}_n \supset E^{j(n)}_n$. Поэтому в силу полуаддитивности меры λ найдутся $k(n) \in \{1, 2, \ldots, M_n\}$ такие, что

$$\lambda(A_n) > 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

где $A_n = u^{-1}(D^{k(n)}_n) \cap E^{j(n)}_n$.

Покажем, что множество $A = \{s^*\} \cup (\cup_{n=1}^\infty A_n)$ замкнуто. Сначала заметим, что в силу компактности множеств $D^{k(n)}_n$, $E^{j(n)}_n$ и непрерывности функций $u|_{E^{j(n)}_n}$ множества A_n компактны, значит, замкнуты. Далее, имеем

$$\begin{aligned}(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \overline{A} &= \overline{\{s^*\} \cup (\cup_{n=1}^p A_n) \cup \left(\cup_{n=p+1}^\infty A_n\right)} = \{s^*\} \cup (\cup_{n=1}^p A_n) \cup \overline{\left(\cup_{n=p+1}^\infty A_n\right)} \\ &\subset A \cup \overline{\left(\cup_{n=p+1}^\infty A_n\right)} \subset A \cup V_{i_{p+1}} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subset A \cup \left(\cap_{p=1}^\infty V_{i_{p+1}}\right) = A \cup \{s^*\} = A.\end{aligned}$$

Таким образом, замкнутость множества A доказана.

Возьмем некоторые точки $x_n \in u(A_n)$. Поскольку множество K компактно, то, не ограничивая общности, можно считать, что $x_n \to x_0$ для некоторого $x_0 \in K$. Определим функцию $v : A \to K$ равенством

$$v(s) = \begin{cases} u(s), & \text{если} \quad s \in A \setminus \{s^*\} \\ x_0, & \text{если} \quad s = s^* \end{cases} .$$

Докажем, что функция v непрерывна.

Компакты A_n попарно не пересекаются, и для любого натурального n функция $u|_{A_n}$ непрерывна. Поэтому функция v непрерывна в любой точке $s \in A \setminus \{s^*\}$.

Докажем непрерывность функции v в точке s^*. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем натуральное число $m \geq 1/\varepsilon$ такое, что для всех $n > m$ выполняется неравенство

$$\|x_n - x_0\| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Рассмотрим открытую окрестность $V = V_{i_m}$ точки s^* и зафиксируем произвольную точку $s \in (V \cap A) \setminus \{s^*\}$. Ясно, что $s \in A_n$ для некоторого $n \geq m$. Поскольку $v(s), x_n \in D_n^{k(n)}$ и $\operatorname{diam} D_n^{k(n)} < 1/n$, имеем

$$\|v(s) - x_n\| < 1/n \leq 1/m < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) следует

$$\|v(s) - v(s^*)\| = \|v(s) - x_0\| \leq \|v(s) - x_n\| + \|x_n - x_0\| < 2\varepsilon.$$

Непрерывность функции v в точке s^*, значит, и на всем множестве A доказана.

По следствию из теоремы Майкла о непрерывном выборе [12, с. 329] существует $w \in C(D)$, такое что $w|_A = v$. Тогда $w|_{A_n} = u|_{A_n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, и в силу (2.8)

$$\int_\Omega |f(s, w(s))| \, ds \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(s, w(s))| \, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \infty,$$

что противоречит условию $F : C(D) \to \mathbb{R}$. □

Утверждение 2.3. *Если множество $D \subset X$ замкнуто и выпукло, и $F : C(D) \to \mathbb{R}$, то для любого компакта $K \subset D$ множество*

$$M(K) = \{|f(s, u(s))| : u \in L_0(K)\}$$

имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то есть

$$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists \delta > 0) \, (\forall u \in L_0(K)) \ : \ E \in \Sigma, \ \mu E < \delta \Rightarrow \int_E |f(s, u(s))| \, ds < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Идея доказательства аналогична используемой при доказательстве признака Лебега равностепенной непрерывности в [13, с. 146-149]. Предположим, что утверждение неверно. Тогда

$$(\exists \varepsilon_0 > 0) \, (\forall \delta > 0) \, (\exists u_\delta \in L_0(K)) \, (\exists E_\delta \in \Sigma) \ : \ \mu E_\delta < \delta \ \wedge \ \int_{E_\delta} |f(s, u_\delta(s)) \, ds \geq \varepsilon_0. \tag{2.11}$$

Построим рекурсивно последовательности положительных чисел δ_n, множеств $E_n \in \Sigma$ и функций $u_n \in L_\infty(K)$, удовлетворяющие для $n = 1, 2, \dots$ следующим условиям:

1) $\int_{E_n} |f(s, u_n(s))|\, ds \geq \varepsilon_0$;
2) $\mu E_n < \delta_{n-1}/2$ (по определению, $\delta_0 = 1$);
3) $\mu E < \delta_n \Rightarrow \int_E |f(s, u_n(s))|\, ds < \varepsilon_0/2$.

