Том 27, № 137 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36
УДК 517.988.6, 515.124.2

Включения с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием

Вассим МЕРЧЕЛА[1,2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9

Аннотация. В статье исследуется включение, в котором многозначное отображение действует из метрического пространства (X,ρ) во множество Y с расстоянием d. Это расстояние удовлетворяет только первой аксиоме метрики: $d(y_1,y_2)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $y_1 = y_2$. Расстояние не обязано быть симметричным и удовлетворять неравенству треугольника. Для пространства (Y,d) определены простейшие понятия (шара, сходимости, расстояния от точки до множества), а для многозначного отображения $G : X \rightrightarrows Y$ введены множества накрывания, липшицевости и замкнутости. В этих терминах (позволяющих адаптировать к отображениям со значениями в (Y,d) классические условия накрывания, липшицевости и замкнутости отображений метрических пространств и ослабить такие условия) формулируется теорема о разрешимости включения $F(x,x) \ni \widehat{y}$ и дается оценка отклонения в пространстве (X,ρ) множества решений от заданного элемента $x_0 \in X$. Основными условиями полученного утверждения являются принадлежность при любом x из некоторого шара пары $(x,\widehat{y})$ множеству α-накрывания отображения $F(\cdot,x)$ и множеству β-липшицевости отображения $F(x,\cdot)$, где $\alpha > \beta$. Доказательство соответствующего утверждения основано на построении последовательностей $\{x_n\} \subset X$ и $\{y_n\} \subset Y$, удовлетворяющих соотношениям

$$y_n \in F(x_n,x_n), \quad \widehat{y} \in F(x_{n+1},x_n), \quad \alpha\rho(x_{n+1},x_n) \le d(\widehat{y},y_n) \le \beta\rho(x_n,x_{n-1}).$$

Также в статье получены достаточные условия устойчивости решений рассматриваемого включения к изменениям многозначного отображения F и элемента $\widehat{y}$.

Ключевые слова: метрика, расстояние, включение, существование решения, накрывающее многозначное отображение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–15–2019–1619.

Для цитирования: *Мерчела В.* Включения с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 137. С. 27–36. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36

Inclusions with mappings acting from a metric space to a space with distance

Wassim MERCHELA[1,2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] St. Petersburg University
7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg 1990342, Russian Federation

Abstract. The article deals with an inclusion in which a multivalued mapping acts from a metric space (X,ρ) into a set Y with distance $d.$ This distance satisfies only the first axiom of the metric: $d(y_1,y_2)$ is equal to zero if and only if $y_1=y_2.$ The distance does not have to be symmetric or to satisfy the triangle inequality. For the space $(Y,d),$ the simplest concepts (of a ball, convergence, the distance from a point to a set) are defined, and for a multivalued map $G:X\rightrightarrows Y,$ the sets of covering, Lipschitz and closedness are introduced. In these terms (allowing us to adapt the classical conditions of covering, Lipschitz property and closedness of mappings of metric spaces to the maps with values in (Y,d) and to weaken such conditions), a theorem on solvability of the inclusion $F(x,x)\ni\widehat{y}$ is formulated, and an estimate for the deviation in the space (X,ρ) of the set of solutions from a given element $x_0\in X$ is given. The main conditions of the obtained statement are the following: for any x from some ball, the pair $(x,\widehat{y})$ belongs to the α-covering set of the mapping $F(\cdot,x)$ and to the β-Lipschitz set of the mapping $F(x,\cdot),$ where $\alpha>\beta.$ The proof of the corresponding statement is based on the construction of the sequences $\{x_n\}\subset X$ and $\{y_n\}\subset Y$ satisfying the relations

$$y_n\in F(x_n,x_n),\quad \widehat{y}\in F(x_{n+1},x_n),\quad \alpha\rho(x_{n+1},x_n)\le d(\widehat{y},y_n)\le\beta\rho(x_n,x_{n-1}).$$

Also, in the paper, we obtain sufficient conditions for the stability of solutions of the considered inclusion to changes in the multivalued mapping F and in the element $\widehat{y}.$

Keywords: metric, distance, inclusion, existence of solution, covering multivalued mapping

Acknowledgements: The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075–15–2019–1619.

