

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Золотарева Н.Д., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-148-391-400>

УДК 519.622



О пересчете эллипсоидов при оценке погрешности неявного метода Штермера для линейного дифференциального уравнения второго порядка

Наталья Дмитриевна ЗОЛОТАРЕВА

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

119991, ГСП-2, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. В настоящей работе предложен новый способ построения оценки погрешности численного решения задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка, полученного с помощью неявного метода Штермера. В отличие от ранее предложенных способов, он позволяет учитывать знаки малых слагаемых при пересчете эллипсоидов, содержащих точное решение, в случае неявного многошагового численного метода. Это приводит к более точной оценке погрешности численного решения и применимости метода эллипсоидов на больших интервалах. Приведен численный эксперимент, демонстрирующий эффективность предложенного метода получения гарантированной оценки погрешности неявного метода Штермера.

Ключевые слова: метод эллипсоидов, оценка погрешности, неявный метод Штермера, численное решение задачи Коши для ОДУ второго порядка

Для цитирования: Золотарева Н.Д. О пересчете эллипсоидов при оценке погрешности неявного метода Штермера для линейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 148. С. 391–400. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-148-391-400>

SCIENTIFIC ARTICLE

© N. D. Zolotareva, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-148-391-400>

On the recalculation of ellipsoids in estimating the error of the implicit Stormer method for a second-order linear differential equation

Natalia D. ZOLOTAREVA

Lomonosov Moscow State University

1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract. In the paper, a new method is proposed for constructing an error estimate for the numerical solution of the Cauchy problem for a second-order differential equation obtained using the implicit Stormer method. Unlike the previously proposed methods, it allows one to take into account the signs of small terms when recalculating ellipsoids containing the exact solution in the case of implicit multistep numerical method. This leads to a more accurate estimation of the error of the numerical solution and the applicability of the ellipsoid method over large intervals. A numerical experiment is presented demonstrating the effectiveness of the proposed method for obtaining a guaranteed error estimate of the implicit Stormer method.

Keywords: ellipsoid method, error estimation, the Stormer method, numerical solution of the Cauchy problem for second-order ODEs

Mathematics Subject Classification: 65L70, 65L05.

For citation: Zolotareva N.D. On the recalculation of ellipsoids in estimating the error of the implicit Stormer method for a second-order linear differential equation. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:148 (2024), 391–400. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-148-391-400> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Оценка погрешности приближенного решения дифференциального уравнения при по координатном оценивании имеет экспоненциальный рост, даже если сама погрешность растет не так быстро. Такой эффект называется эффектом раскрутки или эффектом Мура [1, с. 155].

Один из способов построения оценки погрешности, позволяющий избежать эффекта раскрутки, был предложен в [2]. Численное решение заключалось в эллипсоид, который содержал также и точное решение. С использованием разностного уравнения для погрешности этот эллипсоид пересчитывался на каждом шаге.

Для явного метода Штермера в [3], благодаря более точному оцениванию малых слагаемых, был предложен способ получения более точной оценки погрешности. В статье [4] этим способом был обобщен метод Нумерова (неявный двухшаговый метод Штермера).

В данной работе предлагается распространить результат работы [4] на неявный многошаговый метод любого порядка.

1. Постановка задачи

Для вычисления приближенного решения задачи Коши

$$y'' = f(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad 0 \leq x \leq X_0, \quad y, f \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

будем использовать неявную k -шаговую формулу метода Штермера (см. [5, с. 143])

$$\nabla^2 y_m = h^2 f(x_{m-1}, y_{m-1}) + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^i f(x_m, y_m) + w_m, \quad m \geq k.$$

Здесь y_m является приближенным значением для $y(x_m)$ в точке $x_m = hm$; h — постоянный шаг; β_i — коэффициенты метода Штермера; ∇ — конечная разность (назад), т. е. $\nabla a_m = a_m - a_{m-1}$; ∇^i — конечная разность i -го порядка, $\nabla^i a_m = \nabla(\nabla^{i-1} a_m)$, $i = 2, 3, \dots$, в частности конечная разность второго порядка ∇^2 определяется формулой $\nabla^2 a_m = \nabla(\nabla a_m) = a_m - 2a_{m-1} + a_{m-2}$; w_m — ошибка, получаемая из-за округлений и обрыва итераций.