В силу (2.11) существуют $E_1 \in \Sigma$ е $u_1 \in L_0(K)$, удовлетворяющие условиям 1) и 2) для $n = 1$. По утверждению 2.1, $\int_E |f(s, u_1(s))|\, ds < \infty$, тогда по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\delta_1 > 0$, так что выполнено условие 3) для $n = 1$.

Предположим, что существуют δ_n, E_n е u_n, удовлетворяющие условиям 1), 2), 3) для $n = 1, 2, \ldots, k-1$. В силу (2.11) найдутся $E_k \in \Sigma$ е $u_k \in L_0(K)$, удовлетворяющие условиям 1) и 2) для $n = k$. По утверждению 2.1, $\int_E |f(s, u_k(s))|\, ds < \infty$, тогда по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\delta_k > 0$, так что выполнено условие 3) для $n = k$.

По принципу математической индукции, последовательности δ_n, E_n е u_n, удовлетворяющие условиям 1), 2), 3) для всех натуральных n, существуют. Таким образом, эти последовательности будем считать построенными.

Введем в рассмотрение множества

$$G_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_n, \quad A_n = E_n \setminus G_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что множества A_n попарно не пересекаются. Более того, $\delta_n < \delta_{n-1}/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так что по условию 2)

$$\mu G_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu E_n < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\delta_k}{2} < \delta_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда из условий 1), 3) и полуаддитивности интеграла Лебега следует

$$\int_{A_n} |f(s, u_n(s))|\, ds \geq \int_{A_n} |f(s, u_n(s))|\, ds - \int_{G_n} |f(s, u_n(s))|\, ds \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{2.12}$$

Определим функцию $v : \Omega \to X$ равенством $v = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} u_n$. Ясно, что $v(\Omega) \subset K$, так что $v \in L^c_\infty(D)$, е в силу (2.12)

$$\int_\Omega |f(s, v(s))|\, ds \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(s, v(s))|\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(s, u_n(s))|\, ds \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} = \infty.$$

Итак, функционал F не действует из $L^c_\infty(D)$ в $\mathbb{R}$, что противоречит утверждению 2.2. □

Следствие 2.1. *Если множество $K \subset X$ выпукло и компактно, и $F : C(K) \to \mathbb{R}$, то*

$$\sup_{u \in L_0(K)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds < \infty.$$

Утверждение 2.4. *Если множество $D \subset X$ замкнуто и выпукло, и $F : C(D) \to \mathbb{R}$, то*

$$\sup_{u \in C(D)} |F(u)| = \sup_{u \in L_0(D)} |F(u)| = I(D).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство $\sup_{u\in C(D)}|F(u)| \le \sup_{u\in L_0(D)}|F(u)| \le I(D)$ очевидно. Докажем обратное неравенство.

Зафиксируем произвольные $u \in C(D)$ и $\varepsilon > 0$. Положим $K = \overline{\mathrm{co}}(u(\Omega) \cup (-u)(\Omega))$. Очевидно $K \subset D$, и по теореме Мазура множество K компактно. Найдем согласно утверждению 2.3 такое $\delta > 0$, что

$$E \in \Sigma,\ \mu E < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{z\in L_0(K)} \int_E |f(s, z(s)|\, ds < \varepsilon. \tag{2.13}$$

Определим множества E_+, E_- и функцию $u_1 : \Omega \to X$ равенствами

$$E_+ = \{s \in \Omega\colon f(s, u(s)) \ge 0\}, \quad E_- = \{s \in \Omega\colon f(s, u(s)) < 0\}, \quad u_1 = \chi_{E_+}u - \chi_{E_-}u.$$

Очевидно, что $u_1(\Omega) \subset K$. По лемме 2.1, существует компакт $A \subset \Omega$ и функция $u_2 \in C(K)$, такие что $\mu(\Omega \setminus A) < \delta$ и $u_1|_A = u_2|_A$.

