ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-299-306
УДК 517.929

К вопросу об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием

Пётр Михайлович СИМОНОВ
ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15

On the stability of a system of two linear hybrid functional differential systems with aftereffect

Pyotr M. SIMONOV
Perm State National Research University
15 Bukirev St., Perm 614990, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается система двух гибридных векторных уравнений, содержащих линейные разностную (определенную на дискретном множестве) и функционально-дифференциальную (определенную на полуоси) части. Для ее изучения выбирается модельная система двух векторных уравнений, одно из которых линейное разностное с последействием (ЛРУП), а другое – линейное функционально-дифференциальное с последействием (ЛФДУП). Показаны два равносильных представления этой системы: первое представление в виде ЛФДУП, второе – в виде ЛРУП. Это позволяет для исследования вопросов устойчивости рассматриваемой системы использовать известные результаты об устойчивости ЛФДУП и ЛРУП.

С использованием результатов [Гусаренко С. А. Об устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Краевые задачи. Межвузовский сборник научных трудов. Пермь: ППИ, 1989. С. 3–9], рассмотрены два примера исследования устойчивости по правой части совместных систем четырех уравнений. В первом примере используется ЛФДУП, для которого известны достаточные условия знакоопределенности элементов 2×2 матрицы-функции Коши (в терминах коэффициентов ЛФДУП). Во втором примере ЛФДУП есть система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) второго порядка. В обоих случаях, известны оценки компонент матрицы-функции Коши. Для компонент матрицы-функции Коши ЛРУП дана экспоненциальная оценка с отрицательным показателем.

Ключевые слова: гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений; линейное разностное уравнение с последействием; линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием; формула Коши; устойчивость по правой части; вольтерровая обратимость; оценка нормы оператора

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332_а).

Для цитирования: *Симонов П.М.* К вопросу об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 299–306.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-299-306.

Abstract. We consider a system of two hybrid vector equations containing linear difference (defined on a discrete set) and functional differential (defined on a half-axis) parts. To study it, a model system of two vector equations is chosen, one of which is linear difference with aftereffect (LDEA), and the other is a linear functional differential with aftereffect (LFDEA). Two equivalent representations of this system are shown: the first representation in the form of LFDEA, the second — in the form of LDEA. This allows us to study the stability issues of the system under consideration using the well-known results on the stability of LFDEA and LDEA.

Using the results of the article [Gusarenko S. A. On the stability of a system of two linear differential equations with delayed argument // Boundary value problems. Interuniversity collection of scientific papers. Perm: PPI, 1989. P. 3–9], two examples are shown when a joint system of four equations will be stable with respect to the right side. In the first example, we use the LFDEA for which sufficient conditions for the sign-definiteness of the elements of the 2×2 Cauchy matrix function are known (in terms of the LFDEA coefficients). In the second example, LFDEA is given such that LFDEA is a system of linear ordinary differential equations (LODE) of the second order. In both cases, estimates of the components of the Cauchy matrix function are known. An exponential estimate with a negative exponent is given for the components of the Cauchy matrix function of LDEA.

Keywords: hybrid linear system of functional differential equations; linear difference equation with aftereffect; linear functional differential equation with aftereffect; Cauchy formula; stability with respect to the right side, Volterra reversibility, evaluation of operator norm

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00332_a).

For citation: Simonov P.M. K voprosu ob ustoychivosti sistemy dvukh lineynykh gibridnykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem s posledeystviyem [On the stability of a system of two linear hybrid functional differential systems with aftereffect]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 299–306. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-299-306. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работах [1–3] исследованы вопросы устойчивости двух гибридных уравнений. В [1, 2] рассмотрено ЛОДУ первого порядка и разностное уравнение из двух слагаемых, установлены признаки устойчивости такого уравнения, использующие W-метод Н.В. Азбелева [4]. В [3] рассмотрено линейное функционально-дифференциальное с последействием (ЛФДУП) первого порядка с одним запаздыванием и разностное уравнение из двух слагаемых. Подход к исследованию устойчивости двух ЛФДУП с двумя запаздываниями и с двумя разностными уравнениями предложен в работе [5].

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $||\alpha||_{\mathbb{R}^n}$; L — пространство (классов эквивалентности) локально суммируемых функций $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||f||_{L[0,T]} = \int_0^T ||f(t)||_{\mathbb{R}^n}\, dt$ для всех $T > 0$; D — пространство локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||x||_{D[0,T]} = ||\dot{x}||_{L[0,T]} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T > 0$; L_∞ — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||z||_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \geq 0} ||z(t)||_{\mathbb{R}^n}$.

Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots\}$ со столбцами $y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots \in \mathbb{R}^n$ сопоставим вектор-функцию

$$y([t]) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

(где $[t]$ обозначена целая часть действительного числа t, а χ_E — характеристическая функция множества E). Символом $y[t]$ обозначим вектор-функцию $y([t])$, $t \in [-1, \infty)$. Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ является линейным пространством, обозначим его ℓ_0. Введем в линейном пространстве ℓ_0 полунормы $||y||_{\ell_{0T}} = \sum\limits_{i=-1}^{T} ||y_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq -1$.

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots\}$ со столбцами $g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots \in \mathbb{R}^n$ сопоставим вектор-функцию

$$g([t]) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

Обозначим $g[t] = g([t])$, $t \in [0, \infty)$. Определим линейное пространство ℓ таких вектор-функций и введем в этом пространстве полунормы $||g||_{\ell_T} = \sum\limits_{i=0}^{T} ||g_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq 0$.

Обозначим $(\Delta y)(t) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geq 1$ и $(\Delta y)(t) = y(0)$ при $t \in [0, 1)$.

Рассмотрим линейную гибридную функционально-дифференциальную систему с последействием (ЛГФДСП) вида

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \qquad \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \tag{0.1}$$

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми, $f \in L$, $g \in \ell$.

Пусть модельное уравнений $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство $B \subset L$ (это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений, представимых формулой Коши

$$x(t) = (\mathcal{C}_{11}z)(t) + (\mathcal{X}_{11}\alpha)(t) = \int\limits_0^t C_{11}(t,s)z(s)\,ds + X_{11}(t)\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^n, \quad z \in B).$$

Здесь $\mathcal{C}_{11}$ — это оператор Коши, $C_{11}(t,s)$ — это матрица-функция Коши, $\mathcal{X}_{11}$ — оператор умножения на фундаментальную матрицу, $X_{11}(t)$ — фундаментальная матрица. Норму в $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ определим равенством $||x||_{D(\mathcal{L}_{11},B)} = ||\mathcal{L}_{11}x||_B + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$.

Предположим, что оператор $\mathcal{C}_{11}$ непрерывно действует из пространства B в это же пространство B, а оператор $\mathcal{X}_{11}$ действует из $\mathbb{R}^n$ в B. Это условие эквивалентно тому, что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_B^{(1)}[0,\infty)$ с обычной нормой $||x||_{W_B^{(1)}[0,\infty)} = ||\dot{x}||_B + ||x||_B$. В дальнейшем будем это пространство обозначать как W_B. При этом, $W_B \subset D$, и это вложение непрерывно. Будем также пользоваться обозначением $W_B^0 = \{x \in W_B : x(0) = 0\}$.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : W_B \to B$ называется W_B-устойчивым (см. [4]) тогда и только тогда, когда оно сильно B-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ называется сильно B-устойчивым, если для любого $z \in B$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in B$ и $\dot{x} \in B$.

1. Сведение к ЛФДУП

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши: $y[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]\, g[s]$.

Обозначим $(\mathcal{C}_{22}g)[t] = \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]\, g[s]$, $(\mathcal{Y}_{22}y(-1))[t] = Y_{22}[t]\ y(-1)$.

Пусть $M \subset \ell$ и $M_0 \subset \ell_0$ — банаховы пространства, причем пространства M_0, M изоморфны. Определим также пространство $M_0^0 = \{y \in M_0 : y(-1) = 0\}$.

Каждое решение y второго уравнения в (0.1) имеет вид:

$$y = -\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + Y_{22}y(-1) + \mathcal{C}_{22}g.$$

Подставим его в первое уравнение системы (0.1), получим:

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) + \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g = f,$$

$$\mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x = f_1 = f - \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g.$$

Обозначим $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}$, тогда первое уравнение системы (0.1) примет вид $\mathcal{L}_1 x = f_1$. Если вольтерров оператор $\mathcal{L}_1 : W_B^0 \to B$ вольтеррово обратим, то при любом $f_1 \in B$ решение уравнения $\mathcal{L}_1 x = f_1$ принадлежит пространству W_B. Таким образом, получены условия, при которых система (0.1) обладает тем свойством, что при любом векторе $\{f, g\} \in B \times M$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times M_0$.

