



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 509, 2023

МАТЕМАТИКА

- Интегрируемость геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик
Г. В. Белозеров 5
- Оценки александровского n -поперечника компакта бесконечно дифференцируемых периодических функций
В. Н. Белых 8
- Разрешимость начально-краевой задачи для модели движения жидкости Кельвина–Фойгта с переменной плотностью
В. Г. Звягин, М. В. Турбин 13
- Бикомпактные схемы для уравнений Навье–Стокса в случае сжимаемой жидкости
М. Д. Брагин 17
- Способ преобразования спектра оператора в уравнениях Хартри–Фока и Кона–Шэма
А. А. Даньшин, А. А. Ковалишин 23
- О концентрации значений j -хроматических чисел случайных гиперграфов
И. О. Денисов, Д. А. Шабанов 28
- Уточнение задачи оптимального управления для практической реализации ее решения
А. И. Дивеев 36
- Слабо насыщенные подграфы случайного графа
О. И. Калиниченко, Б. Тайфе-Реза, М. Е. Жуковский 46
- Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений
А. И. Кожанов 50
- К теории Бирмана–Крейна–Вишика
М. Маламуд 54
- Тепловой взрыв как резонанс процесса горения
Е. В. Радкевич, О. А. Васильева, М. И. Сидоров, М. Е. Ставровский 60
- Обратная задача для уравнений электродинамики с нелинейной проводимостью
В. Г. Романов 65
- Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия
М. В. Шамолин 69

Идентификация узловых точек упругого включения в упругой плоскости <i>Е. И. Шифрин, А. В. Капцов</i>	77
Обобщение первой теоремы Берлинга–Мальявена <i>И. М. Васильев</i>	83
Оценивание размера структурных образований при ультразвуковой визуализации посредством статистического анализа эхо-сигнала <i>Т. В. Яковлева, Н. С. Кульберг, Д. В. Леонов</i>	87

ИНФОРМАТИКА

Подавление спекл шумов в медицинских изображениях путем сегментации-группирования 3D объектов на основе дисперсного контуролет представления <i>В. Ф. Кравченко, Ю. В. Гуляев, В. И. Пономарев, Г. Аранда-Бохоргес</i>	94
Математическое моделирование плавления вольфрама при воздействии лазерного импульса <i>Г. Г. Лазарева, А. С. Аракчеев, В. А. Попов</i>	101

ПОПРАВКА

Поправка к статье “Математические структуры, связанные с описанием квантовых состояний”, 2021, том 501, с. 57–61	106
--	-----

CONTENTS

Volume 509, 2023

MATHEMATICS

Integrability of a Geodesic Flow on the Intersection of Several Confocal Quadrics <i>G. V. Belozarov</i>	5
The Estimates of Alexandrov's n -width of a Compact Set for Some Infinitely Differentiable Periodic Functions <i>V. N. Belykh</i>	8
Solvability of the Initial-Boundary Value Problem for the Kelvin–Voigt fluid Motion Model with Variable Density <i>V. G. Zvyagin, M. V. Turbin</i>	13
Bicompact Schemes for Compressible Navier–Stokes Equations <i>M. D. Bragin</i>	17
Operator Spectrum Transformation in Hartree–Fock and Kohn–Sham Equations <i>A. A. Danshin, A. A. Kovalishin</i>	23
On the Concentration of Values of j -chromatic Numbers of Random Hypergraphs <i>I. O. Denisov, D. A. Shabanov</i>	28
Refinement of Optimal Control Problem for Practical Implementation of Its Solution <i>A. I. Diveev</i>	36
Weakly Saturated Subgraphs of Random Graphs <i>O. I. Kalinichenko, B. Tayfeh-Rezaie, M. E. Zhukovskii</i>	46
Nonlocal Problems with Generalized Samarsky–Ionkin Condition for Some Classes of Nonstationary Differential Equations <i>A. I. Kozhanov</i>	50
To the Birman–Krein–Vishik Theory <i>M. M. Malamud</i>	54
Thermal Explosion as a Resonance of the Combustion Process <i>E. V. Radkevich, O. A. Vasiliev, M. I. Sidorov, M. E. Stavrovskii</i>	60
An Inverse Problem for Electrodynamics Equations with a Nonlinear Conductivity <i>V. G. Romanov</i>	65
Invariant Volume Forms of Geodesic, Potential, and Dissipative Systems on a Tangent Bundle of a Four-Dimensional Manifold <i>M. V. Shamolin</i>	69
Identification of Nodal Points of Elastic Inclusion in Elastic Plane <i>E. I. Shifrin, A. V. Kaptsov</i>	77

A Generalization of the First Beurling and Malliavin Theorem <i>I. M. Vasilyev</i>	83
---	----

Estimation of the Size of Structural Formations in Ultrasound Imaging Through Statistical Analysis of the Echo Signal <i>T. V. Yakovleva, N. S. Kulberg, D. V. Leonov</i>	87
--	----

COMPUTER SCIENCE

Suppression of Speckle Noise in Medical Images Via Segmentation-Grouping of 3D Objects Using Sparse Contourlet Representation <i>V. F. Kravchenko, Yu. V. Guliaev, V. I. Ponomaryov, G. Aranda Bojorges</i>	94
--	----

Mathematical Modeling of Tungsten Melting in Exposure to Pulsed Electron Beam <i>G. G. Lazareva, A. S. Arakcheev, V. A. Popov</i>	101
--	-----

AMENDMENT

Amendment to the article “Mathematical Structures Related to the Description”, 2021, vol. 501, p. 57–61 <i>V. V. Kozlov, O. G. Smolyanov</i>	106
---	-----

УДК 514.745.82

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ СОФОКУСНЫХ КВАДРИК

© 2023 г. Г. В. Белозеров^{1,*}

Представлено академиком РАН А.Т. Фоменко

Поступило 19.10.2022 г.

После доработки 26.10.2022 г.

Принято к публикации 20.12.2022 г.

Классическая теорема Якоби–Шаля утверждает, что касательные линии, проведенные к геодезической на n -осном эллипсоиде в евклидовом n -мерном пространстве, касаются помимо этого эллипсоида еще $(n - 2)$ -х софокусных с ним квадрик, общих для всех точек данной геодезической. Из этой теоремы немедленно следует интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде. В данной работе доказывается обобщение этого результата для геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрик. Кроме того, если добавить к такой системе потенциал Гука с центром в начале координат, интегрируемость задачи сохранится.

Ключевые слова: интегрируемая система, софокусные квадрики, эллиптические координаты

DOI: 10.31857/S2686954322600628, **EDN:** CQSGJC

Рассмотрим в евклидовом n -мерном пространстве семейство софокусных квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1.$$

Здесь $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ – фиксированные числа, а λ – вещественный параметр. Квадрику этого семейства будем называть *вырожденной*, если ее параметр равен a_i для некоторого $i = 1, \dots, n$, иначе квадрику будем называть *невыврожденной*.

К. Якоби в работе [1] показал, что через каждую точку \mathbb{R}^n проходит в точности n софокусных квадрик. Этот факт позволяет ввести в евклидовом n -мерном пространстве *эллиптические координаты* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$): каждой точке мы сопоставляем набор параметров софокусных квадрик, содержащих ее, а затем упорядочиваем эти числа по возрастанию. В работе [1] К. Якоби доказал ортогональность этой системы координат.

М. Шаль доказал, что любая прямая в евклидовом \mathbb{R}^n касается $n - 1$ софокусной квадрики. Рассмотрим этот результат с механической точки зрения.

Пусть в евклидовом \mathbb{R}^n по инерции движется материальная точка единичной массы. Ее траекторией является прямая, заданная параметрически: $(x_1 + \tau \dot{x}_1, \dots, x_n + \tau \dot{x}_n)$, $\tau \in \mathbb{R}$. В таком случае уравнение на параметры квадрик, которых касается рассматриваемая траектория, имеет вид:

$$F_0 \lambda^{n-1} - F_1 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} F_{n-1} = 0, \quad (1)$$

где функции F_m вычисляются по формуле

$$F_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^m x_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sigma_{i,j}^{m-1} K_{i,j}.$$

Здесь $K_{i,j} = x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i$, а $\sigma_{i_1, \dots, i_k}^m$ – элементарный симметрический многочлен степени m от переменных $\{x_1, \dots, x_n\} / \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$. Считаем, что $\sigma_{i,j}^{-1} \equiv 0$, $\sigma_{i,j}^0 \equiv 1$.

Заметим, что F_0 есть полная механическая энергия системы и степень уравнения (1) почти всегда равна $n - 1$. Следовательно, согласно результату Шаля это уравнение имеет $n - 1$ вещественный корень и все эти корни являются первыми интегралами рассматриваемой динамической системы. Поскольку старший коэффициент уравнения (1) совпадает с полной механической энергией, функции F_0, \dots, F_m являются первыми интегралами этой системы. Оказывается, что эти функции являются функционально независимыми и попарно коммутирующими относительно

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru

стандартной скобки Пуассона. Проверить этот факт легче всего в эллиптических координатах.

