© Ченцов А.Г., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244

УДК 517.977, 519.837.3

Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения-уклонения

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Relaxation of the game problem of guidance connected with alternative in guidance-evasion differential game

Aleksandr G. CHENTSOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics

of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin

19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается дифференциальная игра (ДИ) сближения-уклонения на конечном промежутке времени, в которой в качестве параметров используются целевое множество (ЦМ) и множество, определяющее фазовые ограничения (ФО). Игрок I, заинтересованный в осуществлении сближения с ЦМ при соблюдении ФО, использует многозначные квазистратегии (неупреждающие стратегии), а игрок II, имеющий противоположную цель, — стратегии с неупреждающим выбором моментов коррекции и конечным числом таких моментов. Постановка на содержательном уровне соответствует теореме об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина. Для позиций, не принадлежащих множеству позиционного поглощения, представляет интерес определение наименьшего размера окрестностей множеств-параметров, при которых игрок I гарантирует сближение при ослабленных вышеупомянутым способом условиях задачи. В работе эта схема дополняется элементами приоритетности в вопросах достижения ЦМ и соблюдения ФО, что достигается введением специального параметра, определяющего соотношение размеров соответствующих окрестностей. В этих условиях функция оптимального размера окрестности ЦМ, определенная на пространстве позиций, реализуется посредством процедуры на основе метода программных итераций, применяемого в двух вариантах. Упомянутая функция является при этом неподвижной точкой одного из используемых «программных» операторов. Указан специальный тип функционалов качества, для которого значения вышеупомянутой функции позиции совпадают с ценой игры на минимакс-максимин.

Ключевые слова: дифференциальная игра; квазистратегия; метод программных итераций

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00410_a).

Для цитирования: Ченцов А.Г. Релаксации игровой задачи сближения, связанные с альтернативой в дифференциальной игре сближения-уклонения // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 130. С. 196–244. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244.

Abstract. Differential game (DG) of guidance-evasion for a finite time interval is considered; as parameters, the target set (TS) and the set defining phase constraints (PC) are used. Player I interested in realization of guidance with TS under validity PC uses set-valued quasistrategies (nonanticipating strategies) and Player II having opposite target uses strategies with nonanticipating choice of correction instants and finite numbers of such instants. On informative level, the setting corresponds to alternative theorem of N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin. For position not belonging to solvability set of Player I, determination of the least size of neighborhoods for set-parameters under that Player I guarantees guidance (under weakened conditions) is interested. In article, this scheme is supplemented by priority elements in questions of TS attainment and PC validity; this is realized by special parameter defining relation for sizes of corresponding neighborhoods. Under these conditions, a function of the least size of TS neighborhood is defined by procedure used program iteration method for two variants. The above-mentioned function is fixed point for one of two used “program” operators. Special type of the quality functional for which values of the above-mentioned function coincide with values of the minimax-maximin games is established.

Keywords: differential game; quasistrategy; program iteration method

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00410_a).

For citation: Chentsov A.G. Relaksatsii igrovoy zadachi sblizeniya, svyazannyye s al'ternativoy v differentsial'noy igre sblizeniya-ukloneniya [Relaxation of the game problem of guidance connected with alternative in guidance-evasion differential game]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 130, pp. 196–244. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-130-196-244. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматриваются задачи конфликтного управления нелинейной системой на конечном промежутке времени. Многочисленные содержательные примеры таких задач и методы их решения рассмотрены в монографии [1]. В настоящей статье исследуются вопросы, связанные с вариантами дифференциальной игры (ДИ) сближения-уклонения, полученными ослаблением условий фиксированной ДИ такого типа. Само упомянутое ослабление достигается заменой фиксированных множеств — параметров игры — соответствующими окрестностями. При этом размеры этих окрестностей могут быть различными, что отражает степень приоритетности в вопросах достижения целевого множества (ЦМ) и соблюдения фазовых ограничений (ФО). Таким образом, реализуются естественные релаксации исходной ДИ, решение которой определяется теоремой об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [2, 3]).

Для решения различных типов ДИ широко использовались программные конструкции (см. [3, 4]), оказывающиеся наиболее эффективными в т.н. регулярных [3, 4] ДИ. В связи с теоремой об альтернативе отметим принципиальный результат А. В. Кряжковского (см. [5], где было введено условие обобщенной единственности программных движений). С использованием упомянутой теоремы было установлено существование

седловой точки в различных классах ДИ; см. [3] (имеются в виду седловые точки в различных классах позиционных стратегий).

В исследованиях А. И. Субботина [7–9] и его учеников были получены глубокие результаты, связанные с построением обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби, которые, в частности, позволили установить целый ряд важных положений, касающихся функции цены ДИ. Эти результаты определили новое направление в современной теории управления и теории дифференциальных уравнений.

Одним из методов решения ДИ является метод программных итераций (МПИ), который представляет собой вариант применения программных конструкций для решения ДИ без предположения о их регулярности; см. [10–15]. Известно несколько вариантов МПИ; с точки зрения предназначения можно выделить процедуры (основанные на МПИ), реализующие множество позиционного поглощения в ДИ сближения-уклонения (максимальный стабильный мост Н. Н. Красовского), функцию цены (как правило, в ДИ с фиксированным моментом окончания), многозначные квазистратегии, разрешающие соответствующую игровую задачу. Конструкции на основе МПИ также использовались при исследовании обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби [16]. В настоящей работе построения на основе МПИ занимают важное место. Речь идет о следующей содержательной задаче, связанной с ДИ сближения-уклонения.

В ситуации, когда для заданных (основных) ЦМ и множества, определяющего ФО задачи сближения, позиция игры не содержится в множестве позиционного поглощения (по теореме об альтернативе игрок II гарантирует решение задачи уклонения), для игрока I может представлять интерес определение таких окрестностей вышеупомянутых двух множеств-параметров, для которых этот игрок может гарантировать решение задачи сближения с ослабленными, посредством упомянутых окрестностей, условиями (ЦМ заменяется окрестностью и множество — источник ФО — также заменяется окрестностью). Для игрока I естественным является стремление к минимизации размера упомянутых окрестностей при сохранении условий гарантированной разрешимости. Возможно также использование разных размеров из соображений приоритетности в вопросах наведения на ЦМ и соблюдения ФО. Последнее обстоятельство учитывается в построениях работы посредством введения специального параметра приоритетности в виде положительного множителя.

С использованием процедуры МПИ на пространстве множеств, точками которых являются позиции игры, для каждой такой позиции определяется наименьший размер окрестности, при котором игрок I с учетом соображений, связанных с приоритетностью, гарантирует решение релаксированной задачи сближения. Тем самым определяется функция позиции, которая, как показано ниже, является функцией цены при некотором естественном выборе типа критериев качества. Следует отметить, что данная процедура МПИ позволяет также ввести последовательность функций позиции, монотонно сходящуюся к упомянутой функции цены. Оказалось, однако, что данную последовательность можно реализовать и непосредственно, применяя уже другую версию МПИ, реализуемую на пространстве функций. Оператор, реализующий соответствующую (сходящуюся) последовательность функций позиции, на идейном уровне соответствует используемому в [13]. Упомянутая (предельная) функция цены оказывается при этом его неподвижной точкой, причем обладающей экстремальностью в порядко-

вом смысле.

Отметим, что упомянутая общая постановка и метод исследования являются логическим продолжением конструкций [17, 18], в которых, однако, не использовались элементы приоритетности в вопросах достижения ЦМ и соблюдения ФО. Кроме того, в настоящем исследовании указывается, что «предельная» функция позиции является функцией цены игры, а не только функцией гарантированного результата. Все же наиболее существенным отличием настоящего исследования от [17, 18] представляется построение релаксаций игровой задачи сближения с учетом соображений приоритетности. Так, например, мы можем рассматривать режим релаксаций, когда предъявляются достаточно «свободные» требования к выбору размера окрестности ЦМ и «жесткие» — к выбору аналогичного размера для множества, определяющего ФО; тем самым создается режим несимметричных релаксаций.

1. Общие понятия и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связи и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то $\{x; y\}$ есть def множество, содержащее x , y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z . Если x и y — объекты, то $(x, y) \triangleq \{\{x\}; \{x; y\}\}$ [21, с. 67] есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом x и вторым элементом y . Вообще, для каждой УП h через $\text{pr}_1(h)$ и $\text{pr}_2(h)$ обозначаем первый и второй элементы этой УП соответственно; они однозначно определяются условием $h = (\text{pr}_1(h), \text{pr}_2(h))$.

Каждому множеству X сопоставляем семейство $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств (п/м) X . Тогда $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ есть семейство всех непустых п/м X . Каждому непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

(этого семейства) на множество B , получая непустое семейство п/м B . Если же $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})) \quad (1.1)$$

есть семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Для всяких двух непустых множеств A и B через B^A обозначаем [21, с. 87] множество всех отображений, действующих из A в B ; значения таких отображений и прообразы п/м B обозначаются традиционно. Если же $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $g^1(C) \triangleq \{g(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ множества C при действии g , при $C \neq \emptyset$ полагаем также, что

$$(g | C) \triangleq (g(x))_{x \in C} \in B^C.$$

В качестве $\mathcal{M}$ в (1.1) может, в частности, использоваться топология или семейство (всех) замкнутых множеств в топологическом пространстве (ТП). В дальнейшем, $\mathbb{R}$

— вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$. При $m \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\overline{1, m} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq m\}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами, для всякого множества (в частности, семейства) H вместо $H^{\overline{1, m}}$ используем более традиционное H^m для обозначения множества всех кортежей

$$(h_i)_{i \in \overline{1, m}} : \overline{1, m} \rightarrow H$$

(т. е. отображений из $\overline{1, m}$ в H). При $m \in \mathbb{N}_0$ полагаем $\overline{m, \infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq k\}$. Заметим, что в виде $H^{\mathbb{N}}$ реализуется множество всех последовательностей в множестве H .

Если $\mathcal{S}$ — семейство, $(S_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{S}$ — множество, то, как обычно,

$$((S_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{S}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((S_{j+1} \subset S_j \ \forall j \in \mathbb{N}) \& (\mathbb{S} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i)); \quad (1.2)$$

здесь и ниже используется индексная запись функций (см. семейство с индексом в [22, с. 11]). Многочленные отображения (мультифункции) из множества A в множество B рассматриваем ниже и (соответственно обозначаем) как «обычные» отображения из $\mathcal{P}(B)^A$; значениями таких отображений являются п/м B .

Мы полагаем, что $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\} = [0, \infty[$. Если $\mathcal{S}$ — непустое множество, то $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}]$ есть множество всех функций из $\mathcal{S}$ в $\mathbb{R}_+$, т. е. $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}] \triangleq (\mathbb{R}_+)^{\mathcal{S}}$. В качестве $\mathcal{S}$ может использоваться семейство; в этом случае мы получаем в виде элементов $\mathcal{R}_+[\mathcal{S}]$ неотрицательные функции множеств.

Элементы теории меры. Если $\mathbf{S}$ — множество, то через $(\sigma - \text{alg})[\mathbf{S}]$ обозначаем семейство всех σ -алгебр п/м $\mathbf{S}$; если же при этом $\mathcal{S} \in (\sigma - \text{alg})[\mathbf{S}]$, то пару $(\mathbf{S}, \mathcal{S})$ называем (стандартным) измеримым пространством (ИП). При $\mathfrak{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{S}))$ через $\sigma_{\mathbf{S}}^0(\mathfrak{H})$ обозначаем σ -алгебру п/м $\mathbf{S}$, порожденную семейством $\mathfrak{H}$.

Если A — множество, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ и $B \in \mathcal{P}(A)$, то [23, предложение 2.3.5]

$$\sigma_B^0(\mathcal{A}|_B) = \sigma_A^0(\mathcal{A})|_B;$$

отметим, кроме того (см. [23, (2.3.31)]), следующее свойство:

$$(\sigma_B^0(\mathcal{A}|_B) \subset \sigma_A^0(\mathcal{A})) \Leftrightarrow (B \in \sigma_A^0(\mathcal{A})).$$

Как следствие получаем импликацию

$$(B \in \sigma_A^0(\mathcal{A})) \Rightarrow (\sigma_B^0(\mathcal{A}|_B) = \{L \in \sigma_A^0(\mathcal{A}) \mid L \subset B\}). \quad (1.3)$$

Если $(\mathbb{S}, \tau)$ есть топологическое пространство, то $\sigma_{\mathbb{S}}^0(\tau)$ называется σ -алгеброй борелевских множеств, а множества из $\sigma_{\mathbb{S}}^0(\tau)$ — борелевскими. В дальнейшем используются только такие варианты $\sigma_{\mathbb{S}}^0(\tau)$, когда $(\mathbb{S}, \tau)$ является конечномерным компактом в топологии покоординатной сходимости.

Если $(H, \mathcal{H})$ есть ИП, т. е. H — множество и $\mathcal{H} \in (\sigma - \text{alg})[H]$, то через $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{H}]$ обозначаем множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) счетно-аддитивных мер на σ -алгебре $\mathcal{H}$ (см. [24, гл. III, IV]); $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{H}] \subset \mathcal{R}_+[\mathcal{H}]$. Если $\mathcal{H} = \sigma_H^0(\tau)$, где τ — топология на множестве H , то меры из $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{H}]$ называются борелевскими; в случае, когда (H, τ) — метризуемое ТП, все такие меры регулярны (см. [25, гл. 1]). Последнее свойство непременно имеет место в упомянутом выше случае, когда (H, τ) — конечномерный компакт.

2. Содержательная постановка задачи

Пусть $T \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. Фиксируем далее $n \in \mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, v \in Q, \quad (2.1)$$

где $f : T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$. В (2.1) P и Q — непустые ограниченные и замкнутые множества в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$. Функция f предполагается непрерывной на $T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$ (дополнительные условия будут оговорены позднее). В качестве обычных управлений игроков I и II на промежутке $[t, \vartheta_0]$, где $t \in T$, будем рассматривать сейчас (для простоты) кусочно-постоянные, непрерывные справа на $[t, \vartheta_0[$ и непрерывные слева в точке ϑ_0 функции, действующие из $[t, \vartheta_0]$ в P и Q соответственно. Через $\mathcal{U}_t$ и $\mathcal{V}_t$ обозначаем множества всех таких (простейших) управлений игроков I и II соответственно.

Полагаем, что позиции $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, а также управлениям $u(\cdot) = u_t(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{U}_t$ и $v(\cdot) = v_t(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{V}_t$ сопоставляется единственная траектория

$$\mathbf{x}(\cdot) = \mathbf{x}_t(\cdot)_{\vartheta_0} = (\mathbf{x}(\zeta))_{\zeta \in [t, \vartheta_0]},$$

являющаяся непрерывной функцией на $[t, \vartheta_0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ (позднее будут введены более общие определения). Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ — фиксированная позиция, то предполагается, что у игроков I и II имеются некоторые непустые множества $\mathfrak{U}(t_*, x_*)$ и $\mathfrak{V}(t_*, x_*)$ возможных способов формирования управлений $u_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{U}_{t_*}$ и $v_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{V}_{t_*}$ соответственно. Полагаем, что позиции (t_*, x_*) и способу $U \in \mathfrak{U}(t_*, x_*)$ соответствует непустое множество $\mathfrak{X}_I[t_*; x_*; U]$ возможных, при реализации данного способа, траекторий системы (2.1), которые являются непрерывными функциями из $[t_*, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$. Аналогично, позиции (t_*, x_*) и способу $V \in \mathfrak{V}(t_*, x_*)$ сопоставляем непустое множество $\mathfrak{X}_{II}[t_*; x_*; V]$ траекторий системы (2.1), возможных при реализации V . В построении упомянутых траекторий участвуют и управления $u_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{U}_{t_*}$ и управления $v_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_0} \in \mathcal{V}_{t_*}$.