2. Сведение к ЛРУП

Для уравнения (0.1) будем пользоваться принятыми в пункте 1 обозначениями.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{11}x = f$ для $f \in B$ (где B непрерывно вложено в L) принадлежит пространству W_B и представляется формулой Коши

$$x = X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11}f.$$

Из первого уравнения в (0.1) найдем

$$x = -\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11}f.$$

Подставим x во второе уравнение системы (0.1):

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = -\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) + \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f + \mathcal{L}_{22}y = g,\\ -\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{22}y = g_1 = g - \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f.\end{gathered}$$

Обозначив $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}$, запишем второе уравнение системы (0.1) следующим образом $\mathcal{L}_2 y = g_1$. Если вольтерров оператор $\mathcal{L}_2 : M_0^0 \to M$ вольтеррово обратим, то при любом $g_1 \in M$ решение y уравнения $\mathcal{L}_2 y = g_1$ принадлежит пространству M_0. Таким образом, здесь также получены условия, при которых система (0.1) обладает тем свойством, что при любом $\{f, g\} \in B \times M$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times M_0$.

3. Достаточное условие устойчивости

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим систему двух автономных ЛФДУП и ЛРУП следующего вида.

Пусть линейные операторы определены равенствами:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{11}\{x_1,x_2\}_1 &= \dot{x}_1 + a_{11}x_{1\tau_{11}} + a_{12}x_{2\tau_{12}}, & \mathcal{L}_{12}\{y_1,y_2\}_1 &= b_{11}y_{1\delta_{11}} + b_{12}y_{2\delta_{12}},\\
\mathcal{L}_{11}\{x_1,x_2\}_2 &= \dot{x}_2 + a_{21}x_{1\tau_{21}} + a_{22}x_{2\tau_{22}}, & \mathcal{L}_{12}\{y_1,y_2\}_2 &= b_{21}y_{1\delta_{21}} + b_{22}y_{2\delta_{22}},\\
\mathcal{L}_{21}\{x_1,x_2\}_1 &= c_{11}x_{1\rho_{11}} + c_{12}x_{2\rho_{12}}, & \mathcal{L}_{22}\{y_1,y_2\}_1 &= y_1 - d_{11}y_{1\theta_{11}} - d_{12}y_{2\theta_{12}}\\
\mathcal{L}_{21}\{x_1,x_2\}_2 &= c_{21}x_{1\rho_{21}} + c_{22}x_{2\rho_{22}}, & \mathcal{L}_{22}\{y_1,y_2\}_2 &= y_2 - d_{21}y_{1\theta_{21}} - d_{22}y_{2\theta_{22}}.
\end{aligned}$$

Здесь $x_{1\tau}(t) = x_1(t-\tau)$, если $t \geq \tau$, $x_{1\tau}(t) = 0$, если $t < \tau$, и аналогичные определения верны для остальных суперпозиций.

Обозначим:

$$\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 :\ ||y||_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\cdots} |y(k)| < +\infty\},$$
$$\ell_{\infty} = \{g \in \ell :\ ||g||_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0,1,\cdots} |g(k)| < +\infty\}.$$

Получим условия, при которых для любых $\{f,g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ решения $\{x,y\}$ рассматриваемой здесь системы принадлежат пространству $W_B \times \ell_{\infty 0}$. Для этого надо найти условия вольтерровой обратимости оператора $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21} : W^0_{L_\infty} \to L_\infty$, или условия вольтерровой обратимости оператора $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12} : \ell^0_{\infty 0} \to \ell_\infty$. Здесь

$$\mathcal{C}_{22} = (\mathcal{I} - \mathcal{S})^{-1}, \quad \mathcal{S}\{y_1,y_2\} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}\{y_1,y_2\}_1 \\ \mathcal{S}\{y_1,y_2\}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}y_{1\theta_{11}} + d_{12}y_{2\theta_{12}} \\ d_{21}y_{1\theta_{21}} + d_{22}y_{2\theta_{22}} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $||\mathcal{S}||_{\ell_\infty \to \ell_{\infty 0}} \leq \left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} < 1$. Тогда для для оценки нормы оператора $||\mathcal{C}_{22}||_{\ell_\infty \to \ell^0_{\infty 0}}$ достаточно положить

$$||\mathcal{C}_{22}||_{\ell_\infty \to \ell^0_{\infty 0}} = ||(\mathcal{I} - \mathcal{S})^{-1}||_{\ell_\infty \to \ell^0_{\infty 0}} \leq \frac{1}{1 - ||\mathcal{S}||_{\ell_\infty \to \ell_{\infty 0}}} \leq \frac{1}{1 - \left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}.$$