Теперь рассмотрим геодезический поток на n -осном эллипсоиде в \mathbb{R}^n . Эта динамическая система является вполне интегрируемой в силу известной теоремы Якоби-Шаля.

Теорема 1 (Якоби и Шаль). *Касательные линии, проведенные во всех точках данной геодезической на эллипсоиде в евклидовом n -мерном пространстве, касаются помимо этого эллипсоида еще $(n-2)$ -х софокусных с ним квадрат, общих для всех точек этой геодезической.*

Замечание 1. Отметим, что с помощью метода разделения переменных Якоби показал интегрируемость геодезического потока на n -осном эллипсоиде в \mathbb{R}^n для произвольного n (см. [1]), а М. Шаль доказал теорему 1 в трехмерном случае (см. [2]).

Современное доказательство теоремы Якоби-Шаля можно найти в работах [3, 4]. Отметим, что из этой теоремы следует интегрируемость бильярда внутри $(n-1)$ -осного эллипсоида. Доказательство этого факта, а также другие следствия теоремы Якоби-Шаля изложены в работах [5, 6].

Не так давно В.А. Кибкало исследовал вопрос об интегрируемости геодезического потока на пересечении нескольких софокусных квадрат. Он доказал, что геодезический поток на пересечении $(n-2)$ -х квадрат в \mathbb{R}^n является вполне интегрируемой системой.

Оказывается, этот результат можно обобщить, если рассмотреть геодезический поток на пересечении произвольного числа невырожденных софокусных квадрат. Все дело в том, что функции F_1, \dots, F_{n-1} останутся первыми интегралами геодезического потока на таком пересечении.

Теорема 2 (Белозеров). *Пусть Q_1, \dots, Q_k — невырожденные софокусные квадратики различных типов в евклидовом n -мерном пространстве и $Q = \bigcap_{i=1}^k Q_i$, тогда*

1. геодезический поток на Q квадратично интегрируем;
2. касательные линии, проведенные ко всем точкам данной геодезической, касаются помимо Q_1, \dots, Q_k еще $n-k-1$ квадрат софокусных с Q_1, \dots, Q_k и общих для всех точек этой геодезической.

Замечание 2. Отметим, что геодезические на пересечении невырожденных софокусных квадрат, вообще говоря, не являются геодезическими на какой-либо из квадрат Q_1, \dots, Q_k . Поэтому теорема 2 не является следствием классической теоремы Якоби-Шаля.

Возникает естественный вопрос о классе гомотопности такого пересечения.

Хорошо известен результат В.В. Козлова о том, что геодезический поток на компактной двумерной ориентируемой аналитической поверхности обладает дополнительным функционально независимым аналитическим первым интегралом в том и только в том случае, когда эта поверхность гомотопна либо двумерной сфере S^2 , либо двумерному тору T^2 (см. [7]). Заметим, что из этого факта и теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Связная компонента компактного пересечения $(n-2)$ -х софокусных квадрат разных типов в \mathbb{R}^n гомотопна либо двумерной сфере S^2 , либо двумерному тору T^2 .*

Отметим, что это следствие было получено ранее В.А. Кибкало.

В случае $\dim Q > 2$ такие рассуждения не срабатывают. Тем не менее можно определить класс гомотопности поверхности Q , не прибегая к интегрируемости геодезического потока на ней, а используя эллиптические координаты.

Поскольку Q_1, \dots, Q_k — квадратики различных типов, их параметры соответствуют разным эллиптическим координатам. Поэтому, пересекая эти квадратики, мы фиксируем k эллиптических координат. В частности, если поверхность Q компактна, одна из квадрат является эллипсоидом, и, следовательно, первая эллиптическая координата на Q будет зафиксирована.

Итак, пусть Q — компактная поверхность и для любого i квадрата Q_i задается в эллиптических координатах уравнением $\lambda_{l_i} = \lambda_{l_i}^0 = \text{const}$. Без ограничения общности можем считать, что $1 = l_1 < \dots < l_k$. Для $i = 1, \dots, k$ положим $m_i = l_{i+1} - l_i$, где $l_{k+1} = n + 1$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 3 (Белозеров). *Пусть Q_1, \dots, Q_k — невырожденные софокусные квадратики различных типов в евклидовом n -мерном пространстве и $Q = \bigcap_{i=1}^k Q_i$ компактно, тогда Q гомотопна прямому произведению сфер $S^{m_1-1} \times \dots \times S^{m_k-1}$, где числа m_i определены выше.*

Замечание 3. В работе [8] С. Гитлер и С.Л. Медрано изучали топологию пересечений нескольких соосных квадрат с единичной сферой. Они получили, что такие пересечения в общем случае гомотопны связным суммам прямых произведений сфер. Отметим, что софокусные квадратики являются соосными, более того в силу теоремы 3

их компактные пересечения гомеоморфны прямым произведениям сфер.

Рассмотрим теперь задачу о движении материальной точки единичной массы в евклидовом n -мерном пространстве под действием упругой силы коэффициента k , центр которой расположен в начале координат. В этом случае полная механическая энергия имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2) = F_0 + V.$$

Следуя методу, описанному В.В. Козловым в работе [9], найдем дополнительные первые интегралы рассматриваемой системы. Будем искать их в виде $G_m = F_m + f_m$, где $m = 1, \dots, n-1$ и функция f_m зависит только от пространственных переменных. Нетрудными вычислениями можно показать, что в качестве f_m можно взять функцию $\frac{k}{2}(\Delta_1^m x_1^2 + \dots + \Delta_n^m x_n^2)$, где Δ_i^m – элементарный симметрический многочлен степени m от переменных $\{a_1, \dots, a_n\}/\{a_i\}$.

К. Якоби в работе [1] показал, что задача о движении материальной точки по n -осному эллипсоиду в евклидовом n -мерном пространстве под действием упругой силы коэффициента k , центр которой расположен в начале координат, является интегрируемой. Доказательство этого факта он получил опять же с помощью метода разделения переменных.

Оказывается, что задача останется интегрируемой, если в качестве конфигурационного пространства взять пересечение нескольких невырожденных софокусных квадрик. Это происходит вследствие того, что, как и в случае задачи без потенциала, функции G_1, \dots, G_{n-1} останутся первыми интегралами.

Теорема 4 (Белозеров). Пусть Q_1, \dots, Q_k – невырожденные софокусные квадрики различных типов в

евклидовом n -мерном пространстве и $Q = \bigcap_{i=1}^k Q_i$.

Тогда задача о движении материальной точки по Q

под действием упругой силы коэффициента k с центром в начале координат является квадратично интегрируемой.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит В.А. Кибкало за постановку задачи и А.Т. Фоменко за ряд ценных замечаний и комментариев.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта РФФИ №22-71-10106.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Якоби К. Лекции по динамике. М.: Гостехиздат, 1936.
2. Chasles M. Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1846. V. 11. P. 5–20.
3. Арнольд В.И. Несколько замечаний об эллиптических координатах // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 133, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1984. С. 38–50.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. С. 472.
5. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
6. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010.
7. Козлов В.В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302.
8. Gitler S., Medrano S.L. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums // Geometry & Topology. 2013. V. 17. P. 1497–1534.
9. Козлов В.В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // ПММ. 1995. Т. 59. № 1. С. 3–9.

INTEGRABILITY OF A GEODESIC FLOW ON THE INTERSECTION OF SEVERAL CONFOCAL QUADRICS

G.V. Belozerov^a

^a Moscow State University M.V. Lomonosov, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.T. Fomenko

The classical Jacobi-Schall theorem states that Tangent lines drawn at all points of a geodesic curve on a quadric in n -dimensional Euclidean space are tangent, as well as to the given quadric, to $n - 2$ other confocal quadrics, which are the same for all points of the geodesic curve. This theorem immediately implies the integrability of a geodesic flow on an ellipsoid. In this paper, we prove a generalization of this result for a geodesic flow on the intersection of several confocal quadrics. Moreover, if we add the Hooke’s potential field centered at the origin of coordinates to such a system, the integrability of the problem is preserved.

Keywords: integrable system, confocal quadrics, elliptic coordinates

УДК 519.6+515.127

ОЦЕНКИ АЛЕКСАНДРОВСКОГО n -ПОПЕРЕЧНИКА КОМПАКТА БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2023 г. В. Н. Бельх^{1,*}

Представлено академиком РАН В.И. Бердышевым

Поступило 10.07.2022 г.

После доработки 12.11.2022 г.

Принято к публикации 21.12.2022 г.

Получены двусторонние оценки александровского n -поперечника компакта периодических бесконечно гладких функций, ограниченно вложенного в пространство непрерывных на единичной окружности функций.