В отношении целей, преследуемых игроками, принимаем сейчас традиционный для ДИ сближения-уклонения вариант. Итак, фиксируем замкнутые множества $\mathbf{M}$, $\mathbf{M} \subset T \times \mathbb{R}^n$, и $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \subset T \times \mathbb{R}^n$, первое из которых является целевым для игрока I, а второе используется для формирования его ФО. Тогда при $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$ (первоначальную) цель игрока I определим следующим образом: найти способ $U_* \in \mathfrak{U}(t_*, x_*)$, для которого $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_I[t_*; x_*; U_*] \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$:

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, x(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \quad (2.2)$$

Итак, в (2.2) речь идет о гарантированном обеспечении наведения на $\mathbf{M}$ при ФО, определяемых сечениями $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in \mathbf{N}\}$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$, множества $\mathbf{N}$. Если упомянутый способ U_* существует, то (t_*, x_*) принадлежит множеству (успешной) разрешимости задачи сближения с $\mathbf{M}$ «в пределах» $\mathbf{N}$.

У игрока II его (первоначальная) цель состоит в нахождении способа $V_* \in \mathfrak{V}(t_*, x_*)$ со свойством $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}_{II}[t_*; x_*; V_*] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta] : (t, x(t)) \notin \mathbf{N}). \quad (2.3)$$

Реализацию (2.3) связываем с (гарантированной) осуществимостью уклонения, определяемого в терминах $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, т. е. в терминах $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ -уклонения.

Можно, однако, дополнить (2.2), (2.3) некоторыми ослабленными версиями, связывая с $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ непустые семейства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ замкнутых множеств M, N со свойствами $(\mathbf{M} \subset M \ \forall M \in \mathcal{M})$ и $(\mathbf{N} \subset N \ \forall N \in \mathcal{N})$ соответственно. Будем полагать при этом, что $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ и $\mathbf{N} \in \mathcal{N}$. Наряду с (2.2) и (2.3) естественным является рассмотрение аналогов этих соотношений при замене $\mathbf{M} \rightarrow M$ и $\mathbf{N} \rightarrow N$, где $M \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}$. Этот процесс замены $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ их аналогами рассматриваем как релаксацию исходной задачи (сближения) игрока I. В качестве множеств $M \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}$ будем использовать окрестности $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ соответственно.

3. Обобщенные программные управления и квазистратегии

В настоящем разделе определяются управления-меры и неупреждающие многозначные отображения на пространствах таких управлений, именуемые ниже квазистратегиями.

Напомним, что $T = [t_0, \vartheta_0]$ есть «объемлющий» промежуток управления, а «рабочие» промежутки такого типа определяются в виде $[t, \vartheta_0]$, где $t \in T$. Для таких значений t наряду с $[t, \vartheta_0]$ рассматриваем сейчас конечномерные компакты $Z_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times Q$ и $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P \times Q$ в оснащении обычными топологиями покоординатной сходимости. Вводим σ -алгебры

$$\mathcal{I}_t \in (\sigma - \text{alg})[[t, \vartheta_0]], \quad \mathcal{D}_t \in (\sigma - \text{alg})[Z_t], \quad \mathcal{C}_t \in (\sigma - \text{alg})[\Omega_t]$$

борелевских п/м компактов $[t, \vartheta_0]$, Z_t и Ω_t соответственно. Отметим простейшие свойства цилиндрических множеств:

$$\begin{aligned} & (I \times P \times Q \in \mathcal{C}_t \ \forall I \in \mathcal{I}_t) \ \& \ (I \times Q \in \mathcal{D}_t \ \forall I \in \mathcal{I}_t) \\ & \& \ (D \times P \triangleq \{(\zeta, u, v) \in \Omega_t \mid (\zeta, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t \ \forall D \in \mathcal{D}_t); \end{aligned} \quad (3.1)$$

см. [25, добавление II]. В виде $([t, \vartheta_0], \mathcal{I}_t)$, $(Z_t, \mathcal{D}_t)$ и $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$ имеем стандартные ИП, отвечающие борелевскому оснащению соответствующих конечномерных компактов, зависящих от t .

Если $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$, то, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{t_2} &= \mathcal{I}_{t_1} |_{[t_2, \vartheta_0]} = \{I \in \mathcal{I}_{t_1} \mid I \subset [t_2, \vartheta_0]\}, \\ \mathcal{D}_{t_2} &= \mathcal{D}_{t_1} |_{Z_{t_2}} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset Z_{t_2}\}, \\ \mathcal{C}_{t_2} &= \mathcal{C}_{t_1} |_{\Omega_{t_2}} = \{C \in \mathcal{C}_{t_1} \mid C \subset \Omega_{t_2}\}, \\ \mathcal{D}_{t_1}^{t_2} &\triangleq \mathcal{D}_{t_1} |_{[t_1, t_2] \times Q} = \{D \in \mathcal{D}_{t_1} \mid D \subset [t_1, t_2] \times Q\} \in (\sigma - \text{alg})[[t_1, t_2] \times Q], \\ \mathcal{C}_{t_1}^{t_2} &\triangleq \mathcal{C}_{t_1} |_{[t_1, t_2] \times P \times Q} = \{C \in \mathcal{C}_{t_1} \mid C \subset [t_1, t_2] \times P \times Q\} \in (\sigma - \text{alg})[[t_1, t_2] \times P \times Q]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Операции над σ -алгебрами, используемые в (3.2), доставляют характерные подпространства используемых ниже ИП. Рассмотрим нужные множества управлений-мер. При $t \in T$ полагаем, что $\lambda_t \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{I}_t]$ есть след меры Лебега на σ -алгебру $\mathcal{I}_t$, т. е. мера Лебега–Бореля на упомянутой σ -алгебре; кроме того (см. (3.1)), полагаем, что

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(I \times P \times Q) = \lambda_t(I) \ \forall I \in \mathcal{I}_t\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{D}_t] \mid \nu(I \times Q) = \lambda_t(I) \quad \forall I \in \mathcal{I}_t\}, \quad (3.4)$$

получая непустые множества (регулярных) борелевских мер с лебеговским маргинальным распределением; наконец,

$$\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(D \times P) = \nu(D) \quad \forall D \in \mathcal{D}_t\} \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_t. \quad (3.5)$$

Элементы $\mathcal{H}_t$ (3.3) — суть обобщенные аналоги пар $(u(\cdot), v(\cdot))$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$, обычных (и простейших) программных управлений на $[t, \vartheta_0]$; элементы $\mathcal{E}_t$ (3.4) являются обобщенными аналогами управлений $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$. Наконец, элементы множества (3.5) при фиксированном $\nu = \bar{\nu} \in \mathcal{E}_t$ — суть аналоги пар $(u(\cdot), \bar{v}(\cdot))$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}_t$, где $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}_t$ фиксировано. Если $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$, то

$$\mathcal{H}_{t_2} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_2}) : \eta \in \mathcal{H}_{t_1}\}, \mathcal{E}_{t_2} = \{(\nu \mid \mathcal{D}_{t_2}) : \nu \in \mathcal{E}_{t_1}\} \quad (3.6)$$

(свойства сужаемости управлений-мер). Разумеется, при $t \in T$ множество $\mathcal{V}_t$ допускает естественное погружение в $\mathcal{E}_t$, а множество $\mathcal{U}_t \times \mathcal{V}_t$ — в множество $\mathcal{H}_t$; подробнее см. в [19, гл. IV, § 2]. Более того, это касается и более сложных типов обычных управлений — измеримых функций со значениями в P и Q .

Если $t_* \in T$, то определяем множество всех (многозначных обобщенных) квазистратегий на промежутке $[t_*, \vartheta_0]$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{t_*} \triangleq \{ \alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) \mid \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall \theta \in [t_*, \vartheta_0] \\ ((\nu_1 \mid \mathcal{D}_{t_*}^\theta) = (\nu_2 \mid \mathcal{D}_{t_*}^\theta)) \Rightarrow (\{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_*}^\theta) : \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{(\eta \mid \mathcal{C}_{t_*}^\theta) : \eta \in \alpha(\nu_2)\}) \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Итак, квазистратегии — элементы (3.7) — суть отображения из множества $\mathcal{P}'(\mathcal{H}_{t_*})^{\mathcal{E}_{t_*}}$, т. е. непустозначные многозначные отображения из $\mathcal{E}_{t_*}$ в $\mathcal{H}_{t_*}$; при $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ в виде $\alpha(\nu)$ имеем непустое п/м $\Pi_{t_*}(\nu)$. При этом

$$\Pi_{t_*}(\cdot) \triangleq (\Pi_{t_*}(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \in \tilde{A}_{t_*},$$

а потому $\tilde{A}_{t_*} \neq \emptyset$. Среди квазистратегий будем выделять квазипрограммы в виде квазистратегий с улучшенными топологическими свойствами. Чтобы их ввести (а также и для других целей) потребуется краткая сводка понятий, относящихся к относительным *-слабым топологиям.

Для упрощения обозначений зафиксируем $t_* \in T$ до тех пор, пока не будет оговорено противное. Линейные пространства $C(\Omega_{t_*})$ и $C(Z_{t_*})$ всех непрерывных функций из $\mathbb{R}^{\Omega_{t_*}}$ и $\mathbb{R}^{Z_{t_*}}$ соответственно оснащаем нормами равномерной сходимости, получая при этом сепарабельные банаховы пространства (см. [24, гл. IV, раздел 6], [26, 4.2.18]). Введем в рассмотрение пространства $C^*(\Omega_{t_*})$ и $C^*(Z_{t_*})$, топологически сопряженные к $C(\Omega_{t_*})$ и $C(Z_{t_*})$ соответственно. С учетом теоремы Рисса множества $\mathcal{H}_{t_*}$ и $\mathcal{E}_{t_*}$ естественным образом погружаются в $C^*(\Omega_{t_*})$ и $C^*(Z_{t_*})$ соответственно и, по этой причине, оснащаются относительными *-слабыми топологиями (индуцированными топологиями), которые метризуемы (см. [24, гл. V]), что обеспечивается сепарабельностью пространств $C(\Omega_{t_*})$ и $C(Z_{t_*})$ и сильной ограниченностью $\mathcal{H}_{t_*}$ и $\mathcal{E}_{t_*}$. Поскольку $\mathcal{H}_{t_*}$

и $\mathcal{E}_{t_*}$ являются $*$ -слабо замкнутыми множествами, то они $*$ -слабо компактны в силу теоремы Алаоглу (см. [24, гл. V]). В силу упомянутой метризуемости относительных $*$ -слабых топологий замкнутость п/м множеств $\mathcal{H}_{t_*}$ и $\mathcal{E}_{t_*}$ тождественна секвенциальной замкнутости, а компактность — секвенциальной компактности; см. [23, (2.7.43)] (имеются в виду $*$ -слабая замкнутость и $*$ -слабая компактность). В этой связи см. [19, гл. IV]. Таким образом, все нужные в дальнейшем свойства допускают исчерпывающее представление в терминах $*$ -слабо сходящихся последовательностей (отметим подробное изложение теории $*$ -слабой сходимости в [27, гл. 8] и [28, гл. 2], где используется термин «слабая сходимост»). Для обозначения $*$ -слабой сходимости последовательностей мер используем символ $\rightharpoonup$. Полагая, что $\mathfrak{F}_{t_*}$ есть семейство всех $*$ -слабо замкнутых п/м $\mathcal{H}_{t_*}$, имеем, что

$$\mathfrak{F}_{t_*} \triangleq \{\mathbb{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_{t_*}) \mid \forall (\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{H}^{\mathbb{N}} \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \quad ((\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \Rightarrow (\eta \in \mathbb{H})\}. \quad (3.8)$$

Множества — элементы $\mathfrak{F}_{t_*}$ — $*$ -слабо компактны.

С использованием (3.8) введем в рассмотрение «усовершенствованный» вариант квазистратегий — квазипрограммы. Итак, при $t_* \in T$ полагаем, что

$$\tilde{A}_{t_*}^{\Pi} \triangleq \{\alpha \in \tilde{A}_{t_*} \mid \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \in \mathfrak{F}_{t_*}\}; \quad (3.9)$$

элементы множества (3.9) называем квазипрограммами на $[t_*, \vartheta_0]$. Отметим, что $\Pi_{t_*}(\cdot) \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}$; таким образом, (3.9) — непустое множество. В дальнейшем при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ мы будем отождествлять $\mathfrak{U}(t_*, x_*)$ с $\tilde{A}_{t_*}^{\Pi}$, хотя возможны и другие варианты определения $\mathfrak{U}(t_*, x_*)$, связанные с применением позиционных стратегий, процедур управления с поводырем (моделью) (см. в этой связи [2–4]).

4. Обобщенные траектории

В настоящем разделе мы совсем кратко обсудим вопросы, связанные с сопоставлением позиции (t, x) , где $t \in T$, и управлению-мере $\eta \in \mathcal{H}_t$ соответствующей траектории — скользящего режима. Здесь же будут введены требуемые весьма общие условия на систему (2.1), достаточные для всех последующих построений. Итак, пусть при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \left\{ x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \mid \right. \\ \left. x(t) = x_* + \int_{[t_*, t] \times P \times Q} f(\tau, x(\tau), u, v) \eta(d(\tau, u, v)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_0] \right\}, \quad (4.1)$$

где (здесь и ниже) $C_n([t_*, \vartheta_0])$ есть множество всех непрерывных отображений из $[t_*, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$ с топологией покоординатной сходимости. Заметим, что данная топология порождается, в частности, евклидовой нормой $\|\cdot\|$ пространства $\mathbb{R}^n$ (данное соглашение относительно $\|\cdot\|$ сохраняется и в дальнейшем). Как и в [5], полагаем всюду в дальнейшем выполненным условие обобщенной единственности: если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, то

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}, \quad (4.2)$$

где $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ есть обобщенная траектория (скользящий режим), стартующая из позиции (t_*, x_*) и развивающаяся под действием η . Условие (4.2) лишь по форме записи отличается от используемого в [5]. Именуем $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$ программным движением, отвечающим триплету (t_*, x_*, η) . Кроме того, полагаем (как в [5]) выполненным следующее условие равномерной ограниченности, для формулировки которого условимся, что при $c \in \mathbb{R}_+$ через $\mathbb{B}_n(c)$ обозначается евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в «нуле» и радиусом c , т. е. $\mathbb{B}_n(c) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq c\}$. Итак, всюду в дальнейшем полагаем, что $\forall a \in \mathbb{R}_+ \exists b \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi(\xi, t, x, \eta) \in \mathbb{B}_n(b) \quad \forall t \in T \quad \forall x \in \mathbb{B}_n(a) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad \forall \xi \in [t, \vartheta_0]. \quad (4.3)$$

В (4.2), (4.3) мы имеем условия, налагаемые на систему (2.1); имеются, конечно, частные случаи, допускающие непосредственную проверку (см., в частности, условия на систему в [2, 3, 19]). Отметим важное свойство непрерывности отображения

$$(\eta, x) \mapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta) : \mathcal{H}_t \times \mathbb{R}^n \rightarrow C_n([t, \vartheta_0]), \quad (4.4)$$

где $t \in T$, $\mathcal{H}_t$ оснащено относительной $*$ -слабой топологией, а $\mathbb{R}^n$ — обычной топологией покоординатной сходимости (при проверке непрерывности отображения (4.4) используются (4.2), (4.3), а также (секвенциальная) $*$ -слабая компактность $\mathcal{H}_t$; см. [20, раздел 4]). Нужный в дальнейшем вариант данного свойства имеет следующий вид: если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathcal{H}_{t_*}$, а $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathbb{R}^n$, то

$$(((\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \eta) \& ((x_j)_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow x_*)) \Rightarrow ((\varphi(\cdot, t_*, x_j, \eta_j))_{j \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)), \quad (4.5)$$

где $\rightrightarrows$ используется (здесь и ниже) для обозначения равномерной сходимости. Отметим полезные свойства [20, (4.12), (4.13)]. Если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то

$$\mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) : \eta \in \Pi_{t_*}(\nu)\} \quad (4.6)$$

есть непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости. Кроме того, полагаем, что при $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$

$$\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) : \eta \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu)\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])). \quad (4.7)$$

В (4.6), (4.7) введены пучки обобщенных траекторий системы (2.1). В первом случае пучок сопоставляется управлению-мере, а во втором — квазистратегии игрока I. В этих терминах задача о реализации (2.2) приобретает следующий вид: для заданной позиции $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$ требуется найти квазистратегию $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ со свойством

$$\forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha] \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, x(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \quad (4.8)$$

Задачи, связанные с (4.8), можно распространить и на позиции из $(T \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbf{N}$, получая, однако, для таких позиций всякий раз случай неразрешимой задачи. Кроме того, мы можем в реализации, связанной с (4.7), осуществить релаксацию $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ -задачи игрока I, оперирующего квазистратегиями, т. е. организовать системы условий, используя в (4.8) вместо $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ множества $M \in \mathcal{M}$ и $N \in \mathcal{N}$ соответственно.

