ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

© Каменский М.И., Обуховский В.В., Петросян Г.Г., 2021
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-250-270
УДК 517.927.21

OPEN ACCESS
CC BY

О существовании решения периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховых пространствах

Михаил Игоревич КАМЕНСКИЙ[1], **Валерий Владимирович ОБУХОВСКИЙ**[2], **Гарик Гагикович ПЕТРОСЯН**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

Аннотация. В настоящей работе исследуется периодическая краевая задача для класса полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве, для которых многозначная нелинейность удовлетворяет условию регулярности, выраженному в терминах мер некомпактности. Для доказательства существования решений задачи мы сначала конструируем соответствующую функцию Грина. Затем вводим в рассмотрение многозначный разрешающий оператор в пространстве непрерывных функций и сводим поставленную задачу к существованию неподвижных точек разрешающего мультиоператора. Для доказательства существования неподвижной точки используется обобщенная теорема типа Б. Н. Садовского для уплотняющих многозначных отображений.

Ключевые слова: дифференциальное включение, дробная производная, функция Грина, уплотняющий мультиоператор, мера некомпактности, неподвижная точка

Благодарности: Работа первого и второго авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-51-15003-НЦНИ_а). Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (проект МК-338.2021.1.1).

Для цитирования: *Каменский М.И., Обуховский В.В., Петросян Г.Г.* О существовании решения периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховых пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 250–270. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-250-270.

© M. I. Kamenskii, V. V. Obukhovskii, G. G. Petrosyan, 2021
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-250-270

OPEN ACCESS
CC BY

On the existence of a solution for a periodic boundary value problem for semilinear fractional-order differential inclusions in Banach spaces

Mikhail I. KAMENSKII[1] , **Valeri V. OBUKHOVSKII**[2] , **Garik G. PETROSYAN**[2]

[1] Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russian Federation
[2] Voronezh State Pedagogical University
86 Lenin Str., Voronezh 394043, Russian Federation

Abstract. In this paper, we study a periodic boundary value problem for a class of semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space for which the multivalued nonlinearity satisfies the regularity condition expressed in terms of measures of noncompactness. To prove the existence of solutions to the problem, we first construct the corresponding Green function. Then we introduce into consideration a multivalued resolving operator in the space of continuous functions and reduce the posed problem to the existence of fixed points of the resolving multioperator. To prove the existence of a fixed point, a generalized theorem of B.N. Sadovskii type for a condensing multivalued map is used.

Keywords: differential inclusion, fractional derivative, Green's function, condensing multioperator, measure of noncompactness, fixed point

Mathematics Subject Classification: 34A08, 34C25, 34G20, 47H04, 47H08.

Acknowledgements: The work of the first and second authors was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-51-15003-НЦНИ_а). The work of the third author was supported by the grant from the President of the Russian Federation for young scientists – candidates of science (project no. MK-338.2021.1.1).

For citation: Kamenskii M.I., Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G. O sushchestvovanii resheniya periodicheskoy krayevoy zadachi dlya polulineynykh differentsial'nykh vklyucheniy drobnogo poryadka v banakhovykh prostranstvakh [On the existence of a solution for a periodic boundary value problem for semilinear fractional-order differential inclusions in Banach spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 250–270. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-250-270. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями и включениями дробного порядка в бесконечномерных пространствах, активно развивается и находит многочисленные применения в математической физике, инженерии, экономике, экологии и других разделах естествознания (см. монографии [1,2], статьи [3,4]). На данный момент разработаны различные подходы к исследованию разрешимости дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $q \in (0,1)$. Например, в работах [5,6] для дифференциальных уравнений указанного дробного порядка были разрешены задачи типа Коши. Статьи [7,8] посвящены исследованию траекторий дифференциальных включений дробного порядка $q \in (0,1)$, подчиняющихся обобщенным краевым условиям, выраженным в форме операторных включений. В работах [9, 10] авторы приводят доказательства утверждений о разрешимости периодических краевых задач для дифференциальных включений того же порядка, а в работах [11,12] — для антипериодических краевых задач. Аппроксимации решений дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $q \in (0,1)$ были изучены в статьях [13,14].

В последние годы активно исследуются дифференциальные уравнения и включения дробного порядка $q > 1$. В настоящей работе разрешается периодическая задача для класса полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $q \in (1,2)$ в банаховом пространстве, для которых многозначная нелинейность удовлетворяет условию регулярности, выраженному в терминах мер некомпактности. Отметим, что для содержащих линейную часть дифференциальных уравнений дробного порядка меньшего единицы в работах [15,16] на основе метода функции Грина были изучены периодические краевые задачи.

Мы исследуем периодическую краевую задачу в сепарабельном банаховом пространстве E для полулинейного дифференциального включения следующего вида:

$$ {}^{C}D^{q}x(t) \in \lambda x(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0,T], \tag{0.1} $$

$$ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \tag{0.2} $$

Здесь $\lambda > 0$, ${}^{C}D^{q}$ — дробная производная Капуто и $F\colon [0,T] \times E \multimap E$ — многозначное отображение. Отметим, что для полулинейного случая с дробной производной порядка $q \in (1,2)$ такого рода задачи до настоящего времени не были исследованы.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе 1 мы приводим необходимые понятия и факты из дробного анализа и теории уплотняющих отображений. Во втором разделе мы конструируем функцию Грина для линейной части рассматриваемой задачи (0.1), (0.2). Затем мы вводим и исследуем разрешающий интегральный оператор в пространстве непрерывных функций, неподвижные точки которого совпадают с решениями задачи. На этой основе мы доказываем главный результат о существовании периодического решения (теорема 2.3).

1. Предварительные сведения

1.1. Дробный анализ

Приведем необходимые понятия и обозначения из дробного математического анализа (более подробные сведения можно найти в монографиях [1, 2]).

