Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-18-24
УДК 517.988.6, 515.124.2

О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ[1], **Вассим МЕРЧЕЛА**[2], **Андрей Игоревич ШИНДЯПИН**[3]

[1)] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

[2)] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[3)] Университет имени Эдуардо Мондлане
3453, Мозамбик, г. Мапуто, ул. Джулиуса Нейрере

On coincidence points of mappings in generalized metric spaces

Tatiana V. ZHUKOVSKAIA[1], **Wassim MERCHELA**[2], **Andrey I. SHINDIAPIN**[3]

[1] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

[3] Eduardo Mondlane University
Julius Nyerere Av., Maputo 3453, Mozambique

Аннотация. Пусть на пространстве X определена ∞-метрика ρ (возможно, принимающая значение ∞), на пространстве Y определено удовлетворяющее аксиоме тождества ∞-расстояние $d.$ Для отображений $F,G:X\to Y$ рассматривается задача о точке совпадения, т.е. задача о решении уравнения $F(x)=G(x).$ Получены условия существования точки совпадения, использующие множество накрывания отображения F и множество липшицевости отображения G в пространстве $X\times Y.$ Множество α-накрывания ($\alpha>0$) отображения F — это множество таких $(x,y),$ что

$$\exists u\in X\ F(u)=y,\quad \rho(x,u)\le\alpha^{-1}d(F(x),y),\quad \rho(x,u)<\infty,$$

а множество β-липшицевости ($\beta\ge 0$) отображения G — множество таких $(x,y),$ что

$$\forall u\in X\ G(u)=y\ \Rightarrow\ d(y,G(x))\le\beta\rho(u,x).$$

Обсуждается связь полученных результатов с известными теоремами о точках совпадения.

Ключевые слова: точка совпадения двух отображений; метрика; расстояние; накрывающее отображение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке UEM-SIDA 2017-2022 (Подпрограмма № 1.4.2: Наращивание потенциала в математике, статистике и ее приложениях).

Для цитирования: *Жуковская Т.В., Мерчела В., Шиндяпин А.И.* О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 18–24. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-18-24.

Abstract. Let X be a space with ∞-metric ρ (a metric with possibly infinite value) and Y a space with ∞-distance d satisfying the identity axiom. We consider the problem of coincidence point for mappings $F, G : X \to Y$, i.e. the problem of existence of a solution for the equation $F(x) = G(x)$. We provide conditions of the existence of coincidence points in terms of a covering set for the mapping F and a Lipschitz set for the mapping G in the space $X \times Y$. An α-covering set ($\alpha > 0$) of the mapping F is a set of (x, y) such that

$$\exists u \in X \ F(u) = y, \quad \rho(x,u) \le \alpha^{-1} d(F(x), y), \quad \rho(x,u) < \infty,$$

and a β- Lipschitz set ($\beta \ge 0$) for the mapping G is a set of (x, y) such that

$$\forall u \in X \ G(u) = y \ \Rightarrow \ d(y, G(x)) \le \beta \rho(u, x).$$

The new results are compared with the known theorems about coincidence points.

Keywords: coincidence point of two mappings; metric; distance; covering mapping

Acknowledgements: The work is partially supported by the UEM-SIDA 2017-2022 (Subprogramme № 1.4.2: Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications).

For citation: Zhukovskaia T.V., Merchela W., Shindiapin A.I. O tochkakh sovpadeniya otobrazheniy v obobshchennykh metricheskikh prostranstvakh [On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 18–24.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-18-24. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теорема о существовании точки совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующими в метрических пространствах, получена А. В. Арутюновым в [1]. В работах [2–4] понятие накрывания было распространено на пространства с различными обобщенными метриками и получены обобщения на такие пространства теоремы о точке совпадения. Эти исследования вызваны не только естественным стремлением определить максимально широкий класс пространств, в которых справедливы результаты о точках совпадения, но и приложениями таких утверждений к различным функциональным уравнениям (в том числе, к дифференциальным и интегральным уравнениям, см., например, [5]).

Данная работа продолжает исследование, начатое в работе [6], в которой было получено утверждение о существовании точки совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих из метрического пространства в множество с расстоянием, удовлетворяющим только аксиоме тождества. Здесь мы предполагаем, что расстояние и метрика в рассматриваемых пространствах могут принимать значение ∞, и ослабляем предположения о накрывающих и липшицевых свойствах отображений.

Предлагаемые в статье результаты о точках совпадения отображений в дальнейшем планируется использовать для исследования функциональных уравнений в пространстве измеримых функций.