Погрешность $z_m = y(x_m) - y_m$ численного решения удовлетворяет разностному уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 z_m = & h^2 (f(x_{m-1}, y(x_{m-1})) - f(x_{m-1}, y_{m-1})) \\ & + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^i (f(x_m, y(x_m)) - f(x_m, y_m)) + N_m - w_m, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где N_m — ошибка k -го метода Штермера на m -м шаге:

$$N_m = -\beta_{k+1} h^{k+3} y^{(k+3)}(\xi), \quad x_{m-k} \leq \xi \leq x_m.$$

Целью работы является получение гарантированной оценки погрешности z_m .

2. Оценивание погрешности с помощью эллипсоидов

В статье [2] был предложен способ построения оценки погрешности, не приводящий к эффекту раскрутки. Численное решение заключалось в эллипсоид, содержащий точное решение, который пересчитывался на каждом шаге.

Способ получения более точной оценки погрешности для явного метода Штермера был предложен в [3], для неявного двухшагового численного метода (метода Нумерова) — в [4].

В данной работе полученные ранее результаты будут обобщены на неявный многошаговый метод любого порядка.

В случае, когда правая часть дифференциального уравнения (1.1) является линейной по y , т. е. $f(x, y) = A(x)y$, уравнение (1.2) можно записать в виде разностного уравнения

$$\nabla^2 z_m = h^2 A_{m-1} z_{m-1} + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^i (A_m z_m) + N_m - w_m, \quad (2.1)$$

где $A_m = A(x_m)$. Пусть при всех рассматриваемых значениях m справедливы оценки $N \geq |N_m|$ и $w \geq |w_m|$.

Так же как и в [2] введем вспомогательную переменную v_m и представим (2.1) в виде системы

$$\begin{cases} v_m = v_{m-1} + h A_{m-1} z_{m-1} + h^{-1} Q_m, & m \geq k, \\ z_m = z_{m-1} + h v_m + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1} (A_m z_m), & m \geq k-1, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $Q_m = N_m - w_m$, с начальными значениями

$$v_0 = v_1 = \dots = v_{k-2} = 0, \quad v_{k-1} = \frac{z_{k-1} - z_{k-2}}{h} - h \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1} (A_{k-1} z_{k-1}).$$

Подставим v_m из первого уравнения (2.2) во второе и перейдем к матричной записи:

$$\begin{pmatrix} v_m \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h A_{m-1} \\ h & 1 + h^2 A_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m-1} \\ z_{m-1} \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1} (A_m z_m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^{-1} Q_m \\ Q_m \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

В [2] оценка векторов погрешности $\vec{Z}_m = (v_m, z_m)^T$ (здесь и ниже верхний индекс T — знак транспонирования) сводилась к последовательному нахождению оценок из уравнения для вектора погрешности

$$\vec{Z}_m = \sum_{i=0}^{k-1} C_i \vec{Z}_{m-i} + \vec{Q}_m, \quad m \geq k.$$

Вектор погрешностей $\vec{Z}_m$ заключался в эллипсоид (см. [6]), и этот эллипсоид пересчитывался на каждом шаге. Для симметрической положительно-определенной матрицы B размера (2×2) эллипсоид $E(c, B)$ с центром в c определялся как $B^{\frac{1}{2}} S_1 + c$, где $S_1 = E(0, I)$ — единичный шар с центром начале координат.

Для неявного двухшагового метода (метода Нумерова) в [4] для последовательного нахождения оценок векторов погрешностей было предложено записать представление

$$\vec{Z}_m = C_0 \vec{Z}_m + C_1 \vec{Z}_{m-1} + \vec{Q}_m, \quad m \geq 2,$$

где

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} A_m \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & h A_{m-1} \\ h & 1 + \frac{11h^2}{12} A_{m-1} \end{pmatrix},$$

в виде

$$\vec{Z}_m = D_0 \vec{Z}_m + \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla(A_m z_m) \end{pmatrix} + \vec{Q}_m, \quad m \geq 2, \quad \text{где} \quad D_0 = \begin{pmatrix} 1 & h A_{m-1} \\ h & 1 + h^2 A_{m-1} \end{pmatrix}.$$

В этом случае точность оценки погрешности увеличивалась за счет того, что использовались не оценки величин $A_{m-i} z_{m-i}$, а оценки их первых разностей, то есть оценка происходила с учетом знаков малых слагаемых.

