

© Успенский А.А., Лебедев П.Д., 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-370-386

УДК 517.977

Элементы аналитического конструктора решений в классе задач управления по быстродействию с целевым множеством с разрывной кривизной границы

Павел Дмитриевич ЛЕБЕДЕВ, Александр Александрович УСПЕНСКИЙ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

Elements of analytical solutions constructor in a class of time-optimal control problems with the break of curvature of a target set

Pavel D. LEBEDEV, Alexander A. USPENSKIY

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics

of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Аннотация. Рассмотрена плоская задача управления по быстродействию с круговой индикатрисой и целевым множеством с гладкой границей, имеющей конечные разрывы производных второго порядка от координатных функций. Изучены псевдовершины — особые точки границы цели, порождающие сингулярность у функции оптимального результата. Для нестационарных псевдовершин с разрывной кривизной найдены односторонние маркеры, значения которых нужны при аналитическом и численном построении ветвей сингулярного множества. Доказано, что маркеры лежат на границе спектра — области возможных значений. Один из них равен нулю, другой принимает несобственное значение $-\infty$. При их вычислении применены асимптотические разложения нелинейного уравнения, выражающего условие трансверсальности. На основе маркеров также получены точные формулы крайних точек ветвей сингулярного множества. Предъявлен пример задачи управления, в котором найденных с помощью развиваемых методов конструктивных элементов (псевдовершины, ее маркеров и крайней точки сингулярного множества) оказывается достаточно, чтобы на всей области рассмотрения построить в явном аналитическом виде сингулярное множество и функцию оптимального результата.

Ключевые слова: быстродействие; функция оптимального результата; сингулярное множество; трансверсальность; уравнение Гамильтона–Якоби; биссектриса; минимаксное решение; диффеоморфизм

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00264_а).

Для цитирования: Лебедев П.Д., Успенский А.А. Элементы аналитического конструктора решений в классе задач управления по быстродействию с целевым множеством с разрывной кривизной границы // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 132. С. 370–386. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-370-386.

Abstract. A planar velocity control problem with a disc indicatrix and a target set with a smooth boundary having finite discontinuities of second-order derivatives of coordinate functions is considered. We have studied pseudo-vertices-special points of the goal boundary that generate

a singularity for the optimal control function. For non-stationary pseudo-vertices with discontinuous curvature, one-way markers are found, the values of which are necessary for analytical and numerical construction of branches of a singular set. It is proved that the markers lie on the border of the spectrum—the region of possible values. One of them is equal to zero, the other takes an invalid value $-\infty$. In their calculation, asymptotic expansions of a nonlinear equation expressing the transversality condition are applied. Exact formulas for the extreme points of branches of a singular set are also obtained based on markers. An example of a control problem is presented, in which the constructive elements are obtained using the developed methods (pseudo-vertex, its markers, and the extreme point of a singular set), are sufficient to construct a singular set and an optimal result function in an explicit analytical form over the entire area of consideration.

Keywords: velocity; optimal result function; singular set; transversality; Hamilton–Jacobi equation; bisector; minimax solution; diffeomorphism

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00264_a).

For citation: Lebedev P.D., Uspenskii A.A. Elementy analiticheskogo konstruktora resheniy v klasse zadach upravleniya po bystrodeystviyu s tselevym mnozhestvom s razryvnoy kriviznoy granitsy [Elements of analytical solutions constructor in a class of velocity problems with the break of curvature of a target set]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 370–386.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-132-370-386. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Задача управления по быстродействию относится к классическим задачам математической теории управления, становление которой проходило во второй половине XX века [1–3]. Построение решений задач быстродействия опирается на принцип максимума Л. С. Понтрягина (см., например, [4]), на метод динамического программирования [5], на концепцию управления по принципу обратной связи [6], на теорию минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка (УЧППП) [7], на вязкостный подход к определению обобщенного решения УЧППП [8]. Современные подходы к решению задач управления привлекают результаты теории дифференциальных включений, многозначный анализ, идемпотентный анализ, конструкции теории особенностей дифференцируемых отображений и другие подходы. Для вывода основных утверждений широко используются геометрические представления.

В настоящей работе рассмотрена плоская задача управления по быстродействию с простой динамикой. Особенностью задачи, которая существенным образом влияет на ее решение, является геометрия целевого множества. Это множество является невыпуклым и имеет гладкую границу с разрывной кривизной. Ранее выявлен класс в общем случае недифференцируемых функций, к которому принадлежит функция оптимального результата [9]. При ее построении, как в точном, так и аппроксимационном виде, требуется найти сингулярное множество, которое в данном случае относится к множествам симметрии [10]. Гладкие ветви этого множества определяются псевдовершинами границы целевого множества, отвечающими за зарождение сингулярности.

Для рассматриваемого случая, опираясь на условия трансверсальности, найдены формулы для односторонних маркеров псевдовершин. Маркеры характеризуют особенности геометрии краевого множества с точки зрения его меры невыпуклости [11]. Применительно к задаче управления маркеры позволяют сформировать динамику обыкновенного

дифференциального уравнения, интегральные кривые которого содержат ветви сингулярного множества (см., например, [12, 13]). Вывод основных соотношений осуществлен путем анализа ключевого для этих конструкций уравнения типа золотого сечения с помощью односторонних разложений Тейлора. По существу здесь используется аппроксимативная техника струй [14], широко применяемая в теории особенностей гладких отображений, в том числе при анализе задач управления [15].

В работе приведен пример задачи управления по быстродействию, демонстрирующий, что развиваемая техника исследования динамических задач позволяет в ряде случаев построить негладкое решение в явном аналитическом виде.

1. Постановка задачи. Определения, основные понятия

Рассматривается задача управления по быстродействию с простой динамикой

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \nu, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, зависящий от времени $\tau \in \mathbb{R}$, управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \leq 1$, а целью является замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^2$. Класс функций, которому принадлежит функция оптимального результата $u = u(\mathbf{x})$, известен [9]. Здесь $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$, где $\rho(\mathbf{x}, M) = \inf_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ — евклидово расстояние от точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ до множества M . Важно отметить, что евклидово расстояние в общем случае не является гладкой функцией, при этом в точках $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ она супердифференцируема [16], а ее дифференциальные свойства на границе $\Gamma = \partial M$ определяются дифференциальными свойствами этой кривой [17]. При построении $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ в аналитическом или численном виде требуется выявить сингулярное множество — множество точек нарушения гладкости функции. Ранее показано, что сингулярное множество решения $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ задачи быстродействия с динамикой (1.1), названное биссектрисой [9], относится к множествам симметрии [18]. Оно определяется геометрическими свойствами целевого множества, дифференциальными свойствами его границы и ее особыми точками — псевдовершинами [19]. Выявление псевдовершин позволяет строить аналитически или численно гладкие ветви сингулярного множества.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением частного случая, когда граница $\Gamma = \partial M$ является графиком скалярной функции, т. е. $\Gamma = \text{gr } f = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = (t, f(t)), t \in T\}$, где $f: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение числового интервала $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < \infty$, на плоскость. Будем полагать, что $y = f(t)$ является один раз непрерывно дифференцируемой функцией и имеет конечное число точек, в которых существуют односторонние не равные друг другу производные второго порядка.