1. Основные понятия

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, $X = (X, \rho)$ — пространство с ∞-*метрикой* $\rho : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $B_X(x_0, r) = \{x \in X |\, \rho(x, x_0) \le r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in (0, \infty]$.

Пусть на множестве $Y \neq \emptyset$ задано *расстояние* $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее аксиоме тождества:

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \ \Leftrightarrow \ y_1 = y_2. \tag{1.1}$$

Будем говорить, что последовательность $\{y_i\} \subset Y$ *сходится* при $i \to \infty$ к $y \in Y$ и писать $y_i \to y$, если $d(y_i, y) \to 0$. Очевидно, сходящаяся в Y последовательность может иметь более одного предела, кроме того, при сходимости $y_i \to y$ расстояние $d(y, y_i)$ может не сходиться к 0. Для произвольной последовательности $\{y_i\} \subset Y$ обозначим через $\mathrm{Lim} y_i = \{y |\, y_i \to y\}$ множество всех пределов этой последовательности.

Отображение $f : X \to Y$ будем называть *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \to x$ выполнено $f(x_i) \to f(x)$, т. е. $f(x) \in \mathrm{Lim} f(x_i)$. Отображение, непрерывное во всех точках множества $V \subset X$, будем называть непрерывным на множестве V. Отметим, что для непрерывности отображения f в точке x единственность предела $f(x)$ последовательности $\{f(x_i)\}$ не требуется. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 1.1. Пусть $X = Y = [0, 1]$, причем в X задана «стандартная метрика» $\rho(x, u) = |x - u|$, $x, u \in [0, 1]$, а в Y — расстояние, определяемое следующими соотношениями:

$$\forall y, z \in [0,1] \ \ y > z \ \Rightarrow \ d(y, z) = d(z, y) = \begin{cases} y - z & \text{при } y \neq 1 \text{ и } z \neq 0; \\ \min\{z, 1 - z\} & \text{при } y = 1 \text{ и } z \neq 0; \\ \min\{y, 1 - y\} & \text{при } y \neq 1 \text{ и } z = 0; \\ 1 & \text{при } y = 1 \text{ и } z = 0. \end{cases}$$

В пространстве Y каждая из последовательностей $y_i = i^{-1}$, $z_i = -i^{-1} + 1$ имеет два предела 0 и 1. Отображение $f : X \to Y$, равное $f(x) = x$ при $x \in (0, 1)$ и принимающее любое из значений 0 или 1 при $x = 0$ и $x = 1$, является непрерывным на всем пространстве X.

Теперь приведем определение свойства замкнутости отображения $f : X \to Y$. Обычно используемому для пространств с расстоянием определению замкнутости отображений (см., например, [2,8]) не удовлетворяет отображение f в точке $x \in X$, для которой при $x_i \to x$ предел последовательности $\{f(x_i)\}$ не единственный, и это значительно сокращает преимущества рассмотрения уравнений в пространствах с расстоянием вместо метрики. Поэтому здесь предлагается ослабление этого понятия. Отображение f будем называть *замкнутым* в точке x, если для любой последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \to x$ и $\mathrm{Lim} f(x_i) \neq \emptyset$, выполнено $f(x) \in \mathrm{Lim} f(x_i)$. При таком определении единственность предела последовательности $\{f(x_i)\}$ не является необходимым условием замкнутости отображения. Заметим также, что из непрерывности f в точке x следует замкнутость f в этой точке (как и для отображений «обычных метрических» пространств). Отображение, замкнутое во всех точках множества $V \subset X$, будем называть замкнутым на множестве V.

Сформулируем известные определения свойств накрывания и липшицевости (см. [1]), заменив в пространстве образов «обычную метрику» на расстояние.

Пусть заданы $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Отображение $f : X \to Y$ называется *α-накрывающим на множестве* $V \subset X$, если для любых $x \in V$, $y \in Y$ существует $u \in X$ такой, что $f(u) = y$ и $\rho_X(x, u) \leq \alpha^{-1} d\big(f(x), y\big)$. Отображение $f : X \to Y$ называется *β-липшицевым на множестве* $V \subset X$, если для любых $x, u \in V$ выполнено неравенство $d\big(f(x), f(u)\big) \leq \beta\rho(x, u)$.

