

© Фомин В.И., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-57-67

УДК 517.1

О неограниченных комплексных операторах

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

About unbounded complex operators

Vasiliy I. FOMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Аннотация. Вводится понятие неограниченного комплексного оператора как оператора, действующего в декартовом квадрате банахова пространства. Доказывается, что каждый такой оператор является линейным. На множестве неограниченных комплексных операторов определяются линейные операции сложения и умножения на число а также операция умножения. Указываются условия коммутруемости операторов из этого множества. Рассматриваются произведение комплексно сопряжённых операторов и свойства операции сопряжения. Исследуются вопросы обратимости: предложены два сужения неограниченного комплексного оператора, которые имеют обратный оператор, при этом для одного из этих сужений найден явный вид обратного оператора. Отмечается, что неограниченные комплексные операторы могут найти применение при изучении линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве.

Ключевые слова: декартов квадрат банахова пространства; неограниченный комплексный оператор; линейный оператор; полуограниченный комплексный оператор; коммутруемость операторов; сопряжённый оператор; ядро оператора; обратный оператор; сужение оператора

Для цитирования: *Фомин В.И.* О неограниченных комплексных операторах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 57–67. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-57-67.

Abstract. The concept of an unbounded complex operator as an operator acting in the pull-back of a Banach space is introduced. It is proved that each such operator is linear. Linear operations of addition and multiplication by a number and also the operation of multiplication are determined on the set of unbounded complex operators. The conditions for commutability of operators from this set are indicated. The product of complex conjugate operators and the properties of the conjugation operation are considered. Invertibility questions are studied: two contractions of an unbounded complex operator that have an inverse operator are proposed, and an explicit form of the inverse operator is found for one of these restrictions. It is noted that unbounded complex operators can find application in the study of a linear homogeneous differential equation with constant unbounded operator coefficients in a Banach space.

Keywords: pull-back of a Banach space; unbounded complex operator; linear operator; semibounded complex operator; operator commutation; conjugate operator; operator kernel; inverse operator; operator contraction

For citation: Fomin V.I. On neogranichennykh kompleksnykh operatorakh [About unbounded complex operators]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 57–67. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-57-67. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть E — банахово пространство, $L(E)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве E , $P(E)$ — множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E , с плотными в E областями определения.

При исследовании в работах [1–6] линейного однородного дифференциального уравнения

$$x^{(n)}(t) + A_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + A_{n-1} x'(t) + A_n x(t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (0.1)$$

с линейными операторными коэффициентами A_i , $1 \leq i \leq n$, действующими в пространстве E , выяснилось, что вид решений этого уравнения определяется видом корней соответствующего характеристического операторного уравнения

$$Z^n + A_1 Z^{n-1} + \dots + A_{n-1} Z + A_n = O, \quad (0.2)$$

в частности, для уравнения второго порядка

$$x''(t) + A_1 x'(t) + A_2 x(t) = 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (0.3)$$

видом корней уравнения

$$Z^2 + A_1 Z + A_2 = O. \quad (0.4)$$

В свою очередь, вид корней уравнения (0.4) определяется видом операторного дискриминанта $\Delta = A_1^2 - 4A_2$. Уравнение (0.3) с коэффициентами $A_1, A_2 \in L(E)$ изучено в работе [1] в случае, когда уравнение (0.4) имеет действительные корни (т. е. при $\Delta = F^2$ или $\Delta = O$), в работе [5] — в случае, когда уравнение (0.4) имеет комплексно сопряжённые корни (т. е. при $\Delta = -F^2$, $F \neq O$). Уравнение (0.3) с коэффициентами $A_1, A_2 \in P(E)$ в случае действительных корней уравнения (0.4) изучено в работах [3, 6]. Уравнение (0.1) при $A_i \in L(E)$, $1 \leq i \leq n$, в случае простых действительных корней уравнения (0.2) изучено в работе [2]; в случае, когда уравнение (0.2) имеет кратные действительные корни, в работе [4]; в случае, когда уравнение (0.2) имеет наряду с действительными корнями комплексные корни, в работе [7]. При этом в [7] были использованы операторы из банаховой алгебры ограниченных комплексных операторов $C_{L(E)} = \{Z = A + JB \mid A, B \in L(E)\}$, рассмотренной в работе [8]. При $A_i \in P(E)$, $1 \leq i \leq n$, возможна ситуация, когда характеристическое операторное уравнение (0.2) имеет неограниченные комплексные корни, например, для уравнения (0.4) в случае $\Delta = -F^2$, $F \neq O$, такими корнями являются $Z_{1,2} = (1/2)(-A_1 \pm JF)$. В связи с этим актуальна задача изучения неограниченных комплексных операторов.