Mathematics Subject Classification: 47J22, 47H04, 47H04.

For citation: Merchela W. Vklyucheniya s otobrazheniyami, dejstvuyushchimi iz metricheskogo prostranstva v prostranstvo s rasstoyaniem [Inclusions with mappings acting from a metric space to a space with distance]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 137, pp. 27–36. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-137-27-36. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теории накрывающих отображений нормированных и метрических пространств, ее приложениям к экстремальным задачам посвящены работы Е. Р. Авакова, А. В. Арутюнова, Б. Д. Гельмана, А. В. Дмитрука, А. Д. Иоффе, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского, А. А. Милютина, Б. С. Мордуховича, В. В. Обуховского, Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова, А. Удерзо, Т. Н. Фоменко и других авторов. Приведем краткое описание некоторых работ, наиболее близких по тематике к данному исследованию.

Более 40 лет назад А. А. Милютиным доказана теорема, утверждающая, что сумма α-накрывающего и β-липшицева отображений, действующих из метрического пространства X в линейное метрическое пространство Y, при $\alpha > \beta$ есть $\alpha - \beta$-накрывающее отображение (см. [1]). Это утверждение играет важную роль в теории экстремума для оценки расстояния от произвольной точки $x \in X$ до уровня $G^{-1}(y)$ отображения $G : X \to Y$. Работа А.В. Арутюнова [2] открыла возможности использования накрывающих отображений в теории уравнений и включений, включая исследования точек совпадения отображений, действующих из метрического пространства X в метрическое пространство Y. Точкой совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ называют $x \in X$, удовлетворяющий уравнению $\psi(x) = \varphi(x)$. Важно, что в [2] рассмотрены не только «обычные», но и многозначные отображения. Для многозначных отображений $\Psi, \Phi : X \rightrightarrows Y$ точка совпадения — это элемент $x \in X$ такой, что $\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset$. Согласно теореме Арутюнова, если одно из отображений α-накрывающее, а второе — β-липшицево и $\alpha > \beta$, то точка совпадения существует. Распространению и приложениям теоремы Арутюнова посвящены многие работы (см. [3–6] и библиографию этих работ). Существование точки совпадения при условиях локального накрывания и липшицевости отображений Ψ, Φ доказано в [7]; условия устойчивости точек совпадения к малым изменениям отображений исследованы в [8, 9]. В работах [10–12] получены утверждения о нелинейных липшицевых возмущениях накрывающих отображений метрических пространств, а именно рассмотрено уравнение $F(x, x) = \widehat{y}$ относительно неизвестного $x \in X$, где отображение $F : X \times X \to Y$ предполагается α-накрывающим по первому аргументу и β-липшицевым по второму. Аналогичные результаты для многозначных отображений получены в [13].

В процитированных работах результаты о накрывающих отображениях применялись к исследованию неявных дифференциальных и интегральных уравнений и включений. В связи с исследованиями систем различных функциональных уравнений, краевых задач, задач управления и экстремальных задач возникла потребность в распространении результатов о накрывающих отображениях на пространства с обобщенными метриками. В [14–16] определен аналог свойства накрывания для отображений, действующих в пространствах с векторнозначными метриками, и для таких отображений получены утверждения о липшицевых возмущениях. В [17] доказана теорема о точках совпадения отображений в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. Распространению утверждений о неподвижных точках и точках совпадений на отображения f-квазиметрических пространств посвящены работы [18, 19]. В [20–23] рассмотрена задача о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим лишь аксиоме тождества.

В данной работе исследуется задача о липшицевых возмущениях многозначных накрывающих отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, удовлетворяющим лишь аксиоме тождества.

1. Основные понятия

Будем обозначать $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,+\infty]$. Дополним «обычную» упорядоченность вещественных чисел отношением $+\infty > r$, справедливым при любом $r \in \mathbb{R}_+$.

Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим $B_X(x_0,r) = \{x \in X : \rho(x_0,x) \le r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (естественно полагаем, что $B_X(x_0,+\infty) = X$ при любом x_0).