О п р е д е л е н и е 1.1. *Дробным интегралом порядка* $q > 0$ *функции* $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ называется функция $I^q g$, определяемая соотношением

$$I^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} g(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{q-1} e^{-x} dx.$$

Отметим, что для гамма-функции Эйлера справедливо равенство (см., например, [2])

$$\frac{1}{\Gamma(q)} = 0 \quad \text{для} \quad q = 0, -1, -2, \ldots . \tag{1.1}$$

О п р е д е л е н и е 1.2. *Дробной производной Римана–Лиувилля порядка* $q \geq 0$ *непрерывной функции* $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ называется функция $D^q g$, определяемая соотношением

$$D^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-q-1} g(s)\, ds, \quad n = [q] + 1$$

(символом $[q]$ здесь и далее обозначена целая часть числа q).

О п р е д е л е н и е 1.3. *Дробной производной Капуто порядка* $q \geq 0$ *функции* $g \in C^n([0, T])$ называется функция ${}^C D^q g$, определяемая соотношением

$${}^C D^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} g^{(n)}(s)\, ds, \quad n = [q] + 1.$$

Дробная производная Капуто порядка $q \geq 0$ для непрерывной функции g на отрезке $[a, b]$ связана с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $q \geq 0$ следующим соотношением:

$${}^C D^q g(t) = \Big(D^q \big(g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k\big)\Big)(t).$$

Большим преимуществом дробной производной Капуто по сравнению с дробной производной Римана–Лиувилля является сохранение основных свойств производной целого порядка, например равенство нулю производной от константы.

О п р е д е л е н и е 1.4. Функция

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn + \beta)}, \quad q > 0, \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C},$$

называется *функцией Миттаг–Леффлера.*

Как правило, функцию $E_{q,1}$ обозначают более просто E_q.

Проиллюстрируем роль функции Миттаг–Леффлера в дробном исчислении. Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка

$$ {}^{C}D^{q}x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad 1 < q < 2, \tag{1.2} $$

$$ x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \tag{1.3} $$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция, для которой существует дробный интеграл порядка q. Под решением данной задачи понимается непрерывная функция $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (1.3), для которой дробная производная Капуто ${}^{C}D^{q}x$ также непрерывна и удовлетворяет уравнению (1.2). Известно (см. [2]), что единственным решением данной задачи является функция

$$ x(t) = c_1 E_q(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds. \tag{1.4} $$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения и утверждения (см. [17])

$$ E_{q,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t E_{q,\beta+q}(t), \tag{1.5} $$

$$ \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\lambda t^q)) = t^{\beta-n-1} E_{q,\beta-n}(\lambda t^q), \tag{1.6} $$

$$ \int_0^z t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\lambda t^q) dt = z^{\beta} E_{q,\beta+1}(\lambda z^q), \tag{1.7} $$

Лемма 1.1. *Для функции $f \in C([0,T];E)$ и $1 < q < 2$ справедливо равенство*

$$ \Big(\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds \Big)'_t = \int_0^t (t-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds. $$

Для того чтобы установить аналогичный результат для функции $f \in L^{\infty}([0,T];E)$, нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 1.2. *Для всякой функции $f \in L^{\infty}([0,T];E)$ существует последовательность $\{f_n\} \subset C([0,T];E)$ такая, что $f_n(t) \to f(t)$ во всех точках Лебега функции f из $[0,T]$, причем $\|f_n\|_{C([0,T];E)} \le \|f\|_{L^{\infty}([0,T];E)}$.*

Примером последовательности, удовлетворяющей утверждению леммы 1.2, может служить следующая последовательность, построенная на основе проектора Стеклова

$$ f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \hat{f}(s) ds, & t \in [0,T], \\ 0, & t \notin [0,T]; \end{cases} \qquad \hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0,T], \\ 0, & t \notin [0,T]. \end{cases} $$

Лемма 1.3. (см. [18]) *Для всякой функции $f \in L^{\infty}([0,T];E)$ множество ее точек Лебега есть множество полной меры для $[0,T]$.*

Лемма 1.4. (см. [19]) *Пусть все функции $\{f_n\}$ дифференцируемы в промежутке $[0,T]$ и последовательность производных $\{f'_n\}$ сходится во всем промежутке равномерно относительно $t \in [0,T]$. Тогда, если последовательность $\{f_n\}$ сходится хотя бы в одной точке из $[0,T]$, то*

(1) *последовательность $\{f_n\}$ сходится во всем промежутке и даже равномерно;*

(2) *предельная функция f дифференцируема, причем выполнено $f'(t) = \lim_{n\to\infty} f'_n(t)$.*

Лемма 1.5. *Для функции* $f \in L^\infty([0,T];E)$ *и* $1 < q < 2$ *справедливо равенство*

$$\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds\Big)'_t = \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Доказательство. Пусть $f \in L^\infty([0,T];E)$, тогда в силу лемм 1.2 и 1.3 существует последовательность функций $\{f_n\} \subset C([0,T];E)$ такая, что $f_n(t) \to f(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$. В силу леммы 1.1 для каждой функции $f_n \in C([0,T];E)$ справедливо равенство

$$\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big)'_t = \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds.$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big) = \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds,$$
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big) = \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Теперь, воспользовавшись пунктом (2) леммы 1.4, получим

$$\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds\Big)'_t = \lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big)'_t$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big) = \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

□

1.2. Многозначные отображения

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство, $P(\mathcal{E})$ — совокупность его непустых подмножеств. Введем следующие обозначения:

$$Pb(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ ограничено}\},\quad Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\},$$
$$K(\mathcal{E}) = \{A \in Pb(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\},\quad Kv(\mathcal{E}) = Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E}).$$

Норму множества $M \in Pb(\mathcal{E})$ определим формулой $\|M\| = \sup_{x\in M}\|x\|_{\mathcal{E}}$.