5. Релаксация задачи сближения

В настоящем разделе мы конкретизируем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, определяя последние как семейства окрестностей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ соответственно. Прежде всего введем и зафиксируем метрику

$$\rho : (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

посредством следующих условий: при $(t_1, x_1) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $(t_2, x_2) \in T \times \mathbb{R}^n$ полагаем, что

$$\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \triangleq \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\}) \quad (5.1)$$

((5.1) есть наибольшее из чисел $|t_1 - t_2|$ и $\|x_1 - x_2\|$). Метрика ρ порождает (индуцирует; см. [26, гл. 4]) на $T \times \mathbb{R}^n$ топологию $\mathbf{t}$ покоординатной сходимости. Тогда $\mathcal{F} \triangleq \mathbf{C}_{T \times \mathbb{R}^n}[\mathbf{t}]$ есть семейство всех замкнутых в смысле $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ п/м $T \times \mathbb{R}^n$, т. е. семейство всех замкнутых в традиционном смысле п/м $T \times \mathbb{R}^n$ (мы не будем использовать других топологий на $T \times \mathbb{R}^n$; см., однако, в этой связи [20, раздел 5], где используется и другое оснащение $T \times \mathbb{R}^n$). Полагаем, кроме того, $\mathcal{F}' \triangleq \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, получая семейство всех непустых замкнутых п/м $T \times \mathbb{R}^n$; $\mathcal{F}' \subset \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$. Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $z \in T \times \mathbb{R}^n$, то, как обычно,

$$\rho(z; H) \triangleq \inf(\{\rho(z, h) : h \in H\}) \in \mathbb{R}_+$$

есть обычное расстояние от точки (в данном случае — позиции) до множества. Фиксируя $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$, мы в виде

$$\rho(\cdot; H) \triangleq (\rho((t, x); H))_{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad (5.2)$$

получаем функцию расстояния до H , которая равномерно непрерывна, так как

$$|\rho(z_1; H) - \rho(z_2; H)| \leq \rho(z_1, z_2) \quad \forall z_1 \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall z_2 \in T \times \mathbb{R}^n.$$

В частности, $\rho(\cdot; H) \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$, где $\mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$ есть def множество всех непрерывных функций из множества $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Отметим, что при $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{S}_0(H, \varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z; H) \leq \varepsilon\} = \rho(\cdot; H)^{-1}([0, \varepsilon]) \in \mathcal{F} \quad (5.3)$$

(следствие непрерывности функции расстояния); при $\varepsilon > 0$ в (5.3) имеем замкнутую ε -окрестность H , а при $\varepsilon = 0$ — замыкание H в $(T \times \mathbb{R}, \mathbf{t})$. В частности, $\mathcal{S}_0(F, \varepsilon) \in \mathcal{F}$ при $F \in \mathcal{F}'$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; при этом $\mathcal{S}_0(F, 0) = F$. Мы рассматриваем ниже тот случай, когда семейства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ раздела 2 имеют вид

$$(\mathcal{M} \triangleq \{\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}) \& (\mathcal{N} \triangleq \{\mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}), \quad (5.4)$$

где $\kappa \in \mathbb{R}_+$ и $\kappa \neq 0$. Параметр κ , $\kappa > 0$, определяет степень приоритетности в вопросах, связанных с реализацией сближения и соблюдения ФО. Использование данного параметра приводит к существенным отличиям получаемых результатов от [17, 18] в сторону большей общности. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F}') \& (\mathbf{N} \in \mathcal{F}') \& (\mathbf{M} \subset \mathbf{N}). \quad (5.5)$$

Предложение 5.1. *Справедливо равенство*

$$T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} (\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)).$$

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Введем

$$(a_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \in \mathbb{R}_+) \& (b_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \in \mathbb{R}_+). \quad (5.6)$$

Кроме того, пусть $b^* \triangleq \sup(\{a_*\kappa; b_*\})$; $b^* \in \mathbb{R}_+$, причем $S_0(\mathbf{N}, b_*) \subset S_0(\mathbf{N}, b^*)$. Далее, рассматриваем

$$\beta \triangleq \frac{b^*}{\kappa};$$

тогда $\beta \in \mathbb{R}_+$. Мы имеем по определению b^* , что

$$(a_* \leq \frac{b^*}{\kappa} = \beta) \& (b_* \leq b^* = \kappa\beta).$$

Тогда в силу (5.6) $S_0(\mathbf{M}, a_*) \subset S_0(\mathbf{M}, \beta)$ и $S_0(\mathbf{N}, b_*) \subset S_0(\mathbf{N}, \kappa\beta)$. Поскольку в силу (5.3) и (5.6)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{S}_0(\mathbf{M}, a_*) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, b_*),$$

получаем с очевидностью, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \beta) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\beta). \quad (5.7)$$

Коль скоро $\beta \in \mathbb{R}_+$, из (5.7) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} (\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)),$$

чем и завершается проверка вложения $T \times \mathbb{R}^n \subset \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} (\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))$. Противоположное вложение очевидно (см. (5.3)). $\square$

Предложение 5.1 определяет вариант согласованного применения множеств из семейств (5.4); а именно: имея в виду релаксацию задачи, связанной с (4.8), мы при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ рассматриваем вопрос о нахождении квазистратегии $\alpha_* \in \tilde{A}_{t_*}$ игрока I со свойством

$$\begin{aligned} \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ ((\vartheta, x(\vartheta)) \in \mathcal{S}_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \& ((t, x(t)) \in \mathcal{S}_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Второй вопрос состоит в следующем: каково наименьшее значение параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, при котором квазистратегия α_* со свойством (5.8) существует (позднее мы рассмотрим и вопрос о предельной реализации данного наименьшего значения игроком II). Упомянутое наименьшее значение зависит от (t_*, x_*) ; изменяя позицию, мы получаем функцию из $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, для нахождения которой будут применены процедуры на основе МПИ.

6. Операторы программного поглощения и итерационные процедуры в пространстве множеств

В настоящем разделе приведена сводка свойств, относящихся к варианту МПИ, реализуемому в пространстве п/м $T \times \mathbb{R}^n$ (см. в этой связи [20]). Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$\mathbf{A}[M](H) \triangleq \{(t, x) \in H \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t, x, \nu) \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \& ((\xi, x(\xi)) \in H \forall \xi \in [t, \vartheta])\}. \quad (6.1)$$

Если зафиксировать M и рассматривать (6.1) как зависимость от H , то реализуется оператор $\mathbf{A}[M]$ на $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и именуемый ниже оператором программного поглощения (ОПП). В дальнейшем в качестве M будут использоваться множества из $\mathcal{M}$ (5.4), включая

$$\mathcal{S}_0(\mathbf{M}, 0) = \mathbf{M} \quad (6.2)$$

(равенство (6.2) — простое следствие (5.5)). для наших целей особенно важно свойство

$$\mathbf{A}[M](F) \in \mathcal{F} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad (6.3)$$

(в связи с (6.3) см. [20, раздел 5 и предложение 7.1]). Далее, из (6.1) имеем также, что

$$M \cap F \subset \mathbf{A}[M](F) \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}. \quad (6.4)$$

Наконец, среди простейших свойств ОПП отметим «совокупную» изотонность: $\forall M_1 \in \mathcal{F} \forall F_1 \in \mathcal{F} \forall M_2 \in \mathcal{F} \forall F_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2) \& (F_1 \subset F_2)) \Rightarrow (\mathbf{A}[M_1](F_1) \subset \mathbf{A}[M_2](F_2)). \quad (6.5)$$

Более общие свойства см. в [20, раздел 5]. Отметим только важный для дальнейшего анализ «совокупной» секвенциальной непрерывности (см. [20, раздел 5]): если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и при этом

$$((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F), \quad (6.6)$$

то $M \in \mathcal{F}$, $F \in \mathcal{F}$ и, что особенно важно,

$$(\mathbf{A}[M_i](F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbf{A}[M](F). \quad (6.7)$$

Для дальнейшего импликация (6.6) $\Rightarrow$ (6.7) будет весьма существенной.

Степени операторов. Всюду в дальнейшем используем следующее традиционное определение степени оператора, действующего в произвольном непустом множестве Y : если $\mathbf{a} \in Y^Y$, то последовательность

$$(\mathbf{a}^k)_{k \in \mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \rightarrow Y^Y \quad (6.8)$$

степеней оператора $\mathbf{a}$ однозначно определяется условиями

$$(\mathbf{a}^0(y) \triangleq y \quad \forall y \in Y) \& (\mathbf{a}^{s+1} = \mathbf{a} \circ \mathbf{a}^s \quad \forall s \in \mathbb{N}_0), \quad (6.9)$$

где $\circ$ — символ композиции отображений. Рассмотрим реализацию (6.8), (6.9) при $Y = \mathcal{F}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{A}[M]$, где $M \in \mathcal{F}$. Итак, получаем, что при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $s \in \mathbb{N}_0$

$$W_s(M, N) \triangleq \mathbf{A}[M]^s(N) \in \mathcal{F}. \quad (6.10)$$

Из (6.9), (6.10) вытекает, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$(W_0(M, N) = N) \& (W_{s+1}(M, N) = \mathbf{A}[M](W_s(M, N)) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0); \quad (6.11)$$

получаем, кроме того, что

$$W(M, N) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} W_k(M, N) \in \mathcal{F}. \quad (6.12)$$

В отношении (6.10)–(6.12) отметим ряд легкопроверяемых свойств (см. [20, раздел 6]). Итак (см. (6.1), (6.4), (6.11)), при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $s \in \mathbb{N}_0$

$$(W_{s+1}(M, N) \subset W_s(M, N)) \& (M \cap N \subset W_s(M, N)). \quad (6.13)$$

Из (6.13) следует, в частности, тот очевидный факт, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$M \cap N \subset W(M, N). \quad (6.14)$$

Кроме того, имеем очевидное следствие (6.5): при $M_1 \in \mathcal{F}$, $N_1 \in \mathcal{F}$, $M_2 \in \mathcal{F}$ и $N_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)) \Rightarrow (W_s(M_1, N_1) \subset W_s(M_2, N_2) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0). \quad (6.15)$$

Из (6.12) и (6.15) получаем, как следствие, что $\forall M_1 \in \mathcal{F} \quad \forall N_1 \in \mathcal{F} \quad \forall M_2 \in \mathcal{F} \quad \forall N_2 \in \mathcal{F}$

$$((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)) \Rightarrow (W(M_1, N_1) \subset W(M_2, N_2)). \quad (6.16)$$

Отметим, наконец, достаточно простые следствия импликации (6.6) $\Rightarrow$ (6.7) [20, раздел 6] с учетом свойств, отмеченных в [20, раздел 5]. Итак, если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и при этом

$$((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N), \quad (6.17)$$

то справедливы следующие свойства

$$((W_k(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W_k(M, N) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \& ((W(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W(M, N)). \quad (6.18)$$

В заключение данной сводки свойств ОПП из [20] отметим, что согласно [20, предложение 6.1] при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$W(M, N) = \mathbf{A}[M](W(M, N)) \quad (6.19)$$

(свойство неподвижной точки). Из (6.14)–(6.16) извлекаем нужные положения, связанные с (5.4), (5.5). Так $\mathbf{M} \subset W(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и, кроме того,

$$S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \subset W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \quad (6.20)$$

Отметим также аналог (6.20) для множеств-итераций (см. (6.13))

$$S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \cap S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \subset W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (6.21)$$

С учетом (6.21) и предложения 5.1 получаем систему равенств

$$\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = T \times \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (6.22)$$

Аналогичным образом из (6.20) и предложения 5.1 имеем равенство

$$\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+} W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = T \times \mathbb{R}^n \quad (6.23)$$

С учетом (6.22) получаем с очевидностью, что

$$\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \quad (6.24)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n.$$

Аналогично, из (6.23) получаем свойство

$$\Sigma_0(t, x \mid \kappa) \triangleq \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t, x) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (6.25)$$

С учетом (6.24) и (6.25) корректно определены при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ значения

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \triangleq \inf(\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \quad (6.26)$$

$$\&\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \triangleq \inf(\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \in \mathbb{R}_+).$$

Посредством (6.26) определены функции $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, $k \in \mathbb{N}_0$, и $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Итак, при $k \in \mathbb{N}_0$

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa) \triangleq (\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} = (\inf(\Sigma_0^{(k)}(t, x \mid \kappa)))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \quad (6.27)$$

Кроме того, имеем из (6.26), что

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \triangleq (\varepsilon_0(t, x \mid \kappa))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} = (\inf(\Sigma_0(t, x \mid \kappa)))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \quad (6.28)$$

Предложение 6.1. Если $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa) \subset \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (6.29)$$

Доказательство. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Пусть $\varepsilon_* \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$. Тогда (см. (6.25)) $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и при этом

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)), \quad (6.30)$$

где $W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \subset W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. С учетом (6.30) имеем включение

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)).$$

Из (6.24) вытекает требуемое свойство: $\varepsilon_* \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$. Итак, (6.29) установлено.

□

Предложение 6.2. Если $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa).$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и

$$(a_j)_{j \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$$

такова (см. (6.26)), что

$$(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \downarrow \varepsilon_*, \quad (6.31)$$

где $\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$. Тогда, в частности, для последовательности $(\kappa a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}_+$ имеем сходимость

$$(\kappa a_j)_{j \in \mathbb{N}} \downarrow \kappa \varepsilon_*. \quad (6.32)$$

Из (5.3), (6.31) и (6.32) вытекает, что

$$((S_0(\mathbf{M}, a_j))_{j \in \mathbb{N}} \downarrow S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \& ((S_0(\mathbf{N}, \kappa a_j))_{j \in \mathbb{N}} \downarrow S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)). \quad (6.33)$$

Как следствие получаем из (6.33) с учетом (6.17), (6.18) свойство

$$(W_k(S_0(\mathbf{M}, a_j), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_j)))_{j \in \mathbb{N}} \downarrow W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*)). \quad (6.34)$$

Согласно (6.24) $(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_j), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_j)) \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Поэтому (см. (1.2), (6.34))

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_*))$$

и следовательно (см. (6.24)) $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$. $\square$

Следствие 6.1. Если $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$ есть наименьший элемент множества $\Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa)$.

Доказательство очевидно (см. (6.26)).

Отметим естественный аналог предложения 6.2: справедливо следующее положение

Предложение 6.3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$.

Доказательство аналогично предложению 6.2.

Следствие 6.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)$ есть наименьший элемент множества $\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa)$.

Доказательство очевидно (см. (6.26)). Заметим, что в силу предложений 6.1 и 6.3

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \Sigma_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Это означает (см. (6.26)), что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ непременно $\{\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) : k \in \mathbb{N}_0\} \subset [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]$, а потому определено (конечное) значение

$$\sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) = \sup(\{\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) : k \in \mathbb{N}_0\}) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]. \quad (6.35)$$

Предложение 6.4. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (6.36)$$

Доказательство подобно обоснованию аналогичного положения [17, 18].