1. Основные понятия

Рассмотрим декартов квадрат банахова пространства E :

$$E^2 = E \times E = \{z = (x, y) | x, y \in E\}$$

с линейными операциями $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, где $\alpha \in R$; и любой из норм $\|(x, y)\| = [\|x\|^p + \|y\|^p]^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Напомним, что эти нормы эквивалентны и E^2 является банаховым пространством (см. [9, с. 103]). Для элемента $z = (x, y) \in E^2$ компоненты x и y называются соответственно действительной и мнимой частью этого элемента. В связи с тем, что линейные операции над элементами вида $(x, 0)$ из E^2 сводятся к линейным операциям в пространстве E , такие элементы можно отождествлять с их действительными частями:

$$(x, 0) = x \quad \forall x \in E, \quad (1.1)$$

в частности, нулевой элемент $\theta = (0, 0)$ пространства E^2 можно отождествлять с нулевым элементом пространства E .

Пусть $N(E)$ — множество неограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E .

З а м е ч а н и е 1.1. В дальнейшем предполагается, что рассматриваемые области определения операторов и пересечения таких областей содержат ненулевые элементы.

Напомним (см. [10, с. 207]): если $A \in N(E)$, $\alpha \in R$, то

$$\alpha A : D(\alpha A) \rightarrow E, \text{ где } D(\alpha A) = D(A); \quad (\alpha A)x = \alpha Ax;$$

если $A, B \in N(E)$, то

$$A + B : D(A + B) \rightarrow E, \text{ где } D(A + B) = D(A) \cap D(B); \quad (A + B)x = Ax + Bx;$$

$$AB : D(AB) \rightarrow E, \text{ где } D(AB) = \{x \in D(B) | Bx \in D(A)\}; \quad (AB)x = A(Bx).$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Неограниченным комплексным оператором называется упорядоченная пара $W = (A, B)$ двух операторов $A, B \in N(E)$, с областью определения $D(W) = \{(x, y) \in E^2 | x, y \in D(A) \cap D(B)\}$ и следующим законом действия: для любого элемента $z = (x, y) \in D(W)$

$$Wz = (A, B)(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx), \quad (1.2)$$

при этом операторы A и B называются соответственно действительной и мнимой частью комплексного оператора W .

Таким образом, $W : D(W) \rightarrow E^2$. Отметим, что $\theta \in D(W)$, следовательно $D(W) \neq \emptyset$, т. е. определение 1.1 корректно. Очевидно, что $W\theta = \theta$. Область значений неограниченного комплексного оператора W имеет вид $R(W) = \{h = Wz | z \in D(W)\}$ или, в силу формулы (1.2), $R(W) = \{(Ax - By, Ay + Bx) | (x, y) \in D(W)\}$.

Если $D(A) \cap D(B) = \{0\}$, то $D(W) = \{\theta\}$, $R(W) = \{\theta\}$. Такие неограниченные комплексные операторы называются тривиальными. В дальнейшем рассматриваются нетривиальные неограниченные комплексные операторы, т. е. операторы W , для которых $D(W) \neq \{\theta\}$.

Для любого $z = (x, 0) \in D(W)$ по формуле (1.2) $Wz = (A, B)(x, 0) = (Ax, Bx)$ или, в силу соглашения (1.1), $Wx = (Ax, Bx)$ для любого $x \in D(A) \cap D(B)$.

2. Основные результаты

Рассмотрим множество неограниченных комплексных операторов

$$C_{N(E)} = \{W = (A, B) \mid A, B \in N(E)\}.$$

Теорема 2.1. *Любой оператор $W = (A, B) \in C_{N(E)}$ является линейным.*

Доказательство. По определению линейного оператора, надо показать, что $D(W)$ является линейным многообразием в пространстве E^2 и оператор W обладает свойствами аддитивности и однородности. Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in D(W)$, следовательно, x_1, y_1, x_2, y_2 принадлежат $D(A)$ и $D(B)$. Тогда, в силу того, что $D(A)$, $D(B)$ — линейные многообразия в пространстве E , $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$ принадлежат $D(A)$ и $D(B)$, а это означает, что $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in D(W)$. Пусть $z = (x, y) \in D(W)$, $\alpha \in R$. Имеем: x, y принадлежат $D(A)$ и $D(B)$, следовательно $\alpha x, \alpha y$ принадлежат $D(A)$ и $D(B)$, а это означает, что $\alpha z = (\alpha x, \alpha y) \in D(W)$. Показано, что $D(W)$ является линейным многообразием в E^2 . Используя формулу (1.2) и аддитивность операторов A, B , получаем для любых $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in D(W)$