Для исследования вольтерровой обратимости операторов $\mathcal{L}_1 : W^0_{L_\infty} \to L_\infty$ и $\mathcal{L}_2 : \ell^0_{\infty 0} \to \ell_\infty$ достаточно оценить $||\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}||_{W^0_{L_\infty} \to W^0_{L_\infty}}$ или $||\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}||_{\ell^0_{\infty 0} \to \ell^0_{\infty 0}}$.

Имеем:

$$||\mathcal{C}_{11}||_{L_\infty \to W^0_{L_\infty}} \leq \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}, \quad ||\mathcal{L}_{21}||_{W^0_{L_\infty} \to \ell_\infty} \leq \left\| \begin{matrix} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2},$$

$$||\mathcal{L}_{12}||_{\ell^0_{\infty 0} \to L_\infty} \leq \left\| \begin{matrix} |b_{11}| & |b_{12}| \\ |b_{21}| & |b_{22}| \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}, \quad ||\mathcal{C}_{22}||_{\ell_\infty \to \ell^0_{\infty 0}} \leq \frac{1}{1 - \left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}.$$

Обозначили $\sigma_{ij} = \sup\limits_{t\geq 0}\int\limits_0^t |C_{11ij}(t,s)|\,ds < \infty,\ \ i,j=1,2$. При любых $\{f,g\}\in L_\infty\times\ell_\infty$ решения $\{x,y\}$ рассматриваемой системы принадлежат пространству $W_B\times\ell_{\infty 0}$, если выполнено неравенство

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \times \left\| \begin{matrix} |b_{11}| & |b_{12}| \\ |b_{21}| & |b_{22}| \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \times \left\| \begin{matrix} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \times \frac{1}{1-\left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}} < 1,$$

или неравенство

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \times \left\| \begin{matrix} |b_{11}| & |b_{12}| \\ |b_{21}| & |b_{22}| \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} \times \left\| \begin{matrix} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} < 1-\left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}. \tag{3.2}$$

Как показано в [6], если $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, $\tau_{11}\leq 1/(ea_{11})$, $\tau_{22}\leq 1/(ea_{22})$, $a_{12}a_{21}\geq 0$, $d=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0,$ то

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{d} & \frac{|a_{12}|}{d} \\ \frac{|a_{21}|}{d} & \frac{a_{11}}{d} \end{pmatrix}.$$

Итак, при выполнении перечисленных условий на коэффициенты уравнений и запаздывания, в случае $a_{12}<0,\ \ a_{21}<0,$ рассматриваемая система обладает свойством

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}.$$

П р и м е р 3.2. Рассмотрим систему двух таких же автономных ЛФДУП и ЛРУП. Но в этом примере предположим, что ЛФДУП есть система ЛОДУ, то есть запаздывания отсутствуют: $\tau_{11}=\tau_{12}=\tau_{21}=\tau_{22}=0$. Пусть

$$a_{11}+a_{22}>0,\ \ d=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0,\ \ D=(a_{11}-a_{22})^2/4+a_{12}a_{21}>0,\ \ \lambda=\sqrt{|D|}.$$

Тогда, как показано в работе [6], для системы ЛОДУ при $i\neq j$ справедливы следующие равенства:

$$\sigma_{ii}=a_{jj}/d,$$

если $a_{ij}a_{ji}\geq 0$ или $D\geq 0$, $a_{ij}a_{ji}<0$, $a_{ii}\leq a_{jj}$;

$$\sigma_{ii}=\left[a_{jj}+2\sqrt{-a_{ij}a_{ji}}\big((a_{ii}-a_{jj}-2\lambda)/(a_{ii}-a_{jj}+2\lambda)\big)^{\frac{a_{ii}+a_{jj}}{4\lambda}}\right]/d,$$

если $D\geq 0$, $a_{ij}a_{ji}<0$, $a_{ii}>a_{jj}$;

$$\sigma_{ii}=\left(a_{jj}+2\sqrt{-a_{ij}a_{ji}}\,e^{-\frac{a_{ii}+a_{jj}}{a_{ii}-a_{jj}}}\right)/d,$$