Определение 1.5. (см., например, [20,21]). Пусть $(\mathcal{A},\geq)$ частично упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (мнк) в $\mathcal{E}$, если для каждого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется $\beta(\overline{\text{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\text{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки множества Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *монотонной,* если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$, включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
2) *несингулярной,* если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — это конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется:

3) *правильной,* если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$;

4) *вещественной,* если $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ — множество неотрицательных действительных чисел с естественным порядком;
5) *алгебраически полуаддитивной,* если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \le \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$, для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$.

Примером вещественной мнк, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является мнк Хаусдорфа χ, определяемая формулой

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\}.$$

Отметим, что мнк Хаусдорфа удовлетворяет также свойству *полуоднородности*: для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполнено $\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega)$. Более того, если $\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейный ограниченный оператор, то $\chi(\mathcal{L}(\Omega)) = \|\mathcal{L}\|\chi(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$.

Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [20, 21].

О п р е д е л е н и е 1.6. Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$;

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times E$;

(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в $\mathcal{E}$;

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 1.6. *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ – замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ — п.н.с.*

О п р е д е л е н и е 1.7. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно мнк β (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено $\beta(F(\Omega)) \not\ge \beta(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см., например, [20, 21]).

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — есть β-уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$. Тогда множество* $\operatorname{Fix}\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ *неподвижных точек мультиотображения $\mathcal{F}$ не пусто.*

1.3. Измеримые мультифункции

Пусть $p \ge 1$, E — банахово пространство. Напомним следующие понятия (см., например, [20, 21]).

О п р е д е л е н и е 1.8. Мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$ называется:

L^p-интегрируемой, если она допускает L^p-интегрируемое сечение по Бохнеру, т. е. существует функция $g \in L^p([0, T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, T]$;

L^p-интегрально ограниченной, если существует функция $\xi \in L^p([0, T])$ такая, что

$$\|G(t)\| := \sup\{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\} \le \xi(t) \text{ для п. в. } t \in [0, T].$$

Множество всех L^p-интегрируемых сечений мультифункции $G : [0,T] \to K(E)$ обозначается через $\mathcal{S}^p_G$.

О п р е д е л е н и е 1.9. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0,T];E)$ называется L^p-*полукомпактной*, если она L^p-интегрально ограничена, т. е.

$$\exists v \in L^p_+([0,T]) \ \ \|\xi_n(t)\|_E \le v(t) \ \text{для всех} \ n = 1,2,\dots \ \text{и п. в.} \ t \in [0,T],$$

и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п. в. $t \in [0,T]$.

О п р е д е л е н и е 1.10. Мультифункция G называется *измеримой*, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$. Мультифункция G называется *сильно измеримой*, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n : [0,T] \to K(E)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(G_n(t), G(t)) = 0 \ \text{для п. в.} \ t \in [0,T],$$

где $\mathcal{H}$ — хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p-интегрально ограничена, то она L^p-интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G при любом $t \in [0,T]$ определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds := \Big\{ \int_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}^p_G \Big\}.$$

Лемма 1.7. (см. [20, Теорема 4.2.3.]) *Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G : [0,T] \to P(E)$ — L^p-интегрируемая и L^p-интегрально ограниченная мультифункция такая, что для п. в. $t \in [0,T]$*

$$\chi(G(t)) \le q(t), \quad q \in L^p_+([0,T]).$$

Тогда для всех $t \in [0,T]$ выполнено

$$\chi\Big(\int_0^t G(s)ds \Big) \le \int_0^t q(s)ds.$$

В частности, если мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ измерима и L^p-интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем для всех $t \in [0,T]$

$$\chi\Big(\int_0^t G(s)ds \Big) \le \int_0^t \chi(G(s))ds.$$

Лемма 1.8. (см. [20, Теорема 4.2.1.]) *Пусть последовательность $\{\xi_n\} \subset L^1([0,T];E)$ является L^1-интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\exists \alpha \in L^1_+([0,T]) \ \ \chi(\{\xi_n(t)\}) \le \alpha(t) \ \text{для п. в.} \ t \in [0,T].$$

Тогда для любого $\delta > 0$ существует компактное множество $K_\delta \subset E$ и множество $m_\delta \subset [0,T]$ с лебеговой мерой $m_\delta < \delta$, а также множество функций $G_\delta \subset L^1([0,T];E)$ со значениями в K_δ, такие, что для каждого $n \ge 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \le 2\alpha(t) + \delta, \quad t \in [0,T]\backslash m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2. Основные результаты

Рассмотрим в сепарабельном банаховом пространстве E краевую задачу (1.2), (1.3), где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to E$.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Интегральным решением* краевой задачи (1.2), (1.3) называется функция $x \in C([0,T];E)$, удовлетворяющая равенству (1.4).

Лемма 2.1. *Пусть* $f \in C([0,T];E)$ *и*

$$(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q) \neq 0. \tag{2.1}$$

Тогда краевая задача (1.2), (0.2) *имеет единственное решение, это решение представимо в виде*

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)f(s)ds,$$

где функция Грина $G(t,s)$ *определяется формулой*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)+TE_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2-E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}E_q(\lambda t^q) \\ +\frac{(1-E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q))(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2-E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}tE_{q,2}(\lambda t^q) \\ +(t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q), \qquad 0 \le s \le t < T, \\ \frac{(1-E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)+TE_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2-E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}E_q(\lambda t^q) \\ +\frac{(1-E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q))(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2-E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}tE_{q,2}(\lambda t^q), \\ 0 \le t < s < T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение краевой задачи (1.2), (1.3) в банаховом пространстве E имеет вид (1.4). Применяя формулу (1.6) и лемму 1.1, определим производную этого решения

$$x'(t) = c_1 t^{-1}E_{q,0}(\lambda t^q) + c_2 E_{q,1}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Заметим, что вследствие равенства $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$ для функции $E_{q,0}(\lambda t^q)$ имеем

$$E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \frac{1}{\Gamma(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)},$$

следовательно,

$$t^{-1}E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n t^{qn-1}}{\Gamma(qn)}.$$

Из последней формулы получаем $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$.