$$\begin{aligned} W(z_1 + z_2) &= (A(x_1 + x_2) - B(y_1 + y_2), A(y_1 + y_2) + B(x_1 + x_2)) \\ &= (Ax_1 + Ax_2 - By_1 - By_2, Ay_1 + Ay_2 + Bx_1 + Bx_2) \\ &= (Ax_1 - By_1, Ay_1 + Bx_1) + (Ax_2 - By_2, Ay_2 + Bx_2) = Wz_1 + Wz_2. \end{aligned}$$

Свойство аддитивности доказано. В силу однородности операторов A, B , для любых $z = (x, y) \in D(W)$, $\alpha \in R$ имеем

$$\begin{aligned} W(\alpha z) &= (A(\alpha x) - B(\alpha y), A(\alpha y) + B(\alpha x)) \\ &= (\alpha Ax - \alpha By, \alpha Ay + \alpha Bx) = \alpha(Ax - By, Ay + Bx) = \alpha Wz. \end{aligned}$$

Свойство однородности установлено. $\square$

Заметим, что $R(W)$ является линейным многообразием в пространстве E^2 как область значений линейного оператора (см. [11, с. 117]).

Используя линейность оператора W и применяя метод математической индукции, получаем: для любых $z_1, z_2, \dots, z_m \in D(W)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in R$

$$W\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i z_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i Wz_i.$$

Пусть $W_1 = (A_1, B_1)$, $W_2 = (A_2, B_2) \in C_{N(E)}$. В силу того, что $\theta \in D(W_1) \cap D(W_2)$, получаем

$$D(W_1) \cap D(W_2) \neq \emptyset. \quad (2.1)$$

По определению, $W_1 + W_2 : D(W_1 + W_2) \rightarrow E^2$, где $D(W_1 + W_2) = D(W_1) \cap D(W_2)$; для любого $z = (x, y) \in D(W_1 + W_2)$ $(W_1 + W_2)z = W_1z + W_2z$ или, в силу формулы (1.2), $(W_1 + W_2)(x, y) = ((A_1 + A_2)x - (B_1 + B_2)y, (A_1 + A_2)y + (B_1 + B_2)x)$, т. е. $W_1 + W_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$, $D(W_1 + W_2) = \{(x, y) \in E^2 \mid x, y \in D(A_1) \cap D(B_1) \cap D(A_2) \cap D(B_2)\}$. В силу соотношения (2.1) определение суммы $W_1 + W_2$ корректно. Если выполнено $D(W_1) \cap D(W_2) = \{\theta\}$, то оператор $W_1 + W_2$ является тривиальным.

Пусть $W = (A, B) \in C_{N(E)}$, $\alpha \in R$. По определению, $\alpha W : D(\alpha W) \rightarrow E^2$, где $D(\alpha W) = D(W)$; для любого $z = (x, y) \in D(\alpha W)$ $(\alpha W)z = \alpha Wz$ или, в силу формулы (1.2), $(\alpha W)(x, y) = \alpha(Ax - By, Ay + Bx)$, т. е. $\alpha W = (\alpha A, \alpha B)$.

Пусть $W_1 = (A_1, B_1)$, $W_2 = (A_2, B_2) \in C_{N(E)}$. По определению, $W_1 W_2 : D(W_1 W_2) \rightarrow E^2$, где $D(W_1 W_2) = \{z = (x, y) \in D(W_2) \mid W_2 z \in D(W_1)\}$; для любого $z = (x, y) \in D(W_1 W_2)$ $(W_1 W_2)z = W_1(W_2 z)$. Заметим, что $\theta \in D(W_1 W_2)$, следовательно, $D(W_1 W_2) \neq \emptyset$, т. е. определение произведения $W_1 W_2$ корректно. Если $D(W_1 W_2) = \{\theta\}$, то оператор $W_1 W_2$ является тривиальным. Согласно формуле (1.2) $W_2 z = (A_2 x - B_2 y, A_2 y + B_2 x)$,

$$\begin{aligned} (W_1 W_2)z &= W_1(W_2 z) \\ &= ((A_1 A_2 - B_1 B_2)x - (A_1 B_2 + B_1 A_2)y, (A_1 A_2 - B_1 B_2)y + (A_1 B_2 + B_1 A_2)x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