Приведем необходимые определения (подробнее см. [19]).

О п р е д е л е н и е 1.1. Скалярный локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$ непрерывен слева в точке $t_1 = t_0 \in T$ и отображает левую полуокрестность этой точки в ее правую полуокрестность, если выполняются условия:

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Заметим, что условие (A1) влечет строгое неравенство $t_2'(t_1) < 0$ для всех $(t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Псевдовершиной кривой $\Gamma = \text{gr } f$ будем называть точку

$$(t_0, y_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} (t_*, y_*),$$

где $(t_*, y_*) = (t_*(t_1), y_*(t_1)) \triangleq (t_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1)))$ — однопараметрическое подмножество решений системы уравнений

$$\begin{cases} y_* = f'(t_1)(t_* - t_1) + f(t_1), \\ y_* = f'(t_2)(t_* - t_2) + f(t_2), \end{cases} \quad (1.2)$$

определяемое локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$ со свойствами (A1), (A2), который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) \triangleq \rho^2(((t_1), f(t_1)), (x_*, y_*)) - \rho^2(((t_2), f(t_2)), (x_*, y_*)) = 0. \quad (1.3)$$

О п р е д е л е н и е 1.3. Ветвью $L(t_0, f(t_0))$ биссектрисы $L(\Gamma)$ кривой $\Gamma = \text{gr } f$, где $(t_0, y_0) = (t_0, f(t_0))$ — псевдовершина $\Gamma = \text{gr } f$, будем называть множество точек (t, y) на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} -t + t_1 - f'(t_1)(y - f(t_1)) = 0, \\ -t + t_2 - f'(t_2)(y - f(t_2)) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $t_2 = t_2(t_1)$ — локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$ со свойствами (A1), (A2), который задается уравнением (1.3).

О п р е д е л е н и е 1.4. Конечный односторонний предел $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} (t_1, f(t_1))$ решений системы (1.4) будем называть крайней точкой биссектрисы. Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то будем говорить, что псевдовершина $(t_0, y_0) = (t_0, f(t_0))$ не порождает крайнюю точку биссектрисы.

О п р е д е л е н и е 1.5. Левая односторонняя производная

$$t'_2(t_0 - 0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} \quad (1.5)$$

называется левым маркером псевдовершины $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma$, здесь $t_2 = t_2(t_1)$ удовлетворяет (A1), (A2).

Локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$ имеет обратный локальный диффеоморфизм $t_1 = t_1(t_2)$, $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$, со свойствами, аналогичными свойствам (A1), (A2), а именно, выполняются соотношения:

$$(A3) \quad t_1((t_0, t_0 + \delta_2)) = (t_0 - \delta_1, t_0), \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_1 > 0,$$

$$(A4) \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} t_1(t_2) = t_0.$$

О п р е д е л е н и е 1.6. Правая односторонняя производная

$$t'_1(t_0 + 0) \triangleq \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \frac{t_1(t_2) - t_0}{t_2 - t_0} \quad (1.6)$$

называется правым маркером псевдовершины $\mathbf{x}^{(0)} \in \Gamma$, здесь $t_1 = t_1(t_2)$ — локальное решение (1.4) со свойствами (A3), (A4).

З а м е ч а н и е 1.1. Левый и правый маркеры псевдовершины образуют пару взаимнообратных величин $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = (t'_1(t_0 + 0), \frac{1}{t'_1(t_0 + 0)}) = (\frac{1}{t'_2(t_0 - 0)}, t'_2(t_0 - 0))$. При этом общее для односторонних маркеров множество возможных значений (спектр) есть «отрезок» $[-\infty, 0]$.

Теоретически не исключен случай пар маркеров с несобственным значением, т. е. пар вида $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = (0, -\infty)$ и $(t'_1(t_0 + 0), t'_2(t_0 - 0)) = (-\infty, 0)$. Ниже покажем, что при рассматриваемых в рамках настоящего исследования условиях реализуется именно этот случай.

Диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, удовлетворяющий набору условий (A1), (A2), и определяющий псевдовершину $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}(t_0)$, кривой Γ является локальным решением уравнения типа уравнения гармонической пропорции с двухпараметрическими коэффициентами (формула (3.5) из [19]), к которому сводится уравнение (1.4). Для скалярных функций редуцированное уравнение принимает вид [20]:

$$Q(t_1, t_2) \triangleq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} = 0. \quad (1.7)$$

Здесь $s(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ — длина касательного вектора.

Задача нахождения функций со свойствами (A1), (A2) связана с преодолением неединственности множества локальных решений уравнения (1.7), стягивающихся в общую предельную точку вследствие вырождения каустики (подробнее см. [21]). Здесь изучение указанной проблемы проводится не только средствами классического анализа. Выявление свойств локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ осуществляем с помощью предельного соотношения

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} + t'_2 \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \right) = 0, \quad (1.8)$$

которое выражает условие трансверсального («протыкающего») пересечения замыкания графика локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ с графиком тождественного диффеоморфизма $t_2 = t_1$ в общей предельной точке $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$. Если левый маркер существует, то из (1.8) следует формула его вычисления:

$$t'_2(t_0 - 0) = - \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} \cdot \left(\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} \right)^{-1} \right). \quad (1.9)$$

Далее найдем ряд свойств псевдовершин, маркеров, крайних точек биссектрисы — основных конструктивных элементов теории, знание которых позволяет в ряде случаев сформировать сингулярное множество задачи быстрогодействия в явном аналитическом виде.

2. Основной результат

Теорема 2.1. Если $\mathbf{x}^{(0)} = (t_0, f(t_0))$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (t, f(t)), t \in T\}$, ограничивающей целевое множество M в задаче управления по быстродействию с динамикой (1.1), где локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$ является решением уравнения (1.7), удовлетворяет условиям (A1), (A2) и имеет конечный левый маркер $\lambda = t'_2(t_0 - 0) \leq 0$, а скалярная функция $y = f(t)$ такова, что

$$f'(t_0) \neq 0, \quad (2.1)$$

у нее существуют конечные односторонние производные второго порядка $f''(t_0 - 0)$ и $f''(t_0 + 0)$, причем

