

© Фомин В.И., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-183-197

УДК 517.1



О резольвенте комплексного оператора

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Построена нормированная алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в комплексном нормированном пространстве, состоящем из элементов декартова квадрата вещественного банахова пространства. В этой алгебре выделено множество тех операторов, у каждого из которых действительная и мнимая части коммутируют между собой. Доказана обратимость любого оператора из этого множества, у которого сумма квадратов его действительной и мнимой частей является непрерывно обратимым оператором; найдена формула для обратного оператора. Для оператора из указанного множества исследован вид его регулярных точек: найдены условия на комплексное число, при выполнении которых это число является регулярной точкой данного оператора; получена формула для резольвенты комплексного оператора. Рассмотрено множество неограниченных линейных комплексных операторов, действующих в вышеупомянутом комплексном нормированном пространстве. В этом множестве выделено подмножество тех операторов, у каждого из которых области определения действительной и мнимой частей совпадают между собой. Для оператора из указанного подмножества найдены условия на комплексное число, при которых это число принадлежит резольвентному множеству данного оператора; получена формула для резольвенты оператора. Введено понятие полуограниченного комплексного оператора как оператора, у которого одна компонента является ограниченным, а другая неограниченным оператором. Отмечено, что первое и второе резольвентные тождества для комплексных операторов доказываются аналогично случаю действительных операторов.

Ключевые слова: банахово пространство, комплексный вектор, норма комплексного вектора, комплексный оператор, регулярная точка комплексного оператора, резольвентное множество, резольвента

Для цитирования: Фомин В.И. О резольвенте комплексного оператора // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 183–197. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-183-197.

About a complex operator resolvent

Vasiliy I. FOMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. A normed algebra of bounded linear complex operators acting in a complex normed space consisting of elements of the Cartesian square of a real Banach space is constructed. In this algebra, it is singled out a set of operators for each of which the real and imaginary parts commute with each other. It is proved that in this set, any operator for which the sum of squares of its real and imaginary parts is a continuously invertible operator, is invertible itself; a formula for the inverse operator is found. For an operator from the indicated set, the form of its regular points is investigated: conditions under which a complex number is a regular point of the given operator are found; a formula for the resolvent of a complex operator is obtained. The set of unbounded linear complex operators acting in the above complex normed space is considered. In this set, a subset of those operators for each of which the domains of the real and imaginary parts coincide is distinguished. For an operator from the specified subset, conditions on a complex number under which this number belongs to the resolvent set of the given operator are found; a formula for the resolvent of the operator is obtained. The concept of a semi-bounded complex operator as an operator in which one component is a bounded and the other is an unbounded operator is introduced. It is noted that the first and second resolvent identities for complex operators can be proved similarly to the case of real operators.

Keywords: Banach space, complex vector, complex vector norm, complex operator, complex operator regular point, resolvent set, resolvent

Mathematics Subject Classification: 47B91, 47A10.

For citation: Fomin V.I. O rezol'vente kompleksnogo operatora [About a complex operator resolvent]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 183–197. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-183-197. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E ; $L(E)$ — полная нормированная алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E ; $E_{\mathbb{R}}^2 = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ — банахово пространство комплексных векторов над полем вещественных чисел с линейными операциями

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (0.1)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad (0.2)$$

и нормой

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \quad (0.3)$$

(см. [1, с. 103]).

Пусть $L_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}(E_{\mathbb{R}}^2) = \{Z = (A, B) : A, B \in L(E)\}$ — множество комплексных операторов, действующих в пространстве $E_{\mathbb{R}}^2$ по следующему закону:

$$Zw = (A, B)(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx) \quad (0.4)$$

для любого элемента $w = (x, y) \in E_{\mathbb{R}}^2$.

З а м е ч а н и е 0.1. Закон действия (0.4) комплексного оператора (A, B) на комплексный вектор (x, y) отличается от закона $(A, B)(x, y) = (Ax, By)$ для комплексного оператора из [2, с. 64] тем, что при формировании каждой из компонент образа комплексного вектора (x, y) задействованы обе компоненты как комплексного оператора (A, B) , так и комплексного вектора (x, y) .

Каждый оператор $Z = (A, B) \in L_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}(E_{\mathbb{R}}^2)$ линеен.

Действительно, по определению линейного оператора нужно показать, что оператор Z аддитивен и однороден. Используя аддитивность операторов A, B , получаем для любых $w_1 = (x_1, y_1), w_2 = (x_2, y_2) \in E_{\mathbb{R}}^2$

$$\begin{aligned} Z(w_1 + w_2) &= (A(x_1 + x_2) - B(y_1 + y_2), A(y_1 + y_2) + B(x_1 + x_2)) \\ &= (Ax_1 + Ax_2 - By_1 - By_2, Ay_1 + Ay_2 + Bx_1 + Bx_2) \\ &= (Ax_1 - By_1, Ay_1 + Bx_1) + (Ax_2 - By_2, Ay_2 + Bx_2) = Zw_1 + Zw_2. \end{aligned}$$

Свойство аддитивности доказано. В силу однородности операторов A, B имеем для любых $w = (x, y) \in E_{\mathbb{R}}^2, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Z(\alpha w) &= (A(\alpha x) - B(\alpha y), A(\alpha y) + B(\alpha x)) = (\alpha Ax - \alpha By, \alpha Ay + \alpha Bx) \\ &= \alpha(Ax - By, Ay + Bx) = \alpha Zw. \end{aligned}$$

Свойство однородности установлено.