Ключевые слова: компакт, n -поперечник, бесконечно дифференцируемая функция, класс Жевре

DOI: 10.31857/S2686954323700078, **EDN:** CSYAEH

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов X конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих дискретную формализацию [1]. При этом наилучшее финитное описание объекта X , определенным образом организованного в компакт X , приводит к понятию александровского n -поперечника $\alpha_n(X)$, смысловые потенции которого, как показал К.И. Бабенко [1], далеко выходят за пределы того, что имел в виду П.С. Александров [2]. Введение числового параметра $\alpha_n(X)$ в обиход компьютерной практики сыграло ключевую роль в оценке предельных возможностей вычислительных методов и, в частности, привело к открытию принципиально новых – *ненасыщаемых* [3] – численных методов, практическая эффективность которых напрямую связана с асимптотикой убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \rightarrow \infty$. Определяя точность, с которой компакт X исчерпывается компактами топологической размерности $\leq n$, александровский n -поперечник $\alpha_n(X)$, указывает погрешность финитного описания X с помощью n числовых параметров, руководствуясь информацией о “гладкостной” структуре X : чем большей гладкостью обладает компакт X , тем быстрее с ростом n убывает к нулю $\alpha_n(X)$. Оказавшись глубоким математическим фактом, понятие алек-

сандровского n -поперечника $\alpha_n(X)$ привело к переосмыслению статуса значимости для реальных вычислений экстраординарной (в том числе бесконечной) гладкости компакта X решений задач. При этом содержательная информация о компакте X извлекается средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий для X аппроксимационный аппарат. В итоге качественная финитизация функционального компакта X определяется наследованием ею дифференциальных свойств X .

Существуют классы задач (например, эллиптические [4]), компакты X решений которых могут состоять из C^∞ -гладких функций различной природы. Для оценки практической эффективности численных методов их решения нужна, как минимум, информация об асимптотике убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \rightarrow \infty$. Установление этой асимптотики $\alpha_n(X)$ и есть здесь основная математическая трудность, поскольку, если в нормированном пространстве метрика определяется в известном смысле единственным образом, то в ненормированном, но метризуемом пространстве C^∞ , она определяется уже неоднозначно (например, счетным семейством). Для компактов X аналитических функций оценки александровского n -поперечника $\alpha_n(X)$ были получены в [3, с. 291].

В работе указаны двусторонние оценки n -поперечника $\alpha_n(X)$ компакта X периодических C^∞ -гладких функций, ограниченно вложенного в пространство непрерывных на единичной окружности функций. Результат основывается на предложенной ранее автором [5] характеристике C^∞ -

¹ Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: belykh@math.nsc.ru

гладких периодических функций, апеллирующей к ее наилучшему чебышёвскому описанию тригонометрическими многочленами.

1. Пусть $\tilde{C}[0, 2\pi]$ – класс 2π -периодических непрерывных на всей оси R функций с нормой $\|\varphi\| = \max_{t \in [0, 2\pi]} |\varphi(t)|$. Пространство $\tilde{C}[0, 2\pi]$ будем трактовать как пространство $C \equiv C[S]$ непрерывных на единичной окружности S функций, которые остаются непрерывными при 2π -периодическом продолжении на всю ось R . По аналогии, если $k \geq 0$ целое и $\varphi \in \tilde{C}^k[0, 2\pi]$ – пространство 2π -периодических k раз дифференцируемых на R функций, то $C^k \equiv C^k[S]$ – банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых на S функций с нормой (см. [5])

$$p_k(\varphi) \equiv \|\varphi\|_k = \max_{0 \leq \alpha \leq k} \max_{t \in [0, 2\pi]} |\varphi^{(\alpha)}(t)| < \infty, \quad (1)$$

$$\varphi^{(\alpha)}(t) \equiv \frac{d^\alpha \varphi(t)}{dt^\alpha}.$$

Пусть $\mathcal{T}^m \subset \tilde{C}[0, 2\pi]$ – класс тригонометрических полиномов порядка не выше m и

$$e_m(\varphi) = \inf_{\iota_m \in \mathcal{T}^m} \|\varphi - \iota_m\| = \|\varphi - R_m\|, \quad R_m \in \mathcal{T}^m. \quad (2)$$

При $k = 0$ норма (1) переходит в норму в $C \equiv C^0[S]$. И, согласно определению (1):

$$\|\varphi\|_{k'} \leq \|\varphi\|_k, \quad k' \leq k. \quad (3)$$

Пространство C^∞ -гладких 2π -периодических на S функций определим как $C^\infty = \bigcap_{k \geq 0} C^k$, введя на нем топологию проективного предела τ . Базис окрестностей нуля в C^∞ составляют множества $U_{l, \varepsilon} = \{\varphi \in C^\infty : \|\varphi\|_l < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и l – натуральное. Топология τ превращает C^∞ в линейное локально выпуклое пространство, метризуемое с полной трансляционно инвариантной метрикой ρ , порождающей исходную топологию τ (пространство Фреше). Пространство C^∞ обладает абсолютным топологическим базисом $\{\pi_0(t) = 1/2, \pi_{2l-1}(t) = \sin lt, \pi_{2l}(t) = \cos lt, \forall l \geq 1\}$ [6]. Причем понятия ограниченности, фундаментальности и сходимости в $C^\infty \equiv \bigcap_{k \geq 0} C^k$ понимаются так же, как они понимаются в каждом метрическом пространстве C^k из указанной совокупности. При этом замкнутые ограниченные части C^∞ компактны [6], т.е. множество

$$K_{c,G}^\infty \equiv \left\{ f \in C^\infty : \|f\| \leq c = G(0), \right. \\ \left. \|f^{(k)}(t)\| \leq G(k), \forall k > 0 \right\} \quad (4)$$

с фиксированной константой $c > 0$ и заданной числовой последовательностью $\{G(k)\}$ – компакт в C^∞ . Пространство C^∞ плотно в C^k , его замыкание при любом $k \geq 0$ совпадает с пополнением (и метрическим расширением) C^∞ по норме (1); пополнения эти упорядочены по включению и, в силу (3), одно является частью другого, если $k \geq k'$. И, поскольку компакт $K_{c,G}^\infty$ вкладывается в C непрерывно, а запас компактных множеств при ослаблении топологии не уменьшается, $K_{c,G}^\infty$ – компакт и в C .

Наличие абсолютного базиса означает, что в C^∞ допустимо рассмотрение рядов $\sum_{l=0}^\infty c_l \pi_l(t)$ со следующим соглашением о сходимости: ряд абсолютно сходится в топологии τ , задаваемой системой норм $p = \{p_k(\cdot)\}$, т.е. $\sum_{l=0}^\infty p_k(c_l \pi_l) < \infty \quad \forall k \geq 0$, и своей суммой имеет элемент φ из C^∞ . Причем соответствие $\varphi \rightarrow \{c_k\}$, ассоциированное с разложением функции φ по базису $\{\pi_k(t)\}$, порождает на C^∞ линейные непрерывные [7] функционалы $f_k: \langle \varphi, f_k \rangle = c_k(\varphi) \equiv c_k$ и $\langle \pi_l, f_m \rangle = \delta_{lm}$ (δ_{lm} – обычный символ Кронекера). При этом запись $\varphi(t) = \sum_{l=0}^\infty c_l \pi_l(t)$ означает, что суммы $\varphi_n(t) = \sum_{l=0}^n c_l \pi_l(t)$ сходятся к функции $\varphi(t)$ из C^∞ при $n \rightarrow \infty$.

В работе [5] указан новый подход к описанию периодических C^∞ -гладких на S функций, состоящий в указании пары эффективно конструируемых по набору $\{G(k)\}$ монотонных функций $\mu(r)$ и $\vartheta(r)$ вещественного аргумента $r \geq 0$, связанных посредством классического неравенства Джексона (см., например, [3])

$$e_m(f) \leq \frac{\pi \|f^{(k)}\|}{2 m^k}, \quad k \geq 0 \quad (5)$$

с мажорантой $G(k)$ и обладающих на полуоси $r \geq 0$ рядом полезных свойств.