Пусть также задано множество $Y \ne \emptyset$. *Расстоянием* в Y называют отображение $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1,y_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; y_1 = y_2. \tag{1.1}$$

В отличие от метрики, расстояние может быть несимметричным (т. е. для некоторых $y_1, y_2 \in Y$ возможно, что $d(y_1,y_2) \ne d(y_2,y_1)$) и может не удовлетворять неравенству треугольника (т. е. для некоторых $y_1,y_2,y_3 \in Y$ возможно, что $d(y_1,y_3) \not\le d(y_1,y_2) + d(y_2,y_3)$).

Как и в метрическом пространстве, в пространстве с расстоянием определим замкнутый шар формулой $B_Y(y_0,r) = \{y \in Y : d(y_0,y) \le r\}$. Определим еще и понятие сходимости в пространстве с расстоянием. А именно, будем говорить, что последовательность $\{y_i\} \subset Y$ *сходится* к элементу $y \in Y$ и писать $y_i \to y$, если $d(y,y_i) \to 0$. В отличие от метрического пространства, в пространстве с расстоянием предел последовательности может быть не единственным, а из сходимости $d(y,y_i) \to 0$ не следует «симметричная» сходимость $d(y_i,y) \to 0$.

Определим расстояние в Y от элемента $y \in Y$ до множества $V \subset Y$ формулой

$$\operatorname{dist}(y,V) = \inf_{v \in V} d(y,v).$$

Ниже рассматриваются включения с многозначными отображениями, действующими из метрического пространства X в пространство Y, наделенное расстоянием. Напомним, что многозначным называется отображение $G : X \rightrightarrows Y$, сопоставляющее любому $x \in X$ некоторое непустое множество $G(x) \subset Y$. Пусть задано множество $U \subset X$ и числа $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$. Для характеристики необходимых в нашем исследовании свойств многозначного отображения $G : X \rightrightarrows Y$ определим следующие множества:

$$\mathrm{Cl}[G;U] = \bigl\{(x,y) \in X \times Y : \forall \{x_n\} \subset U \;\; x_n \to x, \;\; \forall y_n \in G(x_n) \;\; y_n \to y \;\Rightarrow\; y \in G(x)\bigr\},$$

$$\mathrm{Cov}_\alpha[G;U] = \Bigl\{(x,y) \in X \times Y : \forall z \in G(x) \;\; \exists u \in U \;\; y \in G(u), \;\; \rho(x,u) \le \frac{d(y,z)}{\alpha}, \;\; \rho(x,u) < \infty\Bigr\},$$

$$\mathrm{Lip}_\beta[G;U] = \bigl\{(x,y) \in X \times Y : \forall u \in U \;\; y \in G(u) \;\Rightarrow\; \exists z \in G(x) \;\; d(y,z) \le \beta\rho(x,u)\bigr\},$$

которые будем называть, соответственно, множествами *замкнутости, α-накрывания и β-липшицевости многозначного отображения G относительно U*. Соответствующие множества для однозначных отображений метрических пространств были введены в [24], а в [20,22] эти определения были распространенные на однозначные отображения, действующие из метрического пространства в пространство с расстоянием. Предлагаемое определение распространяет определение [20, 22] на многозначные отображения.

Отметим, что для определенных здесь множеств замкнутости, α-накрывания и β-липшицевости многозначного отображения G выполнено следующее соотношение:

$$\forall U, \overline{U} \subset X \quad U \subset \overline{U} \ \Rightarrow \\ \mathrm{Cl}[G;U] \supset \mathrm{Cl}[G;\overline{U}], \quad \mathrm{Cov}_\alpha[G;U] \subset \mathrm{Cov}_\alpha[G;\overline{U}], \quad \mathrm{Lip}_\beta[G;U] \supset \mathrm{Lip}_\beta[G;\overline{U}]. \quad (1.2)$$

2. Включение с отображениями, действующими из метрического пространства в множество, снабженное расстоянием

Пусть заданы многозначное отображение $F : X \times X \rightrightarrows Y$ и элемент $\widehat{y} \in Y$. Рассмотрим включение

$$G(x) := F(x,x) \ni \widehat{y} \qquad (2.1)$$

с неизвестным $x \in X$. Сформулируем условия его разрешимости.