Каждый оператор $Z = (A, B) \in L_{\mathbb{R}}^{O\mathbb{C}}(E_{\mathbb{R}}^2)$ ограничен.

Действительно, по определению ограниченного оператора нужно доказать существование такой постоянной c , что

$$\|Zw\| \leq c \|w\|, \quad \forall w \in E_{\mathbb{R}}^2. \quad (0.5)$$

Используя норму (0.3) пространства $E_{\mathbb{R}}^2$, неравенство треугольника для нормы пространства E и оценку

$$\|Fx\| \leq \|F\|\|x\| \quad \forall F \in L(E), x \in E,$$

для любого $w = (x, y) \in E_{\mathbb{R}}^2$ получаем

$$\begin{aligned} \|Zw\| &= \|Ax - By\| + \|Ay + Bx\| \leq \|Ax\| + \|By\| + \|Ay\| + \|Bx\| \\ &\leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|y\| + \|A\|\|y\| + \|B\|\|x\| = (\|A\| + \|B\|)(\|x\| + \|y\|) \\ &= (\|A\| + \|B\|)\|w\|. \end{aligned}$$

Получено неравенство (0.5) с постоянной $c = \|A\| + \|B\|$.

По определению нормы оператора

$$\|Z\| = \inf \{c : \text{выполняется (0.5)}\}, \quad (0.6)$$

следовательно,

$$\|Z\| \leq \|A\| + \|B\|. \quad (0.7)$$

Множество $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$, снабжённое линейными операциями

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_1 + A_2, B_1 + B_2), \quad (0.8)$$

$$\alpha(A, B) = (\alpha A, \alpha B), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (0.9)$$

является вещественным линейным пространством.

Норма (0.6) в пространстве $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$, очевидно, удовлетворяет аксиомам нормы:

- I) $\|(A, B)\| > 0$ для любого $(A, B) \in L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$, $(A, B) \neq \Theta$; $\|\Theta\| = 0$, где $\Theta = (O, O)$ — нулевой элемент пространства $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$;
- II) $\|\alpha(A, B)\| = |\alpha|\|(A, B)\|$ для любых $(A, B) \in L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- III) $\|(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\| \leq \|(A_1, B_1)\| + \|(A_2, B_2)\|$ для любых $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$, принадлежащих $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$.

Таким образом, $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$ является нормированным пространством.

Операция умножения элементов пространства $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$ вводится естественным образом. Пусть $Z_1 = (A_1, B_1), Z_2 = (A_2, B_2) \in L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$. По определению, $Z_1 Z_2 : E_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow E_{\mathbb{R}}^2$ — оператор, действующий по правилу $(Z_1 Z_2)w = Z_1(Z_2 w)$ для любого $w = (x, y) \in E_{\mathbb{R}}^2$. Согласно формуле (0.4) имеем $Z_2 w = (A_2 x - B_2 y, A_2 y + B_2 x)$, поэтому

$$\begin{aligned} (Z_1 Z_2)w &= Z_1(Z_2 w) \\ &= ((A_1 A_2 - B_1 B_2)x - (A_1 B_2 + B_1 A_2)y, (A_1 A_2 - B_1 B_2)y + (A_1 B_2 + B_1 A_2)x), \end{aligned}$$

т. е.

$$Z_1 Z_2 = (A_1, B_1)(A_2, B_2) = (A_1 A_2 - B_1 B_2, A_1 B_2 + B_1 A_2). \quad (0.10)$$

Операция умножения комплексных операторов некоммутативна, что следует из некоммутативности операции умножения в алгебре $L(E)$.

Для элемента $\hat{I} = (I, O) \in L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$ имеем $\hat{I}Z = Z\hat{I} = Z$. Заметим, что $\|\hat{I}\| = 1$.

Для любых $Z_1, Z_2 \in L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$ справедливо неравенство

$$\|Z_1 Z_2\| \leq \|Z_1\| \|Z_2\|. \quad (0.11)$$

Действительно, для любого $w \in E_{\mathbb{R}}^2$

$$\|(Z_1 Z_2)w\| = \|Z_1(Z_2 w)\| \leq \|Z_1\| \|Z_2 w\| \leq \|Z_1\| \|Z_2\| \|w\|,$$

откуда следует неравенство (0.11)

Непосредственно проверяется, что для любых $Z_1, Z_2, Z_3 \in L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$ справедливы равенства

$$(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3), \quad (0.12)$$

$$Z_1 (Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3, \quad (0.13)$$

$$(Z_2 + Z_3) Z_1 = Z_2 Z_1 + Z_3 Z_1. \quad (0.14)$$

Кроме того, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha (Z_1 Z_2) = (\alpha Z_1) Z_2 = Z_1 (\alpha Z_2).$$

Таким образом, множество $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$, снабжённое линейными операциями (0.8), (0.9), операцией умножения (0.10), есть нормированная алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в вещественном банаховом пространстве $E_{\mathbb{R}}^2$ по закону (0.4). Эта алгебра некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$.