$$f''(t_0 - 0) \neq f''(t_0 + 0), \quad (2.2)$$

то левый маркер

$$\lambda = 0. \quad (2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем асимптотические разложения частных производных функции $Q(t_1, t_2)$ вдоль решения $t_2 = t_2(t_1)$ в левой полуокрестности точки $t_1 = t_0$ и перейдем к пределу, воспользовавшись соотношением (1.9). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t_1} &= \left(\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} \right)'_{t_1} = \\ &= \frac{-f'(t_1)(t_2 - t_1) + (f(t_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} - \\ &- \frac{f''(t_1)((f'(t_1))^2 - s(t_1)s(t_2)) + s'(t_1)s(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1)) + f''(t_1)}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для краткости изложения результатов примем ряд соглашений по обозначениям. Для упорядоченной тройки точек t_0, t_1, t_2 из T , таких, что $t_1 < t_0 < t_2$, где центральный узел t_0 — аргумент псевдовершины кривой Γ , введем в рассмотрение приращения $\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0$, $\Delta_2 = t_2 - t_0 > 0$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 > 0$. В том случае, когда тройка точек связана локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, приращение $\Delta_2 = \Delta_2(\Delta_1) = t_2(t_1) - t_1$, т. е. Δ_2 зависит от Δ_1 , причем

$$\Delta_2 = \Delta_2(\Delta_1) = t_2(t_1) - t_0 = t'_2(t_0 - 0)(t_1 - t_0) + o_0(t_1 - t_0) = -\lambda\Delta_1 + o_0(\Delta_1). \quad (2.5)$$

Обозначение $o_0(\Delta_1)$ использовано для функции, имеющей более высокий порядок малости по отношению к аргументу слева от точки рассмотрения, т. е. здесь $\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{o_0(\Delta_1)}{\Delta_1} = 0$. Всюду ниже «о малое» с нижним индексом имеет аналогичный смысл. Обозначение $\varepsilon_0(\Delta_1)$, где $\lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \varepsilon_0(\Delta_1) = 0$, и аналогичные обозначения с другими индексами используются для бесконечно малых величин.

Для рассматриваемой функции $y = f(t)$ и ее производных, вычисленных в центральном узле t_0 , будем опускать обозначение аргумента. При этом для односторонних производных уберем обозначения $t_0 - 0$ и $t_0 + 0$ в аргументах функций, опуская соответствующий знак минус или плюс в нижний индекс:

$$\begin{aligned} f' &= f'(t_0), \quad f''_- = f''(t_0 - 0), \quad f''_+ = f''(t_0 + 0), \\ s'_- &= \frac{f'(t_0)f''(t_0 - 0)}{s(t_0)}, \quad s'_+ = \frac{f'(t_0)f''(t_0 + 0)}{s(t_0)}. \end{aligned}$$

Отметим, что частные производные функции $Q(t_1, t_2)$ зависят от скалярных функций одного переменного. К каждой из них применим формулу Тейлора в окрестностях соответствующих точек $t_1 = t_0$ и $t_2 = t_0$. Определим следующий порядок вычислений. Сначала строим разложения с независимыми приращениями $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$, получая аппроксимации с порядком малости относительно $\Delta_{12} = \max\{\Delta_1, \Delta_2\} > 0$. Затем, связывая точки

t_1, t_2 локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, учитывая (2.5), формируем аппроксимации вдоль этого диффеоморфизма с соответствующим порядком малости относительно $\Delta_1 > 0$.

Начнем с аппроксимации уменьшаемой дроби в (2.4) до членов второго порядка включительно в числителе, пренебрегая членами более высокого порядка малости по отношению к Δ_{12} :

$$\begin{aligned} & \frac{-f'(t_1)(t_2 - t_1) + (f(t_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} = \\ & = \left(-(f' - \Delta_1 f'' + o_1(\Delta_{12}))(\Delta_2 + \Delta_2) + f + \Delta_2 f' + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ - f + \Delta_1 f' - \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_2(\Delta_{12}^2) \right) / \Delta^2 = \\ & = \frac{\Delta_1 f''_-(\Delta_2 + \Delta_1) + \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_3(\Delta_{12}^2)}{\Delta^2} = \\ & = \frac{\Delta_1}{\Delta} f''_- + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta^2} f''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta_2} f''_- + \varepsilon_3(\Delta_{12}), \varepsilon_3(\Delta_{12}) = \frac{o_3(\Delta_{12}^2)}{\Delta^2}, \Delta_{12} \downarrow 0. \end{aligned}$$

Перейдем к аппроксимации вычитаемой дроби в (2.4):

$$\begin{aligned} & \frac{f''(t_1)((f'(t_2))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2)) + s'(t_1)s(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\ & = \frac{f''(t_1)((f'(t_2))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2) + s'(t_1)s(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1))))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\ & = \frac{(s_2 + \Delta_2 s'_-)[f''_-(\Delta_2 s'_+ + \Delta_1 s'_-) + s'_-(f' + \Delta_2 f''_+ f' - \Delta_1 f''_-)]}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})} = \\ & = \frac{2f' s'_- s + 2\Delta_2 f'(s'_-)^2 + \Delta_2 f''_+ s'_+ s + \Delta_2 f''_- s'_- s + \varepsilon_1(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})}. \end{aligned}$$

Получили

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q}{\partial t_1}(t_1, t_2) = \frac{\Delta_1}{\Delta} f''_- + \frac{\Delta_2^2}{2\Delta^2} f''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2\Delta_2} f''_- + \varepsilon_3(\Delta_{12}) - \\ & - \frac{2f' s'_- s + 2\Delta_2 f'(s'_-)^2 + \Delta_2 f''_+ s'_+ s + \Delta_2 f''_- s'_- s + \varepsilon_1(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})} = \\ & \left(4\frac{\Delta_1}{\Delta} f''_- + (f')^2 + 2\frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} f''_+(f')^2 - 2\frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} f''_-(f')^2 + 4\frac{\Delta_1\Delta_1}{\Delta} f''_- f' f''_+ + \frac{2\Delta_2^3}{\Delta^2} f'(f''_+)^2 - \right. \\ & \left. + \frac{2\Delta_2^3}{\Delta^2} f'(f''_-)^2 - \frac{2\Delta_1^2\Delta_2}{\Delta^2} f' f''_- f''_+ - \frac{4\Delta_1^2}{\Delta} f'(f''_-)^2 - \frac{2\Delta_2^2\Delta_1}{\Delta^2} f' f''_+ f''_- + \frac{4\Delta_1^3}{\Delta} f'(f''_-)^2 - \right. \\ & \left. - 2f' s'_- s - 2\Delta_2 f'(s'_-)^2 - \Delta^2 f''_+ s'_+ s - \Delta^2 f''_- s'_- s + \varepsilon_2(\Delta_{12}) \right) / \\ & / \left(4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12}) \right). \end{aligned}$$