Предложение 6.5. Если $k \in \mathbb{N}_0$ и $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* \mid \kappa) \leq \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa).$$

Доказательство подобно аналогичному рассуждению в [17, 18].

Из предложений 6.4 и 6.5 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(t, x \mid \kappa))_{k \in \mathbb{N}} \uparrow \varepsilon_0(t, x \mid \kappa) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (6.37)$$

7. Последовательность в пространстве функций позиции: некоторые общие свойства

Как показано в предыдущем разделе, посредством итерационной процедуры в семействе п/м $T \times \mathbb{R}^n$ введена последовательность

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))_{k \in \mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \quad (7.1)$$

а также предельная функция $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Конкретное их определение в терминах упомянутой процедуры содержится в (6.26). Сейчас мы установим некоторые свойства последовательности (7.1) и функции $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$, рассматривая их с точки зрения последующей реализации в $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$ непосредственно. Однако сначала отметим, что множества (6.24), (6.25) являются лучами в $\mathbb{R}_+$ с обычным порядком; следующие три положения устанавливаются по аналогии с [17, 18].

Предложение 7.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $s \in \mathbb{N}_0$, то

$$\Sigma_0^{(s)}(t_*, x_* \mid \kappa) = [\varepsilon_0^{(s)}(t_*, x_* \mid \kappa), \infty[. \quad (7.2)$$

Предложение 7.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\Sigma_0(t_*, x_* \mid \kappa) = [\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa), \infty[. \quad (7.3)$$

Предложение 7.3. Если $b \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{N}_0$, то

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) = W_k(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)). \quad (7.4)$$

Следствие 7.1. Если $b \in \mathbb{R}_+$ и $k \in \mathbb{N}_0$, то $\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}$.

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (6.10) и предложения 7.3.

Предложение 7.4. При $b \in \mathbb{R}_+$

$$\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)^{-1}([0, b]) = W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)). \quad (7.5)$$

Доказательство. Фиксируем $b \in \mathbb{R}_+$. Если $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b))$, то согласно (6.25) $b \in \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa)$, а потому (см. (6.26)) $\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \leq b$, т. е. $(t_*, x_*) \in \varepsilon_0(\cdot | \kappa)^{-1}([0, b])$. Итак,

$$W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)) \subset \varepsilon_0(\cdot | \kappa)^{-1}([0, b]). \quad (7.6)$$

Пусть $(t^*, x^*) \in \varepsilon_0(\cdot | \kappa)^{-1}([0, b])$, т. е. $(t^*, x^*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon^* \triangleq \varepsilon_0(t^*, x^* | \kappa) \leq b$. Согласно предложению 7.2 $\Sigma_0(t^*, x^* | \kappa) = [\varepsilon^*, \infty[$, а потому $b \in \Sigma_0(t^*, x^* | \kappa)$ и в силу (6.25)

$$(t^*, x^*) \in W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)).$$

Поскольку выбор позиции (t^*, x^*) был произвольным, установлено, что

$$\varepsilon_0(\cdot | \kappa)^{-1}([0, b]) \subset W(S_0(\mathbf{M}, b), S_0(\mathbf{N}, \kappa b)).$$

С учетом (7.6) получаем равенство (7.5). $\square$

Следствие 7.2. Если $b \in \mathbb{R}_+$, то $\varepsilon_0(\cdot | \kappa)^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}$.

Доказательство сводится к непосредственной комбинации (6.12) и предложения 7.4. Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M} \triangleq \{g \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \mid g^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F} \ \forall b \in \mathbb{R}_+\} \quad (7.7)$$

всех полунепрерывных снизу функций из $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Тогда из следствий 7.1 и 7.2 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M} \ \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M}). \quad (7.8)$$

Введем в рассмотрение следующую функцию $\psi_\kappa \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$; а именно, полагаем, что

$$\psi_\kappa(t, x) \triangleq \sup(\{\rho((t, x); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa}\rho((t, x); \mathbf{N})\}) \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (7.9)$$

Так как $\rho(\cdot; \mathbf{M}) \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\rho(\cdot; \mathbf{N}) \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$, получаем, что

$$\psi_\kappa \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n). \quad (7.10)$$

Поскольку $\mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}$ (действительно, для $g \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n)$ и $b \in \mathcal{R}_+$ $g^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}$ как непрерывный прообраз замкнутого множества), имеем свойство $\psi_\kappa \in \mathfrak{M}$. В силу (7.9) ψ_κ есть точная верхняя грань в $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leq)$ неупорядоченной пары

$$\{\rho(\cdot; \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa}\rho(\cdot; \mathbf{N})\};$$

здесь и ниже $\leq$ есть поточечная упорядоченность на $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$. Итак, в дальнейшем $\leq$ обозначает поточечный порядок на $\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$, т. е. $\forall g_1 \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \ \forall g_2 \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]$

$$(g_1 \leq g_2) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (g_1(t, x) \leq g_2(t, x) \ \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n). \quad (7.11)$$

Тогда из предложения 6.5 получаем, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \leq \varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot | \kappa) \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (7.12)$$

Кроме того, из предложения 6.4 и (7.11) вытекает, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \leq \varepsilon_0(\cdot | \kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (7.13)$$

Свойство (6.37) существенно дополняет (7.13). Мы ниже используем обычные поточечно определяемые линейные операции в пространстве в/з функций на $T \times \mathbb{R}^n$.

Предложение 7.5. *Справедливо равенство*

$$\varepsilon_0^{(0)}(\cdot | \kappa) = \frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N}).$$

Доказательство. Согласно (6.11) имеем, что

$$W_0(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+. \quad (7.14)$$

Поэтому при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ имеем в силу (6.24) и (7.14), что

$$\Sigma_0^{(0)}(t_*, x_* | \kappa) = \{\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \mid (t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+). \quad (7.15)$$

Кроме того, $\Sigma_0^{(0)}(t_*, x_* | \kappa) = [\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_* | \kappa), \infty[$, в частности,

$$\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_* | \kappa) \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_* | \kappa). \quad (7.16)$$

Из (7.15) и (7.16) вытекает, что справедливо

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*).$$

Поэтому согласно (5.3) имеем неравенство

$$a_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_*. \quad (7.17)$$

Покажем, что в (7.17) на самом деле справедливо равенство. Допустим противное: $a_* < \kappa\varepsilon_*$. Тогда

$$b_* \triangleq \frac{a_*}{\kappa} \in \mathbb{R}_+ : b_* < \varepsilon_*. \quad (7.18)$$

Вместе с тем $\kappa b_* = a_*$ и в силу (7.17) $\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) = \kappa b_*$, что означает в силу (5.3) справедливость включения

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*). \quad (7.19)$$

Из (7.15), (7.18) и (7.19) следует, что $b_* \in \Sigma_0^{(0)}(t_*, x_* | \kappa)$. Тогда в силу (6.26) $\varepsilon_* \leq b_*$ вопреки второму положению в (7.18). Полученное противоречие показывает, что вышеупомянутое строгое неравенство $a_* < \kappa\varepsilon_*$ невозможно и, следовательно (см. (7.17)), $a_* = \kappa\varepsilon_*$, т. е.

$$\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) = \kappa\varepsilon_* = \kappa\varepsilon_0^{(0)}(t_*, x_* | \kappa).$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено равенство

$$\kappa\varepsilon_0^{(0)}(\cdot | \kappa) = \rho(\cdot; \mathbf{N}). \quad (7.20)$$

Из (7.20) вытекает утверждение доказываемого предложения. $\square$

Предложение 7.6. Справедливо свойство $\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \leq \psi_\kappa$.

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $b_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{M})$. Кроме того, $c_* \triangleq \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, b_*) \cap S_0(\mathbf{N}, c_*). \quad (7.21)$$

При этом реализуются следующие значения

$$a_* \triangleq \frac{1}{\kappa} c_* \in \mathbb{R}_+, \quad d_* \triangleq \sup(\{b_*; a_*\}) \in \mathbb{R}_+.$$

Ясно, что $S_0(\mathbf{M}, b_*) \subset S_0(\mathbf{M}, d_*)$ и, кроме того, $c_* = \kappa a_* \leq \kappa d_*$. Последнее означает, что $S_0(\mathbf{N}, c_*) \subset S_0(\mathbf{N}, \kappa d_*)$. Из (7.21) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{M}, d_*) \cap S_0(\mathbf{N}, \kappa d_*). \quad (7.22)$$

Поэтому (см. (6.20)) $(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, d_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa d_*))$. Это означает в силу (6.25), что $d_* \in \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa)$, а потому $\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \leq d_*$ (см. (6.26)). При этом

$$d_* = \sup(\{\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N})\}). \quad (7.23)$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, получаем (см. (7.9)) требуемое свойство

$$\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \leq \psi_\kappa.$$

□

Из (7.13) и предложения 7.6 вытекает, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \leq \psi_\kappa \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (7.24)$$

В свою очередь, из (7.12) следует рассуждением по индукции, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \leq \varepsilon_0^{(l)}(\cdot | \kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall l \in \overrightarrow{k, \infty}. \quad (7.25)$$

Тогда в силу (7.25) и предложения 7.5 имеем, что

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (7.26)$$

В свою очередь, из (7.13) и предложения 7.5 вытекает, что

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(\cdot | \kappa). \quad (7.27)$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M}_\psi \triangleq \{g \in \mathfrak{M} \mid g \leq \psi_\kappa\}. \quad (7.28)$$

Ясно, что $\psi_\kappa \in \mathfrak{M}_\psi$, а тогда $\mathfrak{M}_\psi$ есть непустое множество. Далее, из (7.8), (7.24) получаем, что

$$(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall k \in \mathbb{N}_0) \& (\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi). \quad (7.29)$$

8. Функционал качества и его основные свойства

В настоящем разделе вводится специальный тип функционала качества (далее показывается, что значения функции $\varepsilon_0(\cdot | \kappa)$ совпадают всякий раз с минимаксом данного функционала и в классе квазистратегий, и в классе квазипрограмм).

Если $t_* \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, то функция

$$t \mapsto \rho((t, x(t)); \mathbf{N}) : [t_*, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

непрерывна и достигает максимума. Поэтому полагаем, что

$$\begin{aligned} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) &\triangleq \sup(\{\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, x(t)); \mathbf{N})\}) \\ &\forall t_* \in T \quad \forall x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Вполне очевидно следующее свойство: если $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то

$$\vartheta \mapsto \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) : [t_*, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (8.2)$$

есть непрерывная функция.

С учетом непрерывности функций (8.2) корректно определяется при $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ число

$$\min_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \quad (8.3)$$

В свою очередь, (8.3) позволяет ввести важное для дальнейшего определение: если $t_* \in T$, то

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)} : C_n([t_*, \vartheta_0]) \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (8.4)$$

определяется следующим условием: при $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \triangleq \min_{\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta). \quad (8.5)$$

Если $t_* \in T$, то на $C_n([t_*, \vartheta_0])$ вводим обычную норму $\|\cdot\|_{t_*}^{(\mathbf{C})}$ равномерной сходимости по правилу: если $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то

$$\|x(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} \triangleq \max_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \|x(t)\|.$$

Предложение 8.1. Если $t_* \in T$, то $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}$ есть равномерно непрерывный функционал на $(C_n([t_*, \vartheta_0]), \|\cdot\|_{t_*}^{(\mathbf{C})})$, т. е. $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists \delta \in]0, \infty[\quad \forall x_1(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \quad \forall x_2(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$

$$(\|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{t_*}^{(\mathbf{C})} < \delta) \Rightarrow (|\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_1(\cdot)) - \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x_2(\cdot))| < \varepsilon). \quad (8.6)$$

Доказательство практически очевидно.

Предложение 8.2. Если $t_* \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$, то

$$\begin{aligned} &\exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ &((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)))) \& ((t, x(t)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Доказательство легко следует из определений.

9. Минимакс в классе квазистратегий

В настоящем разделе будет определено значение гарантированного результата для функционала платы (8.4) в классе квазистратегий (момент t_* здесь предполагается заданным). Однако предварительно мы напомним некоторые общие положения [20], касающиеся разрешимости ДИ сближения-уклонения. Итак, следуя на идейном уровне [20, (10.22)] и учитывая (6.12), введем при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$, $(t, x) \in W(M, N)$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$ множество

$$\pi_{t,x}^{(W)} \langle \nu \mid M, N \rangle \triangleq \left\{ \eta \in \Pi_t(\nu) \mid \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \right. \\ \left. \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in W(M, N) \quad \forall \xi \in [t, \vartheta]) \right\}. \quad (9.1)$$

Тогда на основе (9.1) определяется [20, предложение 10.3] (многозначная) квазистратегия. Точнее,

$$\pi_{t,x}^{(W)} \langle \cdot \mid M, N \rangle = (\pi_{t,x}^{(W)} \langle \nu \mid M, N \rangle)_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \tilde{A}_t^\Pi \\ \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F} \quad \forall (t, x) \in W(M, N). \quad (9.2)$$

Напомним также, что (см. [20, (10.22)]) при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $(t, x) \in N$

$$\mathcal{S}_{M,N}(t, x) \triangleq \left\{ \eta \in \mathcal{H}_t \mid \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \right. \\ \left. \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in N \quad \forall \xi \in [t, \vartheta]) \right\}. \quad (9.3)$$

Отметим здесь же, что согласно [20, следствие 10.2] реализуется свойство

$$\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \pi_{t,x}^{(W)} \langle \nu \mid M, N \rangle \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x) \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F} \quad \forall (t, x) \in W(M, N). \quad (9.4)$$

Кроме того, отметим, что (см. [20, теорема 10.1])

$$W(M, N) = \{(t, x) \in N \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t : \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x)\} \\ = \{(t, x) \in N \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t^\Pi : \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x)\} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F}. \quad (9.5)$$

При этом в силу (4.7) и (9.3) при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$, $(t, x) \in N$ и $\alpha \in \tilde{A}_t$

$$\left(\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \subset \mathcal{S}_{M,N}(t, x) \right) \Leftrightarrow (\forall \tilde{x}(\cdot) \in \mathbb{X}[t; x; \alpha] \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : \\ ((\vartheta, \tilde{x}(\vartheta)) \in M) \& ((\xi, \tilde{x}(\xi)) \in N \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])). \quad (9.6)$$

Отметим, наконец, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ определено значение

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) \in \mathbb{R}_+. \quad (9.7)$$

Более того, при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ множество

$$\{\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) : \eta \in \mathcal{H}_{t_*}\} \quad (9.8)$$

компактно и, в частности, ограничено в $\mathbb{R}$ с метрикой-модулем. В самом деле, $\mathcal{H}_{t_*}$ *-слабо компактно, а

$$\eta \mapsto \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)) : \mathcal{H}_{t_*} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

есть непрерывный функционал как композиция двух непрерывных отображений (см. (4.5) и предложение 8.1). Поэтому (9.8) есть непрерывный образ компакта. Заметим, что в силу (4.7) и ограниченности множества (9.8) при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}$ множество

$$\{\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]\} \quad (9.9)$$

ограничено, а потому определено значение

$$\sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

В этом случае при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено значение

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \triangleq \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+. \quad (9.10)$$

Отметим, что в случае $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi$ имеем, что (9.9) есть множество, компактное в $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, как непрерывный образ компакта

$$\bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \alpha(\nu) \quad (9.11)$$

(в самом деле, (9.11) есть замкнутое (см. (3.9)) п/м компакта $\mathcal{H}_{t_*}$); кроме того, в этом случае $\mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]$ есть компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости как непрерывный (см. (4.5)) образ компакта (9.11) (учитываем (4.7)). Получаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi$ определено значение

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+ \quad (9.12)$$

(учитываем предложение 8.1 и теорему Вейерштрасса). Поэтому при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено значение

$$\inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+; \quad (9.13)$$

при этом, конечно, у нас (см. (3.9))

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leq \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \quad (9.14)$$

Согласно (6.25) и предложению 6.3 при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ получаем, что

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa))) \quad (9.15)$$

где $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)) \in \mathcal{F}$ и $S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)) \in \mathcal{F}$; поэтому согласно (9.2) определена квазипрограмма

$$\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \triangleq \pi_{t_*, x_*}^{(W)}(\cdot | S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa))) \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi, \quad (9.16)$$

а тогда определено значение

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+.$$

Предложение 9.1. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и α_* есть квазипрограмма (9.16):

$$\alpha_* \triangleq \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi. \quad (9.17)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (9.18)$$

Доказательство. Отметим, что (см. (6.11), (6.12))

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \quad (9.19)$$

и, стало быть (см. (9.3)),

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_{S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)), S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))}(t_*, x_*) \\ &= \{ \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \mid \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))) \\ & \quad \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]) \}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Кроме того, $\alpha_* \in \tilde{A}_{t_*}$, а потому согласно (9.4) и (9.6)

$$\begin{aligned} & \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ & ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa))) \& ((t, x(t)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (9.21)$$

Это означает, что $\forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] :$

$$(\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \& (\rho((t, x(t)); \mathbf{N}) \leq \kappa \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \quad (9.22)$$

Поэтому (см. (9.22)) получаем свойство

$$\begin{aligned} & \forall x(\cdot) \in \mathbf{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : (\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)) \\ & \quad \& (\frac{1}{\kappa} \rho((t, x(t)); \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Из (8.1) и (9.23) вытекает, что

$$\forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (9.24)$$

Тем более (см. (8.5), (9.24)) имеем оценки

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*]. \quad (9.25)$$

Из (9.17) и (9.25) получаем, что $\max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha_*]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)$. $\square$

Из (9.16) и предложения 9.1 вытекает, что (см. (9.13))

$$\inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.26)$$

Как следствия имеем из (9.14), (9.26) следующие оценки

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.27)$$

Предложение 9.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)[$ и $\bar{\alpha} \in \tilde{A}_{t_*}$, то $\exists x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \bar{\alpha}] : b < \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot))$.