Алгебра $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$ оказалась полезным инструментом при построении общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в пространстве E в случае, когда среди корней характеристического операторного уравнения имеются комплексные корни с мнимой частью, отличной от нуля (см. [3, 4]). В связи с этим актуальна задача дальнейшего изучения комплексных операторов. В частности, естественный интерес представляют вопросы, связанные с резольвентой комплексного оператора. Исследование таких вопросов требует рассмотрения комплексных операторов, действующих в нормированном пространстве $E_{\mathbb{C}}^2 = \{w = (x, y) : x, y \in E\}$ комплексных векторов над полем комплексных чисел с операцией сложения (0.1), операцией умножения

$$(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) \quad (0.15)$$

и нормой

$$\|(x, y)\| = \max_{\psi} \|x \cos \psi + y \sin \psi\| \quad (0.16)$$

(операция умножения (0.15) и норма (0.16) рассмотрены в [5, с. 476]).

Для $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\alpha(x, y) = (\alpha + i0)(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

т. е. для вещественных чисел операция умножения (0.15) совпадает с операцией (0.2).

Заметим, что норма вида (0.3) пространства $E_{\mathbb{R}}^2$ непригодна для пространства $E_{\mathbb{C}}^2$, так как не выполняется аксиома однородности нормы.

1. Основные понятия

Построим нормированную алгебру ограниченных линейных комплексных операторов над полем комплексных чисел. Для этого понадобится декартов квадрат

$$L^2(E) = L(E) \times L(E) = \{Z = (A, B) : A, B \in L(E)\}$$

алгебры $L(E)$. Будем рассматривать каждый элемент множества $L^2(E)$ как комплексный оператор, действующий в пространстве $E_{\mathbb{C}}^2$ по закону (0.4). Операция сложения элементов множества $L^2(E)$ определяется равенством (0.8); операция умножения на комплексные числа вводится по аналогии с формулой (0.15): для любых $(A, B) \in L^2(E)$, $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha + i\beta)(A, B) = (\alpha A - \beta B, \alpha B + \beta A), \quad (1.1)$$

в частности, для любых $(A, B) \in L^2(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(A, B) = (\alpha + i0)(A, B) = (\alpha A, \alpha B),$$

т. е. для вещественных чисел операция умножения (1.1) совпадает с операцией (0.9).

Проверим выполнимость аксиом линейного пространства, относящихся к операции умножения (1.1):

- 1) $(\alpha_1 + i\beta_1)[(\alpha_2 + i\beta_2)(A, B)] = [(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2)](A, B);$
- 2) $1 \cdot (A, B) = (A, B);$
- 3) $[(\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2)](A, B) = (\alpha_1 + i\beta_1)(A, B) + (\alpha_2 + i\beta_2)(A, B);$
- 4) $(\alpha + i\beta)[(A_1, B_1) + (A_2, B_2)] = (\alpha + i\beta)(A_1, B_1) + (\alpha + i\beta)(A_2, B_2).$

Выполнимость аксиомы 2) очевидна. Проверим выполнимость аксиомы 1). Используя формулу (1.1), получаем

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + i\beta_1)[(\alpha_2 + i\beta_2)(A, B)] &= (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 A - \beta_2 B, \alpha_2 B + \beta_2 A) \\ &= (\alpha_1(\alpha_2 A - \beta_2 B) - \beta_1(\alpha_2 B + \beta_2 A), \alpha_1(\alpha_2 B + \beta_2 A) + \beta_1(\alpha_2 A - \beta_2 B)) \\ &= ((\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)A - (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)B, (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)B + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)A); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} [(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2)](A, B) &= [\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + i(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)](A, B) \\ &= ((\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)A - (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)B, (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)B + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)A). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из равенств (1.2), (1.3) следует выполнимость аксиомы 1). Выполнимость аксиом 3), 4) проверяется аналогично.

Множество $L^2(E)$ с линейными операциями (0.8), (1.1) является линейным пространством комплексных операторов, действующих из $E_{\mathbb{C}}^2$ в $E_{\mathbb{C}}^2$, рассматриваемым над полем комплексных чисел. Обозначим это пространство через $L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$.

Каждый оператор $Z = (A, B) \in L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$ линеен.

Действительно, аддитивность оператора Z устанавливается точно так же, как в случае оператора из алгебры $L_{\mathbb{R}}^{OC}(E_{\mathbb{R}}^2)$ (см. Введение). Покажем, что оператор Z однороден, т. е.

$$Z(\lambda w) = \lambda Zw \quad (1.4)$$

для любых $w = (x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2$, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Используя формулы (0.4), (0.15), получаем

$$\begin{aligned} Z(\lambda w) &= (A, B)(\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x) \\ &= (A(\alpha x - \beta y) - B(\alpha y + \beta x), A(\alpha y + \beta x) + B(\alpha x - \beta y)); \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda Zw &= (\alpha + i\beta)(Ax - By, Ay + Bx) \\ &= (\alpha(Ax - By) - \beta(Ay + Bx), \alpha(Ay + Bx) + \beta(Ax - By)) \\ &= (A(\alpha x - \beta y) - B(\alpha y + \beta x), A(\alpha y + \beta x) + B(\alpha x - \beta y)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из соотношений (1.5), (1.6) следует равенство (1.4).

Для нормы оператора $Z = (A, B) \in L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$ справедлива оценка (0.7).