Вычислим

$$\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2) = \left(\frac{f(f_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} \right)'_{t_2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f'(t_2)(t_2 - t_1) - (f(f_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} - \\
&- \frac{f''(t_2)((f'(t_1))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2)) + s(t_1)s'(t_1)(f(t_2) - f(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Найдем аппроксимацию уменьшаемой дроби в (2.6):

$$\begin{aligned}
\frac{f'(t_2)(t_2 - t_1) - (f(f_2) - f(t_1))}{(t_2 - t_1)^2} &= \left[(f' + \Delta_2 f''_+ + o_5(\Delta_{12}))(\Delta_2 + \Delta_1) - \right. \\
&- \left(f + \Delta_2 f' + \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ - f + \Delta_1 f' - \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_6(\Delta_{12}^2) \right) \Big] / \Delta^2 = \\
&= \frac{(f' + \Delta_2 f''_+ + o_5(\Delta_{12}))\Delta - \left(\Delta f' + \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ - \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_6(\Delta_{12}^2) \right)}{\Delta^2} = \\
&= \frac{\Delta \Delta_2 f''_+ - \frac{\Delta_2^2}{2} f''_+ + \frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o_7(\Delta_{12}^2)}{\Delta^2} = \\
&= \frac{\Delta_2}{\Delta} f''_+ - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta^2} f''_+ + \frac{\Delta_1^2}{2\Delta^2} f''_- + \varepsilon_7(\Delta_{12}), \quad \varepsilon_7(\Delta_{12}) = \frac{o_7(\Delta_{12}^2)}{\Delta^2}, \Delta_{12} \downarrow 0.
\end{aligned}$$

Аппроксимируем вычитающую дробь в (2.6):

$$\begin{aligned}
&\frac{f''(t_2)((f'(t_1))^2 + 1 - s(t_1)s(t_2)) + s(t_1)s'(t_1)(f(t_2) - f(t_1))}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\
&= \frac{s(t_1)[f''(t_2)(s(t_1) - s(t_2)) + s'(t_2)(f'(t_2) + f'(t_1))]}{(f'(t_2) + f'(t_1))^2} = \\
&= \left[(s - \Delta_1 s'_-)[f''_+(s - \Delta_1 s'_- - s - \Delta_2 s'_+) + s'_+(f' + \Delta_2 f''_+ + f' - \Delta_1 f''_-)] + \varepsilon_6(\Delta_{12}) \right] / \\
&\quad / \left(4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12}) \right) = \\
&= \frac{(s - \Delta_1 s'_-)[- \Delta_1 f''_+ s'_- - \Delta_2 f''_+ s'_+ + 2f' s'_+ + \Delta_2 f''_+ s'_+ - \Delta_1 f''_- s'_+] + \varepsilon_6(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})} = \\
&= \left(-2\Delta_1 f' s'_- s'_+ - \Delta_1 f''_+ s'_- s - \Delta_2 f''_+ s'_+ s + 2f' s'_+ s + \Delta_2 f''_+ s'_+ s - \right. \\
&\quad \left. - \Delta_1 f''_- s'_+ s + \varepsilon_6(\Delta_{12}) \right) / \left(4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12}) \right) = \\
&= \frac{2f' s'_+ s - 2\Delta_1 f' s'_- s'_+ - \Delta_1 f''_+ s'_- s - \Delta_1 f''_- s'_+ s + \varepsilon_6(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} f''_+ - \frac{\Delta_2^2}{2\Delta^2} f''_+ + \frac{\Delta_1^2}{2\Delta^2} f''_- + \varepsilon_7(\Delta_{12}) = \\
&= \frac{2f' s'_+ s - 2\Delta_1 f' s'_- s'_+ - \Delta_1 f''_+ s'_- s - \Delta_1 f''_- s'_+ s + \varepsilon_6(\Delta_{12})}{4(f')^2 + 4\Delta_2 f' f''_+ - 4\Delta_1 f' f''_- + o_8(\Delta_{12})} = \\
&= \left(4\frac{\Delta_2}{\Delta} f''_+ (f')^2 - 2\frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} f''_+ (f')^2 + 2\frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} f''_- (f')^2 + 4\frac{\Delta_2^2}{\Delta} f' (f''_+)^2 - 2\frac{\Delta_2^3}{\Delta^2} f' (f''_+)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\Delta_1^2 \Delta_2}{\Delta^2} f' f'' f''_+ - 4 \frac{\Delta_2 \Delta_1}{\Delta} f' f'' f''_- + 2 \frac{\Delta_2^2 \Delta_1}{\Delta^2} f' f'' f''_- - 2 \frac{\Delta_1^3}{\Delta^2} f' (f''_-)^2 - \\
& - 2 f' s'_+ s + 2 \Delta_1 f' s'_- s'_+ + \Delta_1 f''_+ s'_- s + \Delta_1 f''_- s'_+ s + \varepsilon_6 (\Delta_{12}) \Big) / \\
& / (4 (f')^2 + 4 \Delta_2 f' f''_+ - 4 \Delta_1 f' f''_- + o_8 (\Delta_{12})) .
\end{aligned}$$

Реализуя намеченный план, привлечем разложение первого порядка для левого маркера (2.5) и найдем аппроксимации частных производных вдоль диффеоморфизма. Учтем также, что в этом случае члены разложений, стоящие в числителях дробей, содержащие $\frac{\Delta_2^3}{\Delta^2}$, $\frac{\Delta_1^3}{\Delta^2}$, $\frac{\Delta_1^2 \Delta_2}{\Delta^2}$, $\frac{\Delta_2^2 \Delta_1}{\Delta^2}$, $\frac{\Delta_2 \Delta_1}{\Delta}$, имеют порядок малости $o(\Delta_1)$ и, стало быть, ими можно пренебречь. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} &= \left(4 \frac{\Delta_1}{\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1)} f''_-(f')^2 + 2 \frac{(-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1))^2}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1))^2} f''_+(f')^2 - \right. \\
& - 2 \frac{\Delta_1^2}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1))^2} f''_-(f')^2 - 2 f' s'_- s - 2 (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f' (s'_-)^2 - \\
& \left. - (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f''_- s'_+ s - (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f''_+ s'_- s + \varepsilon_2(\Delta_1) \right) / \\
& / \left(4 (f')^2 + 4 (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f' f''_+ - 4 \Delta_1 f' f''_- + o_9(\Delta_1) \right) .
\end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned}
\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_1} &= \\
&= \left(4 \frac{1}{(1-\lambda)} f''_-(f')^2 + 2 \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} f''_+(f')^2 - 2 \frac{1}{(1-\lambda)^2} f''_-(f')^2 - 2 f' s'_- s \right) / (4 (f')^2) .
\end{aligned}$$

Здесь существенно условие нестационарности (2.1), благодаря которому этот предел конечен.