В формулируемых ниже утверждениях предполагаются выполненными условия, аналогичные приведенным условиям накрывания и липшицевости отображения $f : X \to Y$, использующие следующие множества, введенные в [7]:

$$\mathrm{Cov}_\alpha[f] = \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \exists u \in X \;\, f(u) = y,\; \rho(x, u) \leq \alpha^{-1} d(f(x), y),\;\; \rho(x, u) < \infty\big\};$$
$$\mathrm{Lip}_\beta[f] = \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \forall u \in X \;\, f(u) = y \;\Rightarrow\; d(y, f(x)) \leq \beta\rho(u, x)\big\}.$$

Будем называть первое из этих множеств $\mathrm{Cov}_\alpha[f]$ *множеством α-накрывания* этого отображения, а второе множество $\mathrm{Lip}_\beta[f]$ — *множеством β-липшицевости.* Равенство $\mathrm{Cov}_\alpha[f] = V \times Y$ равносильно α-накрыванию на V отображения f, а равенство $\mathrm{Lip}_\beta[f] = V \times Y$ — β-липшицевости на V этого отображения.

2. Теорема о точке совпадения отображений

Пусть заданы отображения $F, G : X \to Y$. Их точкой совпадения называют $x \in X$ такой, что

$$F(x) = G(x). \tag{2.2}$$

Сформулируем условия существования точки совпадения.

Теорема 2.1. *Пусть метрическое пространство X полное и заданы $\alpha > \beta \geq 0$, $x_0 \in X$ такие, что $d\big(F(x_0), G(x_0)\big) < \infty$. Положим*

$$R = (\alpha - \beta)^{-1} d\big(F(x_0), G(x_0)\big), \quad V = B_X(x_0, R).$$

Предположим, что для любого $x \in V$ выполнены включения $(x, F(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[G]$, $(x, G(x)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F]$; на шаре V отображение F является замкнутым, а отображение G — непрерывным, и имеет место следующее соотношение

$$\forall\{x_i\} \subset V \;\forall x \in V \;\; \big(\, x_i \to x \;\; \text{и} \;\; \mathrm{Lim} F(x_i) = \mathrm{Lim} G(x_i) \neq \emptyset \,\big) \;\Rightarrow\; F(x) = G(x). \tag{2.3}$$

Тогда в шаре V существует решение уравнения (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что существует последовательность $\{x_i\} \subset X$ такая, что выполнены соотношения

$$\begin{gathered} x_i \in V, \quad F(x_i) = G(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \\ \rho(x_{i-1}, x_i) \leq q\rho(x_{i-2}, x_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, \quad \text{где} \;\; q = \beta/\alpha. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Проверим эти соотношения при $i = 1$ и $i = 2$. Пусть x_0 — это заданный в условиях теоремы элемент, $y_0 = G(x_0)$. В силу предположения $(x_0, y_0) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F]$, существует $x_1 \in X$ такой, что

$$F(x_1) = G(x_0) \;\; \text{и} \;\; \rho(x_0, x_1) \leq \alpha^{-1} d\big(F(x_0), G(x_0)\big), \tag{2.5}$$

поэтому $\rho(x_0,x_1) \le R$, и значит, выполнено $x_1 \in V$. Положим $y_1 = G(x_1)$. Поскольку $(x_1,y_0) \in \mathrm{Lip}_\beta[G]$, имеет место неравенство

$$d(y_0,y_1) = d\big(G(x_0),G(x_1)\big) \le \beta\rho(x_0,x_1). \tag{2.6}$$

Теперь, в силу предположения $(x_1,y_1) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F]$, существует $x_2 \in X$ такой, что выполнено $F(x_2) = G(x_1)$ и $\rho(x_1,x_2) \le \alpha^{-1}d\big(F(x_1),G(x_1)\big)$, поэтому из соотношений (2.5) и (2.6) получим $\rho(x_1,x_2) \le q\rho(x_0,x_1)$. Заметим, что $x_2 \in V$, так как

$$\rho(x_0,x_2) \le \rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2) \le \alpha^{-1}(1+q)d(F(x_0),G(x_0)) \le R.$$

Таким образом, при $i=1$ и $i=2$ соотношения (2.4) выполнены.

Предположим, что при всех натуральных $i = \overline{1,n}$ определены элементы $x_i \in X$, так, что выполнены соотношения (2.4). Покажем, что существует элемент x_{n+1}, удовлетворяющий также этим соотношениям.