Теперь, используя условие (0.2), получаем систему

$$\begin{cases} c_1 = c_1 E_q(\lambda T^q) + c_2 T E_{q,2}(\lambda T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds, \\ c_2 = c_1 T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q) + c_2 E_{q,1}(\lambda T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds. \end{cases}$$

Ее решением является

$$c_1 = \frac{(1-E_q(\lambda T^q))\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)} + \frac{TE_{q,2}(\lambda T^q)\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)},$$

$$c_2 = \frac{(1-E_q(\lambda T^q))\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)} + \frac{T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q)\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (1.4), получаем

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \frac{(1-E_q(\lambda T^q))\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}E_q(\lambda t^q) \\ & + \frac{TE_{q,2}(\lambda T^q)\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}E_q(\lambda t^q) \\ & + \frac{(1-E_q(\lambda T^q))\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}tE_{q,2}(\lambda t^q) \\ & + \frac{T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q)\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}tE_{q,2}(\lambda t^q) \\ & + \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds = \int_0^T G(t,s)f(s)ds. \end{aligned}$$

□

Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 1.5, можно показать, что и в случае $f \in L^\infty([0,T];E)$ функция Грина краевой задачи (1.2), (0.2) определяется формулой (2.2).

Будем полагать, что мультиотображение $F:[0,T]\times E \to Kv(E)$ из задачи (0.1), (0.2) удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для всех $x \in E$ мультифункция $F(\cdot,x):[0,T]\to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п. в. $t\in[0,T]$ многозначное отображение $F(t,\cdot):E\to Kv(E)$ — полунепрерывно сверху;

$(F3)$ для каждого $r>0$ существует функция $\omega_r \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого $x\in E$ с $\|x\|_E < r$ выполнено $\|F(t,x)\|_E \le \omega_r(t)$;

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$ выполнено $\chi(F(t,\Omega)) \le \mu(t)\chi(\Omega)$, при п. в. $t\in[0,T]$ (где χ — мнк Хаусдорфа в E).

Для каждого $x\in C([0,T];E)$ введем в рассмотрение мультифункцию

$$F(\cdot,x(\cdot)):[0,T]\to Kv(E).$$

Из условий $(F1)$–$(F3)$ следует (см., например, [20, теорема 1.3.5]), что мультифункция $F(\cdot,x(\cdot))$ является L^p-интегрируемой для любого $p\ge 1$. Определим суперпозиционный

мультиоператор $\mathcal{P}_F^\infty : C([0,T];E) \multimap L^\infty([0,T];E)$, который каждому $x \in C([0,T];E)$ ставит в соответствие множество $\mathcal{P}_F^\infty(x)$ измеримых сечений мультифункции $F(\cdot, x(\cdot))$. Далее рассмотрим мультиоператор Γ, который каждому $x \in C([0,T];E)$ ставит в соответствие множество

$$\Gamma x(t) = \Big\{ \frac{(1-E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T E_{q,2}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{(1-E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q)$$
$$+ \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)\,ds \Big\} = \Big\{ \int_0^T G(t,s) f(s) ds \Big\},$$

где $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$.

Из условий $(F1)$–$(F4)$ следует, что для функции $x \in C([0,T];E)$ функция $f \in L^\infty([0,T];E)$. При этом, из определения функции Грина следует, что для любого $t \in [0,T]$ при $1 < q < 2$ выполнено $G(\cdot, s) \in L^p([0,T]), p > 1$, и функция Грина теряет непрерывность только в точке $s = t$, поэтому $\Gamma : C([0,T];E) \multimap C([0,T];E)$. Очевидно, если $x \in C([0,T];E)$ является решением задачи (0.1), (0.2), то x является неподвижной точкой мультиоператора Γ. Поэтому, для установления разрешимости краевой задачи (0.1), (0.2) будем доказывать существование неподвижных точек мультиоператора Γ.

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Если выполнено условие*

(A) *функция Грина G не меняет знак на интервале $[0,T]$*

то справедливо равенство

$$\int_0^T |G(t,s)|\,ds = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^T G(t,s) ds = \frac{(1-E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T E_{q,2}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{(1-E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\,ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\,ds.$$

Вычислим интегралы в последнем выражении с помощью формулы (1.7):

$$\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) ds = -\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) d(T-s) =$$

$$\int_0^T y^{q-1}E_{q,q}(\lambda y^q)dy = T^qE_{q,q+1}(\lambda T^q).$$

Таким образом,

$$\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\,ds = T^{q-1}E_{q,q}(\lambda T^q),$$
$$\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)ds = t^qE_{q,q+1}(\lambda t^q).$$

Полагая в (1.5) $\beta = 1$, получим

$$E_q(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda T^qE_{q,q+1}(\lambda t^q) = 1 + \lambda T^qE_{q,q+1}(\lambda T^q),$$
$$E_q(\lambda t^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda t^qE_{q,q+1}(\lambda t^q) = 1 + \lambda t^qE_{q,q+1}(\lambda t^q).$$

Используя свойство (1.1), из (1.5) при $\beta = 0$ получим

$$E_{q,0}(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(0)} + \lambda T^qE_{q,q}(\lambda T^q) = \lambda T^qE_{q,q}(\lambda T^q).$$

Итак, справедливы следующие равенства:

$$\int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)ds = T^q\frac{1}{\lambda T^q}\left(E_q(\lambda T^q) - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda T^q) - 1\right),$$
$$\int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\,ds = \frac{1}{\lambda T}E_{q,0}(\lambda T^q),$$
$$\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)ds = \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q) - 1\right).$$