Поскольку

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial t_2}(t_1, t_2(t_1)) &= \frac{4 \frac{(-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1))}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1))} f''_+(f')^2 - 2 \frac{(-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1))^2}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_0(\Delta_1))^2} f''_+(f')^2}{4 (f')^2 + 4 (-\lambda \Delta_1 + o_0(\Delta_1)) f' f''_+ - 4 \Delta_1 f' f''_- + o_9(\Delta_1)} + \\
& + \frac{2 \frac{\Delta_1^2}{(\Delta_1(1-\lambda) + o_1(\Delta_1))^2} f''_-(f')^2 - 2 f' s'_+ s + \varepsilon_9(\Delta_1)}{4 (f')^2 + 4 (-\lambda \Delta_1 + o_1(\Delta_1)) f' f''_+ - 4 \Delta_1 f' f''_- + o_9(\Delta_1)} ,
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{\partial Q(t_1, t_2(t_1))}{\partial t_2} &= \\
&= \left(4 \frac{-\lambda}{(1-\lambda)} f''_+(f')^2 - 2 \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} f''_+(f')^2 + 2 \frac{1}{(1-\lambda)^2} f''_-(f')^2 - 2 f' s'_+ s \right) / (4 (f')^2) .
\end{aligned}$$

Здесь также важно, что в силу (1.2) выполняется неравенство $f'(t_0) \neq 0$, которое влечет конечность предела. Тогда вследствие условия (1.9)

$$\lambda = -\frac{4\frac{1}{(1-\lambda)}f''_-(f')^2 + 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+(f')^2 - 2\frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_-(f')^2 - 2f's'_-s}{4\frac{-\lambda}{(1-\lambda)}f''_+(f')^2 - 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+(f')^2 + 2\frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_-(f')^2 - 2f's'_+s}.$$

Преобразуем это равенство, воспользовавшись тем, что $s'_-s = f'f''_-$, $s'_+s = f'f''_+$:

$$\lambda = -\frac{\frac{4}{(1-\lambda)}f''_-(f')^2 + 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+(f')^2 - 2\frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_-(f')^2 - 2(f')^2f''_-}{4\frac{-\lambda}{(1-\lambda)}f''_+(f')^2 - 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+(f')^2 + 2\frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_-(f')^2 - 2(f')^2f''_+}.$$

Сократим на $(f')^2 \neq 0$, после чего равенство упростим:

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{2\frac{1}{(1-\lambda)}f''_- + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+ - \frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_- - f''_+}{2\frac{-\lambda}{(1-\lambda)}f''_+ - \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+ + \frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_- - f''_+}, \\ \frac{-2\lambda^2}{(1-\lambda)}f''_+ - \frac{\lambda^3}{(1-\lambda)^2}f''_+ + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}f''_- + \frac{2}{(1-\lambda)}f''_- + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}f''_+ - \frac{1}{(1-\lambda)^2}f''_- &= \lambda f''_+ + f''_-, \\ -2\lambda^2(1-\lambda)f''_+ - \lambda^3f''_+ + \lambda f''_- + 2(1-\lambda)f''_- + \lambda^2f''_+ - f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda)^2, \\ (-2\lambda^2 + 2\lambda^3 - \lambda^3 + \lambda^2)f''_+ + (\lambda + 2 - 2\lambda - 1)f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda)^2, \\ (\lambda^3 - \lambda^2)f''_+ + (1-\lambda)f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda)^2, \\ \lambda^2(\lambda - 1)f''_+ + (1-\lambda)f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda)^2, \\ -\lambda^2f''_+ + f''_- &= (\lambda f''_+ + f''_-)(1-\lambda), \\ -\lambda^2f''_+ + f''_- &= \lambda f''_+ + f''_- - \lambda^2f''_+ - \lambda f''_-, \\ -\lambda^2f''_+ + f''_- - \lambda f''_+ - f''_- + \lambda^2f''_+ + \lambda f''_- &= 0, \\ \lambda(f''_- - f''_+) &= 0.\end{aligned}$$

Согласно условию (2.2) $f''_+ - f''_- \neq 0$, поэтому $\lambda = 0$. Равенство (2.3) обосновано. $\square$

Следствие 2.1. В условиях теоремы 2.1 для правого маркера $\mu \triangleq t'_1(t_0 + 0)$ справедливо равенство

$$\mu = -\infty. \quad (2.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства обратимости локальных диффеоморфизмов, отрицательности $t'_2(t_1)$, когда $t_1 \in (t_0 - \delta, t_0)$, $\delta_1 > 0$ и Замечания 1.1 имеем:

$$\mu \triangleq t'_1(t_0 + 0) = \frac{1}{t'_2(t_0 - 0)} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{1}{t'_2(t_1)} = \frac{1}{\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t'_2(t_1)} = -\infty.$$

$\square$

Следствие 2.2. В условиях теоремы 2.1 крайняя точка ветви $L(t_0, f(t_0))$ биссектрисы $L(\Gamma)$ при $f''(t_0 - 0) \neq 0$ вычисляется по формуле

$$(\bar{t}_0, \bar{y}_0) = \left(t_0 - \frac{f'(t_0)(1 + (f'(t_0))^2)}{f''(t_0 - 0)}, f(t_0) + \frac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0 - 0)} \right). \quad (2.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известным результатом [22], согласно которому в рамках условий доказанной теоремы координаты крайней точки $(\bar{t}_0, \bar{y}_0)$ биссектрисы $L(\Gamma)$ (т. е. сингулярного множества решения задачи управления по быстродействию) вычисляется по формулам:

$$\bar{t}_0 = t_0 - \frac{f'(t_0)(1 + (f'(t_0))^2)}{\beta_1 f''(t_0 - 0) + \beta_2 f''(t_0 + 0)}, \quad \bar{y}_0 = f(t_0) + \frac{1 + (f'(t_0))^2}{\beta_1 f''(t_0 - 0) + \beta_2 f''(t_0 + 0)}.$$

Здесь $\beta_1 = \frac{1}{1-\lambda}$, $\beta_2 = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$, $\beta_1 + \beta_2 = 0$. Поскольку левый маркер $\lambda = 0$, то весовые коэффициенты $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$. Подставив их в равенства, получим (2.8). $\square$

З а м е ч а н и е 2.2. Крайняя точка ветви биссектрисы определяет начальные условия задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в нормальной форме при построении этой ветви в виде интегральной кривой. Процедуры формирования правой части уравнения, методы его численного решения приведены в [12].

3. Пример задачи управления по быстродействию

Рассмотрим пример задачи управления по быстродействию с динамикой (1.1), в которой определенный выше перечень структурных элементов является достаточным для аналитического конструирования сингулярного множества решения не только локально, в окрестности цели, но и на всей области рассмотрения.

П р и м е р 3.1. Примем в качестве целевого множества M подграфик функции

$$f(t) = \begin{cases} 1/t, & t \in (0, 1], \\ -t + 2, & t \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (3.1)$$

Заметим, что M является невыпуклым множеством. Построим функцию оптимального результата на множестве $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \in (0, +\infty), x_2 > f(x_1)\}$. Анализ показывает, что кривая $\Gamma = \text{gr } f$ имеет одну псевдовершину $\mathbf{x}^{(0)} = (t_0, t_2(t_0)) = (1, 1)$, причем ею является единственная точка кривой, в которой кривизна разрывна.