Доказательство использует свойство $b \notin \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa)$, а также (9.5).

Следствие 9.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $b \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)[$, то

$$b < \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}.$$

Доказательство непосредственно следует из предложения 9.2.

Из (9.10) и следствия 9.1 вытекает, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}_+$ и $b < \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)$

$$b \leq \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*). \quad (9.28)$$

Предложение 9.3. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$; тогда справедливо неравенство

$$\varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \leq \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*). \quad (9.29)$$

Доказательство очевидно (см. следствие 9.1).

Из (9.27) и предложения 9.3 вытекает, что

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.30)$$

Далее, из (9.26) и (9.30) имеем, что

$$\inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.31)$$

Поэтому из (9.14) и (9.31) получаем, что

$$\inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.32)$$

Получили (см. (9.30), (9.32)) свойство

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \inf_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (9.33)$$

Заметим, что согласно (3.9) и (9.16) при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ реализуется $\mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*) \in \tilde{A}_{t_*}$ и согласно (9.14)

$$\mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) \leq \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \quad (9.34)$$

Из предложения 9.1, (9.30) и (9.34) получаем следующее общее положение.

Теорема 9.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) &= \mathbf{v}_\kappa(t_*, x_*) = \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}} \sup_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \\ &= \min_{\alpha \in \tilde{A}_{t_*}^\Pi} \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \alpha]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \max_{x(\cdot) \in \mathbb{X}[t_*; x_*; \mathbf{a}_\kappa^{(W)}(t_*, x_*)]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Из (9.35) следует, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ квазипрограмма (9.16) оптимальна.

10. Итерационная процедура на пространстве функций

Заметим сначала, что

$$\Psi \triangleq (\rho((t, x); \mathbf{M}))_{(t,x) \in T \times \mathbb{R}} \in \mathbf{C}_+(T \times \mathbb{R}^n). \quad (10.1)$$

При этом $\Psi \leq \psi_\kappa$ в силу (7.9) и (10.1). Напомним далее, что при $t \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ функция

$$\tau \longmapsto \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) : [t, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (10.2)$$

непрерывна (см. (7.9)) и достигает максимума, т. е.

$$\max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+$$

определяется корректно; если, к тому же, $g \in \mathfrak{M}_\psi$ (см. (7.28)), то функция

$$\tau \longmapsto g(\tau, x(\tau)) : [t, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

ограничена, поскольку

$$g(\tilde{\tau}, x(\tilde{\tau})) \leq \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \quad \forall \tilde{\tau} \in [t, \vartheta_0], \quad (10.3)$$

что позволяет при $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$ определять

$$\sup_{\tau \in [t, \vartheta]} g(\tau, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+.$$

Более того, имеем при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$ и $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ что

$$\sup_{\tau \in [t, \vartheta]} (\{ \sup_{\tau \in [t, \vartheta]} g(\tau, x(\tau)); \Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \}) \leq \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]; \quad (10.4)$$

при этом, конечно, у нас

$$\sup_{\tau \in [t, \vartheta]} (\{ \sup_{\tau \in [t, \vartheta]} g(\tau, x(\tau)); \Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \}) \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0]. \quad (10.5)$$

С учетом (10.2), (10.3) полагаем, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$ и $t \in T$ функционал

$$\mathfrak{H}[g; t] \in \mathcal{R}_+ \left[C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0] \right] \quad (10.6)$$

определяется условиями: при $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$\mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \triangleq \sup_{\tau \in [t, \vartheta]} (\{ \sup_{\tau \in [t, \vartheta]} g(\tau, x(\tau)); \Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \}). \quad (10.7)$$

Введем в рассмотрение множества Лебега для функционала (10.6), (10.7). Итак, при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$ и $b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_b[g; t] &\triangleq \mathfrak{H}[g; t]^{-1}([0, b]) = \{(x(\cdot), \vartheta) \in C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0] \mid \mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \leq b\} \\ &= \{(x(\cdot), \vartheta) \in C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0] \mid (g(\tau, x(\tau)) \leq b \quad \forall \tau \in [t, \vartheta]) \\ &\quad \& (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq b)\} \in \mathcal{P}(C_n([t, \vartheta_0]) \times [t, \vartheta_0]). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Предложение 10.1. Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$ и $b \in \mathbb{R}_+$, то множество $\tilde{Y}_b[g, t_*]$ замкнуто в естественной метризуемой топологии, являющейся произведением топологии равномерной сходимости пространства $C_n([t_*, \vartheta_0])$ и обычной $|\cdot|$ -топологии отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, т. е.

$$\begin{aligned} \forall ((x_k(\cdot), \vartheta_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \tilde{Y}_b[g, t_*]^{\mathbb{N}} \quad \forall (x(\cdot), \vartheta) \in C_n([t_*, \vartheta_0]) \times [t_*, \vartheta_0] \\ ((x_k(\cdot))_{k \in \mathbb{N}} \rightrightarrows x(\cdot)) \& ((\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \vartheta) \Rightarrow ((x(\cdot), \vartheta) \in \tilde{Y}_b[g, t_*]). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Доказательство аналогично в идейном отношении положениям [17, 18] (см., в частности, [18, предложение 13]).

Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то получаем, что

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu] \triangleq (\mathfrak{H}[g; t_*] \mid \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]) \in \mathcal{R}_+ \left[X_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \right]. \quad (10.10)$$

Это означает, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu] : \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

и при этом $\forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta). \quad (10.11)$$

Ясно также, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $b \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu] \triangleq \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu]^{-1}([0, b]) = \tilde{Y}_b[g, t_*] \cap (\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]) \quad (10.12)$$

есть множество, замкнутое в подпространстве $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$ пространства $C_n([t_*, \vartheta_0]) \times [t_*, \vartheta_0]$ с топологией, определяемой произведением топологии равномерной сходимости на $C_n([t_*, \vartheta_0])$ и обычной $|\cdot|$ -топологии отрезка $[t_*, \vartheta_0]$. Иными словами, при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $b \in \mathbb{R}_+$ множество $\mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu]$ замкнуто в традиционном смысле, а именно:

$$\begin{aligned} \forall (z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu]^{\mathbb{N}} \quad \forall z \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \\ (((pr_1(z_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows pr_1(z)) \& ((pr_2(z_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow pr_2(z))) \Rightarrow (z \in \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu]). \end{aligned} \quad (10.13)$$

При этом согласно (10.10), (10.11), (10.12) и (10.8) при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $b \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_b[g; t_*; x_*; \nu] = \{ (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] \mid \\ (g(\tau, x(\tau)) \leq b \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta]) \& (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq b) \}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Отметим, что в силу компактности множеств (4.6) и отрезка $[t_*, \vartheta_0]$ получаем, что топология на $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$, определяемая произведением топологии равномерной сходимости $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и обычной $|\cdot|$ -топологии отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, превращает $\mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$ в компакт, а множество (10.14) замкнуто в данном компакте, а потому само является компактным.

Отметим, что при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) = \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \quad (10.15)$$

Предложение 10.2. Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, то

$$\begin{aligned} & \exists(\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ & \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) = \inf_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Доказательство подобно аналогичному положению в [17, 18].

Поэтому (см. предложение 10.2) определено значение

$$\begin{aligned} & \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \\ & \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Напомним, что согласно (10.4) и (10.7) при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t \in T$, $x(\cdot) \in C_n([t, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_0]$

$$0 \leq \mathfrak{H}[g; t](x(\cdot), \vartheta) \leq \max_{\tau \in [t, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)). \quad (10.18)$$

В частности (см. (10.11), (10.18)), при $g \in \mathfrak{M}_\psi$, $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu)$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$0 \leq \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq \max_{\tau \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tau, x(\tau)). \quad (10.19)$$

Предложение 10.3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ : \psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \leq c \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (10.20)$$

Доказательство очевидно.

Предложение 10.4. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\begin{aligned} & \exists c \in \mathbb{R}_+ : \mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \leq c \\ & \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. С учетом предложения 10.3 подберем $c_* \in \mathbb{R}_+$ так, что

$$\psi_\kappa(\tau, x(\tau)) \leq c_* \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (10.22)$$

Поскольку $\Psi \leq \psi_\kappa$, имеем, что (см. (10.22)) $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq c_*. \quad (10.23)$$

Выберем произвольно $\bar{g} \in \mathfrak{M}_\psi$, $\bar{\nu} \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\bar{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, \bar{\nu})$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$. Тогда из (10.23) вытекает, что

$$\Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \leq c_*. \quad (10.24)$$

Далее, по выбору $\bar{g}$, $\bar{g} \leq \psi_\kappa$ (см. (7.28)). В силу (10.3) и (10.22) получаем, что

$$\bar{g}(\tau, \bar{x}(\tau)) \leq \max_{\tilde{\tau} \in [t_*, \vartheta_0]} \psi_\kappa(\tilde{\tau}, \bar{x}(\tilde{\tau})) \leq c_* \quad \forall \tau \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (10.25)$$

Поэтому (см. (10.4), (10.23), (10.25)) имеем неравенство

$$\sup\left(\left\{\sup_{\tau \in [t_*, \bar{\vartheta}]} \bar{g}(\tau, \bar{x}(\tau)); \Psi(\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta}))\right\}\right) \leq c_*; \quad (10.26)$$

учли также (10.22). Из (10.7), (10.26) получаем, что

$$\mathfrak{H}[\bar{g}; t_*](\bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leq c_*. \quad (10.27)$$

Поскольку выбор $\bar{g}$, $\bar{\nu}$, $\bar{x}(\cdot)$ и $\bar{\vartheta}$ был произвольным, установлено, что

$$\mathfrak{H}[g; t_*](x(\cdot), \vartheta) \leq c_* \quad \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (10.28)$$

С учетом того, что $c_* \in \mathbb{R}_+$, и (10.28) получаем утверждение (10.21). $\square$

Из (10.11) и предложения 10.4 следует

$$\begin{aligned} \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \exists c_* \in \mathbb{R}_+ : \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq c_* \\ \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Из (10.11), (10.12), (10.17) и (10.29) тем более получаем, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ для некоторого $c_* \in \mathbb{R}_+$

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq c_* \quad \forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \quad (10.30)$$

Поскольку $\mathcal{E}_t \neq \emptyset \quad \forall t \in T$, имеем из (10.30), что корректно определяется для $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $g \in \mathfrak{M}_\psi$ значение

$$\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \quad (10.31)$$

Мы получаем теперь, что $\forall g \in \mathfrak{M}_\psi$

$$\left(\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \right)_{(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n} \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]. \quad (10.32)$$

С учетом (10.32) полагаем далее, что

$$\Gamma : \mathfrak{M}_\psi \rightarrow \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad (10.33)$$

определяется следующим условием: при $g \in \mathfrak{M}_\psi$

$$\Gamma(g) \triangleq \left(\sup_{\nu \in \mathcal{E}_\tau} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(\tau, y, \nu) \times [\tau, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; \tau; y; \nu](x(\cdot), \vartheta) \right)_{(\tau, y) \in T \times \mathbb{R}^n}. \quad (10.34)$$

При этом, конечно, $\forall g \in \mathfrak{M}_\psi \quad \forall (\tau, y) \in T \times \mathbb{R}^n$

$$\Gamma(g)(\tau, y) = \sup_{\nu \in \mathcal{E}_\tau} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(\tau, y, \nu) \times [\tau, \vartheta_0]} \mathbf{h}[g; \tau; y; \nu](x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+. \quad (10.35)$$

Заметим, в частности, что (см. 10.33), (7.28)) определены функции

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (10.36)$$

Теорема 10.1. Если $k \in \mathbb{N}_0$, то справедливо равенство

$$\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot | \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa)). \quad (10.37)$$

Доказательство. Фиксируем $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда (см. (7.7), (7.8), (10.36))

$$(\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot | \kappa) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]) \& (\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n]). \quad (10.38)$$

Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Сравним значения

$$(a_* \triangleq \varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_* | \kappa) \in \mathbb{R}_+) \& (b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(t_*, x_* | \kappa)) \in \mathbb{R}_+). \quad (10.39)$$

При этом согласно следствию 6.1

$$a_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_* | \kappa). \quad (10.40)$$

Это означает в силу (6.24), что

$$(t_*, x_*) \in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \quad (10.41)$$

Иными словами (см. (6.11), (10.41)), имеем свойство

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*))). \quad (10.42)$$

Тогда согласно (6.1) и (10.42) $(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*))$ и при этом

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, a_*)) \& ((t, x(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned}$$

Из (5.3), (6.24) получаем теперь, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\rho(\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leq a_* \& (a_* \in \Sigma_0^{(k)}(t, x(t) | \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (10.43)$$

С учетом (10.1) и (10.43) реализуется свойство

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (a_* \in \Sigma_0^{(k)}(t, x(t) | \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (10.44)$$

Из (6.26) и (10.44) получаем с очевидностью, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (\varepsilon_0^{(k)}(t, x(t) | \kappa) \leq a_* \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (10.45)$$

С учетом (10.45) имеем теперь, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} \varepsilon_0^{(k)}(t, x(t) | \kappa) \leq a_*) \& (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*). \end{aligned} \quad (10.46)$$

Из (10.7) и (10.46) следует, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]$:

$$\mathfrak{H}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa); t_*](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (10.47)$$

В свою очередь, из (10.11), (10.47) извлекается свойство

$$\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (10.48)$$

С учетом (10.17), (10.48) имеем теперь, что

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq a_* \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}. \quad (10.49)$$