Согласно построению и (2.13)

$$\int_\Omega |f(s, u(s)|\, ds = F(u_1) = F(u_2) + \int_{\Omega\setminus A} f(s, u_1(s))\, ds - \int_{\Omega\setminus A} f(s, u_2(s))\, ds \le F(u_2) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $u \in C(D)$ и $\varepsilon > 0$ из этого неравенства вытекает

$$\sup_{u\in C(D)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds \le \sup_{u\in C(D)} |F(u)|. \tag{2.14}$$

Пусть теперь $v \in L_0(D)$ произвольно. Согласно лемме 2.1, существует последовательность функций $v_n \in C(D)$, сходящаяся по мере к v. По лемме 2.2, последовательность неотрицательных функций $w_n(s) = |f(s, v_n(s))|$ сходится по мере к функции $w(s) = |f(s, v(s))|$. По теореме Фату

$$\int_\Omega |f(s, v(s))|\, ds \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega w_n(s)\, ds \le \sup_{u\in C(D)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds. \tag{2.15}$$

Из (2.14), (2.15) и утверждения 2.1 следует

$$I(D) = \sup_{c\in L_0(D)} \int_\Omega |f(s, v(s))| \le \sup_{u\in C(D)} |F(u)|.$$

Утверждение доказано. □

3. Критерий действия и ограниченности нелинейного интегрального функционала на пространстве непрерывных функций

Как и в предыдущем параграфе, объектом нашего исследования является функционал

$$F(u) = \int_\Omega f(s, u(s))\, ds,$$

порожденный функцией $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям Каратеодори (C1) и (C2). Для замкнутых множеств $D \subset X$ будем использовать обозначение

$$I(D) = \int_D \sup_{x\in D} |f(t, x)|\, dx.$$

Также введем обозначение для замкнутых шаров $B_r = \{x \in X\colon \|x\| \le r\}$ $(r > 0)$.

Теорема 3.1. *Для любого выпуклого компакта $K \subset X$ имеют место следующие утверждения:*

1) $[\, F : C(K) \to \mathbb{R} \,] \Leftrightarrow [\, F : L_0(K) \to \mathbb{R} \,] \Leftrightarrow [\, I(K) < \infty \,]$;

2) Если $F : C(K) \to \mathbb{R}$, *то* $\sup\limits_{u\in C(K)} |F(u)| = \sup\limits_{u\in L_0(K)} |F(u)| = I(K) < \infty$.

Доказательство. Вытекает непосредственно из следствия 2.1 и утверждения 2.4. □

Теорема 3.2. *Следующие условия* a), b) *и* c) *эквивалентны между собой:*

a) $F : C(X) \to \mathbb{R}$ *и ограничен;*

b) $F : \mathrm{L}_\infty(X) \to \mathbb{R}$ *и ограничен;*

c) $\forall r > 0$ *имеет место* $I(B_r) < \infty$.

Более того, если $F : C(X) \to \mathbb{R}$ *и ограничен, то для любого* $r > 0$

$$\sup_{u\in C(X),\, \|u\|_\infty \le r} |F(u)| = \sup_{u\in \mathrm{L}_\infty(X),\, \|u\|_\infty\le r} |F(u)| = I(B_r) < \infty. \tag{3.1}$$

Доказательство. Свойство c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) вытекает из очевидного неравенства

$$\sup_{u\in C(X),\, \|u\|_\infty \le r} |F(u)| \le \sup_{u\in \mathrm{L}_\infty(X),\, \|u\|_\infty\le r} |F(u)| \le I(B_r), \quad r > 0.$$

Пусть выполнено условие a). Из утверждения 2.4, примененного к шарам $D = B_r$, вытекает соотношение (3.1), а из него следует справедливость условия c). □

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 3.1. *Пусть X конечномерно и функционал F действует из $C(X)$ в $\mathbb{R}$. Тогда этот функционал ограничен, более того, $F : \mathrm{L}_\infty(X) \to \mathbb{R}$, ограничен, и для любого $r > 0$ имеет место соотношение* (3.1).

Теоремы 3.1 и 3.2 дополняет следующая теорема.

Теорема 3.3. *Если $F : C(X) \to \mathbb{R}$ и ограничен, то для любой ограниченной последовательности $\{u_n\} \subset L_\infty(X)$, сходящейся по мере к некоторому $u \in L_\infty(X)$, имеет место $F(u_n) \to F(u)$.*

Доказательство. Пусть $u, u_n \in L_\infty(X)$ удовлетворяют условию теоремы. Выберем $r > 0$ такое, что $u_n(\Omega) \subset B_r$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Определим функции $v, v_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равенствами $v(s) = f(s, u_n(s))$, $v_n(s) = f(s, u_n(s))$.

По лемме 2.2, последовательность измеримых функций v_n сходится по мере к функции v. Более того,

$$|v_n(s)| \le \psi(s), \quad s \in \Omega, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi(s) = \sup_{x\in B_r} |f(s, x)|$ есть интегрируемая функция, поскольку в силу теоремы 3.2 $\int_\Omega \psi(s)\, ds = I(B_r) < \infty$.