Докажем, что $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)$ — псевдовершина $\Gamma = \text{gr } f$. Выберем в окрестности $t_0 \in \mathbb{R}$ произвольно точки t_1 и t_2 так, чтобы выполнялось тройное неравенство $0 < t_1 < t_0 < t_2$. Система уравнений касательных (1.2) при $0 < t_1 < t_0 = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} y_* = -\frac{1}{t_1^2}(t_* - t_1) + \frac{1}{t_1}, \\ y_* = (t_* - t_2) - t_2 + 2. \end{cases}$$

Ее решением является полупрямая $\Pi = \{(t_*, y_*) \in \mathbb{R}^2: t_* = \frac{2t_1}{t_1+1}, y_* = \frac{2}{t_1+1}, t_1 \in (0, 1)\}$, лежащая в подграфике функции (3.1).

Уравнение (1.3) для длин подкасательных здесь

$$\left(t_1 - \frac{2t_1}{t_1+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{2}{t_1+1}\right)^2 = \left(t_2 - \frac{2t_1}{t_1+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{t_2} - \frac{2}{t_1+1}\right)^2.$$

Откуда после преобразований получаем

$$2t_2^2 - 8\frac{t_1 t_2}{t_1+1} - \frac{t_1^5 - 3t_1^4 - 4t_1^3 + 4t_1^2 - 3t_1 + 1}{2t_1^2(t_1+1)} = 0.$$

Среди двух ветвей вида $t_2 = t_2(t_1)$ решения этого уравнения выделяем ту, что удовлетворяет условиям (A1), (A2), а именно

$$t_2(t_1) = \frac{1}{1+t_1} \left(2t_1 + \left(\frac{1}{t_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right), t_1 < t_0 = 1. \quad (3.2)$$

Непосредственным счетом убеждаемся, что левый маркер

$$\begin{aligned} \lambda = \lim_{t_1 \rightarrow 1-0} t_2' &= \left[-\frac{1}{(1+t_1)^2} \left(2t_1 + \left(\frac{1}{t_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{1+t_1} \left(2 - \frac{1}{t_1^2} \sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} + \left(\frac{1}{t_1} - 1 \right) t_1^3 / \sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right) \right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2-1) = 0, \end{aligned}$$

что соответствует доказанной теореме 2.1.

Средствами классического анализа не трудно установить ряд свойств этой функции. Ее график (в плоскости параметров t_1, t_2) представлен на Рис. 1. Очевидно, что $\lim_{t_1 \rightarrow 1-0} t_2(t_1) = 1 = t_0$. При этом $t_2(t_1)$ отображает интервал $(0, 1)$ на интервал $(1, +\infty)$. Таким образом, $t_2(t_1)$ параметризует всю область рассмотрения исходной функции (3.1). Это важное свойство диффеоморфизма, которое позволяет построить разбиение области рассмотрения функции (3.1). Примем

$$\Gamma_0 \triangleq \{ \mathbf{x}^{(0)} = (t_0, t_2(t_0)) = (1, 1) \}, \quad \Gamma_1 \triangleq \{ \mathbf{x}^{(0)} = (x_1, x_1) \in \Gamma, x_1 \in (0, 1) \},$$

$$\Gamma_2 \triangleq \{ \mathbf{x}^{(0)} = (x_1, x_1) \in \Gamma, x_1 \in (1, +\infty) \}.$$

Таким образом, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем эти фрагменты границы целевого множества попарно не пересекаются. Поскольку, производная $t_2'(t_1) < 0$ для всех $t_1 \in (0, 1)$, то $t_2(t_1)$ является не локальным, а «глобальным» диффеоморфизмом, что дает возможность построить сингулярное множество не только в окрестности цели, но в целом на всей области рассмотрения задачи управления.

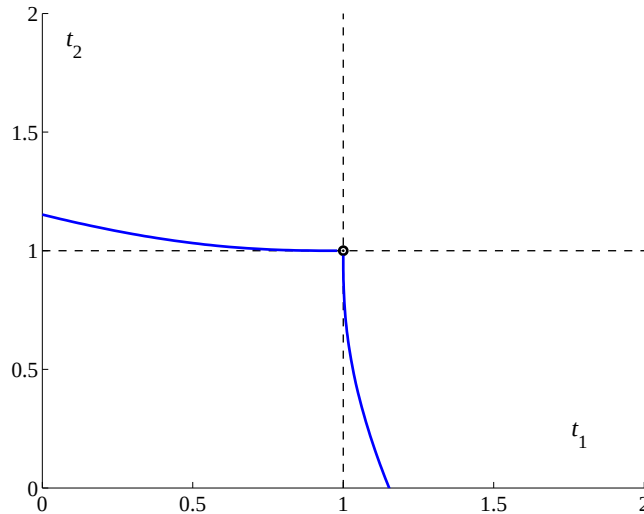


Рис. 1. Негладкая склейка графиков локальных диффеоморфизмов $t_2 = t_2(t_1)$ и $t_1 = t_1(t_2)$.

Построим ветвь $L(t_0, f(t_0))$ биссектрисы $L(\Gamma)$, заметив, что в силу единственности псевдовершины $(t_0, f(t_0)) \in \Gamma$ здесь $L(\Gamma) = L(t_0, f(t_0))$. Другими словами, биссектриса подграфика функции (3.1) состоит из одной ветви. Ее крайняя точка $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) = (2, 2)$ находится по формулам (2.8). Система (1.4), определяющая биссектрису, т. е. сингулярное множество рассматриваемой задачи, имеет вид

$$\begin{cases} -x_1 + t_1 - f'(t_1)(x_2 - f(t_1)) = 0, \\ -x_1 + t_2 - f'(t_2)(x_2 - f(t_2)) = 0. \end{cases}$$

В нестационарном случае, когда $f'(t_0) \neq 0$, она локально (в нашем случае – глобально) разрешима. Действительно, поскольку система линейная, то

$$\begin{cases} x_2 = f(t_1) + \frac{t_1 - x_1}{f'(t_1)}, \\ x_2 = f(t_2) + \frac{t_2 - x_1}{f'(t_2)}. \end{cases}$$

Тогда ее решением является

$$\begin{cases} x_1 = \frac{f'(t_1)f'(t_2)(f(t_1) - f(t_2)) + t_1f'(t_2) - t_2f'(t_1)}{f'(t_2) - f'(t_1)}, \\ x_2 = \frac{t_2 - t_1 + f'(t_2)f(t_2) - f'(t_1)f(t_1)}{f'(t_2) - f'(t_1)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

В рассматриваемом примере формулы (3.3) позволяют построить сингулярное множество (см. Рис. 2) в явном виде:

$$\begin{aligned} L(t_0, f(t_0)) &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{1}{1 - t_1^2}(2t_2 - 2 - t_1^3 + t_1^{-1}), \right. \\ &\quad \left. x_2 = \frac{1}{1 - t_1^2}(2t_1^2(t_2 - 1) - t_1^3 + t_1^{-1}), t_2 = \frac{1}{t_1 + 1} \left(2t_1 + (t_1^{-1} - 1)\sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right), t_1 \in (0, 1) \right\} = \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{2}{(1 + t_1)^2} \left(-1 + t_1^{-1}\sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right) + t_1 + t_1^{-1}, \right. \\ &\quad \left. x_2 = \frac{2}{(1 + t_1)^2} \left(-1 + t_1^{-1}\sqrt{\frac{t_1^4 + 1}{2}} \right) + t_1 + t_1^{-1}, t_1 \in (0, 1) \right\}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что по построению сингулярное множество $L(t_0, f(t_0))$ решения задачи управления состоит из точек, имеющих ровно две проекции (ближайшие точки) на целевое множество M . Тогда множество $\check{D} = D \setminus L(t_0, f(t_0))$, т. е. область определения функции оптимального результата за вычетом сингулярного множества, состоит из точек, имеющих ровно одну проекцию на M .