Действительно, используя соотношения (0.4), (0.16), для любого $w = (x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2$ получаем

$$\begin{aligned} \|Zw\| &= \max_{\psi} \|(Ax - By) \cos \psi + (Ay + Bx) \sin \psi\| \\ &= \max_{\psi} \|A(x \cos \psi + y \sin \psi) + B(x \sin \psi - y \cos \psi)\| \\ &\leq \max_{\psi} [\|A(x \cos \psi + y \sin \psi)\| + \|B(x \sin \psi - y \cos \psi)\|] \\ &\leq \max_{\psi} [\|A\| \|x \cos \psi + y \sin \psi\| + \|B\| \|x \sin \psi - y \cos \psi\|] \\ &\leq \|A\| \max_{\psi} \|x \cos \psi + y \sin \psi\| + \|B\| \max_{\chi=\psi-\frac{\pi}{2}} \|x \cos \chi + y \sin \chi\| \\ &= \|A\| \|w\| + \|B\| \|w\| = (\|A\| + \|B\|) \|w\|. \end{aligned}$$

Получили неравенство

$$\|Zw\| \leq c \|w\|, \quad \forall w \in E_{\mathbb{C}}^2$$

с постоянной $c = \|A\| + \|B\|$, из которого для оператора $Z = (A, B) \in L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$ следует оценка (0.7).

Произведение операторов из $L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$ определяется формулой (0.10). Для любых операторов $Z_1, Z_2, Z_3 \in L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$ справедливы соотношения (0.11)–(0.14). Кроме того, для любого $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

$$\lambda(Z_1 Z_2) = (\lambda Z_1) Z_2 = Z_1 (\lambda Z_2).$$

Таким образом, $L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$ есть нормированная алгебра ограниченных линейных комплексных операторов, действующих в пространстве $E_{\mathbb{C}}^2$ по закону (0.4). Эта алгебра некоммутативна. Единицей в ней является оператор $\hat{I} = (I, O)$.

В дальнейшем важное значение будет иметь множество тех операторов из $L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$, у каждого из которых действительная и мнимая части коммутируют между собой, т. е. множество вида

$$L_{\mathbb{C}}^{KOC}(E_{\mathbb{C}}^2) = \{Z = (A, B) \in L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2) : AB = BA\}.$$

2. Основные результаты

Пусть $\Phi(E)$ — множество линейных операторов, действующих в пространстве E . Заметим, что $\Phi(E) = L(E) \cup N(E)$, где $N(E)$ — множество неограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E .

Рассмотрим над полем комплексных чисел множество комплексных операторов

$$\Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) = \{Z = (A, B) : A, B \in \Phi(E)\},$$

действующих в пространстве $E_{\mathbb{C}}^2$ по закону (0.4):

$$Zw = (A, B)(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx). \quad (2.1)$$

для любых $Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$, $w = (x, y) \in D(Z)$.

Заметим, что

$$D(Z) = \{w = (x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2 : x, y \in D(A) \cap D(B)\}.$$

Напомним (см. [6, 7]), что операция сложения элементов множества $\Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$ определяется формулой (0.8). Операция умножения на комплексные числа задаётся равенством (1.1).

Каждый комплексный оператор $Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$ линеен (это следует из линейности операторов A, B).

Справедливо представление:

$$\Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) = L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) \cup L_{\mathbb{C}}^{N\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) \cup L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2),$$

где

$$L_{\mathbb{C}}^{N\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) = \{Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) : A, B \in N(E)\}, \quad (2.2)$$

$$L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) = L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{CI}}(E_{\mathbb{C}}^2) \cup L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{CII}}(E_{\mathbb{C}}^2), \quad (2.3)$$

$$L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{CI}}(E_{\mathbb{C}}^2) = \{Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) : A \in N(E), B \in L(E)\},$$

$$L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{CII}}(E_{\mathbb{C}}^2) = \{Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2) : A \in L(E), B \in N(E)\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} D(Z) &= E_{\mathbb{C}}^2 \quad \text{для} \quad Z \in L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2), \\ D(Z) &= \{(x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2 : x, y \in D(A) \cap D(B)\} \quad \text{для} \quad Z \in L_{\mathbb{C}}^{N\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2), \\ D(Z) &= \{(x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2 : x, y \in D(A)\} \quad \text{для} \quad Z \in L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{CI}}(E_{\mathbb{C}}^2), \\ D(Z) &= \{(x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2 : x, y \in D(B)\} \quad \text{для} \quad Z \in L_{\mathbb{C}}^{P\mathbb{CII}}(E_{\mathbb{C}}^2). \end{aligned}$$

Операторы из множеств (2.2), (2.3) называются соответственно неограниченными и полуограниченными комплексными операторами.

Пусть $Z = (A, B) \in \Phi_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$, $\overline{D(Z)} = E_{\mathbb{C}}^2$, Z фиксирован. Напомним, что тождественным оператором в пространстве $E_{\mathbb{C}}^2$ является оператор $\hat{I} = (I, O)$. Рассмотрим резольвентное множество и резольвенту оператора Z :

$$\begin{aligned} \rho(Z) &= \{\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} : \exists \Gamma_Z^{-1}(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)\}, \\ R_Z(\lambda) &= \Gamma_Z^{-1}(\lambda), \quad \lambda \in \rho(Z), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\Gamma_Z(\lambda) = Z - \lambda\hat{I}$, $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) = [\Gamma_Z(\lambda)]^{-1}$.

Заметим, что $D(\Gamma_Z(\lambda)) = D(Z)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Получим условия, при выполнении которых

1) $R(\Gamma_Z(\lambda)) = E_{\mathbb{C}}^2$ и существует $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) : E_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow D(Z)$, т. е. уравнение

$$\Gamma_Z(\lambda)(x, y) = (u, v), \quad (2.5)$$

рассматриваемое при $(x, y) \in D(Z)$, однозначно разрешимо при любом фиксированном элементе $(u, v) \in E_{\mathbb{C}}^2$;

2) $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{O\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}^2)$.