Окончательно получаем

$$\int_0^T G(t,s)ds = \frac{(1-E_q(\lambda T^q))\frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda T^q)-1\right) + TE_{q,2}(\lambda T^q)\frac{1}{\lambda T}E_{q,0}(\lambda T^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{(1-E_q(\lambda T^q))\frac{1}{\lambda T}E_{q,0}(\lambda T^q) + T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q)\frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda T^q)-1\right)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}tE_{q,2}(\lambda t^q) + \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q)-1\right)$$
$$= -\frac{1}{\lambda}E_q(\lambda t^q)\frac{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}$$
$$+ tE_{q,2}(\lambda t^q)\frac{(1-E_q(\lambda T^q))(\lambda T)^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q) - (1-E_q(\lambda T^q))(\lambda T)^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q)-1\right) = -\frac{1}{\lambda}E_q(\lambda t^q) + \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q)-1\right) = -\frac{1}{\lambda}.$$

Доказано, что равенство (2.3) выполняется. □

Для доказательства существования неподвижных точек мультиоператора Γ введем в рассмотрение оператор

$$S : L^\infty([0,T];E) \to C([0,T];E), \quad S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Лемма 2.3. *Пусть последовательность* $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$ *ограниченная и* $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ *в* $L^1([0,T];E)$. *Тогда* $S(\eta_n) \rightharpoonup S(\eta_0)$ *в* $C([0,T];E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $d>0$ рассмотрим оператор

$$S_d : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E), \quad S_d(\eta_n) = \begin{cases} 0, & t \le d, \\ \int_0^{t-d} (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\eta_n(s)ds, & t > d. \end{cases}$$

Поскольку подынтегральное выражение в последней формуле есть непрерывная на $[0, t-d]$ функция, имеем

$$S_d(\eta_n) \rightharpoonup S_d(\eta_0), \tag{2.4}$$

в пространстве $C([0,T];E)$.

Пусть ψ — непрерывный линейный функционал на $C([0,T];E)$, т. е. $\psi \in C^*([0,T];E)$. Тогда справедливо равенство

$$(\psi, S(\eta_n)) = (\psi, S_d(\eta_n)) + (\psi, S(\eta_n) - S_d(\eta_n)), \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{2.5}$$

Из определения оператора S_d следует

$$(S(\eta_n) - S_d(\eta_n))(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\eta_n(s)ds, & t \le d, \\ \int_{t-d}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\eta_n(s)ds & t > d; \end{cases}$$

$$\|S(\eta_n) - S_d(\eta_n)\|_{C([0,T];E)} \le \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) \cdot \|\eta_n(s)\|_E \, ds, & t \le d, \\ \int_{t-d}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) \cdot \|\eta_n(s)\|_E \, ds, & t > d, \end{cases}$$

$$\le d^q E_{q,q}(\lambda T^q) \|\eta_n\|_{L^\infty([0,T];E)}.$$

Следовательно, для произвольного $\epsilon > 0$ можно подобрать число $d > 0$ таким, что выполняется оценка:

$$\|S(\eta_n) - S_d(\eta_n)\|_{C([0,T];E)} \le \frac{\epsilon}{4\|\psi\|_{C^*([0,T];E)}}. \tag{2.6}$$

В силу (2.4) имеем $(\psi, S_d(\eta_n)) \to (\psi, S_d(\eta_0))$, но тогда для данного ϵ можно найти номер n_0 такой, что

$$(\psi, S_d(\eta_{n_0}) - S_d(\eta_0)) < \epsilon/2 \tag{2.7}$$

Теперь, используя (2.5)–(2.7), получаем оценки:

$$(\psi, S(\eta_n) - S(\eta_0)) = (\psi, S_d(\eta_n) - S_d(\eta_0)) + (\psi, S(\eta_n) - S_d(\eta_n)) + (\psi, S_d(\eta_0) - S(\eta_0))$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + 2\|\psi\|_{C^*([0,T];E)} \frac{\epsilon}{4\|\psi\|_{C^*([0,T];E)}} = \epsilon,$$

которые заключают доказательство. □

Лемма 2.4. *Для каждого компактного множества* $K \subset E$ *и ограниченной последовательности* $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$ *такой, что* $\{\eta_n(t)\} \subset K$ *для п. в.* $t \in [0,T]$, *слабая сходимость* $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ *в* $L^1([0,T];E)$ *влечет сходимость* $S(\eta_n) \to S(\eta_0)$ *в* $C([0,T];E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале заметим, что справедлива следующая оценка:

$$\chi\Big(\{S(\eta_n)(t)\}\Big) \le \int_0^t (t-s)^{q-1}\chi(\{E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\eta_n(s)\})ds = 0.$$

Из этой оценки следует, что последовательность $\{S(\eta_n)(t)\} \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0,T]$. С другой стороны, если мы возьмем $t_1, t_2 \in [0,T]$ такими, что $0 < t_1 < t_2 \le T$, то получим оценку:

$$\begin{aligned}
&\big\|S(\eta_n)(t_2) - S(\eta_n)(t_1)\big\|_E \\
&= \Big\| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)\eta_n(s)ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&= \Big\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&+ \Big\| \int_0^{t_1} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\big)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&\le \Big\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&+ \Big\| \int_0^{t_1} \big((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\big) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&+ \Big\| \int_0^{t_1} (t_2-s)^{q-1} \left(E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\right)\eta_n(s)ds\Big\|_E = Z_1 + Z_2 + Z_3,
\end{aligned}$$

где

$$Z_1 = \Big\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E,$$

$$Z_2 = \Big\| \int_0^{t_1} \big((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\big) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E,$$

$$Z_3 = \Big\| \int_0^{t_1} (t_2-s)^{q-1} \left(E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\right)\eta_n(s)ds\Big\|_E.$$

Для произвольного $\epsilon > 0$ положим $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon/4$.