По теореме Лебега, $F(u_n) \to F(u)$. □

Из теоремы 3.3 и леммы 2.1 непосредственно вытекает следующий результат.

Следствие 3.2. *Множество $F(C(X))$ всюду плотно в $F(\mathrm{L}_\infty(X))$.*

4. Линейный интегральный функционал в пространстве непрерывных функций

В этом параграфе конкретизируем результаты предыдущего на случай линейного интегрального функционала. Приводящаяся ниже теорема обобщает утверждение из [2, с. 178–181] об ограниченности и выражении для нормы линейного интегрального функционала на пространстве $C(\mathbb{R})$.

Если Y — некоторое банахово пространство, то значение линейного функционала $g : Y \to \mathbb{R}$ в точке $y \in Y$ будем обозначать через $g[y]$. Сопряженное к Y банахово пространство (пространство линейных ограниченных функционалов $g : Y \to \mathbb{R}$ с естественной нормой) будем обозначать через Y^*.

Пусть $a : \Omega \to X^*$. Функционал H формально определим равенством

$$H[u] = \int_\Omega a(s)[u(s)]\, ds. \tag{4.1}$$

Если конечный интеграл в (4.1) существует для всех функций $u : \Omega \to X$ из некоторого линейного подпространства V пространства $L_0(X)$, то выражение (4.1) определяет линейный функционал $H : V \to \mathbb{R}$.

Функция $a : \Omega \to X^*$ называется $*$-слабо измеримой [3, с. 41], если при любом $x \in X$ вещественная функция $a(s)[x]$ измерима.

Ясно, что линейный функционал H есть частный случай функционала F вида (2.1) с порождающей функцией $f(s, x) = a(s)[x]$, причем если функция $a(\cdot)$ $*$-слабо измерима, то функция f удовлетворяет условиям (C1) и (C2).

Теорема 4.1. *Следующие условия* a), b) *и* c) *эквивалентны между собой:*

a) $H \in (C(X))^*$, *то есть функционал* H *действует из* $C(X)$ *в* $\mathbb{R}$ *и ограничен;*

b) $H \in (\mathrm{L}_\infty(X))^*$ *;*

c) *Функция* $a(\cdot)$ $*$*-слабо измерима и* $\|a\|_1 \overset{\text{def.}}{=} \int_\Omega \|a(s)\|_{X^*}\, ds < \infty$.

При выполнении любого из этих условий

$$\|H\|_{(C(X))^*} = \|H\|_{(\mathrm{L}_\infty(X))^*} = \|a\|_1. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 3.2, с учетом следующих фактов:

1) Если $H : C(X) \to \mathbb{R}$, то функция $a(\cdot)$ $*$-слабо измерима;

2) $\|a(s)\|_{X^*} = \sup_{x \in B_1} |a(s)[x]|$;

3) $\|H\|_{V^*} = \sup_{u \in V,\, \|u\|_\infty \le 1} |H[u]|$, где $V = C(X)$ или $V = \mathrm{L}_\infty(X)$. □

З а м е ч а н и е 4.1. Если пространство X^* сепарабельно (это справедливо, в частности, если сепарабельное банахово пространство X рефлексивно), то условие c) теоремы 4.1 эквивалентно следующему условию:

c)* функция $a : \Omega \to X^*$ интегрируема по Бохнеру [3, с. 44–45].

Действительно, если X^* сепарабельно, то по следствию 4 из [3, с. 42], $*$-слабая измеримость функции a эквивалентна ее измеримости.

Следствие 4.1. *Пусть* X *конечномерно, и функционал* H *действует из* $C(X)$ *в* $\mathbb{R}$. *Тогда* $H \in (C(X))^*$, $H \in (\mathrm{L}_\infty(X))^*$ *и имеет место равенство* (4.2).

Следствие 4.2. *Если* $H \in (C(X))^*$, *то для любой ограниченной последовательности* $\{u_n\} \subset L_\infty(X)$, *сходящейся по мере к некоторому* $u \in L_\infty(X)$, *имеет место сходимость* $H[u_n] \to H[u]$.

Следствие 4.3. *Если* $H \in (C(X))^*$, *то множество* $H(C(X))$ *является всюду плотным в* $H(\mathrm{L}_\infty(X))$.

References

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. V. I, II, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[2] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, 3-е изд., Наука, М., 1984; англ. пер.:L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press Ltd. & Nauka Publ., Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, 1982.

[3] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys. V. 15, AMS, Providence, 1977.