Тем самым будет найдена резольвента оператора Z (см. формулу (2.4)).

Заметим, что

$$\Gamma_Z(\lambda) = (\Gamma_A(\alpha), \Gamma_B(\beta)), \quad (2.6)$$

где $\Gamma_A(\alpha) = A - \alpha I$, $\Gamma_B(\beta) = B - \beta I$ (очевидно, что $D(\Gamma_A(\alpha)) = D(A)$, $D(\Gamma_B(\beta)) = D(B)$). Тогда по формуле (2.1)

$$\Gamma_Z(\lambda)(x, y) = (\Gamma_A(\alpha)x - \Gamma_B(\beta)y, \Gamma_A(\alpha)y + \Gamma_B(\beta)x).$$

Следовательно, однозначная разрешимость уравнения (2.5) равносильна однозначной разрешимости системы уравнений

$$\Gamma_A(\alpha)x - \Gamma_B(\beta)y = u, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_B(\beta)x + \Gamma_A(\alpha)y = v, \quad (2.8)$$

рассматриваемой при $x, y \in D(A) \cap D(B)$.

Найдем вначале вид резольвенты комплексного оператора из множества $L_{\mathbb{C}}^{KOC}(E_{\mathbb{C}}^2)$.

Положим $GL(E) = \{T \in L(E) : \text{существует } T^{-1} \in L(E)\}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение:

I) если $T_1 \in L(E)$, $T_2 \in GL(E)$ и $T_1 T_2 = T_2 T_1$, то $T_1 T_2^{-1} = T_2^{-1} T_1$ (см. [8, с. 55]).

Лемма 2.1. Пусть $Z = (P, Q) \in L_{\mathbb{C}}^{KOC}(E_{\mathbb{C}}^2)$ и выполняется условие $P^2 + Q^2 \in GL(E)$. Тогда существует обратный оператор Z^{-1} и справедлива формула

$$Z^{-1} = \left(P(P^2 + Q^2)^{-1}, -Q(P^2 + Q^2)^{-1} \right).$$

Доказательство леммы 2.1 аналогично случаю $Z = (P, Q) \in L_{\mathbb{R}}^{KOC}(E_{\mathbb{R}}^2)$ (см. [6]), при этом используется утверждение I).

Теорема 2.1. Пусть $Z = (A, B) \in L_{\mathbb{C}}^{KOC}(E_{\mathbb{C}}^2)$, Z фиксирован, а комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$ таково, что

$$F \in GL(E), \quad (2.9)$$

где $F = \Gamma_A^2(\alpha) + \Gamma_B^2(\beta)$, $\Gamma_A^2(\alpha) = [\Gamma_A(\alpha)]^2$, $\Gamma_B^2(\beta) = [\Gamma_B(\beta)]^2$. Тогда λ является регулярной точкой оператора Z и

$$R_Z(\lambda) = (\Gamma_A(\alpha)F^{-1}, -\Gamma_B(\beta)F^{-1}), \quad (2.10)$$

$$R_Z(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{KOC}(E_{\mathbb{C}}^2). \quad (2.11)$$

Доказательство. Операторный определитель системы уравнений (2.7), (2.8) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Gamma_A(\alpha) & -\Gamma_B(\beta) \\ \Gamma_B(\beta) & \Gamma_A(\alpha) \end{vmatrix} = \Gamma_A^2(\alpha) + \Gamma_B^2(\beta) = F.$$

По условию теоремы $AB = BA$, следовательно,

$$\Gamma_A(\alpha)\Gamma_B(\beta) = \Gamma_B(\beta)\Gamma_A(\alpha). \quad (2.12)$$

В силу (2.12) элементы определителя Δ попарно коммутируют между собой. Кроме того, в силу равенства $\Delta = F$ и условия (2.9) существует $\Delta^{-1} \in L(E)$. Следовательно, при решении системы уравнений (2.7), (2.8) можно применить операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений (см. [9]). Согласно этому правилу система уравнений (2.7), (2.8) при каждом $(u, v) \in E_{\mathbb{C}}^2$ имеет единственное решение

$$x = \Gamma_A(\alpha)F^{-1}u + \Gamma_B(\beta)F^{-1}v, \quad (2.13)$$

$$y = -\Gamma_B(\beta)F^{-1}u + \Gamma_A(\alpha)F^{-1}v. \quad (2.14)$$

Это означает, что $R(\Gamma_Z(\lambda)) = E_{\mathbb{C}}^2$ и существует $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) : E_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow E_{\mathbb{C}}^2$. В силу соотношений (2.6), (2.12) справедливо включение $\Gamma_Z(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{KOC}(E_{\mathbb{C}}^2)$. Тогда, учитывая условие (2.9) и применяя лемму 2.1, получаем

$$\Gamma_Z^{-1}(\lambda) = (\Gamma_A(\alpha)F^{-1}, -\Gamma_B(\beta)F^{-1}). \quad (2.15)$$

В силу условия (2.9) $F^{-1} \in L(E)$, следовательно, каждый из операторов $\Gamma_A(\alpha)F^{-1}$, $-\Gamma_B(\beta)F^{-1}$ принадлежит алгебре $L(E)$ как произведение двух операторов из $L(E)$. Значит, $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{OC}(E_{\mathbb{C}}^2)$. Следовательно, $\lambda \in \rho(Z)$ и в силу равенств (2.4), (2.15) справедлива формула (2.10). Покажем выполнимость включения (2.11). В силу равенства (2.12)

$$\Gamma_A(\alpha)F = F\Gamma_A(\alpha), \quad \Gamma_B(\beta)F = F\Gamma_B(\beta). \quad (2.16)$$