В силу условия $(F3)$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что неравенство $|t_2 - t_1| < \delta_1$ влечет оценку

$$Z_1 \le \|\omega_K\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q)\frac{(t_2-t_1)^q}{q} < \epsilon_1.$$

Для оценки Z_2, выберем константу $d > 0$, для которой справедливо

$$\begin{aligned}
Z_2 &\le \Big\| \int_0^{t_1-d} \big((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\big) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&+ \Big\| \int_{t_1-d}^{t_1} \big((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\big) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E = I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

где

$$I_1 = \Big\| \int_0^{t_1-d} \big((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\big) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E,$$

$$I_2 = \Big\| \int_{t_1-d}^{t_1} \big((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\big) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E.$$

Рассмотрим функцию $v : [d, T] \to E$, $v(\tau) = \tau^{q-1}$. Данная функция непрерывна на отрезке $[d, T]$, поэтому, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на этом отрезке, т. е. для каждого $\gamma > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что при любых $\tau_1, \tau_2 \in [d, T]$ неравенство $|\tau_2 - \tau_1| < \delta_2 < d$ влечет оценку

$$\left|\tau_2^{q-1} - \tau_1^{q-1}\right| < \gamma.$$

Теперь, выбрав $\tau = t - s$, получим

$$I_1 \le \|\omega_K\|_\infty \gamma(t_1 - d) E_{q,q}(\lambda T^q) < \epsilon_2,$$

и в то же время для I_2 справедлива оценка

$$I_2 \le \frac{\|\omega_K\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q) d^q (2 + 2^q)}{q} < \epsilon_3.$$

В силу определения функции Миттаг–Леффлера для любых $x \in K$ и $\gamma_1 > 0$ существует $\delta_3 > 0$ такое, что в случае $|t_2 - t_1| < \delta_3$ справедливо неравенство

$$\|E_{q,q}(\lambda(t_2 - s)^q)x - E_{q,q}(\lambda(t_1 - s)^q)x\| < \gamma_1,$$

благодаря которому получаем оценку

$$Z_3 \le \gamma_1 T^q < \epsilon_4.$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$, выбрав $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, получим

$$\left\|S(\eta_n)(t_2) - S(\eta_n)(t_1)\right\|_E \le Z_1 + Z_2 + Z_3 < \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 = \epsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{S(\eta_n)\}$ есть равностепенно непрерывное множество. Согласно теореме Арцела–Асколи множество $\{S(\eta_n)\}$ относительно компактно в $C([0, T]; E)$. Из леммы 2.3 следует, что $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ влечет $S(\eta_n) \rightharpoonup S(\eta_0)$. А поскольку последовательность $\{S(\eta_n)\}$ относительно компактна, заключаем, что $S(\eta_n) \to S(\eta_0)$ в $C([0, T]; E)$. □

Определим условия, при которых мультиоператор Γ является уплотняющим. Рассмотрим конус

$$\mathbb{R}^2_+ = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_1 \ge 0, \zeta_2 \ge 0\}$$

с естественным частичным порядком. Введем в пространстве $C([0, T]; E)$ векторную меру некомпактности

$$\nu : Pb(C([0, T]; E)) \to \mathbb{R}^2_+, \quad \nu(\Omega) = \big(\varphi(\Omega), mod_C(\Omega)\big),$$

где первая компонента есть модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0,T]} \chi(\{y(t) : y \in \Omega\}),$$

а вторая компонента — модуль равностепенной непрерывности

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{y \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \le \delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* $(F1)$–$(F4)$, (2.1), (A) *и, кроме того, функция* $\mu(\cdot)$ *из условия* $(F4)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} < 1. \tag{2.8}$$

Тогда мультиоператор Γ *является* ν*-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ — непустое ограниченное множество такое, что

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \tag{2.9}$$

Покажем, что это множество относительно компактно.

Из (2.9) следует, что

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \geq \varphi(\Omega). \tag{2.10}$$

Используя свойство $(F4)$ и (2.3) получаем

$$\begin{aligned}\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) &\leq \chi\left(\int_0^T G(t,s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega\right)\\ &\leq \|\mu\|_\infty \int_0^T |G(t,s)|\,\chi(\Omega(s))ds \leq \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega)\int_0^T |G(t,s)|\,ds = \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi\left(\Gamma(\Omega)\right) = \sup_{t\in[0,T]} \chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leq \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Полученное неравенство и неравенства (2.8), (2.10) влекут равенство $\varphi(\Omega) = 0$.

Теперь покажем, что $mod_C(\Gamma(\Omega)) = 0$.

Используя (2.9) докажем неравенство

$$mod_C(\Gamma(\Omega)) \geq mod_C(\Omega). \tag{2.11}$$

Достаточно показать равностепенную непрерывность множества

$$M = \left\{S(f)(t) : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega\right\} = \left\{\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega\right\}.$$

Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. При любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ таких, что $0 < t_1 < t_2 \leq T$, для произвольного $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $x \in \Omega$, выполнено

$$\begin{aligned}&\left\|S\left(f\right)(t_2) - S\left(f\right)(t_1)\right\|_E\\ &\leq \left\|\int_0^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)f(s)ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)f(s)ds\right\|_E\\ &\leq \left\|\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)f(s)ds\right\|_E\\ &+ \left\|\int_0^{t_1} \left((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\right) f(s)ds\right\|_E = Z_1 + Z_2,\end{aligned}$$

где

$$Z_1 = \left\|\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)f(s)ds\right\|_E,$$

$$Z_2 = \Big\| \int_0^{t_1} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) f(s) ds \Big\|_E.$$