[4] И. В. Шрагин, "Оператор Немыцкого из C в L^M", *Ученые записки Моск. обл. педаг. ин-та*, **77**:5 (1969), 161–178. [I. V. Shragin, "The Nemytskii operator from C to L^M", *Scientific notes of the Moscow Regional Pedagogical Institute*, **77**:5 (1969), 161–178 (In Russian)].

[5] И. В. Шрагин, "Условия измеримости суперпозиций", *Доклады Академии наук СССР*, **197**:5 (1971), 295–298; англ. пер.:I. V. Shragin, "Conditions for measurability of superpositions", *Soviet Mathematics, Doklady*, **12**:2 (1971), 465–470.

[6] И. В. Шрагин, "Суперпозиционная измеримость", *Изв. вузов. Матем.*, 1975, №1, 82–92. [I. V. Shragin, "Superposition measurability", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1975, №1, 82–92 (In Russian)].

[7] И. В. Шрагин, "Об одном применении теорем Лузина, Титце-Урысона и теоремы измеримого выбора", *Краевые задачи*, Межвузовский сборник научных трудов, Пермский политехнический институт, Пермь, 1979, 171–175. [I. V. Shragin, "On one application of the theorems of Luzin, Tietze-Urysohn and the measurable choice theorem", *Boundary Value Problems*, Interuniversity Collection of Scientific Papers, Perm Polytechnic Institute, Perm, 1979, 171–175 (In Russian)].

[8] И. В. Шрагин, Ю. В. Непомнящих, "D-условия Каратеодори и их связь с D-непрерывностью оператора Немыцкого", *Изв. вузов. Матем.*, 1997, №6, 70–82; англ. пер.:I. V. Shragin, Y. V. Nepomnyashchikh, "The Carathéodory D-conditions and their connection with the D-continuity of the Nemytskij operator", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **41**:6 (1997), 66–78.

[9] A. V. Ponosov, Y. V. Nepomnyashchikh, "The necessity of the Carathéodory conditions for the lower semicontinuity in measure of the multivalued Nemytskii operator", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **30**:2 (1997), 727–734.

[10] И. В. Шрагин, "Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори", *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, "Superposition measurability under generalized Carathéodory conditions", *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[11] И. Д. Серова, "Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:135 (2021), 305–314. [I. D. Serova, "Superposition measurability of a multivalued function under generalized Carathéodory conditions", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 305–314 (In Russian)].

[12] В. Л. Левин, *Выпуклый анализ в пространнствах измеримых функций и его применение в математике и экономике*, Наука, М., 1985. [V. L. Levin, *Convex Analysis in Spaces of Measurable Functions and Its Application in Mathematics and Economics*, Nauka Publ., Moscow, 1985 (In Russian)].

[13] И. П. Натансон, *Теория функци вещественной переменной*, 3-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер.:I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*. V. I, Dover Publ., Mineola, New York, 2016.

[14] Ю. В. Непомнящих, *Свойства оператора Урысона в пространствах равномерно непрерывных и почти периодических функций*, Деп. в ВИНИТИ 15.09.92, № 2787–В92, Перм. ун-т, Пермь, 1992. [Y. V. Nepomnyashchikh, *Properties of the Uryson Operator in Spaces of Uniformly Continuous and Almost Periodic Functions*, Dep. VINITI, no. 2787–B92, PSU, Perm, 1992 (In Russian)].

Информация об авторах

Алвес Мануэль Жоаким, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Мозамбик. E-mail: mjalves.moz@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3713-155X

Алвес Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент школы экономики и делового администрирования. Высший институт наук и технологий Мозамбика, г. Мапуто, Мозамбик. E-mail: ealves@isctem.ac.mz
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-1452-2553

Мунембе Жоао Себастьян Паулу, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Мозамбик. E-mail: jmunembe3@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0380-6734

Непомнящих Юрий Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Мозамбик.
E-mail: yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-1374-4283

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Непомнящих Юрий Витальевич
E-mail: yuvn2@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.04.2023 г.
Поступила после рецензирования 02.06.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

Information about the authors

Manuel J. Alves, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the Mathematics and Informatics Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: mjalves.moz@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3713-155X

Elena V. Alves, PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor of the School of Economy and Business Administration. High Institute of Sciences and Technologies Mozambique, Maputo, Mozambique. E-mail: ealves@isctem.ac.mz
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-1452-2553

João S. P. Munembe, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the Mathematics and Informatics Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: jmunembe3@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0380-6734

Yury V. Nepomnyashchikh, PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics and Informatics Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-1374-4283

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Yury V. Nepomnyashchikh
E-mail: yuvn2@yandex.ru

Received 04.04.2023
Reviewed 02.06.2023
Accepted for press 09.06.2023