Но в этом случае из (10.35) и (10.49) следует неравенство

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa))(t_*; x_*) \leq a_*,$$

а потому (см. (10.39))

$$b_* \leq a_*. \quad (10.50)$$

Докажем справедливость противоположного неравенства. Пусть $\hat{\nu} \in \mathcal{E}_{t_*}$. Тогда для некоторых $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \hat{\nu})$ и $\hat{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\mathbf{h}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa); t_*; x_*; \hat{\nu}](\hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) \leq b_*. \quad (10.51)$$

Из (10.11) и (10.51) вытекает, что

$$\mathfrak{H}[\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa); t_*](\hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) \leq b_*. \quad (10.52)$$

В свою очередь из (10.7) и (10.52) следует, что

$$\sup_{\tau \in [t_*, \hat{\vartheta}]} \varepsilon_0^{(k)}(\tau, \hat{x}(\tau)) \leq b_* \quad (10.53)$$

и, вместе с тем,

$$\Psi(\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \leq b_*. \quad (10.54)$$

В силу (10.1) и (10.54) имеем неравенство

$$\rho((\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})); \mathbf{M}) \leq b_*. \quad (10.55)$$

Это означает в силу (5.3), что

$$(\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, b_*). \quad (10.56)$$

Далее, из (10.53) имеем, что

$$\varepsilon_0^{(k)}(\tau, \hat{x}(\tau)) \leq b_* \quad \forall \tau \in [t_*, \hat{\vartheta}]. \quad (10.57)$$

В силу (10.57) и предложения 7.1 получаем теперь, что

$$b_* \in \Sigma_0^{(k)}(\tau, \hat{x}(\tau) | \kappa) \quad \forall \tau \in [t_*, \hat{\vartheta}].$$

Это означает в силу (6.24), что

$$(\tau, \hat{x}(\tau)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)) \quad \forall \tau \in [t_*, \hat{\vartheta}]. \quad (10.58)$$

Таким образом, у нас $(\hat{x}(\cdot), \hat{\vartheta}) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \hat{\vartheta}) \times [t_*, \vartheta_0]$ есть такая УП, что (см. (10.56), (10.58))

$$((\hat{\vartheta}, \hat{x}(\hat{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, b_*)) \& ((t, \hat{x}(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)) \quad \forall t \in [t_*, \hat{\vartheta}]). \quad (10.59)$$

Поскольку выбор $\hat{\vartheta}$ был произвольным, установлено, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] : \\ ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, b_*)) \& ((t, x(t)) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)) \quad \forall t \in [t_*, \hat{\vartheta}]). \end{aligned} \quad (10.60)$$

Легко видеть, что

$$(t_*, x_*) \in W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)). \quad (10.61)$$

Из (10.60), (10.61) имеем в силу (6.1), что

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, b_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*))), \quad (10.62)$$

где (см. (6.11))

$$\mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, b_*)](W_k(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*))) = W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)). \quad (10.63)$$

Из (10.62) и (10.63) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in W_{k+1}(S_0(\mathbf{M}, b_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa b_*)). \quad (10.64)$$

Тогда в силу (6.24)

$$b_* \in \Sigma_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (10.65)$$

Из (6.26) и (10.65) получаем, что $\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa) \leq b_*$, а потому (см. (10.39))

$$a_* \leq b_*. \quad (10.66)$$

Из (10.50) и (10.66) получаем равенство

$$a_* = b_*. \quad (10.67)$$

Иными словами (см. (10.39), (10.67))

$$\varepsilon_0^{(k+1)}(t_*, x_* \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*). \quad (10.68)$$

Поскольку выбор (t_*, x_*) был произвольным, установлено (см. (10.38)) свойство (10.37), т. е. $\varepsilon_0^{(k+1)}(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(k)}(\cdot \mid \kappa))$. $\square$

11. Свойство неподвижной точки

Напомним прежде всего, что согласно (7.29) и предложению 7.5 имеет место свойство

$$\varepsilon_0^{(0)}(\cdot | \kappa) = \frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N}) \in \mathfrak{M}_\psi \quad (11.1)$$

Данное свойство (11.1) существенно для дальнейших построений.

Предложение 11.1. Если $g \in \mathfrak{M}_\psi$, то $g \leq \Gamma(g)$.

Доказательство подобно рассуждению в [17, 18].

Предложение 11.2. Оператор Γ является изотонным: $\forall g_1 \in \mathfrak{M}_\psi, \forall g_2 \in \mathfrak{M}_\psi$

$$(g_1 \leq g_2) \Rightarrow (\Gamma(g_1) \leq \Gamma(g_2)). \quad (11.2)$$

Доказательство осуществляется по аналогии с подобным положением в [17, 18].

Теорема 11.1. Функция $\varepsilon_0(\cdot | \kappa)$ есть неподвижная точка Γ :

$$\varepsilon_0(\cdot | \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot | \kappa)). \quad (11.3)$$

Доказательство. Напомним, что $\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$, а потому определена функция

$$\Gamma(\varepsilon_0(\cdot | \kappa)) \in \mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n] \quad (11.4)$$

(см. (10.35)). Тогда (см. предложение 11.1)

$$\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \leq \Gamma(\varepsilon_0(\cdot | \kappa)). \quad (11.5)$$

Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$,

$$(a_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)) \& (b_* \triangleq \Gamma(\varepsilon_0(\cdot | \kappa))(t_*, x_*)). \quad (11.6)$$

Тогда $a_* \in \mathbb{R}_+$, $b_* \in \mathbb{R}_+$ и, в силу (11.5), (11.6),

$$a_* \leq b_*. \quad (11.7)$$

Напомним, что (см. (11.6), следствие 6.2) $a_* \in \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa)$. Поэтому (см. (6.25))

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)).$$

Тогда (см. (6.19))

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{A}[S_0(\mathbf{M}, a_*)](W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)). \quad (11.8)$$

Это означает (см. (5.3)), что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}) \leq a_*) \& ((t, x(t)) \in W(S_0(\mathbf{M}, a_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa a_*)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (11.9)$$

С учетом (6.25) имеем, что

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (a_* \in \Sigma_0(t, x(t) \mid \kappa) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned}$$

Но в этом случае согласно (6.26)

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (\varepsilon_0(t, x(t) \mid \kappa) \leq a_* \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Поэтому (см. 11.10)) имеет место свойство

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \\ (\Psi(\vartheta, x(\vartheta)) \leq a_*) \& (\sup_{t \in [t_*, \vartheta]} \varepsilon_0(t, x(t) \mid \kappa) \leq a_*). \end{aligned} \quad (11.11)$$

С учетом (10.7) получаем теперь, что

$$\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists (x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0] : \mathfrak{H}[\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa); t_*](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (11.12)$$

С учетом (10.17) получаем, как следствие, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}$

$$\min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (11.13)$$

Поэтому (см. (11.13)) имеем очевидное неравенство

$$\sup_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \min_{(x(\cdot), \vartheta) \in \mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, \nu) \times [t_*, \vartheta_0]} \mathbf{h}[\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa); t_*; x_*; \nu](x(\cdot), \vartheta) \leq a_*. \quad (11.14)$$

С учетом (10.35), (11.14) получаем оценку

$$\Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*) \leq a_*.$$

Из (11.6) имеем, как следствие, неравенство

$$b_* \leq a_*. \quad (11.15)$$

Тогда (см. (11.7), (11.15)) получаем равенство

$$a_* = b_*. \quad (11.16)$$

Поэтому (см. (11.6), (11.16)) $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))(t_*, x_*)$. Поскольку (t_*, x_*) выбиралась произвольно, установлено (11.3), т. е. $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa))$. $\square$

Введем в рассмотрение множество

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\psi}^{(\Gamma)} \triangleq \{g \in \mathfrak{M}_{\psi} \mid (g = \Gamma(g)) \& (\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq g)\}. \quad (11.17)$$

Следующее положение подобно основному утверждению [17, 18].

Теорема 11.2. *Функция $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ является $\leq$ -наименьшим элементом множества (11.17):*

$$(\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\psi}^{(\Gamma)}) \& (\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa) \leq g \quad \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\psi}^{(\Gamma)}). \quad (11.18)$$

Доказательство. В силу (7.29) $\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi$. При этом согласно (7.27)

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(\cdot | \kappa). \quad (11.19)$$

Тогда (см. (11.17), (11.19), теорему 11.1) имеем, что

$$\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}. \quad (11.20)$$

Пусть $\mathbf{g} \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. Тогда в силу (11.17) имеем, что

$$\mathbf{g} \in \mathfrak{M}_\psi \quad (11.21)$$

и при этом

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot; \mathbf{N}) \leq \mathbf{g}. \quad (11.22)$$

Тогда (см. (11.22), предложение 7.5)

$$\varepsilon_0^{(0)}(\cdot | \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.23)$$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{N} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \leq \mathbf{g}\}. \quad (11.24)$$

Тогда в силу (11.23) имеем, что $0 \in \mathfrak{N}$. Поэтому, в частности,

$$\mathfrak{N} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_0). \quad (11.25)$$

Пусть выбрано произвольное число

$$r \in \mathfrak{N}. \quad (11.26)$$

Тогда (см. (11.24), (11.26)) $r \in \mathbb{N}_0$ и при этом

$$\varepsilon_0^{(r)}(\cdot | \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.27)$$

Имеем, однако, в силу (7.29) и (11.21)

$$(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi) \& (\mathbf{g} \in \mathfrak{M}_\psi). \quad (11.28)$$

Из предложения 11.2 вытекает, что

$$(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot | \kappa) \leq \mathbf{g}) \Rightarrow (\Gamma(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot | \kappa)) \leq \Gamma(\mathbf{g})). \quad (11.29)$$

Из (11.27) и (11.29) вытекает, что

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot | \kappa)) \leq \Gamma(\mathbf{g}). \quad (11.30)$$

При этом по выбору $\mathbf{g}$ имеем из (11.17) равенство

$$\mathbf{g} = \Gamma(\mathbf{g}). \quad (11.31)$$

Тогда в силу (11.30), (11.31) получаем, что

$$\Gamma(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot | \kappa)) \leq \mathbf{g}. \quad (11.32)$$

Вместе с тем по теореме 10.1 имеем равенство

$$\varepsilon_0^{(r+1)}(\cdot | \kappa) = \Gamma(\varepsilon_0^{(r)}(\cdot | \kappa)). \quad (11.33)$$

Из (11.32) и (11.33) вытекает, что

$$\varepsilon_0^{(r+1)}(\cdot | \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.34)$$

При этом $r + 1 \in \mathbb{N}$ и, в частности, $r + 1 \in \mathbb{N}_0$. Поэтому (см. (11.34))

$$r + 1 \in \mathbb{N}_0 : \varepsilon_0^{(r+1)}(\cdot | \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.35)$$

Тогда (см. (11.24), (11.35)) получаем свойство

$$r + 1 \in \mathfrak{N}. \quad (11.36)$$

Итак (см. (11.26), (11.36)), установлено, что

$$k + 1 \in \mathfrak{N} \quad \forall k \in \mathfrak{N}. \quad (11.37)$$

Поэтому (см. (11.24), (11.25), (11.37))

$$\mathfrak{N} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_0) : (0 \in \mathfrak{N}) \& (k + 1 \in \mathfrak{N} \quad \forall k \in \mathfrak{N}). \quad (11.38)$$

Тогда по индукции имеем равенство $\mathfrak{N} = \mathbb{N}_0$. В итоге (см. (11.24))

$$\varepsilon_0^{(k)}(\cdot | \kappa) \leq \mathbf{g} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (11.39)$$

Это означает, что реализуются свойства

$$\varepsilon_0^{(k)}(t, x | \kappa) \leq \mathbf{g}(t, x) \quad \forall k \in \mathfrak{N}_0 \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (11.40)$$

Тогда (см. (11.40), предложение 6.4) $\varepsilon_0(t, x | \kappa) \leq \mathbf{g}(t, x) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$. Это означает, что

$$\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \leq \mathbf{g}. \quad (11.41)$$

Поскольку выбор $\mathbf{g}$ был произвольным, установлено (см. (11.41)), что

$$\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \leq g \quad \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}. \quad (11.42)$$

Из (11.20) и (11.42) вытекает (11.18), т. е.

$$\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)} : \varepsilon_0(\cdot | \kappa) \leq g \quad \forall g \in \tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}.$$

Итак, $\varepsilon_0(\cdot | \kappa)$ есть $\leq$ -наименьший элемент множества $\tilde{\mathfrak{M}}_\psi^{(\Gamma)}$. □

Отметим, что из (7.28), (7.29), (11.17) и теоремы 11.2 вытекает, что $\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \in \mathfrak{M}_\psi$:

$$\frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(\cdot | \kappa) \& (\varepsilon_0(\cdot | \kappa) \leq \psi_\kappa). \quad (11.43)$$

При этом однако, ψ_κ есть точная верхняя грань множества

$$\{\rho(\cdot, \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N})\} = \{\Psi; \frac{1}{\kappa} \rho(\cdot, \mathbf{N})\}$$

в $(\mathcal{R}_+[T \times \mathbb{R}^n], \leq)$. Из (11.43) вытекает (см. (7.9)), что справедливо следующее

Предложение 11.3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \right) \\ & \& \left(\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \leq \sup \left(\{ \Psi(t_*, x_*); \frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \} \right) \right). \end{aligned} \quad (11.44)$$

Из предложения 11.3 вытекает, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ истинна импликация

$$\left(\rho((t_*, x_*); \mathbf{M}) \leq \frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \right) \Rightarrow \left(\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \frac{1}{\kappa} \rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) \right). \quad (11.45)$$

12. Программные конструкции (добавление)

Вернемся к построениям раздела 3, добавляя некоторые новые определения. Так, при $t \in T$ введем, следуя [29, раздел 3] конечномерный компакт $Y_t \triangleq [t, \vartheta_0] \times P$, оснащаемый σ -алгеброй борелевских множеств

$$\mathcal{K}_t \in (\sigma - \text{alg})[Y_t],$$

и получая стандартное ИП

$$(Y_t, \mathcal{K}_t). \quad (12.1)$$

Заметим, что при $t_1 \in T$ и $t_2 \in [t_1, \vartheta_0]$

$$\mathcal{K}_{t_2} = \mathcal{K}_{t_1} \upharpoonright_{Y_{t_2}} = \{K \in \mathcal{K}_{t_1} \mid K \subset Y_{t_2}\}.$$

Мы используем стандартное [30, с. 17] определение декартова произведения трех множеств: если A , B и C — множества, то $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$. В частности, имеем при $t \in T$ равенство

$$\Omega_t = Y_t \times Q. \quad (12.2)$$

Если же при этом $K \in \mathcal{P}(Y_t)$, то

$$K \times Q \subset Y_t \times Q = \Omega_t,$$

т. е. $K \times Q \in \mathcal{P}(\Omega_t)$. В частности,

$$K \times Q \in \mathcal{P}(\Omega_t) \quad \forall t \in T \quad \forall K \in \mathcal{K}_t.$$

Более того (см. [29, раздел 3]), имеем свойство: при $t \in T$ и $K \in \mathcal{K}_t$.

$$K \times Q \in \mathcal{C}_t; \quad (12.3)$$

в виде (12.3) имеем борелевский цилиндр в Ω_t (12.2), являющийся аналогом последнего множества в (3.1). Здесь же отметим, что $I \times P \in \mathcal{K}_t$ при $t \in T$ и $I \in \mathcal{I}_t$. С учетом этого вводим при $t \in T$ множество

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{ \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{K}_t] \mid \mu(I \times P) = \lambda_t(I) \quad \forall I \in \mathcal{I}_t \}; \quad (12.4)$$

элементы (12.4) (т. е. борелевские меры) являются аналогами обычных управлений из $\mathcal{U}_t$. Кроме того, при $t \in T$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$

$$\pi_t(\mu) \triangleq \{ \eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(K \times Q) = \mu(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}_t \} \quad (12.5)$$

(учитываем (12.3)). Множество (12.5) является аналогом множества всех УП $(\bar{u}(\cdot), v(\cdot))$, где $v(\cdot) \in \mathcal{V}_t$, а $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}_t$ фиксировано. Заметим, что множества (12.4) и (12.5) допускают погружение в пространства $C^*(Y_t)$ и $C^*(\Omega_t)$, где $C^*(Y_t)$ — топологическое сопряженное к сепарабельному банахову пространству $C(Y_t)$ непрерывных функций из $\mathbb{R}^{Y_t}$, а $C^*(\Omega_t)$ определено в разделе 3. При этом множества $\mathcal{R}_t$ и $\pi_t(\mu)$, $\mu \in \mathcal{R}_t$, в оснащении относительными $*$ -слабыми топологиями компактны, т. е. $*$ -слабо компактны. В силу сепарабельности пространств $C(Y_t)$ и $C(\Omega_t)$ (при оснащении нормами равномерной сходимости) вышеупомянутые пространства борелевских мер в оснащении относительными $*$ -слабыми топологиями метризуемы (имеются в виду пространства $\mathcal{R}_t$ и $\mathcal{H}_t$, а также множества (12.5)). Тогда, в частности, (12.4) и (12.5) с относительными $*$ -слабыми топологиями секвенциально компактны. Свойство замкнутости п/м $\mathcal{R}_t$ и множеств (12.5) эквивалентно секвенциальной замкнутости (подробнее см. в [29, раздел 3]). В частности, относительная $*$ -слабая топология на $\mathcal{R}_t$ (12.4) полностью описывается в терминах ($*$ -слабо) сходящихся последовательностей; для обозначения упомянутой сходимости используем, как и в разделе 3, символ $\rightharpoonup$.