По условию $(F3)$ существует такое $\delta_1 > 0$, что если $|t_2 - t_1| < \delta_1$, то для любого $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $x \in \Omega$, справедливо неравество

$$Z_1 \le \|\omega_{r_\Omega}\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q) \frac{(t_2-t_1)^q}{q} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Для оценки Z_2 выберем

$$d < \delta_2 := \left[\frac{\frac{\epsilon}{6} q}{\|\omega_{r_\Omega}\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q)(2^q+1)} \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда для $t_1 < d$ и $t_2 - t_1 < d$ имеем

$$Z_2 \le \int_0^{t_1} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) \|f(s)\|_E ds + \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \|f(s)\|_E ds$$
$$\le \|\omega_{r_\Omega}\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q) (2^q+1) \frac{d^q}{q} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Для $t_1 > d$ получаем

$$Z_2 \le \Big\| \int_0^{t_1-d} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) f(s) ds \Big\|_E$$
$$+ \Big\| \int_{t_1-d}^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) f(s) ds \Big\|_E = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \Big\| \int_0^{t_1-d} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) f(s) ds \Big\|_E,$$
$$I_2 = \Big\| \int_{t_1-d}^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) f(s) ds \Big\|_E.$$

Возьмем d настолько малым, что

$$I_2 \le \frac{\|\omega_{r_\Omega}\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q) d^q (2+2^q)}{q} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Поскольку $\chi(\Omega(t)) \equiv 0$, то согласно лемме 1.8 для любого $\delta_3 > 0$ существуют компактное множество $K_{\delta_3} \subset E$, множество $m_{\delta_3} \subseteq [0,T]$ с лебеговой мерой $\mathrm{mes}(m_{\delta_3}) < \delta_3$ и множество функций $\Delta \subset L^1([0,T];E)$ со значениями из K_{δ_3} такие, что существует функция $b \in \Delta$, для которой

$$\|f(t) - b(t)\|_E \le \delta_3, \quad t \in [0,T] \setminus m_{\delta_3}. \tag{2.12}$$

Более того, функция $b \in \Delta$ может быть выбрана такой, что $b(t) \equiv 0$ на m_{δ_3}, и множество Δ слабо компактно в $L^1([0,T];E)$.

Тогда для I_1 выполнено:

$$I_1 = \Big\| \int_0^{t_1-d} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) \big(f(s) - b(s) + b(s) \big) ds \Big\|_E$$

$$
\begin{aligned}
&\le \Big\| \int_0^{t_1-d} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E \\
&\qquad + \Big\| \int_0^{t_1-d} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big)\, b(s) ds \Big\|_E \\
&\le \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E \\
&+ \Big\| \int_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E \\
&\qquad + \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) b(s) ds \Big\|_E \\
&\qquad + \Big\| \int_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) b(s) ds \Big\|_E \\
&= \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E \\
&+ \Big\| \int_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E \\
&\qquad + \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) b(s) ds \Big\|_E \\
&\qquad\qquad = N_1 + N_2 + N_3,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) \big(f(s)-b(s) \big) ds \Big\|_E, \\
N_2 &= \Big\| \int_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) \big(f(s)-b(s) \big) ds \Big\|_E, \\
N_3 &= \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) b(s) ds \Big\|_E.
\end{aligned}
$$

В силу неравенства (2.12), можно выбрать $\delta_3 > 0$ настолько малым, что если

$$
\operatorname{mes}(m_{\delta_3}) < 2\frac{\epsilon}{6} d^{1-q},
$$

то справедливы неравенства $N_1 < \frac{\epsilon}{6}$ и $N_2 < \frac{\epsilon}{6}$.

Заметим, что функции из Δ принимают значения во множестве K_{δ_3}, что влечет включение $\Delta \subset L^\infty([0,T];E)$. Поэтому, используя лемму 2.4, можем выбрать $\delta_4 > 0$ таким, что если $|t_2 - t_1| < \delta_4$, то $N_3 < \frac{\epsilon}{6}$.

Итак, для произвольного $\epsilon > 0$, определив $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, получим

$$
\begin{aligned}
\big\| S(f)(t_2) - S(f)(t_1) \big\|_E \le Z_1 + Z_2 \le Z_1 + I_1 + I_2 \le Z_1 + I_2 + N_1 + N_2 + N_3 \\
< \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \epsilon
\end{aligned}
$$

для любых $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $x \in \Omega$, и $|t_2 - t_1| < \delta$. Таким образом, множество M равностепенно непрерывно. Из неравенства (2.11) следует, что $mod_C(\Omega) = 0$, поэтому $\nu(\Omega) = (0,0)$, что доказывает относительную компактность множества Ω. □

Теорема 2.2. *Мультиоператор* Γ *является п.н.с.*

Доказательство. Из аналитического задания мультиоператора Γ и свойств многозначных отображений (см., например, [20]) следует, что утверждение достаточно доказать для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$.

Покажем, что мультиотображение $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является квазикомпактным. Возьмем непустое компактное множество $A \subset C([0,T];E)$ и рассмотрим последовательность $\{y_n\} \subset S \circ \mathcal{P}_F^\infty(A)$, $y_n = S(f_n)$, где $f_n \in \mathcal{P}_F^\infty(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset A$. Предположим, без ограничения общности, что $x_n \to x_0 \in A$. Из условия $(F4)$ следует, что последовательность $\{f_n(t)\} \subset E$ относительно компактна для п. в. $t \in [0,T]$, поэтому последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1-полукомпактной. Согласно критерию слабой относительной компактности Дистеля (см. [22]), для произвольной подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ выполнено $f_{n_k} \overset{L^1}{\rightharpoonup} f_0$. В силу свойств слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора (см. [20, лемма 5.1.1]) получаем, что $f_0 \in \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$. Теперь, применяя лемму 2.4, для соответствующей подпоследовательности получаем, что $y_{n_k} \to y_0 = S(f_0) \in S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$.