Заметим, что $\Gamma_A(\alpha), \Gamma_B(\beta) \in L(E)$ и выполняются соотношения (2.9), (2.16). Следовательно, в силу утверждения I)

$$\Gamma_A(\alpha)F^{-1} = F^{-1}\Gamma_A(\alpha), \quad \Gamma_B(\beta)F^{-1} = F^{-1}\Gamma_B(\beta). \quad (2.17)$$

Используя соотношения (2.12), (2.17), получаем

$$(\Gamma_A(\alpha)F^{-1})(-\Gamma_B(\beta)F^{-1}) = (-\Gamma_B(\beta)F^{-1})(\Gamma_A(\alpha)F^{-1}),$$

а это означает, что $R_Z(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{KOC}(E_{\mathbb{C}}^2)$. $\square$

В силу соотношений (2.17) формулу (2.10) и решение (2.13), (2.14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} R_Z(\lambda) &= (F^{-1}\Gamma_A(\alpha), -F^{-1}\Gamma_B(\beta)), \\ x &= F^{-1}(\Gamma_A(\alpha)u + \Gamma_B(\beta)v), \\ y &= F^{-1}(-\Gamma_B(\beta)u + \Gamma_A(\alpha)v). \end{aligned}$$

Обозначим через $\hat{L}_{\mathbb{C}}^{NC}(E_{\mathbb{C}}^2)$ множество тех операторов из $L_{\mathbb{C}}^{NC}(E_{\mathbb{C}}^2)$, у каждого из которых области определения действительной и мнимой частей совпадают между собой.

Пусть $Z = (A, B) \in \hat{L}_{\mathbb{C}}^{NC}(E_{\mathbb{C}}^2)$. Тогда $D(A) = D(B) = D$, следовательно, $D(A) \cap D(B) = D$ и $D(Z) = \{(x, y) \in E_{\mathbb{C}}^2 : x, y \in D\}$. Значит, систему уравнений (2.7), (2.8) надо рассматривать при $x, y \in D$.

Теорема 2.2. Пусть $Z = (A, B) \in \hat{L}_{\mathbb{C}}^{NC}(E_{\mathbb{C}}^2)$, $\overline{D(Z)} = E_{\mathbb{C}}^2$, Z фиксирован, а комплексное число $\lambda = \alpha + i\beta$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\exists \Gamma_A^{-1}(\alpha), \Gamma_B^{-1}(\beta) \in L(E); \quad (2.18)$$

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)p = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)p, p \in E; \quad (2.19)$$

$$\exists H^{-1} \in L(E), \quad (2.20)$$

где $H = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha) + \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)$. Тогда λ является регулярной точкой оператора Z

$$R_Z(\lambda) = (H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta), -H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)), \quad (2.21)$$

$$R_Z(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{KOC}(E_{\mathbb{C}}^2). \quad (2.22)$$

Укажем вначале несколько соотношений, которые потребуются при доказательстве теоремы 2.2.

Лемма 2.2. *При выполнении условий теоремы 2.2 справедливы равенства*

$$\Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)q, \quad q \in D; \quad (2.23)$$

$$\Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)q, \quad q \in D; \quad (2.24)$$

$$H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)p = \Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}p, \quad p \in E; \quad (2.25)$$

$$H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)p = \Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}p, \quad p \in E. \quad (2.26)$$

Доказательство. Заметим, что в силу условия (2.18)

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)p \in D, \quad p \in E; \quad (2.27)$$

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)p \in D, \quad p \in E; \quad (2.28)$$

$$\Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)p = p, \quad p \in E; \quad (2.29)$$

$$\Gamma_B(\beta)\Gamma_B^{-1}(\beta)p = p, \quad p \in E; \quad (2.30)$$

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_A(\alpha)q = q, \quad q \in D; \quad (2.31)$$

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_B(\beta)q = q, \quad q \in D. \quad (2.32)$$

Пусть $q \in D$, q фиксирован. Тогда, в силу условия (2.18)

$$\exists p_1 \in E : q = \Gamma_A^{-1}(\alpha)p_1; \quad (2.33)$$

$$\exists p_2 \in E : q = \Gamma_B^{-1}(\beta)p_2. \quad (2.34)$$

Используя соотношения (2.19), (2.29), (2.33) и равенство $p_1 = \Gamma_A(\alpha)q$, получаем

$$\Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)q = \Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)p_1 = \Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)p_1 = \Gamma_B^{-1}(\beta)p_1 = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)q.$$

Равенство (2.23) доказано.

Учитывая соотношения (2.19), (2.30), (2.34) и равенство $p_2 = \Gamma_B(\beta)q$, имеем

$$\Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)p_2 = \Gamma_B(\beta)\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)p_2 = \Gamma_A^{-1}(\alpha)p_2 = \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)q.$$

Равенство (2.24) доказано.