В дальнейшем потребуется один специальный тип совокупных обобщенных управлений, отвечающих содержательно одновременному воздействию $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$, где $t \in T$. Точное определение приведено в [29, раздел 3] : при $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$ имеем $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$ (стандартное произведение μ и сужения меры Дирака, отвечающей точке v , на σ -алгебру борелевских п/м Q). Напомним важное свойство [29, (3.4)] : если $t \in T$, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ есть последовательность в $\mathcal{R}_t$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$, то

$$((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu) \Rightarrow ((\mu_i \otimes v)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu \otimes v \quad \forall v \in Q). \quad (12.6)$$

В свою очередь, (12.6) в комбинации с (4.5) реализует [29, (3.7)]. Мы получаем по аналогии с (4.6), что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$

$$\mathcal{X}^{(\text{II})}(t_*, x_*, v) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v) : \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])) \quad (12.7)$$

есть непустой компакт в $C_n([t_*, \vartheta_0])$ с топологией равномерной сходимости (в [29, раздел 3] использовалось обозначение $\mathcal{X}_{\text{II}}(t_*, x_*, v)$). Заметим, что (12.7) является вариантом множества (4.6) в случае, когда $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$ порождено постоянным на $[t_*, \vartheta_0]$ управлением v .

13. Операторы стабильности и итерационные процедуры на их основе

В настоящем разделе вводится аналог итерационной процедуры раздела 6, которая порождалась соответствующим вариантом оператора (6.1). Процедура, рассматриваемая ниже, соответствует [29, раздел 5].

Итак, при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ вводим оператор

$$\mathbb{A}[M] : \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n), \quad (13.1)$$

определяемый следующим правилом: если $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$\mathbb{A}[M](H) \triangleq \{(t, x) \in H \mid \forall v \in Q \exists x(\cdot) \in \mathcal{X}^{(\text{II})}(t, x, v) \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0] : ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \& ((\xi, x(\xi)) \in H \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])\}. \quad (13.2)$$

Отметим, что оператор (13.1),(13.2) отличается в общем случае от оператора стабильности в [29, раздел 4]. Однако нам понадобится только тот случай, когда в (13.2) $M \in \mathcal{F}$ и $H \in \mathcal{F}$; в этом случае (13.2) совпадает с [29, (4.3)]. Итак, мы используем ниже только тот случай (13.1), когда $M \in \mathcal{F}$. Мы не будем сейчас рассматривать подробно свойства данного оператора в применении к множествам из $\mathcal{F}$. Отметим только, что из положений [29, раздел 10] вытекает, что

$$\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}. \quad (13.3)$$

Далее мы используем (6.9) в случае $\mathbf{a} = \mathbb{A}[M]$, где $M \in \mathcal{F}$. Итак (см. (13.3)), при $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$ и $s \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{W}_s(M, N) \triangleq \mathbb{A}[M]^s(N) \in \mathcal{F}. \quad (13.4)$$

Отметим, что из (6.9) и (13.4) следует, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$(\mathcal{W}_0(M, N) = N) \& (\mathcal{W}_{s+1}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_s(M, N)) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0); \quad (13.5)$$

кроме того, получаем (см. (13.4), (13.5)), что

$$\mathcal{W}(M, N) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M, N) \in \mathcal{F}. \quad (13.6)$$

В связи с (13.5), (13.6) напомним положения [29, раздел 5]. Для наших целей существенно то, что (см. (13.2), (13.5))

$$\mathcal{W}_{s+1}(M, N) \subset \mathcal{W}_s(M, N) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0. \quad (13.7)$$

Кроме того, отметим, что (см. [19, § 5.4], [31, раздел 11])

$$\mathcal{W}(M, N) = W(M, N) \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F}. \quad (13.8)$$

Из (13.5), (13.7) вытекает, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{W}_k(M, N) \subset N; \quad (13.9)$$

кроме того, из (13.6), (13.8) следует очевидное равенство

$$W(M, N) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{W}_k(M, N). \quad (13.10)$$

При этом, как легко видеть,

$$(T \times \mathbb{R}^n) \setminus W(M, N) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} ((T \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{W}_k(M, N)) \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathcal{F}. \quad (13.11)$$

Более подробные сведения о процедуре (13.5), (13.6) см. в [29]; мы используем здесь лишь некоторые положения, связанные с уклонением в классе стратегий-троек (триплетов).

14. Процедуры уклонения

В настоящем разделе приводится краткая сводка положений [29, раздел 7], касающаяся допустимых процедур формирования управлений игрока Π и траекторий, порождаемых упомянутыми процедурами.

Через $\mathfrak{V}_{\text{pos}}$ обозначаем далее множество всех отображений из $T \times \mathbb{R}^n$ в $\mathcal{P}'(Q)$, т. е.

$$\mathfrak{V}_{\text{pos}} \triangleq \mathcal{P}'(Q)^{T \times \mathbb{R}^n} \quad (14.1)$$

есть множество всех позиционных стратегий игрока Π ; см. [2, 3]. Далее рассматриваются процедуры управления игрока Π с ограничением на число переключений.

Если $t \in T$, то полагаем, что

$$G^*(t) \triangleq \{g^* \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_0])^{C_n([t, \vartheta_0])} \mid \forall g_1 \in C_n([t, \vartheta_0]) \quad \forall g_2 \in C_n([t, \vartheta_0]) \quad \forall \theta \in [t, \vartheta_0] \\ ((g_1 \mid [t, \theta]) = (g_2 \mid [t, \theta])) \Rightarrow (g^*(g_1) \cap [t, \theta] = g^*(g_2) \cap [t, \theta])\}. \quad (14.2)$$

Элементы (14.2) называем правилами коррекции на отрезке $[t, \vartheta_0]$, где $t \in T$; пусть, кроме того,

$$\mathbf{G}_0^*(t) \triangleq G^*(t)^{\mathbb{R}^n}; \quad (14.3)$$

т. е. элементами (14.3) являются всевозможные отображения из $\mathbb{R}^n$ в $G^*(t)$. С учетом (14.3) полагаем, что

$$\mathbf{G}_\theta^* \triangleq \prod_{t \in [\theta, \vartheta_0]} \mathbf{G}_0^*(t) \quad \forall \theta \in T. \quad (14.4)$$

Элементы множества $\mathbf{G}_\theta^*$, где $\theta \in T$, называем стратегиями коррекции на отрезке $[\theta, \vartheta_0]$. Если $t_* \in T$, то (допустимой) стратегией-тройкой на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ называем всякий триплет (V, γ, k) , где $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\gamma \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$.

При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ каждой стратегии-тройке (V, γ, k) на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ сопоставляется [29, предложение 7.3] (непустой) пучок траекторий

$$\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k] \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_0])), \quad (14.5)$$

порожденных данной стратегией-тройкой из позиции (t_*, x_*) . Теперь мы можем рассматривать вариант (2.3), определяя $\mathfrak{V}(t_*, x_*)$ раздела 2 как множество всех стратегий-троек, конкретизируя для каждой такой стратегии $V_* = (V, \gamma, k)$ игрока Π множество $\mathfrak{X}_{\Pi}[t_*; x_*; V_*]$ как (14.5). Согласно [29, теорема 9.2] при $M \in \mathcal{F}'$, $N \in \mathcal{F}$ и $s \in \mathbb{N}$

$$N \setminus \mathcal{W}_s(M, N) = \{(t, y) \in N \mid \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \gamma \in \mathbf{G}_t^* \quad \exists k \in \overline{1, s} \\ \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t; y; V; \gamma; k] \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_0] ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \Rightarrow (\exists \xi \in [t, \vartheta]: (\xi, x(\xi)) \notin N)\}. \quad (14.6)$$

Из (13.8) и (14.6) получаем при $M \in \mathcal{F}'$ и $N \in \mathcal{F}$, что для позиций из $N \setminus \mathcal{W}(M, N)$ разрешима задача уклонения в классе стратегий-троек.

15. Функция цены

Вернемся к построениям раздела 8, связанным с оптимизацией функционала (8.5). Заметим, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbf{G}_{t_*}^*$, $k \in \mathbb{N}$ и $x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ определено значение

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+. \quad (15.1)$$

Мы напомним, что в [29, раздел 8] построен конкретный вариант стратегии-тройки, гарантирующей уклонение (и даже уклонение «с запасом») по отношению к заданным замкнутым множествам-параметрам игры сближения-уклонения (в [29, раздел 8] допускается даже несколько более общий случай, а именно: относительно множества, определяющего ФО для игрока I, требуется только замкнутость сечений). Сейчас мы рассмотрим результаты, создаваемые такими стратегиями-тройками, в терминах величин (15.1). В этой связи полезно напомнить предложение 8.2.

Предложение 15.1. Если $t_* \in T$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$, причем

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)), \quad (15.2)$$

то непременно $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon$.

Доказательство. Будем использовать (8.1), фиксируя $t_*, \varepsilon, x(\cdot)$ и ϑ со свойством (15.2). Тогда

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \vee ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)). \quad (15.3)$$

Оба случая в (15.3) рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала

$$(\vartheta, x(\vartheta)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon). \quad (15.4)$$

Тогда имеем неравенство

$$\varepsilon < \rho((\vartheta, x(\vartheta)); \mathbf{M}). \quad (15.5)$$

Поэтому (см. (8.1), (15.5)) в рассматриваемом случае (15.4)

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon. \quad (15.6)$$

Итак (см. (15.4), (15.6)), установлена импликация

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon). \quad (15.7)$$

2) Пусть теперь

$$(\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon). \quad (15.8)$$

Тогда в силу (15.2) для некоторого

$$t^* \in [t_*, \vartheta[\quad (15.9)$$

имеет место свойство

$$(t^*, x(t^*)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon). \quad (15.10)$$

Следовательно (см. (5.3)), имеем из (15.10), что

$$\kappa\varepsilon < \rho((t^*, x(t^*)); \mathbf{N}). \quad (15.11)$$

Поэтому (см. (15.11)) справедливо очевидное неравенство

$$\frac{1}{\kappa} \rho((t^*, x(t^*)); \mathbf{N}) > \varepsilon. \quad (15.12)$$

Тем более (см. (15.9), (15.12)) имеет место

$$\frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, x(t)); \mathbf{N}) > \varepsilon. \quad (15.13)$$

Поэтому из (8.1) и (15.13) имеем (и в случае (15.8)) неравенство

$$\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon. \quad (15.14)$$

Итак (см. (15.8), (15.14)), истинна импликация

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon). \quad (15.15)$$

Из (15.3), (15.7) и (15.15) имеем, что во всех возможных случаях $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) > \varepsilon$. $\square$

Следствие 15.1. *Если $t_* \in T$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и при этом*

$$\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)), \quad (15.16)$$

то справедливо неравенство $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) > \varepsilon$.

Доказательство. Фиксируем $t_* \in T$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ со свойством (15.16). Тогда согласно (8.1) при $\vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$ определено значение $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) \in \mathbb{R}_+$. В результате реализуется непрерывная функция (8.2). Кроме того определено значение $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in \mathbb{R}_+$ (см. (8.5)). При этом (см. (8.5)) для некоторого $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) = \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta_*). \quad (15.17)$$

Согласно (15.16) имеем, в частности, что

$$((\vartheta_*, x(\vartheta_*)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta_*]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)). \quad (15.18)$$

Итак, $t_* \in T$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$ и $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_0]$ обладают свойством (15.18). В силу предложения 15.1 имеем неравенство $\omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta_*) > \varepsilon$. Поэтому (см. (15.17)) $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) > \varepsilon$. $\square$

Напомним, что (см. (14.6)) согласно [29, теорема 9.2] при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{N}$ и $(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \gamma \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \overline{1, s} \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)). \quad (15.19)$$

При этом, в частности, имеем (см. (13.6)) при $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, что

$$S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} (S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon))). \quad (15.20)$$

Тогда из (15.19)–(15.20) получаем, что

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \forall (t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)) \\ & \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \gamma \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \mathbb{N} \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] \\ & ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon)). \end{aligned} \quad (15.21)$$

Предложение 15.2. Пусть $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon_* \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa)]$. Тогда, $\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \mathbb{N}$:

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) > \varepsilon_* \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]. \quad (15.22)$$

Доказательство. Напомним, что $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и при этом

$$\varepsilon_* < \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa). \quad (15.23)$$

По выбору (t_*, x_*) имеем один из следующих двух возможных случаев:

$$((t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \vee ((t_*, x_*) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \quad (15.24)$$

Оба случая в (15.24) рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала имеет место свойство

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \quad (15.25)$$

В силу (6.26) и (15.23) реализуется свойство

$$\varepsilon_* \notin \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa). \quad (15.26)$$

Поэтому $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+ \setminus \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa)$ и согласно (6.25) имеем, что

$$(t_*, x_*) \notin W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \quad (15.27)$$

В силу (13.8) и (15.27) получаем равенство

$$W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) = \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \quad (15.28)$$

и, следовательно,

$$(t_*, x_*) \notin \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \quad (15.29)$$

Из (15.25) и (15.29) вытекает, что $\varepsilon_* \in \mathbb{R}_+$ и

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \setminus \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \quad (15.30)$$

Тогда в силу (15.21) имеем свойство $\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \mathbb{N} \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))$. Пусть $V_* \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\gamma_* \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $r \in \mathbb{N}$ таковы, что $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r] \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \quad (15.31)$$

Заметим, что (см. (14.5))

$$(\mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r] \neq \emptyset) \& (\mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r] \subset C_n([t_*, \vartheta_0])). \quad (15.32)$$

Поэтому согласно следствию 15.1 $\forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r]$

$$\begin{aligned} & (\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0] ((\vartheta, x(\vartheta)) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \\ & \Rightarrow (\exists t \in [t_*, \vartheta]: (t, x(t)) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*))) \Rightarrow (\gamma_{t_*}(x(\cdot)) > \varepsilon_*). \end{aligned} \quad (15.33)$$

Из (15.31), (15.33) получаем, что (при условии (15.25))

$$\gamma_{t_*}(x(\cdot)) > \varepsilon_* \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V_*; \gamma_*; r]. \quad (15.34)$$

Итак (см. (15.25), (15.34)), установлено, что

$$\begin{aligned} & ((t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \\ \Rightarrow & (\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] \quad \gamma_{t_*}(x(\cdot)) > \varepsilon_*). \end{aligned} \quad (15.35)$$

2) Пусть теперь у нас

$$(t_*, x_*) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \quad (15.36)$$

Тогда по выбору (t_*, x_*) имеем, что

$$(t_*, x_*) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \quad (15.37)$$

В силу (5.3) и (15.37) имеем, что

$$\rho((t_*, x_*); \mathbf{N}) > \kappa\varepsilon_*. \quad (15.38)$$

Дальнейшее рассуждение, использующее непрерывность траекторий, приводит к импликациям

$$\begin{aligned} & ((t_*, x_*) \notin S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \\ \Rightarrow & (\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] \quad \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) > \varepsilon_*). \end{aligned} \quad (15.39)$$

Из (15.24), (15.35) и (15.39) имеем во всех возможных случаях, что

$$\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \quad \exists k \in \mathbb{N} : \varepsilon_* < \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]. \quad (15.40)$$

Тем самым установлено (15.22); предложение доказано. $\square$

Из предложения 15.2 вытекает, что $\forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)] \quad \exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \quad \exists \beta \in \mathbf{G}_{t_*}^* \quad \exists k \in \mathbb{N} :$

$$\varepsilon \leq \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \quad (15.41)$$

(мы учли (14.5) и предложение 15.2).