Пусть $\{G(k)\}_{k=0}^\infty$ – последовательность вещественных чисел и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty$. Сопоставим последовательности $\{G(k)\}_{k=0}^\infty$ пару функций числового аргумента $r \in [0, \infty)$:

$$\mu(r) = \begin{cases} G(0) & \text{при } 0 \leq r < 1, \\ \inf_{k \geq 0} \frac{G(k)}{r^k} & \text{при } r \geq 1, \end{cases}$$

$$\vartheta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq r < 1, \\ \max \left\{ k \mid \mu(r) = \frac{G(k)}{r^k} \right\} & \text{при } r \geq 1. \end{cases}$$

При этом знак \inf в определении $\mu(r)$ всегда можно заменить на \min и потому

$$\mu(r) = \min_{k \geq 0} \frac{G(k)}{r^k} = \frac{G[\vartheta(r)]}{r^{\vartheta(r)}} \quad \text{и} \quad e_m(f) \leq \frac{\pi}{2} \mu(m).$$

Теорема 1 (см. [5]). *При $r \geq 1$ функция $\vartheta(r)$ целочисленна, неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с r . Функция $\mu(r)$ строго монотонно убывает, непрерывна и стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. При этом*

$$\mu(r) = ce^{-\int_1^r \frac{\vartheta(t)}{t} dt}, \quad r \geq 1.$$

Следствие 1. *Функция $\mu(r)$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ быстрее любой степени числа r , т.е. для $\forall p \geq 0$ справедливо равенство $\lim_{r \rightarrow \infty} r^p \mu(r) = 0$.*

Упомянутые классы C^∞ -гладких функций не пусты: им принадлежат известные классы Жевре, имеющие мажоранту $G(k) = cA^k k^{\alpha k}$ ($c > 0$, $\alpha \geq 1$, $A > 0$ – константы).

Наличие базиса позволяет любую функцию $\varphi(t)$ из C^∞ отождествить с ее рядом

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{p=0}^{+\infty} c_p \pi_p(t) \equiv \\ &\equiv \frac{c_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} (c_{2p} \cos pt + c_{2p-1} \sin pt). \end{aligned} \tag{6}$$

Ряд (6) сходится в τ -топологии (т.е. равномерно!); сходится он и в смысле гильбертова пространства $L_2[S]$. Ввиду полноты и ортогональности базиса $\{\pi_p(t)\}$, ряд (6) является рядом Фурье своей суммы $\varphi(t)$:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt, \quad \begin{pmatrix} c_{2p} \\ c_{2p-1} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \begin{pmatrix} \cos pt \\ \sin pt \end{pmatrix} dt, \quad \forall p \geq 1.$$

Компакты $K_{c,G}^\infty \subset C^\infty$ задаются (см. (4)) явным указанием мажоранты их k -х производных $G(k)$, зависящей от целого параметра $k \geq 0$. И, поскольку $K_{c,G}^\infty$ вкладывается в пространство равномерно сходящихся рядов (6), возникает вопрос: насколько порядки убывания к нулю коэффициентов c_p разложения элементов φ из $K_{c,G}^\infty$ по базису $\{\pi_p(t)\}$ согласованы с порядком роста мажоранты $G(k)$, задающей компакт $K_{c,G}^\infty$?

Лемма 1. *Если функция φ принадлежит компактному $K_{c,G}^\infty$, то*

$$|c_0| \leq c, \quad |c_p| \leq 2\mu(p), \quad \forall p > 0.$$

Обратно, если коэффициенты разложения функции φ из C^∞ удовлетворяют условиям

$$|c_0| \leq c, \quad |c_p| \leq \frac{1}{8} \frac{\mu(p)}{p^2}, \quad \forall p > 0,$$

то функция φ принадлежит компактному $K_{c,G}^\infty$ (см. (4)).

2. Пусть $X \subset C$ – компакт и $Y = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N)$ – его конечное замкнутое ε -покрытие; по определению ε -покрытие Y имеет кратность k , если любые $(k + 1)$ элементов Y не пересекаются, и существует k элементов, имеющих непустое пересечение (см. [3, 8]). Ранее, говоря о финитизации X , мы несколько неопределенно характеризовали ее, говоря, что элементы X определяются конечным числом параметров. Можно придать точный смысл этому наблюдению, если использовать понятие топологической размерности компакта X , определяемое через кратность замкнутого ε -покрытия X .

Определение (см. [3, 9]). *Компакт X имеет топологическую размерность n ($\dim X = n$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует его замкнутое ε -покрытие кратности, не большей $(n + 1)$, но для достаточно малого ε уже не существует замкнутого ε -покрытия, кратность которого не превосходит n .*

Александровские m -поперечники (проекции и интерполяционный) компакта $X \subset C$ определяются соответственно следующими способами (см. [3, 9]):

$$\alpha_m(X) = \inf_{(X^m, \psi)} \sup_{f \in X \subset C} \|f - \psi(f)\|, \tag{7}$$

$$\beta_m(X) = \inf_{(X^m, \psi)} \sup_{f \in X \subset C} \text{diam}[\psi^{-1} \circ \psi(f)],$$

где \inf берется по всевозможным парам (X^m, ψ) , состоящим из лежащего в C компакта X^m размерности $\leq m$ и непрерывного отображения $\psi: X \rightarrow X^m$. Добавим к этому, что интерполяционный m -поперечник $\beta_m(X)$, но определенный по Урысону (см. [9]), совпадает с нижней гранью тех ε , для которых существует замкнутое ε -покрытие X кратности $m + 1$ (теорема Александра [9]). В предположении, что X – компакт в банаховом пространстве, в работах [2, 8] были установлены следующие неравенства

$$\alpha_m(X) \leq \beta_m(X) \leq 2\alpha_m(X), \quad X \subset C.$$

Оценка сверху для величины $\alpha_m(K_{c,G}^\infty)$ следует из первого определения (7) (см. (2)):

$$\alpha_m(K_{c,G}^\infty) = \inf_{(X^m, \Psi)} \sup_{f \in K_{c,G}^\infty \subset C} \|f - \Psi(f)\| \leq \sup_{f \in K_{c,G}^\infty \subset C} e_m(f) \leq \frac{\pi}{2} \mu(m). \tag{8}$$

Для оценки снизу воспользуемся монотонностью $\alpha_m(K_{c,G}^\infty)$ относительно перехода к компактным X_0 подмножествам [9, с. 16]: если $X_0 \subseteq K_{c,G}^\infty$, то $\alpha_m(X_0) \leq \alpha_m(K_{c,G}^\infty)$.

Выберем в качестве компакта X_0 куб $\mathbb{Q}^{m+1} \subset K_{c,G}^\infty$ топологической размерности $\dim \mathbb{Q}^{m+1} = m + 1$, для которого величина $\alpha_m(\mathbb{Q}^{m+1})$ вычисляется явно. Действительно, пусть $f \in K_{c,G}^\infty$ и $f(t) = \sum_{r=0}^\infty c_r \pi_r(t)$. Тогда $\forall k \geq 0$:

$$\|f^{(k)}\| \leq G(k), \quad \mu(r) = \min_{k \geq 0} \frac{G(k)}{r^k},$$

$$\|\pi_r^{(k)}(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos rt \\ \sin rt \end{pmatrix}^{(k)} \right\| \leq r^k.$$

Введя число $\gamma = 6/\pi^2$ и функции $\phi_r(t) = \gamma \mu(r)(r+1)^{-2} \pi_r(t)$ ($0 \leq r \leq m$), получим:

$$\begin{aligned} \|\phi_r^{(k)}(t)\| &= \gamma \mu(r) \left\| \frac{\pi_r^{(k)}(t)}{(r+1)^2} \right\| \leq \gamma \frac{G(k) \mu(r)}{(r+1)^2} \cdot \frac{r^k}{G(k)} \leq \\ &\leq \gamma \frac{G(k) \mu(r)}{(r+1)^2} \cdot \left(\min_{k \geq 0} \frac{G(k)}{r^k} \right)^{-1} = \\ &= \gamma \frac{G(k) \mu(r)}{(r+1)^2} \cdot (\mu(r))^{-1} \leq \frac{6}{\pi^2} \frac{G(k)}{(r+1)^2} \cdot \frac{\mu(r)}{\mu(r)} \leq \\ &\leq \frac{6}{\pi^2} \frac{G(k)}{(r+1)^2} < G(k), \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Функции $\phi_r(t)$ ($0 \leq r \leq m$) линейно независимы и принадлежат $K_{c,G}^\infty$; их линейная комбинация $\omega(t) = \sum_{r=0}^m \xi_r \phi_r(t)$ при $|\xi_r| \leq 1$ также принадлежит компактному $K_{c,G}^\infty$:

$$\begin{aligned} \|\omega^{(k)}(t)\| &\leq \sum_{r=0}^m \|\xi_r \phi_r^{(k)}(t)\| \leq \frac{6}{\pi^2} \sum_{r=0}^m \frac{G(k)}{(r+1)^2} \leq \\ &\leq \frac{6}{\pi^2} G(k) \sum_{r=0}^\infty \frac{1}{(r+1)^2} < G(k), \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь множество функций:

$$\mathbb{Q}^{m+1} = \left\{ \gamma \sum_{r=0}^m \frac{\mu(r)}{(r+1)^2} \xi_r \pi_r(t) : \gamma \frac{\mu(r)}{(r+1)^2} |\xi_r| \leq 1, r = 0, 1, \dots, m \right\}, \tag{9}$$

где $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$ – произвольные вещественные числа.