Проведем подобное улучшение для неявного многошагового метода. Для этого выразим в (2.3) i -е разности через $\nabla(A_{m-i} z_{m-i})$:

$$\begin{pmatrix} v_m \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h A_{m-1} \\ h & 1 + h^2 A_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m-1} \\ z_{m-1} \end{pmatrix} + h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \gamma'_i \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla(A_{m-i} z_{m-i}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^{-1} Q_m \\ Q_m \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где коэффициенты γ'_i выражаются через β_i .

Второе слагаемое правой части равенства содержит величину $\nabla(A_{m-i} z_{m-i})$. Выразим оценку первых разностей $P_l^1 \geq \max_{0 \leq i \leq l} |\nabla(A_i z_i)|$ через оценки

$$L \geq |A_i|, \quad L' \geq |\nabla A_i|/h, \quad z_l^B \geq \max_{0 \leq i \leq l} |z_i|, \quad v_l^B \geq \max_{0 \leq i \leq l} |v_i|.$$

Из второй строчки (2.2) следует, что

$$\nabla z_m = h v_m + h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \gamma'_i \nabla(A_{m-i} z_{m-i}). \quad (2.5)$$

В силу неравенства $|\nabla(A_i z_i)| \leq |\nabla A_i| z_l^B + L |\nabla z_i|$, используя прямо получаемую из (2.5) оценку, имеем

$$|\nabla(A_i z_i)| \leq h L' z_l^B + L (h v_l^B + h^2 L P_l^1 \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma'_i|).$$

Откуда следует, что

$$P_l^1 \leq \frac{h}{1 - h^2 L \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma'_i|} (L' z_l^B + L v_l^B). \quad (2.6)$$

Заметим, что шаг h должен быть выбран таким малым, чтобы знаменатель дроби в (2.6) был положительным.

Пусть погрешность начальных значений не превосходит δ , тогда $\vec{Z}_i \in E(0, \mathbf{Z}_i)$ при $i = 0, \dots, k-1$, где $\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}$ при $i = 0, \dots, k-2$ и $\mathbf{Z}_{k-1} = 2 \begin{pmatrix} (v_{k-1}^B)^2 & 0 \\ 0 & \delta^2 \end{pmatrix}$. Здесь

$$|v_{k-1}| \leq v_{k-1}^B = \frac{2\delta}{h} + h\delta L \sum_{i=0}^k |\gamma_i|,$$

где γ_i — коэффициенты, которые возникнут в (2.5) после расписывания первых разностей.

Предлагается, начиная с этих значений, на каждом шаге пересчитывать эллипсоид $E(0, \mathbf{Z}_m)$, содержащий вектор погрешностей $(v_m, z_m)^T$.

При умножении матрицы D на эллипсоид $E(0, B)$ надо использовать (см., например, [6, с. 74]) равенство

$$D \cdot E(0, B) = E(0, DBD^T).$$

При сложении двух эллипсоидов надо использовать вложение

$$E(0, B_1) + E(0, B_2) \subset E(0, (1+p)B_1 + (1+1/p)B_2).$$

Параметр p можно выбрать (см. [7]) из условия минимальности суммы квадратов полуосей ($p = \sqrt{\text{Tr}B_2/\text{Tr}B_1}$) или минимальности объема ($p = \sqrt{n^{-1}\text{Tr}(B_1^{-1}B_2)}$) эллипсоида, содержащего сумму данных эллипсоидов.

Суммой второго и третьего слагаемых в правой части (2.4) является вектор

$$\begin{pmatrix} h^{-1}Q_m \\ h^2 \sum_{i=0}^{k-1} \gamma'_i \nabla(A_{m-i}z_{m-i}) + Q_m \end{pmatrix},$$

содержащийся в эллипсоиде $E(0, \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix})$, где $a = h^{-1}Q$, $b = h^2 P_m^1 \sum_{i=0}^{k-1} |\gamma'_i| + Q$, $Q = N + w$.