Так как $(x_n,y_n) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F]$, существует $x_{n+1} \in X$ такой, что

$$F(x_{n+1}) = G(x_n)$$

и имеет место неравенство

$$\rho(x_n,x_{n+1}) \le \alpha^{-1}d\big(F(x_n),G(x_n)\big).$$

Следовательно,

$$\rho(x_n,x_{n+1}) \le \alpha^{-1}d\big(G(x_{n-1}),G(x_n)\big) \le q\rho(x_n,x_{n-1}). \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.4), справедливого по предположению индукции при всех $i = \overline{1,n}$, и неравенства (2.7) получаем

$$\rho(x_n,x_{n+1}) \le \alpha^{-1}q^n d\big(F(x_0),G(x_0)\big). \tag{2.8}$$

Таким образом,

$$\rho(x_0,x_{n+1}) \le \alpha^{-1}\sum_{i=1}^{n} q^i d\big(F(x_0),G(x_0)\big) \le \frac{1}{\alpha(1-q)}d\big(F(x_0),G(x_0)\big) = R,$$

т. е. $x_{n+1} \in V$. Доказано, что соотношение (2.4) выполнено при $i = n+1$.

Из неравенства (2.8) очевидно следует, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Пусть $x_i \to x$. Тогда $x \in V$ и, вследствие непрерывности отображения G на шаре V получаем $G(x_i) \to G(x)$. А так как $G(x_{i+1}) = F(x_i)$, имеем $\mathrm{Lim}G(x_i) = \mathrm{Lim}F(x_i) \ne \emptyset$. Отсюда, согласно условию (2.3), получаем $F(x) = G(x)$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. В аналогичных теоремах о точках совпадения отображений метрических пространств непрерывность отображения G не предполагается, поскольку непрерывность следует из липшицевости этого отображения. Используемое в доказанной здесь теореме 2.1 ослабленное предположение липшицевости (принадлежность пары $(x,G(x))$ при любом $x \in V$ множеству липшицевости отображения G) уже не обеспечивает требуемую для этого утверждения непрерывность G. Приведем пример отображений, не имеющих точки совпадения, для которых выполнены все условия теоремы 2.1 кроме непрерывности G.

П р и м е р 2.2. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$ — вещественная прямая с «обычной метрикой», определим функции $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулами

$$F(x) = 2x, \quad G(x) = \begin{cases} x & \text{если } x \neq 0, \\ 1 & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, функция F является 2-накрывающей и непрерывной на всем $\mathbb{R}$. Покажем, что для $\beta = 1$ выполнено $(x, F(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[G]$ также на всем $\mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$ и $x \neq 1/2$, то $F(x) = 2x \neq 0$ и $F(x) = 2x \neq 1$. В этом случае равенство $F(x) = G(u)$ выполнено только при $u = 2x$, и тогда имеем

$$|G(x) - G(u)| = |G(x) - G(2x)| = |x|, \quad |x - u| = |x - 2x| = |x|.$$

В случае $x = 0$ получаем $F(0) = 0$, а равенство $G(u) = 0$ невозможно. В случае $x \neq 1/2$ уравнение $G(u) = 1$ имеет два решения: $u = 0$ $u = 1$. Для этих значений получаем

$$|G(1/2) - G(u)| = 1/2, \quad |1/2 - u| = 1/2.$$

Итак, $(x, F(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[G]$ ($\beta = 1$) на всем $\mathbb{R}$, но при этом функция G не является непрерывной. Остальные условия теоремы 2.1 выполнены, тем не менее, рассматриваемые функции не имеют точки совпадения.

В заключение отметим, что из теоремы 2.1 следуют результаты о точке совпадения, полученные в работе [6]. В [6, теорема 2.1] предполагалось, что метрика ρ и расстояние d могут иметь только конечные значения, и использовались «классические» условия накрывания и липшицевости отображений.

References

[1] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[2] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН.*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[3] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств”, *Матем. заметки*, **100**:3 (2016), 344–362; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Coincidence Points of Multivalued Vector Mappings of Metric Spaces”, *Mathematical Notes*, **100**:3 (2016), 363–379.

[4] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения векторных отображений”, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, № 10, 14–28; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Coincidence Points for Vector Mappings”, *Russian Mathematics*, **60**:10 (2016), 10–22.

[5] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[6] В. Мерчела, “К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, “About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].

[7] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:4 (2019), 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela, “Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation”, *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, **25**:4 (2019), 52–63 (In Russian)].

[8] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f-quasimetric spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **59**:6 (2018), 1063–1072.

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Мерчела Вассим, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Шиндяпин Андрей Игоревич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет имени Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик.
E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8750-1534

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Татьяна Владимировна
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Поступила в редакцию 23 декабря 2019 г.
Поступила после рецензирования 5 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Wassim Merchela, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Andrey I. Shindiapin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Computer Science Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique.
E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8750-1534

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Tatiana V. Zhukovskaia
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Received 23 December 2019
Reviewed 5 February 2020
Accepted for press 6 March 2020