следовательно,

$$W_1 W_2 = (A_1, B_1)(A_2, B_2) = (A_1 A_2 - B_1 B_2, A_1 B_2 + B_1 A_2), \quad (2.3)$$

$$D(W_1 W_2) = \{(x, y) \in E^2 \mid x, y \in D(A_1 A_2) \cap D(B_1 B_2) \cap D(A_1 B_2) \cap D(B_1 A_2)\} \quad (2.4)$$

(согласно замечанию 1.1 предполагается, что $D(W_1 W_2) \neq \{\theta\}$).

Пусть $W = (A, B) \in C_{N(E)}$. Тогда $W^2 : D(W^2) \rightarrow E^2$, где

$$D(W^2) = \{z = (x, y) \in D(W) \mid Wz \in D(W)\}.$$

В силу соотношения (2.2) для любого $z = (x, y) \in D(W^2)$

$$W^2 z = ((A^2 - B^2)x - (AB + BA)y, (A^2 - B^2)y + (AB + BA)x),$$

т. е. $W^2 = (A^2 - B^2, AB + BA)$,

$$D(W^2) = \{(x, y) \in E^2 \mid x, y \in D(A^2) \cap D(B^2) \cap D(AB) \cap D(BA)\}. \quad (2.5)$$

Заметим, что $D(W^2) \subset D(W)$.

Наряду с ограниченными и неограниченными комплексными операторами можно рассмотреть полуограниченные комплексные операторы. По определению, множество таких операторов имеет вид $K = K_1 \cup K_2$, где $K_1 = \{W = (A, B) \mid A \in N(E), B \in L(E)\}$, $K_2 = \{W = (A, B) \mid A \in L(E), B \in N(E)\}$. По определению, для любого $W = (A, B) \in K$ $W : D(W) \rightarrow E^2$ по правилу (1.2). Заметим, что для $W = (A, B) \in K_1$ имеем $D(W) = \{(x, y) \in E^2 \mid x, y \in D(A)\}$, а для $W = (A, B) \in K_2$ $D(W) = \{(x, y) \in E^2 \mid x, y \in D(B)\}$.

Рассмотрим множество полуограниченных комплексных операторов вида

$$\Omega = \{W = (A, O) \mid A \in N(E)\}.$$

Заметим, что $\Omega \subset K_1$. Между множествами Ω и $N(E)$ существует взаимно однозначное соответствие $(A, O) \leftrightarrow A$, $A \in N(E)$. Тогда для любых $(A_1, O), (A_2, O) \in \Omega$ имеем

$$(A_1, O) + (A_2, O) = (A_1 + A_2, O) \leftrightarrow A_1 + A_2,$$

$$(A_1, O)(A_2, O) = (A_1 A_2, O) \leftrightarrow A_1 A_2,$$

т. е. комплексные операторы из множества Ω складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие им операторы из $N(E)$. Следовательно, любой комплексный оператор $(A, O) \in \Omega$ можно отождествить с соответствующим ему оператором A из $N(E)$:

$$(A, O) = A \quad \forall A \in N(E). \quad (2.6)$$

По той же причине любой ограниченный комплексный оператор вида (A, O) можно отождествить с соответствующим ему оператором A из $L(E)$: $(A, O) = A$ для любого $A \in L(E)$, в частности $(O, O) = O$, $(I, O) = I$.

Пусть $W = (A, O) \in \Omega$. Тогда, в силу формулы (1.2), для любого $z = (x, y) \in D(W)$ $Wz = (A, O)(x, y) = (Ax - Oy, Ay + Ox) = (Ax, Ay)$ или, в силу соглашения (2.6), $A(x, y) = (Ax, Ay)$. Для любого оператора $(P, Q) \in C_{N(E)}$, в силу соглашения (2.6) и равенства (2.3), получаем $A(P, Q) = (A, O)(P, Q) = (AP, AQ)$.