Напомним свойство [29, предложение 7.5].

Предложение 15.3. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$, то

$$\exists x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k] : \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.42)$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (14.5) для $\tilde{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ имеем, что $\tilde{x}(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_0])$. Согласно (15.1) имеем, что $\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\tilde{x}(\cdot)) \in \mathbb{R}_+$. При этом согласно (8.1) получаем, что

$$\omega_\kappa(t_*, \tilde{x}(\cdot), \vartheta) = \sup(\{\rho((\vartheta, \tilde{x}(\vartheta)); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, \tilde{x}(t)); \mathbf{N})\}) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0]. \quad (15.43)$$

С учетом (10.1) и (15.43) имеем, что

$$\omega_\kappa(t_*, \tilde{x}(\cdot), \vartheta) = \sup(\{\Psi(\vartheta, \tilde{x}(\vartheta)); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, \tilde{x}(t)); \mathbf{N})\}) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_0].$$

Поскольку выбор $\tilde{x}(\cdot)$ был произвольным, имеем, что

$$\begin{aligned} \omega_\kappa(t_*, x(\cdot), \vartheta) &= \sup(\{\Psi(\vartheta, x(\vartheta)); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \rho((t, x(t)); \mathbf{N})\}) \\ &\quad \forall x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]. \end{aligned} \quad (15.44)$$

Отметим, что согласно предложению 6.3

$$\varepsilon_* \triangleq \varepsilon_0(t_*, x_* | \kappa) \in \Sigma_0(t_*, x_* | \kappa). \quad (15.45)$$

Это означает, что (см. (6.25)) реализуется включение

$$(t_*, x_*) \in W(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)), \quad (15.46)$$

где $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*) \in \mathcal{F}$ и $S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*) \in \mathcal{F}$. Тогда в силу (13.8) и (15.46)

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \quad (15.47)$$

Из (13.6) и (15.47) вытекает, что

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_s(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0. \quad (15.48)$$

В частности, имеем, что (см. (15.48))

$$(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)). \quad (15.49)$$

Тогда согласно (15.49) и [29, предложения 7.5] для некоторых $\bar{x}(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$ и $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_0]$

$$((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})) \in S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*)) \& ((t, \bar{x}(t)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}]. \quad (15.50)$$

При этом в силу (15.50) имеем, что (см. (5.3))

$$(\rho((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})); \mathbf{M}) \leq \varepsilon_*) \& (\rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_*) \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}]. \quad (15.51)$$

Отметим, что $\bar{x}(t_*) = x_*$ и, как следствие,

$$(t_*, \bar{x}(t_*)) = (t_*, x_*). \quad (15.52)$$

Кроме того, из (15.49), (13.5) и (13.7) имеем, что

$$\mathcal{W}_k(S_0(\mathbf{M}, \varepsilon_*), S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)) \subset S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*),$$

а тогда в силу (15.49)

$$(t_*, x_*) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*). \quad (15.53)$$

Из (15.52), (15.53) имеем, что $(t_*, \bar{x}(t_*)) \in S_0(\mathbf{N}, \kappa\varepsilon_*)$, т. е.

$$\rho((t_*, \bar{x}(t_*)); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_*. \quad (15.54)$$

Из (15.51), (15.54) имеем по непрерывности функции $\rho(\cdot, \mathbf{N})$, что

$$\rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_* \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}]. \quad (15.55)$$

Заметим, что согласно (15.43)

$$\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) = \sup(\{\rho((\bar{\vartheta}, \bar{x}(\bar{\vartheta})); \mathbf{M}); \frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \bar{\vartheta}]} \rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N})\}). \quad (15.56)$$

При этом из (15.55) следует, что $\max_{t \in [t_*, \bar{\vartheta}]} \rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N}) \leq \kappa\varepsilon_*$, а потому имеем неравенство

$$\frac{1}{\kappa} \max_{t \in [t_*, \bar{\vartheta}]} \rho((t, \bar{x}(t)); \mathbf{N}) \leq \varepsilon_*. \quad (15.57)$$

В итоге из (15.51), (15.57) и (15.56) получаем неравенство,

$$\omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leq \varepsilon_*. \quad (15.58)$$

Из (8.5) и (15.58) теперь следует цепочка неравенств

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(\bar{x}(\cdot)) \leq \omega_\kappa(t_*, \bar{x}(\cdot), \bar{\vartheta}) \leq \varepsilon_*. \quad (15.59)$$

По выбору $\bar{x}(\cdot)$ имеем, следовательно, что (см. (15.45)) $\exists x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]$:

$$\gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_* = \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa).$$

□

Следствие 15.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}}$, $\beta \in \mathbf{G}_{t_*}^*$ и $k \in \mathbb{N}$, то

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.60)$$

Доказательство очевидно.

Получаем в силу свойств непустоты $\mathfrak{V}_{\text{pos}} \neq \emptyset$ и $\mathbf{G}_{t_*}^* \neq \emptyset$ (см. [29, раздел 7]), что

$$\left\{ \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) : (V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N} \right\} \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]) \\ \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n.$$

Тогда при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ определено (конечное) значение

$$\sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]. \quad (15.61)$$

Теорема 15.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, то справедливо равенство

$$\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) = \sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)). \quad (15.62)$$

Доказательство. Фиксируем $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. Тогда $\varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa) \in \mathbb{R}_+$. При этом согласно следствию 15.2 имеем

$$\mathbf{b}(V, \beta, k) \triangleq \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)] \quad \forall (V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}. \quad (15.63)$$

С учетом (15.63) получаем, что

$$\mathbf{B} \triangleq \{\mathbf{b}(V, \beta, k) : (V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}'([0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]) \quad (15.64)$$

(учитываем, что $\mathfrak{V}_{\text{pos}} \neq \emptyset$ и $\mathbf{G}_{t_*}^* \neq \emptyset$). В силу (15.64) имеем свойства

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}} &\triangleq \sup(\mathbf{B}) = \sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \mathbf{b}(V, \beta, k) \\ &= \sup_{(V, \beta, k) \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \times \mathbf{G}_{t_*}^* \times \mathbb{N}} \inf_{x(\cdot) \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \beta; k]} \gamma_{t_*}^{(\kappa)}(x(\cdot)) \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)]. \end{aligned} \quad (15.65)$$

В частности, $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}_+$ и, кроме того,

$$\tilde{\mathbf{b}} \leq \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa). \quad (15.66)$$

Вместе с тем, из (15.41) и (15.63) следует, что $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0(t_*, x_* \mid \kappa)[\exists V \in \mathfrak{V}_{\text{pos}} \exists \gamma \in \mathbf{G}_{t_*}^* \exists k \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon \leq \mathbf{b}(V, \gamma, k). \quad (15.67)$$

Из (15.66), (15.67) легко следует свойство (15.62). $\square$

16. Заключение

Теоремы 9.1 и 15.1 характеризуют $\varepsilon_0(\cdot \mid \kappa)$ как функцию цены при использовании (8.4) в качестве функционала платы. Таким образом, анализируя проблему определения наименьшего размера окрестностей, для которых (при заданной позиции) игрок I гарантированно осуществляет сближение в релаксированной задаче, мы пришли к новой игре, обладающей ценой, и установили совпадение этой цены с вышеупомянутым наименьшим размером окрестностей для каждой позиции игры. Важно и то, что данное отождествление удалось получить при учете соображений приоритетности, касающихся сближения с ЦМ и соблюдения ФО. Упомянутый учет осуществлялся посредством введения параметра κ , $\kappa > 0$. Влияние данного параметра отражено, в частности, в заключительной части раздела 11. Отметим, наконец важное представление в терминах неподвижной точки (см. теоремы 11.1 и 11.2), что характерно для конструкций на основе МПИ.

References

- [1] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, М., 1967. [R. Ayzeks, *Differentsial'nyye igry*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].
- [2] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, “Альтернатива для игровой задачи сближения”, *Прикладная математика и механика*, **34:6** (1970), 1005–1022. [N. N. Krasovskiy, A. I. Subbotin, “Al'ternativa dlya igrovoy zadachi sblizheniya”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **34:6** (1970), 1005–1022 (In Russian)].

- [3] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, М., Наука, 1974. [N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, *Pozitsionnyye differentsial'nyye igrы*, Moscow, Nauka Publ., 1974 (In Russian)].
- [4] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Физматлит, М., 1970. [N. N. Krasovskii, *Game Problems About Meeting Motions*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].
- [5] А. В. Кряжжимский, “К теории позиционных дифференциальных игр сближения – уклонения”, *Докл. АН СССР*, **239**:4 (1978), 779–782. [A. V. Kryazhimskiy, “On the theory of positional differential games of convergence-evasion”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **239**:4 (1978), 779–782 (In Russian)].
- [6] А. И. Субботин, *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби*, Наука, М., 1991. [A. I. Subbotin, *Minimaksnyye neravenstva i uravneniya Gamil'tona-Yakobi*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (In Russian)].
- [7] A. I. Subbotin, *Generalized Solutions of First-Order PDES. The Dynamical Optimization Perspective*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1995.
- [8] А. И. Субботин, *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2003. [A. I. Subbotin, *Obobshchennyye resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poruyadka. Perspektivy dinamicheskoy optimizatsii*, Institut komp'yuternykh isledovaniy, Moscow-Izhevsk, 2003 (In Russian)].
- [9] А. И. Субботин, “Об одном свойстве субдифференциала”, *Матем. сб.*, **182**:9 (1991), 1315–1330; англ. пер.: A. I. Subbotin, “On a property of the subdifferential”, *Math. USSR-Sb.*, **74**:1 (1993), 63–78.
- [10] А. Г. Ченцов, “О структуре одной игровой задачи сближения”, *Докл. АН СССР*, **224**:6 (1975), 1272–1275. [A. G. Chentsov, “The structure of a certain game-theoretic approach problem”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **224**:6 (1975), 1272–1275 (In Russian)].
- [11] А. Г. Ченцов, “К игровой задаче наведения с информационной памятью”, *Докл. АН СССР*, **227**:2 (1976), 306–308. [A. G. Chentsov, “On a game problem of guidance with information memory”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **227**:2 (1976), 306–308 (In Russian)].
- [12] А. Г. Ченцов, “Об игровой задаче сближения в заданный момент времени”, *Матем. сб.*, **99**(141):3 (1976), 394–420; англ. пер.: A. G. Chentsov, “On a game problem of converging at a given instant of time”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:3 (1976), 353–376.
- [13] А. Г. Ченцов, “Об игровой задаче сближения к заданному моменту времени”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 455–467; англ. пер.: A. G. Chentsov, “On the game problem of convergence at a given moment of time”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:2 (1978), 426–437.
- [14] В. И. Ухоботов, “Построение стабильного моста для одного класса линейных игр”, *Прикладная математика и механика*, **41**:2 (1977), 358–364. [V. I. Ukhobotov, “Postroyeniye stabil'nogo mosta dlya odnogo klassa lineynykh igr”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **41**:2 (1977), 358–364 (In Russian)].
- [15] С. В. Чистяков, “К решению игровых задач преследования”, *Прикладная математика и механика*, **41**:5 (1977), 825–832. [S. V. Chistyakov, “K resheniyu igrovyykh zadach presledovaniya”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **41**:5 (1977), 825–832 (In Russian)].
- [16] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, “Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений”, *Доклады Академии наук*, **348**:6 (1996), 736–739. [A. I. Subbotin, A. G. Chentsov, “Iteratsionnaya protsedura postroyeniya minimaksnykh i vyazkostnykh resheniy”, *Doklady Akademii nauk*, **348**:6 (1996), 736–739 (In Russian)].
- [17] А. Г. Ченцов, Д. М. Хачай, “Релаксация дифференциальной игры сближения-уклонения и методы итераций”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **24**, 2018, 246–269. [A. G. Chentsov, D. M. Khachai, “Relaxation of a differential game of approach-evasion and iterative methods”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **24**, 2018, 246–269 (In Russian)].
- [18] A. G. Chentsov, D. M. Khachay, “Program Iterations Method and Relaxation of a Pursuit-Evasion Differential Game”, *Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems: Theory and Applications. V. 203: Studies in Systems, Decision and Control*, 2019, 129–161.

- [19] А. И. Субботин, А. Г. Ченцов, *Оптимизация гарантии в задачах управления*, М., Наука, 1977. [A. I. Subbotin, A. G. Chentsov, *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1977 (In Russian)].
- [20] А. Г. Ченцов, “Метод программных итераций в игровой задаче наведения”, Тр. ИММ УрО РАН, **22**, 2016, 304–321; англ. пер.: A. G. Chentsov, “The program iteration method in a game problem of guidance”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **297**:suppl. 1 (2017), 43–61.
- [21] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, М., Мир, 1970. [K. Kuratovskiy, A. Mostovskiy, *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970 (In Russian)].
- [22] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1977.
- [23] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 2002.
- [24] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Изд-во иностр. лит., М., 1962. [N. Danford, Dzh. T. Shvarts, *Lineynyye Operatory. Obshchaya Teoriya*, Izd-vo inostr. lit., Moscow, 1962 (In Russian)].
- [25] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, М., Наука, 1977. [P. Billingsli, *Skhodimost' Veroyatnostnykh Mer*, Moscow, Nauka Publ., 1977 (In Russian)].
- [26] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engel'king, *Obshchaya Topologiya*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].
- [27] В. И. Богачев, *Основы теории меры*. Т. 2, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М.-Ижевск, 2003. [V. I. Bogachev, *Osnovy teorii меры*. V. 2, NITS “Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika”, Moscow–Izhevsk, 2003 (In Russian)].
- [28] В. И. Богачев, *Слабая сходимость мер*, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2016. [V. I. Bogachev, *Slabaya Skhodimost' mer*, Institut komp'yuternykh issledovaniy, Moscow–Izhevsk, 2016 (In Russian)].
- [29] А. Г. Ченцов, “Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений”, Тр. ИММ УрО РАН, **23**, 2017, 285–302. [A. G. Chentsov, “Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **23**, 2017, 285–302 (In Russian)].
- [30] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа*, Мир, М., 1964. [Zh. D'yedonne, *Osnovy Sovremennogo Analiza*, Mir Publ., Moscow, 1964 (In Russian)].
- [31] А. Г. Ченцов, *Деп. в ВИНТИ, 1933-79*, Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова, Свердловск, 1979. [A. G. Chentsov, *Dep. v VINITI, 1933-79*, Ural'skiy politekhnicheskii institut im. S. M. Kirova, Sverdlovsk, 1979 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 23 марта 2020 г.
Поступила после рецензирования 18 мая 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Received 23 March 2020
Reviewed 18 May 2020
Accepted for press 8 June 2020