Куб

$$\mathbb{I}^{m+1} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m+1} : \gamma \frac{\mu(r)}{(r+1)^2} |\xi_r| \leq 1, r = 0, 1, \dots, m \right\}$$

линейно и гомеоморфно вкладывается в компакт $K_{c,G}^\infty$, и его образом является множество (9), поскольку

$$\gamma \max_{0 \leq r \leq m} \left| \frac{\mu(r)}{(r+1)^2} \xi_r \right| \leq \gamma \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \left| \sum_{r=0}^m \frac{\mu(r)}{(r+1)^2} \xi_r \pi_r(t) \right|.$$

По теореме Лебега–Брауэра (см. [9, с. 17]): $\dim \mathbb{I}^{m+1} = m + 1$. В силу изометрического вложения \mathbb{I}^{m+1} в куб \mathbb{Q}^{m+1} , получаем

$$\alpha_m(\mathbb{Q}^{m+1}) = \alpha_m(\mathbb{I}^{m+1}) \geq \frac{1}{2} \beta_m(\mathbb{I}^{m+1}) = \gamma \frac{\mu(m)}{(m+1)^2},$$

поскольку урысоновский m -поперечник куба \mathbb{I}^{m+1} равен длине его ребра (см. [10], с. 11).

Теорема 2. Верны следующие оценки александровского m -поперечника $\alpha_m(K_{c,G}^\infty)$ компакта $K_{c,G}^\infty$ периодических C^∞ -гладких функций, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных на единичной окружности S функций:

$$\frac{6}{\pi^2} \frac{\mu(m)}{(m+1)^2} \leq \alpha_m(K_{c,G}^\infty) \leq \frac{\pi}{2} \mu(m),$$

$$\mu(m) = c e^{-\int_1^m \frac{\vartheta(t)}{t} dt}, \quad m \geq 1 - \text{целое}.$$

Следствие 2. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{G(k)}/k^\alpha < \infty$, где $\alpha \geq 1$. Это условие выполнено для классов Жевре: $G(k) = c A^k k^{\alpha k}$ ($c > 0, A > 0$). Тогда

$$\frac{6}{\pi^2 (m+1)^2} e^{-\varrho \sqrt[m]{m}} \leq \alpha_m(K_{c,G}^\infty) \leq c \frac{\pi}{2} \beta e^{-\varrho \sqrt[m]{m}},$$

$$m \geq 1 - \text{целое},$$

здесь $\varrho = \alpha e^{-1/\sqrt[m]{A}}$ и $\beta = \exp(\alpha e \sqrt[m]{A}/2)$ – константы.

Полученный в работе результат возник как реакция на реальную потребность вычислительной гидродинамики [4, 11, 12].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен проф. В.С. Белоносову, тщательно просмотревшему статью и сделавшему ряд ценных уточнений.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Babenko K.I. // Computer methods in applied and engineering. 1976. V. 7. P. 47–73, 135–152. North-Holland Publishing Company.
2. Александров П.С. // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 140–150.
3. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.; Ижевск: РХД, 2002. 847 с.
4. Бельх В.Н. // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 4. С. 553–566.
<https://doi.org/10.31857/S0044466920040031>
5. Бельх В.Н. // СМЖ. 2005. Т. 46. № 3. С. 483–499.
6. Митягин Б.С. // УМН. 1961. Т. 16 (4). С. 63–132.
7. Newns W.F. // Phil. Trans. Roy. Soc. London. A. 1953. V. 245. P. 429–468.
8. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
9. Анучина Н.Н., Бабенко К.И., Годунов С.К. и др. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1977. 295 с.
10. Бабенко К.И. Об одном подходе к оценке качества вычислительных алгоритмов. Препринт № 7. Москва: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1974. 68 с.
11. Бельх В.Н. // ДАН. 2017. Т. 473. № 6. С. 650–654.
<https://doi.org/10.7868/S0869565217120052>
12. Бельх В.Н. // Прикл. мех. и техн. физ. 2019. Т. 60. № 2. С. 226–237.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20190219>

THE ESTIMATES OF ALEXANDROV'S n -WIDTH OF A COMPACT SET FOR SOME INFINITELY DIFFERENTIABLE PERIODIC FUNCTIONS

V. N. Belykh^a

^a Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

In this paper, we obtain two-way estimates of the Alexandrov's n -width of a compact set of infinitely smooth periodic functions that are bounded embedded in the space of continuous functions on the unit circle.

Keywords: compact set, n -width, infinitely smooth functions, Gevrey's class

УДК 517.958

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

© 2023 г. В. Г. Звягин^{1,*}, М. В. Турбин^{1,**}

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным

Поступило 14.11.2022 г.

После доработки 25.11.2022 г.

Принято к публикации 11.12.2022 г.

В работе исследуется разрешимость начально-краевой задачи для модели движения жидкости Кельвина–Фойгта с переменной плотностью. Сначала при помощи преобразования Лапласа из реологического соотношения для модели движения жидкости Кельвина–Фойгта и уравнения движения жидкости в форме Коши выводится система уравнений, описывающая движение модели Кельвина–Фойгта с переменной плотностью. Для полученной системы уравнений ставится начально-краевая задача, дается определение ее слабого решения и доказывается его существование. Доказательство проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики. А именно, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную, и на основе одного варианта теоремы Лере-Шаудера доказывается ее разрешимость. После чего на основе априорных оценок доказывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи.

Ключевые слова: гидродинамика, жидкость с переменной плотностью, модель Кельвина–Фойгта, слабое решение, теорема существования

DOI: 10.31857/S2686954322600665, **EDN:** CRWFMS

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание движения жидкости всегда являлось источником большого числа математических задач. На протяжении долгого времени исследовались задачи для жидкости с постоянной плотностью. При этом в приложениях возникают задачи для несжимаемых жидкостей с переменной плотностью, которые в литературе называют также моделями несжимаемой неоднородной жидкости. Первые результаты в этом направлении принадлежат А.В. Кажихову [1], который доказал существование слабых решений несжимаемой неоднородной системы Навье–Стокса. Для этой же системы О.А. Ладыженской и В.А. Солонниковым в работе [2] доказано существование глобальных сильных решений в двумерном случае и локальных сильных решений (или глобальных, но для малых данных задачи) в трехмерном случае. Обзор результатов для несжимаемой неоднородной системы Навье–Стокса приведен в монографии [3].

родной системы Навье–Стокса приведен в монографии [3].

Еще с середины 19-го века известно достаточно большое число сред, которые не удовлетворяют ньютоновскому реологическому соотношению. Именно такие среды – водные полимерные растворы и описываются моделью Кельвина–Фойгта и различными ее обобщениями [4]. Исследование разрешимости различных задач для этих моделей в однородном случае было начато в работах А.П. Осколкова [5, 6]. Различные задачи для моделей Кельвина–Фойгта (отметим, что в англоязычной литературе они называются также моделями Навье–Стокса–Фойгта) и их обобщений активно изучаются вплоть до наших дней [4, 7–10]. Также в последнее время активно исследуется модель неоднородной несжимаемой жидкости Кельвина–Фойгта как с точки зрения разрешимости [11, 12], так и с точки зрения задач оптимального управления с обратной связью [13, 14].

В данной работе исследуется разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для несжимаемой модели Кельвина–Фойгта с переменной плотностью.

¹ Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

*E-mail: zvg_vsu@mail.ru

**E-mail: mrmike@mail.ru

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение несжимаемой жидкости с переменной плотностью в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ на промежутке времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$ описывается следующей системой уравнений:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \text{Div } \sigma + \nabla p = \rho f, \quad (1)$$

$$(x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T],$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \text{div } v = 0, \quad (2)$$

$$(x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T].$$

Здесь v – вектор скорости движения жидкости, ρ – плотность жидкости, p – давление, σ – девиатор тензора напряжений, а f – плотность внешних сил.

Система (1), (2) описывает движение всех видов жидкости, но количество неизвестных в ней больше числа уравнений. Чтобы замкнуть эту систему, в нее добавляют реологическое соотношение, которое и определяет тип рассматриваемой жидкости. В работе рассматривается модель движения жидкости Кельвина–Фойгта порядка L , $L \in \mathbb{N}$, реологическое соотношение которой имеет вид:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^L \lambda_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \right) \sigma = 2 \left(v + \sum_{i=1}^{L+1} \kappa_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \right) \mathcal{E}, \quad (3)$$

$$\lambda_L > 0, \quad \kappa_{L+1} > 0.$$

Здесь \mathcal{E} – тензор скоростей деформаций, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(v) = 1/2(\nabla v + (\nabla v)^T)$. Исходя из физического смысла задачи предполагается, что корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L$ многочлена $Q(p) = 1 + \sum_{i=1}^L \lambda_i p^i$, $p \in \mathbb{R}$ вещественны, отрицательны и различны. Тогда на основе преобразования Лапласа аналогично работам [4, 6] σ выражается из (3) следующим образом:

$$\sigma(x, t) = 2\mu_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x, t) + 2\mu_1 \mathcal{E}(x, t) + 2 \int_0^t \sum_{k=1}^L \beta_k e^{\alpha_k(t-s)} \mathcal{E}(x, s) ds + \sigma_0(x, t), \quad (4)$$

где $\mu_2 = \kappa_{L+1}/\lambda_L > 0$, $\mu_1 = \kappa_L/\lambda_L - \kappa_{L+1}\lambda_{L-1}/\lambda_L^2$, $\beta_k = C(\alpha_k)/Q'(\alpha_k)$, $k = \overline{1, L}$, многочлен $C(p)$ определяется по формуле $C(p) = \sum_{i=1}^{L-1} (\kappa_i - \mu_2 \lambda_{i-1} - \mu_1 \lambda_i) p^i - \mu_1 + v$.