Любой оператор $W = (A, B) \in C_{N(E)}$ можно представить в виде суммы $W = (A, O) + (O, B)$. Рассмотрим мнимую операторную единицу $J = (O, I)$. В силу равенства (2.3) $JB = (O, I)(B, O) = (O, B)$. Учитывая соглашение (2.6), получаем

$$W = A + JB. \quad (2.7)$$

Заметим, что $JB = BJ$, следовательно, допустима также запись $W = A + BJ$. Далее, $J^2 = (-I, O) = -I$, поэтому J можно записать в виде $J = \sqrt{-I}$. По аналогии с комплексными числами представление (2.7) называется алгебраической формой комплексного оператора $W = (A, B)$. Действительная и мнимая части комплексного оператора W обозначаются соответственно через $\text{Re}W$, $\text{Im}W$: $\text{Re}W = A$, $\text{Im}W = B$.

Напомним, что операторы $A, B \in N(E)$ коммутируют на множестве

$$D(AB) \cap D(BA) = \{x \in D(A) \cap D(B) \mid Ax \in D(B), Bx \in D(A)\},$$

если $ABx = BAx$ для любого $x \in D(AB) \cap D(BA)$. Пусть

$$W_1 = A_1 + JB_1, \quad W_2 = A_2 + JB_2 \in C_{N(E)} \quad \text{и} \quad H = D(W_1W_2) \cap D(W_2W_1)$$

(согласно замечанию 1.1 предполагается, что $H \neq \{\theta\}$). Тогда $W_1W_2 = W_2W_1$ на множестве H , т. е. выполнено $W_1W_2z = W_2W_1z$ для любого $z \in H$, если $A_1A_2 = A_2A_1$, $B_1B_2 = B_2B_1$, $A_1B_2 = B_2A_1$, $B_1A_2 = A_2B_1$ соответственно на множествах

$$\begin{aligned} H_1 &= \{x \in D(A_1) \cap D(A_2) \mid A_1x \in D(A_2), A_2x \in D(A_1)\}, \\ H_2 &= \{x \in D(B_1) \cap D(B_2) \mid B_1x \in D(B_2), B_2x \in D(B_1)\}, \\ H_3 &= \{x \in D(A_1) \cap D(B_2) \mid A_1x \in D(B_2), B_2x \in D(A_1)\}, \\ H_4 &= \{x \in D(A_2) \cap D(B_1) \mid A_2x \in D(B_1), B_1x \in D(A_2)\}. \end{aligned}$$

Пусть оператор $W = A + JB \in C_{N(E)}$. Рассмотрим комплексно сопряженный ему оператор $\overline{W} = A - JB$. Заметим, что $D(\overline{W}) = D(W)$. Для любого $\alpha \in R$ имеем $\overline{\alpha W} = \alpha \overline{W}$. В силу равенства (2.3)

$$W\overline{W} = A^2 + B^2 + J(-AB + BA), \quad (2.8)$$

в частности, если

$$ABx = BAx \quad \forall x \in D(AB) \cap D(BA), \quad (2.9)$$

то

$$W\overline{W} = A^2 + B^2. \quad (2.10)$$

Из равенств (2.5), (2.8) следует, что $D(W\overline{W}) = D(W^2)$. Непосредственно проверяется, что для любых $W_1 = A_1 + JB_1$, $W_2 = A_2 + JB_2 \in C_{N(E)}$ выполнено $\overline{W_1 + W_2} = \overline{W_1} + \overline{W_2}$ на множестве $D(W_1) \cap D(W_2)$. Далее, из равенства (2.3) получаем

$$\overline{W_1 W_2} = A_1 A_2 - B_1 B_2 - J(A_1 B_2 + B_1 A_2). \quad (2.11)$$

В силу равенств (2.4), (2.11) $D(\overline{W_1 W_2}) = D(W_1 W_2)$. Из соотношения (2.3) следует равенство

$$\overline{W_1} \overline{W_2} = A_1 A_2 - B_1 B_2 + J(-A_1 B_2 - B_1 A_2). \quad (2.12)$$

Заметим, что $D(\overline{W_1} \overline{W_2}) = D(\overline{W_1 W_2}) = D(W_1 W_2)$. Из соотношений (2.11), (2.12) следует, что $\overline{W_1 W_2} = \overline{W_1} \overline{W_2}$ на множестве $D(W_1 W_2)$.