Теорема 2.1. *Пусть метрическое пространство X является полным, $\alpha > \beta \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$ и*

$$R := \frac{1}{\alpha - \beta} \mathrm{dist}\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big) < \infty. \qquad (2.2)$$

Предположим, что для любого $x \in U := B_X\big(x_0, (1+\varepsilon)R\big)$ выполнены включения

$$(x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x); X], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot); U], \quad (x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G; U].$$

Тогда в шаре U существует решение включения (2.1).

Доказательство. Если элемент x_0 является решением включения (2.1), то утверждение теоремы, очевидно, справедливо. Поэтому будем предполагать, что x_0 не удовлетворяет рассматриваемому включению.

В силу определения расстояния в пространстве Y от точки до множества существует элемент $y_0 \in Y$ такой, что

$$d(\widehat{y}, y_0) \leq (1+\varepsilon)\mathrm{dist}\big(\widehat{y}, F(x_0, x_0)\big).$$

Покажем, что существуют две последовательности $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset X$ и $\{y_n\}_{n=0}^\infty \subset Y$ такие, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ выполнены условия:

$$\begin{aligned} & y_n \in F(x_n, x_n), \quad \widehat{y} \in F(x_{n+1}, x_n), \\ & \alpha\rho(x_{n+1}, x_n) \leq d(\widehat{y}, y_n) \leq \beta\rho(x_n, x_{n-1}), \\ & \rho(x_{n+1}, x_0) \leq \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, y_0). \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Будем доказывать это утверждение методом математической индукции. Но прежде всего отметим, что в оценке расстояния $\rho(x_n, x_0)$ в заключительном соотношении (2.3) имеем

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, y_0) \leq R.$$

Таким образом, для элементов определяемой здесь последовательности при любом n будет выполнено $x_n \in U$.

Сначала проверим соотношения (2.3) при $n = 1$. Очевидно, выполнено $x_0 \in U$, поэтому $(x_0, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_0); X]$. Из этого включения следует существование элемента $x_1 \in X$ такого, что

$$\widehat{y} \in F(x_1, x_0), \quad \rho(x_1, x_0) \le \frac{1}{\alpha} d(\widehat{y}, y_0) < R.$$

Так как $x_1 \in U$, имеем $(x_1, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_1, \cdot); U]$, таким образом, существует $y_1 \in F(x_1, x_1)$ такой, что справедливо неравенство

$$d(\widehat{y}, y_1) \le \beta \rho(x_1, x_0).$$

И, повторяя рассуждения для $x_1 \in U$, получаем $(x_1, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_1); X]$, вследствие чего существует элемент $x_2 \in X$ такой, что

$$\widehat{y} \in F(x_2, x_1), \quad \rho(x_2, x_1) \le \frac{1}{\alpha} d(\widehat{y}, y_1) \le \frac{\beta}{\alpha} \rho(x_1, x_0).$$

Из последнего неравенства получаем

$$\rho(x_2, x_0) \le \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, x_0) \le \Big(\frac{\beta}{\alpha} + 1\Big) \rho(x_1, x_0) \le \frac{\beta + \alpha}{\alpha^2} d(\widehat{y}, y_0) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2(\beta - \alpha)} d(\widehat{y}, y_0).$$

Итак, для $n = 1$ соотношения (2.3) выполнены.

Предположим, что соотношения (2.3) справедливы для всех натуральных $n \le k$, в частности, при $n = k$ имеем:

$$\begin{aligned} &y_k \in F(x_k, x_k), \quad \widehat{y} \in F(x_{k+1}, x_k), \\ &\alpha \rho(x_{k+1}, x_k) \le d(\widehat{y}, y_k) \le \beta \rho(x_k, x_{k-1}), \\ &\rho(x_{k+1}, x_0) \le \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, y_0) < R. \end{aligned}$$