Покажем справедливость равенств (2.25), (2.26). Заметим, что $D(H) = D$ и

$$HH^{-1}p = p, \quad p \in E; \quad (2.35)$$

$$H^{-1}Hq = q, \quad q \in D. \quad (2.36)$$

Убедимся вначале, что

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)Hq = H\Gamma_A^{-1}(\alpha)q, \quad q \in D. \quad (2.37)$$

Заметим, что в силу включений (2.27), (2.28)

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)q \in D, \quad q \in D; \quad (2.38)$$

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)q \in D, q \in D. \quad (2.39)$$

Пусть $q \in D$, q фиксирован. Используя соотношения (2.23), (2.31), (2.39), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_A^{-1}(\alpha)Hq &= \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)q + [\Gamma_A^{-1}(\alpha)]^2\Gamma_B(\beta)q \\ &= \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)q + [\Gamma_A^{-1}(\alpha)]^2\Gamma_B(\beta)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)q + [\Gamma_A^{-1}(\alpha)]^2\Gamma_B(\beta)q. \end{aligned}$$

Итак,

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)Hq = \Gamma_B^{-1}(\beta)q + [\Gamma_A^{-1}(\alpha)]^2\Gamma_B(\beta)q. \quad (2.40)$$

Далее, используя соотношения (2.24), (2.29), имеем

$$H\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)q + \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)q + [\Gamma_A^{-1}(\alpha)]^2\Gamma_B(\beta)q.$$

Получили равенство

$$H\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)q + [\Gamma_A^{-1}(\alpha)]^2\Gamma_B(\beta)q. \quad (2.41)$$

Из соотношений (2.40), (2.41) следует равенство (2.37).

Пусть $p \in E$, p фиксирован. Тогда, в силу условия (2.20)

$$\exists q \in D : p = Hq. \quad (2.42)$$

Используя соотношения (2.36)–(2.38), (2.42) и равенство

$$q = H^{-1}p, \quad (2.43)$$

получаем

$$H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)p = H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)Hq = H^{-1}H\Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_A^{-1}(\alpha)q = \Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}p.$$

Равенство (2.25) доказано. $\square$

Аналогично формуле (2.37) получаем равенство

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)Hq = H\Gamma_B^{-1}(\beta)q, q \in D. \quad (2.44)$$

Используя соотношения (2.36), (2.39), (2.42)–(2.44), получаем

$$H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)p = H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)Hq = H^{-1}H\Gamma_B^{-1}(\beta)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)q = \Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}p.$$

Равенство (2.26) также доказано. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.2. Применяя к обеим частям уравнения (2.7) оператор $\Gamma_B^{-1}(\beta)$, а уравнения (2.8) оператор $\Gamma_A^{-1}(\alpha)$ и используя соотношения (2.31), (2.32), получаем

$$\Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)x - y = \Gamma_B^{-1}(\beta)u, \quad (2.45)$$

$$\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)x + y = \Gamma_A^{-1}(\alpha)v. \quad (2.46)$$

Суммируя соотношения (2.45), (2.46), имеем $Hx = \Gamma_B^{-1}(\beta)u + \Gamma_A^{-1}(\alpha)v$, следовательно, в силу условия (2.20)

$$x = H^{-1}(\Gamma_B^{-1}(\beta)u + \Gamma_A^{-1}(\alpha)v). \quad (2.47)$$

Применяя к обеим частям уравнения (2.7) оператор $\Gamma_A^{-1}(\alpha)$, а уравнения (2.8) оператор $\Gamma_B^{-1}(\beta)$, получаем

$$x - \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)y = \Gamma_A^{-1}(\alpha)u, \quad (2.48)$$

$$x + \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)y = \Gamma_B^{-1}(\beta)v. \quad (2.49)$$

Вычитая из соотношения (2.49) соотношение (2.48), имеем $Hy = \Gamma_B^{-1}(\beta)v - \Gamma_A^{-1}(\alpha)u$, следовательно,

$$y = H^{-1}(-\Gamma_A^{-1}(\alpha)u + \Gamma_B^{-1}(\beta)v). \quad (2.50)$$

В силу равенства $D(H) = D$ элементы x, y , определяемые соответственно формулами (2.47), (2.50), принадлежат множеству D , т. е. $(x, y) \in D(Z)$. Решение (2.47), (2.50) найдено на основе систем уравнений (2.45), (2.46); (2.48), (2.49), полученных из системы уравнений (2.7), (2.8) применением к её уравнениям ограниченных линейных операторов $\Gamma_A^{-1}(\alpha)$, $\Gamma_B^{-1}(\beta)$. Поэтому необходимо проверить, не является ли это решение посторонним для исходной системы уравнений (2.7), (2.8). Проведем такую проверку подстановкой элементов (2.47), (2.50) в уравнения (2.7), (2.8). Учитывая соотношения (2.23)–(2.26), (2.29), (2.30), а также включения $H^{-1}u, H^{-1}v \in D$, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_A(\alpha)x &= \Gamma_A(\alpha)H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)u + \Gamma_A(\alpha)H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)v \\ &= \Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}u + \Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}v = \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)H^{-1}u + H^{-1}v; \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_B(\beta)y &= -\Gamma_B(\beta)H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)u + \Gamma_B(\beta)H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)v \\ &= -\Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}u + \Gamma_B(\beta)\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}v = -\Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)H^{-1}u + H^{-1}v. \end{aligned} \quad (2.52)$$

В силу (2.35), (2.51), (2.52)

$$\Gamma_A(\alpha)x - \Gamma_B(\beta)y = HH^{-1}u = u. \quad (2.53)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Gamma_B(\beta)x &= \Gamma_B(\beta)H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)u + \Gamma_B(\beta)H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)v \\ &= \Gamma_B(\beta)\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}u + \Gamma_B(\beta)\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}v = H^{-1}u + \Gamma_A^{-1}(\alpha)\Gamma_B(\beta)H^{-1}v; \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_A(\alpha)y &= -\Gamma_A(\alpha)H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)u + \Gamma_A(\alpha)H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)v \\ &= -\Gamma_A(\alpha)\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}u + \Gamma_A(\alpha)\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}v = -H^{-1}u + \Gamma_B^{-1}(\beta)\Gamma_A(\alpha)H^{-1}v. \end{aligned} \quad (2.55)$$