В результате, общая последовательность действий выглядит следующим образом.

1. Определяются начальные значения:

$$z_0^* = z_1^* = \dots = z_{k-1}^* = \delta, \quad v_{k-1}^B = \frac{2\delta}{h} + h\delta L \sum_{i=0}^k |\gamma_i|.$$

Устанавливается $m = k$.

2. Вычисляется предварительная оценка погрешности:

$$\begin{cases} r_m^B = r_{m-1}^B + \frac{h}{1 - |\alpha_0|h^2L} \left(z_{m-1}^* L(2|\alpha_0| + |\alpha_1|) + z_{m-2}^* L(|\alpha_0| + |\alpha_2|) \right. \\ \quad \left. + L \sum_{i=3}^k |\alpha_i| z_{m-i}^* \right) + (N + w)(h^{-1} + |\alpha_0|L), \\ z_m^B = z_{m-1}^* + hr_m^B, \quad m \geq k. \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь z_i^* — улучшенная оценка ошибки, полученная на предыдущих шагах, начальные значения $z_i^* = \delta$ при $i = 0, \dots, k-1$, $r_{k-1}^B = \frac{2\delta}{h}$; шаг h такой, что $|\alpha_0|h^2L < 1$.

3. По предварительной оценке z_m^B из (2.7) находится эллипсоид $E(0, \mathbf{Z}_m)$, содержащий вектор $\vec{Z}_m = (v_m, z_m)^T$ из (2.4). Для этого вычисляется эллипсоид, в котором лежит сумма эллипсоидов, содержащих слагаемые правой части (2.4). Далее вычисляется улучшенная оценка погрешности

$$z_m^* = \sqrt{\mathbf{Z}_m^{2,2}},$$

где эллипсоид $E(0, \mathbf{Z}_m) = \mathbf{Z}_m^{\frac{1}{2}} S_1$, $S_1 = E(0, I)$ — единичный шар.

Затем m увеличивается на 1 и происходит переход к пункту 2.

3. Получение оценки погрешности с большей точностью

Для того, чтобы получить оценку погрешности с еще большей точностью, надо второе слагаемое в (2.3) представить в виде суммы величин двух типов. К первому типу отнесем члены, содержащие z_i и v_i только с индексом $m-1$ и присоединим их к первому слагаемому (2.3). Ко второму типу отнесем «малые» члены — разности порядка не меньше чем $G \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и, возможно, слагаемые, содержащие неоднородность Q_m . Прием, предложенный в пункте 2., соответствует $G = 1$, а метод статьи [2] соответствует $G = 0$.

Для $G \geq 2$ представим

$$\sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m) = \sum_{i=2}^G \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m) + \sum_{i=G+1}^k \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m).$$

Второе слагаемое можно оценить через оценку разностей G -го порядка, предварительно выразив все разности $(i-1)$ -го порядка через разности порядка G .

Первое слагаемое нужно преобразовать таким образом, чтобы в него входили члены только либо первого, либо второго типа.

Для этого выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=2}^G \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m) = \sum_{i=2}^G \beta_i \sum_{q=0}^{i-1} C_{i-1}^q (\nabla^{i-1-q} A_{m-q}) (\nabla^q z_m) \\ &= \sum_{i=2}^G \beta_i (\nabla^{i-1} A_m) \cdot z_m + \sum_{i=2}^G (i-1) \beta_i (\nabla^{i-2} A_{m-1}) \cdot \nabla z_m + S_3, \end{aligned}$$

где слагаемое $S_3 = \sum_{i=3}^G \beta_i \sum_{q=2}^{i-1} C_{i-1}^q (\nabla^{i-1-q} A_{m-q}) (\nabla^q z_m)$ появляется только в случае $G \geq 3$.