Функция σ_0 представляет собой выражение от начальных условий

$$\frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i}(0), \quad i = \overline{0, L-1}, \quad \frac{\partial^j \mathcal{E}}{\partial t^j}(0), \quad j = \overline{0, L}. \quad (5)$$

Исходя из физического смысла задачи, эти начальные условия не могут быть произвольными и должны быть согласованы (заданным скоростям движения жидкости соответствуют определенные напряжения и наоборот). Подробнее см., например, [4].

Для простоты будем предполагать, что начальные условия (5) выбраны таким образом, чтобы $\sigma_0 \equiv 0$. Тогда, учитывая это и подставляя (4) в систему уравнений (1)–(2), получим систему

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1 \Delta v - \mu_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \int_0^t \sum_{k=1}^L \beta_k e^{\alpha_k(t-s)} \Delta v(s) ds + \nabla p = \rho f; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \text{div } v = 0. \quad (7)$$

Рассматриваемая система дополняется начальными и граничным условиями:

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad \rho|_{t=0}(x) = \rho_0(x), \quad (8)$$

$$0 < m \leq \rho_0(x) \leq M, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0,$$

где m, M – некоторые константы.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем обозначения, необходимые для того, чтобы сформулировать определения слабого решения начально-краевой задачи (6)–(8).

Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ обозначим пространство функций, определенных на Ω , принимающих значения в \mathbb{R}^n класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω . Пусть $\mathcal{V} = \{v : v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \text{div } v = 0\}$. Определим пространства V^0 и V^1 как пополнение \mathcal{V} по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно. Положим $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Обозначим через $\pi : L_2(\Omega)^n \rightarrow V^0$ проектор Лере и рассмотрим в \mathcal{V} оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения A совпадает с V^2 . В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов соб-

ственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0 . Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ – собственные значения оператора A . Обозначим через E_∞ множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j , и определим пространство V^α , $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{1/2}$.

Также введем пространство, в котором будет исследована разрешимость изучаемой задачи. Для скорости v это пространство $W_1 = \{u : u \in C([0, T], V^1), u' \in L_2(0, T; V^1)\}$. Для плотности ρ введем пространство $E_1 = \{\varrho : \varrho \in L_\infty(Q_T), \varrho' \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$.

Будем предполагать, что $a \in V^1$, $\rho_0 \in L_\infty(\Omega)$, а $f \in L_2(0, T; V^0)$.

Определение 1. Пару функций $(\rho, v) \in E_1 \times W_1$ будем называть слабым решением начально-краевой задачи (6)–(8), если для любого $\varphi \in V^1$ и при почти всех $t \in [0, T]$ она удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho v' \varphi dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \varphi_j dx + \\ & + \mu_1 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \mu_2 \int_{\Omega} \nabla v' : \nabla \varphi dx + \\ & + \int_0^t \sum_{k=1}^L \beta_k e^{\alpha_k(t-s)} \int_{\Omega} \nabla v(s) : \nabla \varphi dx ds = \int_{\Omega} \rho f \varphi dx, \end{aligned} \quad (9)$$

для любого $\psi \in H_0^1(\Omega)$ и при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяет равенству

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \rho v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0, \quad (10)$$

а также начальным условиям:

$$v(0) = a, \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (11)$$

Замечание 1. В силу непрерывного вложения $E_1 \subset C_w([0, T], L_\infty(\Omega))$ (см., например, [15], Глава 3, лемма 1.4) начальное условие для функции ρ имеет смысл.

Основным результатом статьи является следующая теорема

Теорема 1. Существует хотя бы одно слабое решение задачи (6)–(8).

Для доказательства теоремы используется аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики (см. подробнее [16]). А именно, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную, и на основе одного вари-

анта теоремы Лере-Шаудера устанавливается ее разрешимость. После чего на основе априорных оценок решений показывается, что из последовательности решений этой задачи можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся слабо к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00103, <https://rscf.ru/project/22-11-00103/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кажихов А.В. Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 5. С. 1008–1010.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 52–109.
3. Lions P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 1. Incompressible Models. Oxford: Clarendon Press, 1996. 256 p.
4. Звягин В.Г., Турбин М.В. Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // СМФН. 2009. Т. 31. С. 3–144.
5. Осколков А.П. К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина–Фойгта // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 191–202.
6. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
7. Kalantarov V.K., Levant B., Titi E.S. Gevrey Regularity for the Attractor of the 3D Navier-Stokes-Voigt Equations // Journal of Nonlinear Science. 2009. V. 19. P. 133–152.
8. Zvyagin A. Solvability of the Non-Linearly Viscous Polymer Solutions Motion Model // Polymers. 2022. V. 14. № 6. Article 1264.
9. Amrouche C., Berselli L.C., Lewandowski R., Nguyen D.D. Turbulent flows as generalized Kelvin–Voigt materials: Modeling and analysis // Nonlinear Analysis. 2020. V. 196. Article 111790.
10. Ustiuzhaninova A., Turbin M. Feedback Control Problem for Modified Kelvin–Voigt Model // Journal of Dynamical and Control Systems. 2022. V. 28. P. 465–480.
11. Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Generalized Kelvin–Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Communications in Mathematical Sciences. 2019. V. 17. № 7. P. 1915–1948.
12. Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. The classical Kelvin–Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence,

- uniqueness and regularity // *Nonlinearity*. 2021. V. 34. № 5. P. 3083–3111.
13. Zvyagin V., Turbin M. Optimal feedback control problem for inhomogeneous Voigt fluid motion model // *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. 2021. V. 23. № 4. Article 4.
14. Звягин В.Г., Турбин М.В. Задача оптимального управления с обратной связью для модели Фойгта с переменной плотностью // *Известия вузов. Математика*. 2020. Т. 4. С. 93–98.
15. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
16. Звягин В.Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // *СМФН*. 2012. Т. 46. С. 92–119.

SOLVABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE KELVIN–VOIGT FLUID MOTION MODEL WITH VARIABLE DENSITY

V. G. Zvyagin^a and M. V. Turbin^a

^a *Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin

Summary. In the paper the solvability of the initial-boundary value problem for the Kelvin–Voigt fluid motion model with variable density is investigated. First, using the Laplace transform, from the rheological relation for the Kelvin–Voigt fluid motion model and the fluid motion equation in the Cauchy form, a system of equations that describes the motion of the Kelvin–Voigt model with variable density is obtained. For the resulting system of equations, an initial-boundary value problem is posed, a definition of its weak solution is given, and its existence is proved. The proof is carried out on the basis of an approximation-topological approach to the study of fluid dynamic problems. Namely, the problem approximating the original one is considered and its solvability is proved on the basis of one version of the Leray-Schauder theorem. Then, on the basis of a priori estimates, it is proved that from the sequence of solutions of the approximation problem it is possible to extract a subsequence that weakly converges to the solutions of the original problem.

Keywords: Fluid dynamics, fluid with variable density, Kelvin–Voigt model, weak solution, existence theorem

УДК 519.63

БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА В СЛУЧАЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. М. Д. Брагин^{1,*}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 01.11.2022 г.

После доработки 16.11.2022 г.

Принято к публикации 20.12.2022 г.

Впервые бикомпактные схемы обобщаются на нестационарные уравнения Навье–Стокса для сжимаемой теплопроводной жидкости. Предлагаемые схемы обладают аппроксимацией четвертого порядка по пространству и второго порядка по времени, абсолютно устойчивы (в приближении замороженных коэффициентов), консервативны, экономичны. Одна из новых схем испытывается на нескольких двумерных тестовых задачах. Показывается, что при сгущении сетки она сходится с повышенным третьим порядком. Проводится сравнение со схемой WENO5-MR. Демонстрируется превосходство выбранной бикомпактной схемы в разрешении вихрей и ударных волн, а также их взаимодействия.