В силу принятых предположений, поскольку $x_{k+1} \in U$, имеем $(x_{k+1}, \widehat{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x_{k+1}, \cdot); U]$ и $(x_{k+1}, \widehat{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x_{k+1}); X]$. Согласно первому из этих включений найдется элемент $y_{k+1} \in Y$ такой, что

$$y_{k+1} \in F(x_{k+1}, x_{k+1}), \quad d(\widehat{y}, y_{k+1}) \le \beta \rho(x_{k+1}, x_k).$$

А согласно второму — существует $x_{k+2} \in X$, удовлетворяющий соотношениям

$$\widehat{y} \in F(x_{k+2}, x_{k+1}), \quad \rho(x_{k+2}, x_{k+1}) \le \frac{1}{\alpha} d(\widehat{y}, y_{k+1}).$$

Таким образом,

$$\rho(x_{k+2}, x_{k+1}) \le \frac{1}{\alpha} d\big(\widehat{y}, y_{k+1})\big) \le \frac{\beta}{\alpha} \rho\big(x_{k+1}, x_k\big).$$

Так как аналогичное соотношение $\rho(x_{n+1}, x_n) \le \alpha^{-1} \beta \rho\big(x_n, x_{n-1}\big)$ справедливо при любом натуральном $n \le k$, получаем

$$\rho(x_{k+2}, x_{k+1}) \le \frac{\beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}} \rho(x_1, x_0) \le \frac{\beta^{k+1}}{\alpha^{k+2}} d(\widehat{y}, y_0).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \rho(x_0, x_{k+2}) &\le \rho(x_0, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_{k+2}) \\ &\le \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha^{k+1}(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, y_0) + \frac{\beta^{k+1}}{\alpha^{k+2}} d(\widehat{y}, y_0) = \frac{\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}}{\alpha^{k+2}(\alpha - \beta)} d(\widehat{y}, y_0)). \end{aligned}$$

Итак, для $n = k + 1$ все соотношения (2.3) выполнены.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. При любых натуральных $n, m,\ n < m$ имеем

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m)$$
$$\le \frac{1}{\alpha} \sum_{i=n}^{m-1} \frac{\beta^i}{\alpha^i} d(\widehat{y}, y_0) \le \frac{\beta^n}{\alpha^n} \frac{1}{\alpha - \beta} d(\widehat{y}, y_0).$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$, полагая

$$N = \log_{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\varepsilon(\alpha - \beta)}{d(\widehat{y}, y_0)},$$

получим, что при всех натуральных $n, m,\ m > n > N$ выполнено неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset U$ в полном пространстве X сходится к некоторой точке $\widehat{x} \in U$. Из неравенства

$$d(\widehat{y}, y_n) \le \beta\rho(x_{n+1}, x_n)$$

следует сходимость $d(\widehat{y}, y_n) \to 0$. А так как $(x, \widehat{y}) \in \mathrm{Cl}[G; U]$, то $\widehat{y} \in G(x)$. □

Отметим, что использование в теореме 2.1 понятия множества замкнутости $\mathrm{Cl}[G; U]$ многозначного отображения G позволяет существенно ослабить требования непрерывности или замкнутости G на множестве U, традиционные для теорем о неподвижных точках (см. [18]), теорем о точках совпадения (см. [2, 16, 17, 25]) и теорем о более общих операторных уравнениях и включениях (см. [11, 13, 15]). В частности, для замкнутости однозначного отображения необходимо, чтобы любая сходящаяся последовательность его значений имела единственный предел, но для многих обобщенно метрических пространств ситуация единственности предела не типична (см. [17, 18]).

Из доказанной здесь теоремы 2.1 в случае, если пространство Y метрическое, следует результат о возмущениях многозначного накрывающего отображения, полученный в [13]. Для однозначных отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, из теоремы 2.1 выводятся утверждения, полученные в [20–23], а также соответствующие результаты [10–12] об отображениях метрических пространств.

3. Устойчивость решений включения к изменениям порождающего отображения и правой части

Здесь мы получим достаточные условия разрешимости включения, полученного из включения (2.1) изменениями многозначного отображения $F : X \times X \rightrightarrows Y$ и элемента $\widehat{y} \in Y$, а также сходимости решений последовательности «возмущенных» включений к решению включения (2.1) при сходимости в некотором смысле последовательности измененных отображений $F_i : X \times X \rightrightarrows Y$ к отображению F и сходимости последовательности элементов $\widehat{y}_i \in Y$ к элементу $\widehat{y}$.