Здесь $\check{D}$ не удовлетворяет строгому определению «солнца» [23, 24], тем не менее является множеством, на котором оператор проецирования $P_M(\mathbf{x})$ точек $\mathbf{x} \in \check{D}$ на M имеет сугубо одноэлементные значения.

Найденная перепараметризация (3.2) границы $\Gamma = \partial M$ и осуществленное на ее основе разбиение такое, что $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, позволяют разбить область $\check{D}$ на подобласти, в каждой из которых ближайшая точка находится по своей формуле. Примем $\check{D}_0 = ((t_0, f(t_0)), (\bar{t}_0, \bar{y}_0)]$ — «полуотрезок» прямой, соединяющий псевдовершину $(t_0, f(t_0)) =$

$(1, 1)$ с крайней точкой $(\bar{t}_0, \bar{y}_0) = (2, 2)$ биссектрисы, здесь $(1, 1) \notin \check{D}_0$, $(2, 2) \in \check{D}_0$. Составная кривая $\check{L} = L(t_0, f(t_0)) \cup \check{D}$ делит область рассмотрения D решения задачи на две подобласти — условно верхнюю $\check{D}_1$, состоящую из точек, лежащих выше $\check{L}$, и условно нижнюю $\check{D}_2$, состоящую из точек, лежащих ниже $\check{L}$. По построению $\check{D} = \check{D}_0 \cup \check{D}_1 \cup \check{D}_2$. При этом для точек $\mathbf{x} \in \check{D}_0$ ближайшей на M является псевдовершина $(t_0, f(t_0)) = (1, 1)$ кривой Γ , для точек $\mathbf{x} \in \check{D}_1$ ближайшей на M является точка на дуге Γ_1 , наконец для точек $\mathbf{x} \in \check{D}_2$ ближайшей на M является точка на дуге Γ_2 .

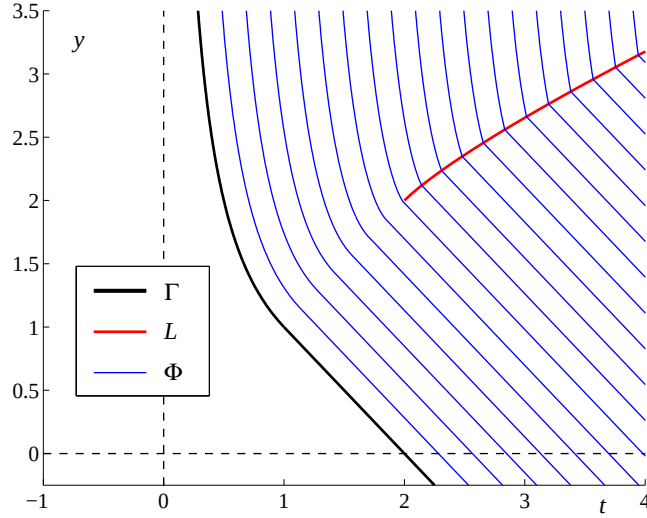


Рис. 2. Сингулярное множество L , линии уровня Φ функции оптимального результата и кривая Γ .

В каждой из выделенных подобластей, расстояние до M вычисляется по своей формуле, а именно:

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_0(\mathbf{x}) \triangleq \rho(\mathbf{x}, \Gamma_0), & \mathbf{x} \in \check{D}_0, \\ u_1(\mathbf{x}) \triangleq \rho(\mathbf{x}, \Gamma_1), & \mathbf{x} \in \check{D}_1, \\ u_2(\mathbf{x}) \triangleq \rho(\mathbf{x}, \Gamma_2), & \mathbf{x} \in \check{D}_2. \end{cases}$$

т. е.

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2}, & \mathbf{x} \in \check{D}_0, \\ \inf \{ \rho((x_1, x_2), (t_1, t_1^{-1})) : t_1 \in (0, 1) \}, & \mathbf{x} \in \check{D}_1, \\ \inf \{ \rho((x_1, x_2), (t_1, 2 - t_1)) : t_1 \in (1, +\infty) \}, & \mathbf{x} \in \check{D}_2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Замыкая по непрерывности оператором минимума, получаем формулу функции оптимального результата на всей области D :

$$u(\mathbf{x}) = \min \{u_0(\mathbf{x}), u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{x} \in D.$$

График решения представлен на Рис. 3. Отметим, что заключенные в формуле (3.4) две оптимизационные задачи допускают аналитическое решение. Тривиальными рассуждениями можно показать, что

$$u_2(\mathbf{x}) = \inf \{ \rho((x_1, x_2), (t_1, 2 - t_1)) : t_1 \in (1, +\infty) \} = |x_1 + x_2 - 2|/\sqrt{2}.$$

Отыскание значений функции $u_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \check{D}_1$ требует существенно больших усилий, связанных с поиском корней многочлена четвертого порядка. Принципиально это задача решается методом Феррари на основе кубической резольвенты. Имеем

$$\inf \left\{ \rho \left((x_1, x_2), (t_1, t_1^{-1}) \right) : t_1 \in (0, 1) \right\} = \rho \left((x_1, x_2), \left(t_1^{(0)}, \frac{1}{t_1^{(0)}} \right) \right).$$

Здесь $t_1 = t_1^{(0)}$ — корень уравнения

$$t_1^4 - x_1 t_1^3 + x_2 t_1 - 1 = 0. \quad (3.5)$$

При этом $t_1^{(0)} = y^{(0)} + x_1/4$, где $y = y^{(0)}$ — максимальный отрицательный корень алгебраического уравнения 4-го порядка, полученного из (3.5) с помощью преобразования Чирнгауэна (см. [10, с. 119]). На практике $y = y^{(0)}$ выбирается перебором действительных корней двух квадратичных уравнений:

$$y^2 - \sqrt{2s_0 + \frac{3}{8}x_1^2} \cdot y + \frac{x_2 - x_1^3/8}{2\sqrt{2s_0 + \frac{3}{8}x_1^2}} + s_0 = 0,$$

$$y^2 + \sqrt{2s_0 + \frac{3}{8}x_1^2} \cdot y - \frac{x_2 - x_1^3/8}{2\sqrt{2s_0 + \frac{3}{8}x_1^2}} + s_0 = 0.$$