Ключевые слова: вязкая жидкость, уравнения Навье–Стокса, высокоточные схемы, компактные схемы, бикомпактные схемы

DOI: 10.31857/S2686954322600677, EDN: CRZYJT

1. Высокоскоростные течения вязкой сжимаемой жидкости характерны тем, что в них могут сосуществовать явления турбулентности и ударных волн (УВ). Численное моделирование таких течений сопряжено с определенной проблемой. С одной стороны, схема должна обладать как можно меньшей численной диссипацией (оптимально – нулевой), чтобы как можно качественнее воспроизводить динамику вихрей в турбулентном потоке. С другой стороны, схема должна обладать достаточно большой численной диссипацией, чтобы устойчиво и монотонно (без ложных осцилляций) разрешать фронты УВ. Очевидно, эти требования противоречат друг другу. Отыскание наилучшего баланса между ними является одной из важнейших задач при разработке новых или улучшении старых численных схем. В этом смысле, хорошими диссипативными (и дисперсионными) свойствами обладают компактные разностные схемы [1], схемы разрывного метода Галеркина (РМГ) [2], схема КАБАРЕ [3], балансно-характеристические разностные схемы [4].

В работах [5, 6] был предложен новый класс схем, называемых *бикомпактными*. Определяю-

щим элементом этих схем является высокоточная компактная аппроксимация пространственных производных на шаблоне, который включает в себя не более двух целых узлов по каждому направлению (т.е., помещается в одну ячейку сетки). По сравнению с классическими компактными схемами, бикомпактные схемы имеют лучшее спектральное разрешение [7]. По сравнению со схемами РМГ, бикомпактные схемы обходятся меньшим числом степеней свободы на ячейку, а значит, экономичнее и по объему вычислений (элементарных арифметических операций), и по объему требуемой памяти. Таким образом, бикомпактные схемы сочетают и улучшают преимущества компактных схем и схем РМГ.

Бикомпактные схемы были плохо развиты для уравнений параболического типа, что являлось основным препятствием на пути к их практическому применению для численного моделирования течений вязкой жидкости. Данная проблема была решена лишь частично: в [8] для уравнений Навье–Стокса в случае несжимаемой жидкости, в [9] для квазилинейного уравнения теплопроводности.

Цель настоящей работы – построение бикомпактных схем для наиболее общих уравнений Навье–Стокса (в случае сжимаемой жидкости) на основе синтеза результатов из [8–10].

¹ Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: michael@bragin.cc

2. Нестационарные течения ньютоновской теплопроводной сжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})}{\partial x_i} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i \mathbf{v} - \mathbf{P}_i \\ \rho v_i e - \mathbf{v}^T \mathbf{P}_i + q_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ P_{3i} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} v^2,$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right),$$

$$q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Поясним обозначения: x_i – пространственные декартовы координаты ($i = 1, 3$), t – время, ρ – плотность жидкости, \mathbf{v} – скорость, p – давление, T – температура, ε – удельная внутренняя энергия, e – удельная полная энергия, P_{ij} – компоненты тензора напряжений, μ – динамическая вязкость, q_i – компоненты вектора потока тепла, κ – коэффициент теплопроводности. Искомой функцией в системе (1) является вектор консервативных переменных $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$).

В качестве конкретной модели сжимаемой жидкости рассмотрим совершенный газ:

$$p = \frac{\rho T}{\gamma} = (\gamma - 1) \rho \varepsilon.$$

Число γ – показатель адиабаты. Для динамической вязкости примем закон Сазерленда, а коэффициент теплопроводности зададим через критерий подобия Прандтля:

$$\mu = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1 + C}{T + C} T^{3/2}, \quad \kappa = \frac{\mu}{(\gamma - 1) \text{Pr}},$$

где Re – число Рейнольдса, C – параметр закона Сазерленда, Pr – число Прандтля. Далее (в разд. 4) мы полагаем $\gamma = 1.4$, $C = 110.4/288$, $\text{Pr} = 0.72$ (число Re варьируется).

Все уравнения записаны в безразмерной форме. Размерные масштабы l_0 и ρ_0 длины и плотности могут быть любыми; размерным масштабом скорости служит скорость звука $c_0 = \sqrt{\gamma R T_0}$, где R – это универсальная газовая постоянная, отнесенная к молярной массе газа, а T_0 – это параметр температу-

ры в размерном законе Сазерленда. Размерными масштабами давления, температуры и вязкости являются соответственно $\rho_0 c_0^2$, T_0 и $\rho_0 c_0 l_0$.

3. Опишем методику построения бикомпактных схем для уравнений Навье–Стокса (1). Пусть система (1) решается в открытом прямоугольном параллелепипеде Π , ребра которого направлены параллельно осям координат. Введем в замкнутой области $\bar{\Pi} = \Pi \cup \partial \Pi$ декартову сетку $\bar{\Omega}_h$, где $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ – пространственные шаги.

Применим метод расщепления по физическим процессам Марчука–Стрэнга. Разобьем систему (1) на две подсистемы:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{G}_i(\mathbf{U})}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{H}_i(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где $\mathbf{G}_i + \mathbf{H}_i = \mathbf{F}_i$. Векторы \mathbf{G}_i включают в себя члены, отвечающие за конвективный перенос и силы давления, т.е. (2) представляет собой систему уравнений Эйлера. Векторы \mathbf{H}_i включают в себя члены, отвечающие за диссипативные процессы – вязкость и теплопроводность.

Для аппроксимации системы (2) мы применяем метод локально-одномерного расщепления и метод глобального потокового расщепления Лакса–Фридрихса–Русанова. Разобьем систему (2) на шесть подсистем вида

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{G}_{i,\pm}(\mathbf{U})}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где $\mathbf{G}_{i,\pm}(\mathbf{U}) = 0.5 \mathbf{G}_i(\mathbf{U}) \pm s_i^* \mathbf{U}$. Постоянные коэффициенты $s_i^* > 0$ подбираются так, чтобы матрицы Якоби векторов $\mathbf{G}_{i,\pm}$ были определены положительно/отрицательно на некотором множестве значений \mathbf{U} . Для решения каждой одномерной системы (4) мы используем одномерные неявно-явные бикомпактные схемы из [10]. Решение осуществляется вдоль координатных линий x_i , проходящих через узлы сетки $\bar{\Omega}_h$. Из всех схем, рассмотренных в [10], остановимся на схеме с погрешностью аппроксимации $O(h^4 + \tau^3)$, где h – максимальный пространственный шаг, τ – временной шаг. Обозначим оператор послыного перехода этой одномерной бикомпактной схемы как $S_{i,\pm}^E(\tau)$. Введем операторы $S_i^E = S_{i,-}^E S_{i,+}^E$. Пользуясь конструкцией расщепления Марчука–Стрэнга, построим оператор послыного перехода локально-одномерной бикомпактной схемы для многомерной системы (2):

$$S^E(\tau) = S_1^E(0.5\tau) S_2^E(0.5\tau) S_3^E(\tau) S_2^E(0.5\tau) S_1^E(0.5\tau).$$

Для аппроксимации системы (3) мы применяем и, вместе с тем, обобщаем метод, впервые предложенный в [11] и развитый в [12, 13] (для скалярных параболических уравнений). Прибавим к обеим частям (3) члены с постоянными диссипативными коэффициентами $\nu_0, \lambda_0 > 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{H}_i(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) + \mathbf{D}_0 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \right)}_{\mathcal{F}_1} = \underbrace{\mathbf{D}_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_i^2}}_{\mathcal{F}_2}, \quad (5)$$

где матрица $\mathbf{D}_0 = \text{diag}(0, \nu_0, \nu_0, \nu_0, \lambda_0)$. Для решения системы (5) мы используем неявно-явные бикомпактные схемы из [9]: член \mathcal{F}_1 аппроксимируется явно, а член \mathcal{F}_2 – неявно. Разностные уравнения этих схем формально являются векторными, но решаются покомпонентно, так как матрица \mathbf{D}_0 диагональная. Отметим, что первое уравнение системы (5) имеет вид $\partial \rho / \partial t = 0$, следовательно, в рамках (5) плотность по сути не является искомой функцией. На разностном уровне это выражается в том, что сеточная функция плотности переносится со слоя на слой без изменений. Из всех бикомпактных схем, предложенных в [9], мы выбираем неявно-явную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$. Обозначим оператор послойного перехода этой схемы как $S^D(\tau)$.

Итак, расщепленная бикомпактная схема для исходной системы (1) имеет вид:

$$\mathbf{U}^{n+1} = S^D(0.5\tau) S^E(\tau) S^D(0.5\tau) \mathbf{U}^n, \quad (6)$$

где \mathbf{U}^n – численное решение на временном слое t_n . Уточним, что операторы S^E и S^D работают с двумя разными представлениями численного решения; переход между ними разобран в [8].

Схема (6) имеет аппроксимацию $O(h^4 + \tau^2)$, устойчива при любом соотношении между h и τ , консервативна. Эта схема реализуется без ньютоновских итераций и без обращений больших матриц (размера $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, где \mathcal{N} – число узлов $\bar{\Omega}_h$), несмотря на то, что формально она является неявной. Этого удается достичь за счет неявно-явной (линейно-неявной) аппроксимации по времени, а также локальной разрешимости уравнений бикомпактных схем.