С учетом значения $\nabla^2 z_m$ из (2.1), имеем

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=3}^G \beta_i \sum_{q=2}^{i-1} C_{i-1}^q (\nabla^{i-1-q} A_{m-q}) (h^2 \nabla^{q-2} (A_{m-1} z_{m-1}) \\ &\quad + h^2 \sum_{l=2}^k \beta_l \nabla^{l+q-2} (A_m z_m) + \nabla^{q-2} Q_m). \end{aligned}$$

Сначала преобразуем z_m и ∇z_m в S , используя вторую строку (2.2). Получим

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=2}^G \beta_i (\nabla^{i-1} A_m) \cdot (z_{m-1} + h v_m + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1} (A_m z_m)) \\ &\quad + \sum_{i=2}^G (i-1) \beta_i (\nabla^{i-2} A_{m-1}) \cdot (h v_m + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1} (A_m z_m)) + S_3. \end{aligned}$$

Теперь преобразуем v_m , используя первую строку (2.2). Получим

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=2}^G \beta_i (\nabla^{i-1} A_m) \cdot (z_{m-1} + h(v_{m-1} + h A_{m-1} z_{m-1} + h^{-1} Q_m) \\ &\quad + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1} (A_m z_m)) + \sum_{i=2}^G (i-1) \beta_i (\nabla^{i-2} A_{m-1}) \cdot (h(v_{m-1} + h A_{m-1} z_{m-1} + h^{-1} Q_m) \\ &\quad + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1} (A_m z_m)) + S_3. \end{aligned}$$

Члены полученной суммы, содержащие в качестве множителей z_{m-1} и v_{m-1} , надо присоединить к первому слагаемому (2.4). Для остальных членов, которые не принадлежат ко второму типу, нужно повторить всю процедуру разбиения на слагаемые первого и второго типов заново.

Посмотрим, как предложенный метод работает при $G = 2$. В этом случае $S_3 = 0$,

$$S = \frac{1}{12}(\nabla A_m + h^2 A_m A_{m-1})z_{m-1} + \frac{h}{12}A_m v_{m-1} + \frac{1}{12}A_m(Q_m + h^2 \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m)).$$

Следовательно, запись (2.3) равносильна записи

$$\begin{pmatrix} v_m \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & hA_{m-1} \\ h(I + \frac{h^2}{12}A_m) & I + h^2(A_{m-1} + \frac{\nabla A_m}{12} + \frac{h^2}{12}A_m A_{m-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m-1} \\ z_{m-1} \end{pmatrix} + h^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{12}A_m Q_m + \frac{h^2}{12}A_m \sum_{i=2}^k \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m) + \sum_{i=3}^k \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^{-1}Q_m \\ Q_m \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Найдем оценку погрешности неявного метода Штермера 5-го порядка.

В этом случае справедлива следующая оценка второй координаты второго слагаемого правой части (3.1):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{12}A_m Q_m + \frac{h^2}{12}A_m \sum_{i=2}^4 \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m) + \sum_{i=3}^4 \beta_i \nabla^{i-1}(A_m z_m) \right| \\ \leq \frac{L}{12}Q + \frac{h^2 L}{144}P_m^1 + \frac{1}{120}P_m^2(1 + \frac{h^2 L}{12}). \end{aligned}$$

Здесь в качестве оценки первых разностей $P_l^1 : \max_{0 \leq i \leq l} \|\nabla(A_i z_i)\| \leq P_l^1$ используется оценка (2.6). Третьи разности были выражены через вторые, для которых ниже будет получена оценка $P_l^2 : \max_{0 \leq i \leq l} \|\nabla^2(A_i z_i)\| \leq P_l^2$.

Пусть выполнено неравенство $L'' \geq h^{-2}\|\nabla^2 A_i\|$. Тогда, используя оценки ∇z_i и $\nabla^2 z_i$, полученные из (2.5) и (2.1) соответственно, для $k \geq 4$ имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla^2(A_i z_i)\| &\leq \|(\nabla^2 A_i)z_i + 2\nabla A_{i-1}\nabla z_i + A_{i-2}\nabla^2 z_i\| \\ &\leq h^2 L'' z_i^B + 2hL'(h v_i^B + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} |\gamma'_j| P_l^1) + L(h^2 L z_{i-1}^B + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} |\gamma'_j| P_l^2 + Q). \end{aligned}$$