Пусть $W = A + JB \in C_{N(E)}$. Рассмотрим ядро оператора W :

$$\text{Ker} W = \{z = (x, y) \in E^2 \mid Wz = \theta\}.$$

Заметим, что $\text{Ker} W \neq \emptyset$, так как $\theta \in \text{Ker} W$. Известно [11, с. 133], что линейный оператор имеет обратный оператор тогда и только тогда, когда ядро этого оператора состоит только из нулевого элемента. Следовательно, при выполнении условия

$$\text{Ker} W = \{\theta\} \quad (2.13)$$

существует $W^{-1} : R(W) \rightarrow D(W)$; для любого $h = Wz \in R(W)$ $W^{-1}h = z$. Оператор W^{-1} является линейным оператором как оператор, обратный линейному оператору (см. [12, с. 225]). В силу равенства (1.2) условие (2.13) выполняется лишь в том случае, когда система уравнений

$$\begin{aligned} Ax - By &= 0, \\ Bx + Ay &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

рассматриваемая при $x, y \in D(A) \cap D(B)$, не имеет других решений, кроме нулевого решения $x = 0$, $y = 0$. Операторный определитель системы уравнений (2.14) имеет вид $T = A^2 + B^2$. Заметим, что $D(T) = D(A^2) \cap D(B^2)$, $R(T) = \{u = Tx \mid x \in D(T)\}$, $D(T) \subset D(A) \cap D(B)$, оператор T является линейным. При выполнении условия (2.9) получаем, в силу равенства (2.10), $T = W\overline{W}$. Пусть $\text{Ker} T = \{0\}$. Тогда существует $T^{-1} : R(T) \rightarrow D(T)$; для любого $u = Tx \in R(T)$ $T^{-1}u = x$. Оператор T^{-1} является линейным.

Рассмотрим сужение оператора W на множество $D(W^2)$ (которое задаётся равенством (2.5)), т. е. оператор $\hat{W} : D(\hat{W}) \rightarrow R(\hat{W})$, где $D(\hat{W}) = D(W^2)$; для любого $z = (x, y) \in D(\hat{W})$ $\hat{W}z = Wz$. Напомним, что $R(\hat{W}) = \{h = \hat{W}z \mid z \in D(\hat{W})\}$.

Заметим, что условие $\text{Ker} \hat{W} = \{\theta\}$ выполняется лишь в том случае, когда система (2.14), рассматриваемая при $x, y \in M$, где $M = D(A^2) \cap D(B^2) \cap D(AB) \cap D(BA)$, не имеет других решений, кроме нулевого решения $x = 0$, $y = 0$.

Пусть выполняется условие (2.9) и, кроме того,

$$\exists T^{-1} \in L(E). \quad (2.15)$$

Рассмотрим систему уравнений (2.14) при $x, y \in M$. Применяя к первому и второму уравнениям системы (2.14) соответственно операторы A и B и учитывая равенства $A0 = 0$, $B0 = 0$, получаем $A^2x - ABu = 0$, $B^2x + BAu = 0$. Складывая эти соотношения и учитывая условие (2.9), получаем $Tx = 0$, следовательно, $T^{-1}Tx = T^{-1}0$, т. е. $x = 0$. Аналогично, применяя к первому и второму уравнениям системы (2.14) соответственно операторы B и A , получаем $BAx - B^2y = 0$, $ABx + A^2y = 0$. Вычитая из второго соотношения первое, имеем $Ty = 0$, следовательно, $T^{-1}Ty = T^{-1}0$, т. е. $y = 0$. Показано, что система уравнений (2.14), рассматриваемая при $x, y \in M$, имеет только нулевое решение. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2. *При выполнении условий (2.9), (2.15) $\hat{W}$ имеет обратный оператор $\hat{W}^{-1} : R(\hat{W}) \rightarrow D(\hat{W})$; для любого элемента $h = \hat{W}z \in R(\hat{W})$ $\hat{W}^{-1}h = z$.*

В дальнейшем потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть операторы $P, Q \in N(E)$ удовлетворяют следующим условиям:*

- а) *на множестве $G = D(PQ) \cap D(QP) = \{x \in D(P) \cap D(Q) | Px \in D(Q), Qx \in D(P)\}$ выполнено $PQ = QP$;*
- б) *существует $Q^{-1} \in L(E)$.*

Тогда $PQ^{-1} = Q^{-1}P$ на множестве $Q(G)$.

Доказательство. Пусть $y \in Q(G)$, т. е. $y = Qx$, где $x \in G$. Следовательно, $x = Q^{-1}y$. Имеем: $x \in G \Rightarrow x \in D(PQ) \Rightarrow y = Qx \in D(P)$. Тогда, в силу условия а) $Pu = PQx = QPx$, следовательно, $Q^{-1}Pu = Q^{-1}QPx$, т. е. $Q^{-1}Pu = PQ^{-1}y$. $\square$

Заметим, что утверждения, аналогичные лемме 2.1, сформулированы в виде задач в [10, с. 218], [13, с. 55].