если $D=0$, $a_{ij}a_{ji}<0$, $a_{ii}>a_{jj}$;

$$\sigma_{ii}=\left(a_{jj}+2\sqrt{-a_{ij}a_{ji}}\,e^{-\frac{a_{ii}+a_{jj}}{2\lambda}\arctan\frac{2\lambda}{a_{ii}-a_{jj}}}/\big(1-e^{-\pi\frac{a_{ii}+a_{jj}}{2\lambda}}\big)\right)/d,$$

если $D < 0$, $a_{ij}a_{ji} < 0$, $a_{ii} > a_{jj}$;

$$\sigma_{ii} = \big(a_{jj} + 2\sqrt{-a_{ij}a_{ji}}\, e^{\frac{a_{ii}+a_{jj}}{2\lambda}(\arctan \frac{2\lambda}{a_{jj}-a_{ii}} - \pi)} / (1 - e^{-\pi \frac{a_{ii}+a_{jj}}{2\lambda}})\big)/d,$$

если $D < 0$, $a_{ij}a_{ji} < 0$, $a_{ii} < a_{jj}$;

$$\sigma_{ij} = |a_{ij}|/d,$$

если $D \geq 0$;

$$\sigma_{ij} = |a_{ij}| \operatorname{cth} \frac{\pi(a_{ii} + a_{jj})}{4\lambda}/d,$$

если $D < 0$.

Таким образом, в данной ситуации имеет место неравенство (3.2), гибридная система устойчива, то есть при любых $\{f, g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ для ее решения выполнено включение $\{x, y\} \in W_B \times \ell_{\infty 0}$.

References

[1] А. С. Ларионов, П. М. Симонов, “Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II”, *Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”*, **14**:5 (2014), 38–45. [A. S. Larionov, P. M. Simonov, “Stability of hybrid functional differential systems with aftereffect (HFDSA). II”, *Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Special Issue “Differential Equations”*, **14**:5 (2014), 38–45 (In Russian)].

[2] Д. Л. Андрианов, В. О. Арбузов, С. В. Ивлиев, В. П. Максимов, П. М. Симонов П.М., “Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация”, *Вестник Пермского университета. Серия: “Экономика”*, **27**:4 (2015), 8–32. [D. L. Andrianov, V. O. Arbuzov, S. V. Ivliev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, “Dynamic models of economics: theory, applications, software implementation”, *Perm University Herald. Economy*, **27**:4 (2015), 8–32 (In Russian)].

[3] П. М. Симонов, “Об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем”, *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **46**:2 (2015), 184–192. [P. M. Simonov, “On the stability of linear hybrid functional differential systems”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of Udmurt State University*, **46**:2 (2015), 184–192 (In Russian)].

[4] Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков, “Устойчивость линейных систем с последействием. IV”, *Дифференциальные уравнения*, **29**:2 (1993), 196–204; англ. пер.:N. V. Azbelev, L. M. Berezanskii, P. M. Simonov, A. V. Chistyakov, “Stability of linear systems with aftereffect. IV”, *Differential Equations*, **2**:5 (1993), 153–160.

[5] П. М. Симонов, “Об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП)”, *Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2020*, Материалы Международной конференции (Воронеж, 26–30 января 2020 г.), ИПЦ «Научная книга», Воронеж, 2020, 256–263. [P. M. Simonov, “On the stability of a system of two linear hybrid functional differential systems with aftereffect (LHFDSA)”, *Voronezh Winter Mathematical School S.G. Krein – 2020*, Materials of the International Conference (Voronezh, January 26–30, 2020), Publishing and Printing Center “Scientific Book”, Voronezh, 2020, 256–263 (In Russian)].

[6] С. А. Гусаренко, “Об устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом”, *Краевые задачи. Межвузовский сборник научных трудов*, 1989, 3–9. [S. A. Gusarenko, “On the stability of a system of two linear differential equations with delayed argument”, *Boundary Value Problems. Interuniversity Collection of Scientific Papers*, 1989, 3–9 (In Russian)].

Информация об авторе

Симонов Пётр Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике. Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация. E-mail: simpm@mail.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6357-662X

Поступила в редакцию 05.05.2020
Поступила после рецензирования 30.06.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Pyotr M. Simonov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics. Perm State National Research University, Perm, Russian Federation. E-mail: simpm@mail.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6357-662X

Received 05.05.2020
Reviewed 30.06.2020
Accepted for press 09.09.2020