Откуда

$$P_l^2 \leq \frac{1}{1 - h^2 L \sum_{j=0}^{k-1} |\gamma'_j|} \left(h^2 z_l^B (L'' + L^2) + 2h^2 L' v_l^B + 2h^3 L' \sum_{j=0}^{k-1} |\gamma'_j| P_l^1 + Q \right).$$

4. Численный эксперимент

Продемонстрируем работу предложенного метода оценки погрешности на конкретном примере. Вычисления будем проводить с точностью до 56-го двоичного знака, т. е. с $\delta = \frac{1}{2}2^{-56} = 2^{-57}$. Рассмотрим линейное уравнение

$$y'' = -\frac{9 \cos^2 x}{2 + \cos^2 x} y$$

с точным решением $y(x) = \sin x + \frac{1}{9} \sin 3x$.

Численное решение будем также считать методом Штермера 5-го порядка с точностью $\delta = 2^{-57}$ с шагом $h = 2^{-8}$.

Оценка $N = \frac{1}{240} |y^{(7)}| h^7 \leq 1.5 \cdot 10^{-17}$, т. к. $|y^{(8)}| \leq 244$. Оценка $w = 7 \cdot 10^{-18}$.

В таблице приведены только оценки, не превосходящие 10^{-4} .

X_0	100π	200π	400π	600π
$G = 0$	$4 \cdot 10^{-6}$			
$G = 1$	$9 \cdot 10^{-8}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-5}$	
$G = 2$	$9 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-5}$

Результаты численных экспериментов показывают, что при учете знаков малых слагаемых точность оценки погрешности неявного метода Штермера значительно увеличивается. Кроме того, происходит увеличение длины интервала применимости метода оценивания погрешности с помощью эллипсоидов.

References

- [1] R. E. Moore, R. B. Kearfott, M. J. Cloud, *Introduction to interval analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009, 234 pp.
- [2] Н. Д. Золотарева, “Метод эллипсоидов для оценки глобальной ошибки метода Штермера”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2002, №1, 18–23; англ. пер.: N. D. Zolotareva, “Ellipsoid method for estimating the global error of the Stormer method”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2002, №1, 20–26.
- [3] Н. Д. Золотарева, “О новом способе получения гарантированной оценки ошибки метода Штермера с помощью эллипсоидов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2002, №3, 3–9. [N. D. Zolotareva, “New approach to Shtermer’s method guaranteed error assessment using ellipsoids”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2002, №3, 3–9 (In Russian)].
- [4] Н. Д. Золотарева, “О новом способе получения гарантированной оценки ошибки метода Нумерова с помощью эллипсоидов”, *Вестник российских университетов. Математика.*, **27**:139 (2022), 261–269. [N. D. Zolotareva, “On a new method for obtaining a guaranteed error estimate for Numerov’s method using ellipsoids”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:139 (2022), 261–269 (In Russian)].
- [5] О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин, *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране*, Издательство Московского университета, М., 1990, 335 с. [O. B. Arushanyan, S. F. Zaletkin, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations in Fortran*, Moscow University Publishing House, Moscow, 1990 (In Russian), 335 pp.]
- [6] Ф. Л. Черноусько, *Оценивание фазового состояния динамических систем*, Наука, М., 1988. [F. L. Chernousko, *Estimation of the Phase State of Dynamic Systems*, Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russian)].
- [7] Ю. Н. Решетняк, “Суммирование эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания”, *Прикладная математика и механика*, **53**:2 (1989), 249–254; англ. пер.: Yu. N. Reshetnyak, “Summation of ellipsoids in the guaranteed estimation problem”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **53**:2 (1989), 193–197.

Информация об авторе

Золотарева Наталья Дмитриевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительных методов, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zolotareva-vmk@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1490-2091>

Поступила в редакцию 29.09.2024 г.

Поступила после рецензирования 18.11.2024 г.

Принята к публикации 22.11.2024 г.

Information about the author

Natalia D. Zolotareva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Computational Methods Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: zolotareva-vmk@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1490-2091>

Received 29.09.2024

Reviewed 18.11.2024

Accepted for press 22.11.2024