В этих уравнениях $s = s_0$ — любой (например, действительный) корень резольвенты уравнения 4-го порядка, полученного из (3.5) преобразованием Чирнгауэна. В рассматриваемом примере резольвента — алгебраическое уравнение третьего порядка

$$s^3 + \frac{3x_1^2 s^2}{16} - \left(\frac{x_1 x_2}{4} - \frac{3x_1^4}{256} - 1 \right) s + \frac{x_1^8}{4096} - \frac{x_1^3 x_2}{64} + \frac{3x_1^2}{16} - \frac{x_2^2}{8} = 0.$$

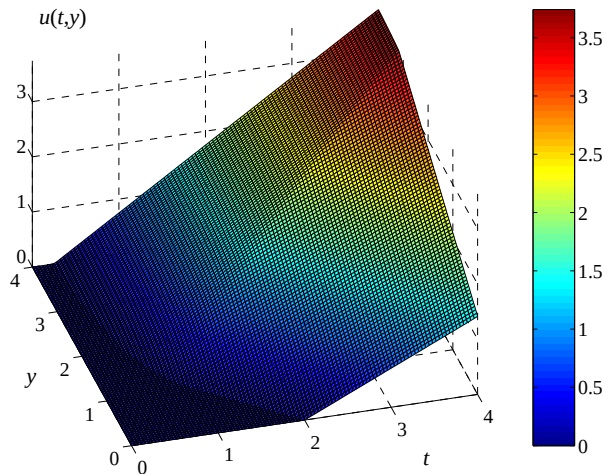


Рис. 3. График функции оптимального результата $u(\mathbf{x})$.

References

- [1] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М., 1961. [L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mischenko, *Matematicheskaya Teoriya Optimal'nyh Protsessov*, Fizmatgiz, Moscow, 1961 (In Russian)].
- [2] G. Leitmann, *An Introduction to Optimal Control*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [3] А. Брайсон, Ю.-ши. Хо, *Прикладная теория оптимального управления*, Мир, М., 1972; англ. пер.: А. Е. Bryson, Yu-Chi. Ho, *Applied Optimal Control Optimization, Estimation and Control*, Blaisdell Publishing Company, Ocland, 1969.
- [4] В. Г. Болтянский, *Математические методы оптимального управления*, Наука, М., 1969. [V. G. Boltyansky, *Matematicheskie Metody Optimal'nogo Upravleniya*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].
- [5] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton univ. press, New Jersey, 1957.
- [6] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, *Pozicionnye Differencialnye Iгры*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].
- [7] А. И. Субботин, *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации*, Институт компьютерных технологий, Москва-Ижевск, 2003; англ. пер.: А. И. Subbotin, *Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective*, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [8] M. G. Crandall, P. L. Lions, "Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations", *em Trans. Amer. Math. Soc.*, **277**:1 (1983), 1–42.
- [9] P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, V. N. Ushakov, "Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **263**:S2 (2008), 191–201.
- [10] J. W. Bruce, P. J. Giblin, *Curves and singularities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [11] В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, "Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.*, **26**:1 (2016), 95–120. [V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii, " α -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **26**:1 (2016), 95–120 (In Russian)].
- [12] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, "Построение решения задачи управления по быстродействию при нарушении гладкости кривизны границы целевого множества", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **53** (2019), 98–114. [P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, "Construction of a solution of a velocity problem in case of violation of the smoothness of the curvature of the target set boarder", *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, **53** (2019), 98–114 (In Russian)].
- [13] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, "Конструирование негладкого решения задачи управления по быстродействию при низком порядке гладкости границы целевого множества", *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 108–119. [P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, "Construction of a nonsmooth solution in a time-optimal problem with a low order of smoothness of the boundary of the target set", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **25**:1 (2019), 108–119 (In Russian)].
- [14] Th. Bröcker, L. Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambrifge University Press, Cambridge, 1975.
- [15] В. М. Закалюкин, "Огибающие семейств волновых фронтов и теория управления", *Тр. МИ-АН*, **209** (1995.), 133–142. [V. M. Zakalyukin, "Envelopes of wave front families, and control theory", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, **209** (1995), 132–142 (In Russian)].
- [16] В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов, *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление*, Наука, М., 1990. [V. F. Dem'yanov, A. M. Rubinov, *Foundations of Nonsmooth Analysis and Quasi-Differential Calculus*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russian)].
- [17] С. И. Дудов, "Дифференцируемость по направлениям функции расстояния", *Матем. Сборник*, **186**:3 (1995), 29–52; англ. пер.: S. I. Dudov, "Directional differentiability of the distance function", *Sbornik: Mathematics*, **186**:3 (1995), 337–358.

- [18] A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev, “Construction of the optimal outcome function for a time-optimal problem on the basis of a symmetry set”, *Automation and Remote Control*, **70:7** (2009), 1132–1139.
- [19] А. А. Успенский, “Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала”, *Труды Института математики и механики*, **21:1** (2015), 250–263. [A. A. Uspenskii, “Necessary conditions for the existence of pseudovertrices of the boundary set in the Dirichet problem for the eikonal equation”, *Tr. Inst. Mat. Mekh*, **21:1** (2015), 250–263 (In Russian)].
- [20] А. А. Успенский, П. Д. Лебедев, “Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества”, *Вестник Удмуртского университета. Математика, механика, компьютерные науки. Ижевск*, **28:1** (2018), 59–73. [A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev, “Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **28:1** (2018), 59–73 (In Russian)].
- [21] A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev, “On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **272:S1** (2011), 255–270.
- [22] A. A. Uspenskii, “Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **291:S1** (2015), 239–254.
- [23] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Некоторые свойства чебышёвских множеств”, *Докл. АН СССР*, **118:1** (1958), 17–19. [N. V. Efimov, S. B. Stečkin, “Some properties of Čebyšev sets”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, **118** (1958), 17–19 (In Russian)].
- [24] А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, “Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения”, *УМН*, **71:1** (2016), 3–84; англ. пер.: A. R. Alimov, I. G. Tsar'kov, “Connectedness and solarly in problems of best and near-best approximation”, *Russian Mathematical Surveys*, **71:1** (2016), 1–77.

Информация об авторах

Лебедев Павел Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: pleb@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

Успенский Александр Александрович, доктор физико-математических наук, зав. сектором. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: uspen@imm.uran.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Успенский Александр Александрович
 E-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 30.04.2020 г.
 Поступила после рецензирования 25.06.2020 г.
 Принята к публикации 19.11.2020 г.

Information about the authors

Pavel D. Lebedev, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: pleb@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

Alexander A. Uspenskii, Doctor of Physics and Mathematics, Chief of a Sector. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation. E-mail: uspen@imm.uran.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Alexander A. Uspenskii
 E-mail: uspen@imm.uran.ru

Received 30.04.2020
 Reviewed 25.06.2020
 Accepted for press 19.11.2020