Итак, пусть для любого натурального i заданы элемент $\widehat{y}_i \in Y$ и многозначное отображение $F_i : X \times X \rightrightarrows Y$. Рассмотрим включение

$$G_i(x) := F_i(x, x) \ni \widehat{y}_i \tag{3.1}$$

относительно неизвестного $x \in X$. Пусть также задано решение ξ включения (2.1).

Теорема 3.1. *Пусть метрическое пространство* X *является полным, при любом* $i = 1, 2, \dots$ *заданы* $\alpha_i > \beta_i \geq 0$. *Предположим, что существует такое* $\delta > 0$, *что при всех* i *для любого* $x \in U_\delta := B_X\big(\xi, \delta\big)$ *выполнены включения*

$$(x, \widehat{y}_i) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F_i(\cdot, x); X], \quad (x, \widehat{y}_i) \in \mathrm{Lip}_\beta[F_i(x, \cdot); U_\delta], \quad (x, \widehat{y}_i) \in \mathrm{Cl}[G_i; U_\delta].$$

Тогда, если имеет место сходимость

$$R_i := \frac{1}{\alpha_i - \beta_i} \mathrm{dist}\big(\widehat{y}_i, F_i(\xi, \xi)\big) \to 0, \tag{3.2}$$

то найдется номер I, *начиная с которого при любом* $i > I$ *включение* (3.1) *обладает таким решением* ξ_i, *что* $\xi_i \to \xi$ *(в метрическом пространстве* X *).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим номер I так, чтобы при всех $i > I$ было выполнено неравенство $R_i < \delta/3$. Выберем $\varepsilon = 1/2$ и определим шар $U_i := B_X\big(\xi, (1+\varepsilon)R_i\big)$. Очевидно выполнено соотношение

$$U_i \subset B_X\big(\xi, \delta/2\big) \subset U_\delta.$$

В силу соотношений (1.2), из предположений доказываемого утверждения следует, что при каждом $i > I$ для любого $x \in U_i$ выполнены включения

$$(x, \widehat{y}_i) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F_i(\cdot, x); X], \quad (x, \widehat{y}_i) \in \mathrm{Lip}_\beta[F_i(x, \cdot); U_i], \quad (x, \widehat{y}_i) \in \mathrm{Cl}[G_i; U_i].$$

Таким образом, включение (3.1) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1 (если полагать $x_0 = \xi$). Согласно теореме 2.1 в шаре U_i существует решение ξ_i включения (3.1). Так как последовательность радиусов $(1+\varepsilon)R_i$ шаров U_i при $i \to \infty$ сходится к нулю, получаем $\xi_i \to \xi$. □

Отметим, что близкие утверждения об устойчивости решений уравнений и точек совпадения к малым изменениям отображений в случае, когда оба пространства X и Y метрические, получены в [8, 9].

References

[1] А. В. Дмитрук, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, “Теорема Люстерника и теория экстремума”, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 11–46; англ. пер.:A. V. Dmitruk, A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii, “Lyusternik's theorem and the theory of extrema”, *Russian Math. Surveys*, **35**:6 (1980), 11–51.

[2] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[3] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, Z. T. Zhukovskaya, “Kantorovich's Fixed Point Theorem and Coincidence Point Theorems for Mappings in Vector Metric Spaces”, *Set-Valued Var. Anal.*, 2021.

[4] B. Zhang, W. Ouyang, “Coincidence points for set-valued mappings with directional regularity”, *Fixed Point Theory*, **22**:1 (2021), 391–406.

[5] Ю. Н. Захарян, Т. Н. Фоменко, “О сохранении совпадений у однопараметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех.*, 2021, №1, 28–34. [Yu. N. Zakharyan, T. N. Fomenko, “Coincidence preservation for a one-parameter family of pairs of Zamfirescu type multi-valued mappings”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2021, №1, 28–34 (In Russian)].