В силу (2.35), (2.54), (2.55)

$$\Gamma_B(\beta)x + \Gamma_A(\alpha)y = HH^{-1}v = v. \quad (2.56)$$

В силу (2.53), (2.56) элементы (2.47), (2.50) удовлетворяют уравнениям (2.7), (2.8). Показано, что система уравнений (2.7), (2.8) при каждом $(u, v) \in E_{\mathbb{C}}^2$ имеет единственное решение $(x, y) \in D(Z)$, определяемое формулами (2.47), (2.50). Это означает, что $R(\Gamma_Z(\lambda)) = E_{\mathbb{C}}^2$ и существует $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) : E_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow D(Z)$. Учитывая равенство $\Gamma_Z^{-1}(\lambda)(u, v) = (x, y)$, соотношения (2.1), (2.47), (2.50), получаем

$$\Gamma_Z^{-1}(\lambda) = (H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta), -H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)). \quad (2.57)$$

В силу условий (2.18), (2.20) каждый из операторов $H^{-1}\Gamma_B^{-1}(\beta)$, $-H^{-1}\Gamma_A^{-1}(\alpha)$ принадлежит алгебре $L(E)$ как произведение двух операторов из $L(E)$. Значит, $\Gamma_Z^{-1}(\lambda) \in L_{\mathbb{C}}^{\text{OC}}(E_{\mathbb{C}}^2)$.

Следовательно, $\lambda \in \rho(Z)$, и в силу (2.4), (2.57) справедлива формула (2.21). Включение (2.22) следует из равенств (2.19), (2.25), (2.26). $\square$

В силу соотношений (2.25), (2.26) формулу (2.21) и решение (2.47), (2.50) можно записать в виде

$$\begin{aligned} R_Z(\lambda) &= (\Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}, -\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}), \\ x &= \Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}u + \Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}v, \\ y &= -\Gamma_A^{-1}(\alpha)H^{-1}u + \Gamma_B^{-1}(\beta)H^{-1}v. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что первое резольвентное тождество (тождество Гильберта)

$$R_Z(\lambda) - R_Z(\mu) = (\lambda - \mu)R_Z(\lambda)R_Z(\mu), \quad \lambda, \mu \in \rho(Z);$$

и второе резольвентное тождество

$$R_{Z_2}(\lambda) - R_{Z_1}(\lambda) = R_{Z_2}(\lambda)(Z_1 - Z_2)R_{Z_1}(\lambda), \quad \lambda \in \rho(Z_1) \cap \rho(Z_2);$$

для комплексных операторов доказываются аналогично случаю действительных операторов (см., соответственно, [10, с. 293], [11, с. 140]).

References

- [1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Иностранная литература, М., 1962. [N. Dunford, J. Schwartz, *Lineynyye Operatory. Obshchaya Teoriya*, Inostrannaya Literatura, Moscow, 1962 (In Russian)].
- [2] *Функциональный анализ*, Справочная математическая библиотека, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972. [*Funktsional'nyy Analiz*, Spravochnaya matematicheskaya biblioteka, ed. S. G. Krein, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].
- [3] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 211–217. [V. I. Fomin, “About a general solution of a linear homogeneous differential equations in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 211–217 (In Russian)].
- [4] В. И. Фомин, “О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:8 (2020), 1045–1054; англ. пер.: V. I. Fomin, “On the Case of Complex Roots of the Characteristic Operator Polynomial of a Linear n th-Order Homogeneous Differential Equation in a Banach Space”, *Differential Equations*, **56**:8 (2020), 1021–1030.
- [5] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977. [L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Funktsional'nyy Analiz*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].
- [6] В. И. Фомин, “О банаховой алгебре комплексных операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 813–823. [V. I. Fomin, “On the Banach algebra of complex operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 813–823 (In Russian)].
- [7] В. И. Фомин, “О неограниченных комплексных операторах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 57–67. [V. I. Fomin, “About unbounded complex operators”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 57–67 (In Russian)].
- [8] В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Физматлит, М., 2002. [V. A. Trenogin, B. M. Pisarevskij, T. S. Soboleva, *Zadachi i uprazhneniya po funktsional'nomu analizu*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

- [9] В. И. Фомин, “Операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*, **7:2** (2002), 237–238. [V. I. Fomin, “The Cramer operator vector rule for the systems of linear vector equations in the Banach space”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **7:2** (2002), 237–238 (In Russian)].
- [10] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967. [K. Yoshida, *Funktsional’nyy Analiz*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].
- [11] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, Издательство иностранной литературы, М., 1962. [E. Hille, R. Phillips, *Funktsional’nyy Analiz i Polugruppy*, Izdatelstvo Inostrannoy Literatury, Moscow, 1962 (In Russian)].

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasilyfomin@bk.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3846-4882>

Поступила в редакцию 04.02.2022 г.

Поступила после рецензирования 16.05.2022 г.

Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasilyfomin@bk.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3846-4882>

Received 04.02.2022

Reviewed 16.05.2022

Accepted for press 09.06.2022