При выполнении условия (2.9) справедливы следующие равенства: $AT = TA$ на множестве $M_1 = D(A^3) \cap D(AB^2) \cap D(B^2A)$ и $BT = TB$ на множестве $M_2 = D(B^3) \cap D(BA^2) \cap D(A^2B)$. Пусть выполняется условие (2.15). Тогда, в силу леммы 2.1,

$$AT^{-1} = T^{-1}A, \quad BT^{-1} = T^{-1}B \quad (2.16)$$

на множестве $T(M_1 \cap M_2)$. Напомним, что, согласно замечанию 1.1, предполагается следующее: действительная и мнимая части рассматриваемого комплексного оператора $W = A + JB$ таковы, что $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$.

Лемма 2.2. *Справедливы включения*

$$M_1 \cap M_2 \subset D(AB) \cap D(BA), \quad (2.17)$$

$$T(M_1 \cap M_2) \subset D(A) \cap D(B). \quad (2.18)$$

Доказательство. Пусть $x \in M_1 \cap M_2$. Тогда $x \in D(A^2B)$, $x \in D(B^2A)$, следовательно, $x \in D(AB)$, $x \in D(BA)$, т. е. $x \in D(AB) \cap D(BA)$. Включение (2.17) доказано.

Пусть $u \in T(M_1 \cap M_2)$, т. е. $u = Tx$, где $x \in M_1 \cap M_2$. Имеем: $x \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow A^2x \in D(A)$, $A^2x \in D(B)$, $B^2x \in D(A)$, $B^2x \in D(B) \Rightarrow A^2x \in D(A) \cap D(B)$, $B^2x \in D(A) \cap D(B) \Rightarrow u = Tx = A^2x + B^2x \in D(A) \cap D(B)$. Включение (2.18) установлено. $\square$

Если выполняется условие (2.9), то, в силу включения (2.17), имеем

$$ABx = BAx \quad \forall x \in M_1 \cap M_2. \quad (2.19)$$

Пусть $\Phi = \{h = (u, v) \in E^2 \mid u, v \in T(M_1 \cap M_2)\}$. Тогда в силу включения (2.18) выполнено $\Phi \subset D(W)$. Рассмотрим сужение оператора W на множество Φ , т. е. оператор $\tilde{W} : D(\tilde{W}) \rightarrow R(\tilde{W})$, где $D(\tilde{W}) = \Phi$; для любого $h = (u, v) \in D(\tilde{W})$ $\tilde{W}h = Wh$. Напомним, что $R(\tilde{W}) = \{d = \tilde{W}h \mid h \in D(\tilde{W})\}$.

Теорема 2.3. При выполнении условий (2.9), (2.15) $\tilde{W}$ имеет обратный оператор

$$\tilde{W}^{-1} = AT^{-1} - JBT^{-1}.$$

Доказательство. Покажем, что

$$\tilde{W}^{-1}\tilde{W}h = h \quad \forall h = (u, v) \in D(\tilde{W}). \quad (2.20)$$

Пусть $h = (u, v) \in D(\tilde{W})$. Тогда $u, v \in T(M_1 \cap M_2)$, т. е. $u = Tx$, $v = Ty$, где $x, y \in M_1 \cap M_2$. Используя операцию умножения (2.3), формулу (1.2), соотношения (2.16), равенство (2.19) и свойство ассоциативности, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{-1}\tilde{W}h &= \tilde{W}^{-1}Wh = \tilde{W}^{-1}W(Tx, Ty) = (AT^{-1}, -BT^{-1})(A, B)(Tx, Ty) \\ &= (AT^{-1}A + BT^{-1}B, AT^{-1}B - BT^{-1}A)(Tx, Ty) \\ &= ((AT^{-1}A + BT^{-1}B)Tx - (AT^{-1}B - BT^{-1}A)Ty, \\ &\quad (AT^{-1}A + BT^{-1}B)Ty + (AT^{-1}B - BT^{-1}A)Tx) \\ &= ((A^2T^{-1} + B^2T^{-1})Tx - (ABT^{-1} - BAT^{-1})Ty, \\ &\quad (A^2T^{-1} + B^2T^{-1})Ty + (ABT^{-1} - BAT^{-1})Tx) \\ &= (TT^{-1}Tx - (AB - BA)T^{-1}Ty, TT^{-1}Ty + (AB - BA)T^{-1}Tx) \\ &= (Tx - (AB - BA)y, Ty + (AB - BA)x) = (Tx, Ty) = (u, v) = h. \end{aligned}$$