[6] Е. С. Жуковский, "О точках совпадения векторных отображений", *Изв. вузов. Матем.*, 2016, № 10, 14–28; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On Coincidence Points for Vector Mappings", *Russian Mathematics*, **60**:10 (2016), 10–22.

[7] A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk, V. Obukhovskii, "Locally covering maps in metric spaces and coincidence points", *J. Fixed Points Theory and Applications*, **5**:1 (2009), 105–127.

[8] А. В. Арутюнов, "Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений", *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 163–169; англ. пер.:A. V. Arutyunov, "Stability of coincidence points and properties of covering mappings", *Mathematical Notes*, **86** (2009), 153–158.

[9] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, S. E. Zhukovskiy, "Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points", *SIAM Journal on Optimization*, **25**:2 (2015), 807–828.

[10] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, "Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.:E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, "Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative", *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[11] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[12] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, "On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative", *Differential Equations*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[13] Aram Arutyunov, Valeriano Antunes de Oliveira, Fernando Lobo Pereira, Evgeniy Zhukovskiy, Sergey Zhukovskiy, "On the solvability of implicit differential inclusions", *Applicable Analysis*, **94**:1 (2015), 129–143.

[14] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, "Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, "Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative", *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[15] Е. С. Жуковский, "О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах", *Сиб. матем. журн.*, **57**:2 (2016), 297–311; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, "Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces", *Siberian Mathematical Journal*, **57**:2 (2016), 230–241.

[16] Е. С. Жуковский, "О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств", *Матем. заметки*, **100**:3 (2016), 344–362; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On Coincidence Points of Multivalued Vector Mappings of Metric Spaces", *Mathematical Notes*, **100**:3 (2016), 363–379.

[17] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, "Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения", *Докл. РАН.*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, "Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points", *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[18] Е. С. Жуковский, "Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств", *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "The fixed points of contractions of f-quasimetric spaces", *Siberian Mathematical Journal*, **59**:6 (2018), 1063–1072.

[19] Т. Н. Фоменко, "Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в f-квазиметрическом пространстве", *Матем. заметки.*, **110**:4 (2021), 598–609; англ. пер.:T. N. Fomenko, "The Existence of Zeros of Multivalued Functionals, Coincidence Points, and Fixed Points in f-Quasimetric Spaces", *Math. Notes*, **110**:4 (2021), 583–591.

[20] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, "О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений", *Уфимский матемтический журнал*, **12**:4 (2020), 42–55; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations", *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 42–55.

[21] В. Мерчела, “К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, “About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].

[22] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela, “Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 52–63 (In Russian)].

[23] Т. В. Жуковская, В. Мерчела, А. И. Шиндяпин, “О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика.*, **26**:4 (2020), 52–63. [T. V. Zhukovskaia, A. I. Shindiapin, W. Merchela, “On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:4 (2020), 52–63 (In Russian)].

[24] Е. О. Бурлаков, Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, Н П. Пучков, “Приложения накрывающих отображений в теории неявных дифференциальных уравнений”, *Материалы IV Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики". Кабардино-Балкарская республика, Нальчик, Приэльбрусье, 22–26 мая 2018 г. Часть I*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **165**, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 21–33. [E. O. Burlakov, T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, N. P. Puchkov, “Applications of covering mappings in the theory of implicit differential equations”, *Proceedings of the IV International Scientific Conference ”Actual Problems of Applied Mathematics”. Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, Elbrus Region, May 22–26, 2018. Part I*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **165**, VINITI, Moscow, 2019, 21–33].

[25] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств”, *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations”, *Sbornik: Mathematics*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

Информация об авторе

Мерчела Вассим, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург. Российская Федерация. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Information about the author

Wassim Merchela, Post-Graduate Student. Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov; St. Petersburg University, St. Petersburg, Russian Federation. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Поступила в редакцию 27.12.2021 г.
Поступила после рецензирования 01.03.2022 г.
Принята к публикации 10.03.2022 г.

Received 27.12.2021
Reviewed 01.03.2022
Accepted for press 10.03.2022