Аналогично доказывается, что мультиоператор $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является замкнутым, и согласно лемме 1.6 этот мультиоператор является п.н.с. □

Теперь приведем основное утверждение данной работы.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$, (2.1), (A). *Пусть также выполнено условие*

$(F3')$ *существует функция* $\alpha \in L_+^\infty([0,T])$ *такая, что*

$$\|F(t,x)\|_E \le \alpha(t)(1 + \|x\|_E).$$

Тогда, если

$$k := \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\} < \lambda,$$

где функции α *и* μ *из условий* $(F3')$ *и* $(F4)$ *соответственно, то краевая задача* (0.1), (0.2) *имеет решение.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x \in C([0,T];E)$. Для любых $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$ и $t \in [0,T]$ имеем:

$$\|\Gamma x(t)\|_E \le \Big\| \int_0^T G(t,s) f(s) ds \Big\|_E \le \int_0^T |G(t,s)| \, \|f(s)\|_E ds$$

$$\le \int_0^T |G(t,s)| \, \|\alpha\|_\infty \big(1 + \|x\|_{C([0,T];E)}\big) ds = \|\alpha\|_\infty \big(1 + \|x\|_{C([0,T];E)}\big) \int_0^T |G(t,s)| \, ds$$

$$= \frac{\|\alpha\|_\infty \big(1 + \|x\|_{C([0,T];E)}\big)}{\lambda} \le \frac{k\big(1 + \|x\|_{C([0,T];E)}\big)}{\lambda}.$$

Таким образом, для

$$R \ge \frac{k\lambda^{-1}}{1 - k\lambda^{-1}},$$

из неравенства $\|x\|_{C([0,T];E)} \le R$ следует, что $\|\Gamma x\|_{C([0,T];E)} \le R$. Поэтому мультиоператор Γ преобразует замкнутый шар $B_R(0) \subset C([0,T];E)$ в себя. А поскольку мультиоператор Γ уплотняющий, по теореме 1.1 он имеет неподвижную точку, которая является решением задачи (0.1), (0.2). □

References

[1] S. G. Samco, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publ., Amsterdam, 1993.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V., North–Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 2006.

[3] F. Mainardi, S. Rionero, T. Ruggeri, "On the initial value problem for the fractional diffusionwave equation", *Waves and Stability in Continuous Media*, 1994, 246–251.

[4] M. Afanasova, Y. Ch. Liou, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, "On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **20**:9 (2019), 1919–1935.

[5] J. Appell, B. Lopez, K. Sadarangani, "Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives", *J. Nonlinear Var. Anal.*, 2018, № 2, 25–33.

[6] T. D. Ke, N. V. Loi, V. Obukhovskii, "Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2015, № 18, 531–553.

[7] М. С. Афанасова, Г. Г. Петросян, "О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с обобщенным начальным условием в банаховом пространстве", *Известия вузов. Математика*, 2019, № 9, 3–15; англ. пер.:M. Afanasova, G. Petrosyan, "On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space", *Russian Mathematics*, **63**:9 (2019), 1–11.

[8] I. Benedetti, V. Obukhovskii, V. Taddei, "On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, № 20, 1424–1446.

[9] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space", *Applicable Analysis*, **97**:4 (2018), 571–591.

[10] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional–Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space", *Mathematics*, **7**:12, Special Issue "Fixed Point, Optimization, and Applications" (2019), 5–19.

[11] Г. Г. Петросян, "Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве", *Уфимский математический журнал*, **12**:3 (2020), 71–82; англ. пер.:G. Petrosyan, "On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of fractional order with a deviating argument in a Banach space", *Ufa Mathematical Journal*, **12**:3 (2020), 69–80.

[12] R. Agarwal, B. Ahmad, "Existence theory for anti-periodic boundary value problems of fractional differential equations and inclusions", *Comput. Math. Appl.*, 2011, № 62, 1200–1214.

[13] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions", *Fixed Point Theory and Applications*, 2019, № 2, 1–21.

[14] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, **28**:4 (2017), 1–28.

[15] M. Belmekki, J. J. Nieto, R. Rodriguez–Lopez, "Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation", *Boundary Value Problems*, **2009** (2009), 1–18, Article ID 324561.

[16] M. Belmekki, J. J. Nieto, R. Rodriguez–Lopez, "Existence of solution to a periodic boundary value problem for a nonlinear impulsive fractional differential equation", *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **16** (2014), 1–27.

[17] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin, *Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer–Verlag, Berlin; Heidelberg, 2014.

[18] V. M. Bogdan, *Generalized Vectorial Lebesgue and Bochner Integration Theory*, 2010, arXiv: 1006.3881v1.

[19] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, Физматлит, М., 2006. [G. M. Fichtengolts, *Course in Differential and Integral Calculus*. V. 1, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].

[20] M. I. Kamenskii, V. V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter, Berlin; New–York, 2001.

[21] V. V. Obukhovskii, B. Gelman, *Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, 2020.

[22] J. Diestel, W. M. Ruess, W. Schachermayer, "On weak compactness in $L^1(\mu, X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, № 118, 447–453.

Информация об авторах

Каменский Михаил Игоревич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой функционального анализа и операторных уравнений. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7542-0902

Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739

Петросян Гарик Гагикович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Петросян Гарик Гагикович
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.03.2021 г.
Поступила после рецензирования 24.05.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Information about the authors

Mikhail I. Kamenskii, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Functional Analysis and Operator Equations Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7542-0902

Valeri V. Obukhovskii, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation.
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739

Garik G. Petrosyan, Candidate of Physics and Mathematics, Docent of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Garik G. Petrosyan
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Received 15.03.2021
Reviewed 24.05.2021
Accepted for press 10.09.2021