Получили равенство $\tilde{W}^{-1}\tilde{W}h = h$. Соотношение (2.20) доказано. Из этого соотношения следует равенство $\tilde{W}\tilde{W}^{-1}d = d$ для любого $d \in R(\tilde{W})$. Действительно, пусть $d \in R(\tilde{W})$, т. е. $d = \tilde{W}h$, где $h \in D(\tilde{W})$. Тогда $\tilde{W}\tilde{W}^{-1}d = \tilde{W}(\tilde{W}^{-1}d) = \tilde{W}(\tilde{W}^{-1}\tilde{W}h) = \tilde{W}h = d$. $\square$

При исследовании уравнения (0.1), в частности, уравнения (0.3) в случае, когда $A_i \in P(E)$, $1 \leq i \leq n$, и соответствующее характеристическое операторное уравнение имеет комплексные корни с отличной от нуля мнимой частью, приходится использовать операторы из класса $C_{P(E)} = \{W = A + JB \mid A, B \in P(E)\}$ неограниченных комплексных операторов.

References

- [1] В. И. Фомин, “О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **38**:8 (2002), 1140–1141; англ. пер.: V. I. Fomin, “On the Solution of the Cauchy Problem for a Second-Ordered Linear Differential Equation in a Banach Space”, *Differential Equations*, **38**:8 (2002), 1219–1221.

- [2] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:5 (2005), 656–660; англ. пер.: V. I. Fomin, “On the General Solution of a Linear n th Order Differential Equation with Constant Bounded Operator Coefficients in a Banach Space”, *Differential Equations*, **41**:5 (2005), 687–692.
- [3] В. И. Фомин, “О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:8 (2005), 1130–1133; англ. пер.: V. I. Fomin, “On the Solution of the Cauchy Problem for a Second-Ordered Linear Differential Equation with Constant Unbounded Operator Coefficients in a Banach Space”, *Differential Equations*, **41**:8 (2005), 1187–1191.
- [4] В. И. Фомин, “О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **43**:5 (2007), 710–713; англ. пер.: V. I. Fomin, “On the Case of Multiple Roots of the Characteristic Operator Polynomial of an n th Order Linear Homogeneous Differential Equation in a Banach Space”, *Differential Equations*, **43**:5 (2007), 732–735.
- [5] В. И. Фомин, “О линейном дифференциальном уравнении второго порядка в банаховом пространстве в случае негативного операторного дискриминанта”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **13**:1 (2008), 38–42. [V. I. Fomin, “On a second-order linear differential equation in Banach space in the case of a negative operator discriminant”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **13**:1 (2008), 38–42 (In Russian)].
- [6] В. И. Фомин, “Об одном семействе решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **44**:3 (2008), 427–428; англ. пер.: V. I. Fomin, “On a Family of Solutions of a Linear Second-Order Differential Equation with Constant Unbounded Operator Coefficients in a Banach Space”, *Differential Equations*, **44**:3 (2008), 449–451.
- [7] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 237–243. [V. I. Fomin, “On a general solution of a linear homogeneous differential equations in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 237–243 (In Russian)].
- [8] В. И. Фомин, “О банаховой алгебре комплексных операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 813–823. [V. I. Fomin, “On the Banach algebra of complex operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 813–823 (In Russian)].
- [9] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Иностранная литература, М., 1962. [N. Dunford, J. Schwartz, *Linejnye operatory. Obshchaya teoriya*, Inostrannaya literatura, Moscow, 1962 (In Russian)].
- [10] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [T. Kato, *Teoriya vozmushchenij linejnyh operatorov*, Mir, Moscow, 1972 (In Russian)].
- [11] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Funkcionalnyj analiz*, Nauka, Moscow, 1980 (In Russian)].
- [12] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementy teorii funkcij i funkcionalnogo analiza*, Nauka, Moscow, 1976 (In Russian)].
- [13] В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Физматлит, М., 2002. [V. A. Trenogin, B. M. Piskarevskij, T. S. Soboleva, *Zadachi i uprazhneniya po funkcionalnomu analizu*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasilyfomin@bk.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3846-4882>

Поступила в редакцию 25 декабря 2019 г.

Поступила после рецензирования 4 февраля 2020 г.

Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasilyfomin@bk.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3846-4882>

Received 25 December 2019

Reviewed 4 February 2020

Accepted for press 6 March 2020