Наконец, приведем формулы для вычисления коэффициентов (параметров) s_i^*, ν_0, λ_0 :

$$s_i^* = (0.5 + \delta) \max_{\bar{\Omega}_h} (|v_i| + c) \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^n},$$

$$(c = \sqrt{T} - \text{скорость звука}),$$

$$\nu_0 = \frac{4}{3} \nu^*, \quad \lambda_0 = \frac{\gamma}{\text{Pr}} \nu^*,$$

$$\nu^* = (0.5 + \delta) \max_{\bar{\Omega}_h} \frac{\mu}{\rho} \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^n},$$

где $\delta > 0$ – задаваемый коэффициент запаса. Эти формулы применяются перед каждым переходом со слоя на слой. В пределах одного перехода со слоя на слой мы смотрим на коэффициенты s_i^*, ν_0, λ_0 как на константы.

4. Испытаем бикомпактную схему (6) на ряде двумерных тестовых задач.

4.1. Прежде всего продемонстрируем сходимость схемы на сгущающихся сетках. Задача об изоэнтропическом вихре (см. [14]) представляется весьма подходящим тестом: в ней течение свободно от УВ и непостоянно по плотности, скорости и давлению. Расчетная область $\Pi = (-5, 5)^2$. Начальное распределение параметров газа (при $t = 0$):

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} - x_2 f, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + x_1 f, \quad T = 1 - \frac{\gamma-1}{2} f^2,$$

$$p = \frac{\rho^\gamma}{\gamma}, \quad f = \frac{2.5}{\pi \sqrt{\gamma}} \exp \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{2}.$$

Граничные условия периодические. Определим временной промежуток $\mathcal{T} = 10\sqrt{\gamma}$.

Расчеты проведем на сетках с шагами $h_1 = h_2 = 10/N$, $\tau = \mathcal{T}/(rN)$ при $N = 25, 50, \dots, 400$ и $r = 2, 4, 8$ (соответствующие числа Куранта $\kappa \approx 1.46, 0.73, 0.37$). Положим параметр $\delta = 0.5$. Рассмотрим два случая: $\text{Re} = 10, 100$. Небольшие значения числа Рейнольдса (особенно $\text{Re} = 10$) позволят проявиться погрешностям схемы расщепления, а также бикомпактной схемы для подсистемы (3). Поскольку точное решение данной задачи в случае неидеальной жидкости неизвестно, вместо E_C , нормы C невязки, мы будем смотреть на D_C , норму C разности между решениями на соседних сетках (по методу Рунге).

Полученные зависимости $D_C(N)$ при $t = \mathcal{T}$ приведены на рис. 1. Любопытно, что бикомпактная схема сходится с третьим порядком, несмотря на расщепление по физическим процессам. Похожий результат был получен в [8] для расщепленной бикомпактной схемы численного решения уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости.

4.2. Перейдем к задаче о вязком течении в ударной трубе (см. [15]). Динамическая вязкость в этом тесте полагается постоянной: $\mu = \text{Re}^{-1}$, $\text{Re} = 200$. Расчетная область $\Pi = (0, 1)^2$. В начальный момент времени газ покоится и разделен вертикально на две равные по объему части; в правой $\rho = 1.2$, $p = 1.2/\gamma$, в левой ρ и p в 100 раз

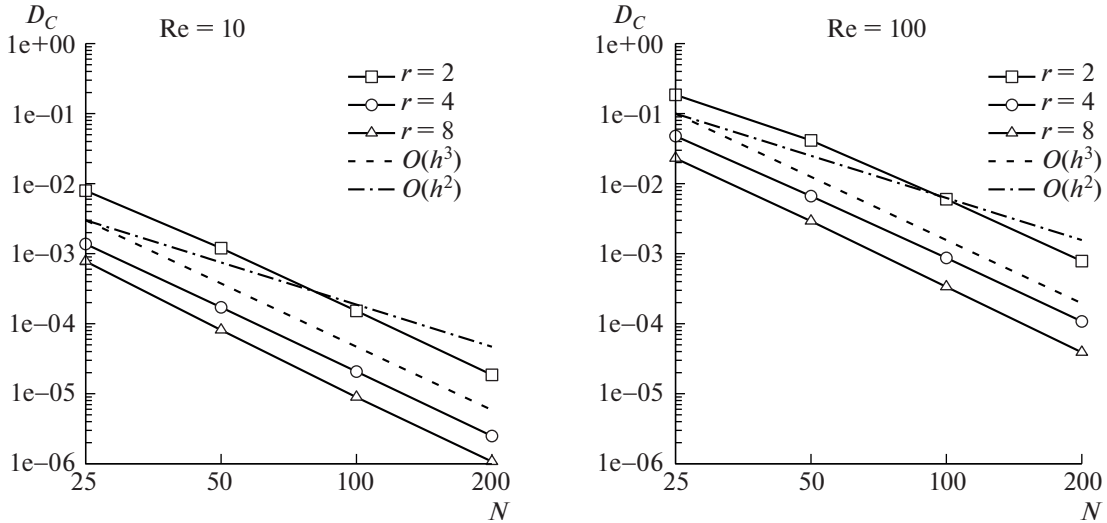


Рис. 1. Сеточная сходимость в задаче о плоском вихре.

больше. На дП ставятся условия прилипания и адиабатической стенки. Распад разрыва порождает УВ, бегущую направо; вдоль нижней и верхней стенок формируются погранслои. Эта УВ отражается от правой стенки и затем взаимодействует с погранслоями. Интерес в данной задаче представляет разрешение вихрей, возникающих в результате этого взаимодействия, и УВ-структур.

Вычисления выполним на сетке 500×500 ячеек при числе $\kappa = 0.6$ и параметре $\delta = 1$. Из-за больших амплитуд у начального разрыва и отраженной УВ, в операторе S^E необходима монотонизация.

Мы вводим ее по методу из [16]. Величина параметра монотонизации $C_1 = 5$.

При дискретизации начальных или граничных условий, имеющих сильные разрывы, мы заменяем функцию Хэвисайда $\theta(x)$ (элементарный скачок) на гладкую функцию

$$j_\sigma(x) = \begin{cases} 0.5[1 + \sin(0.5\pi x/\sigma)] & \text{при } |x| < \sigma, \\ \theta(x) & \text{при } |x| > \sigma. \end{cases}$$

Параметр $\sigma = 2h$, т.е. разрывы во входных данных размазываются на 4 ячейки.

Полученное поле плотности при $t = 1$ изображено на рис. 2. Сравним бикомпактную схему со схемой WENO5-MR из [17] по положению тройной точки и высоте/наклону крупнейшего вихря. Для бикомпактной схемы это (0.589, 0.138), 0.157, 75°. Для схемы WENO5-MR это (0.576, 0.113), 0.165, 55°. Эталонные данные из [18] – это (0.580, 0.138), 0.166, 74.5°. Очевидно, бикомпактная схема хуже предсказывает высоту вихря, но лучше – наклон вихря и положение тройной точки. Добавим, что бикомпактная схема значительно меньше “размазывает” меньший вихрь с центром в точке (0.68, 0.04) и фронты УВ.

4.3. Рассмотрим задачу о взаимодействии слоя смещения и косою УВ (см. [19]). Динамическая вязкость меняется по закону Сазерленда, как в тесте 4.1. Число $Re = 500$. Расчетная область $\Pi = (0, 200) \times (-20, 20)$. Начальное распределение параметров газа:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2.5 + 0.52thx_2, & v_2 &= 0, \\ \rho &= 0.3626 + 1.2748\theta(x_2), & p &= 0.3327. \end{aligned}$$

На нижней границе ставятся условия непротекания и адиабатической стенки. На левой границе

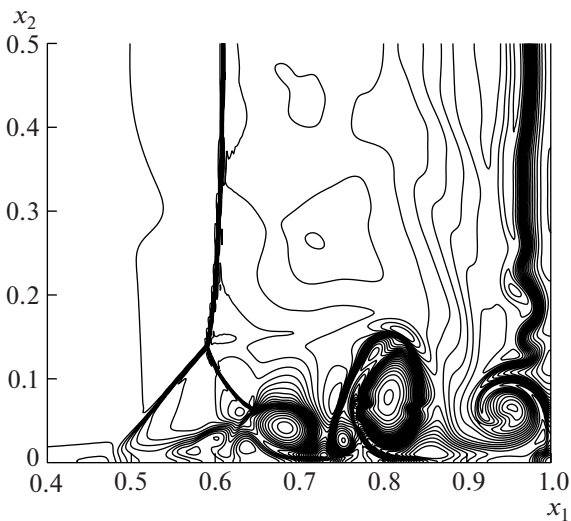


Рис. 2. Поле плотности газа в задаче о вязком течении в ударной трубе, момент времени $t = 1$. Изолинии построены для значений от 20 до 120 с шагом 100/29 (30 шт.). Решение получено на сетке 500×500 ячеек.

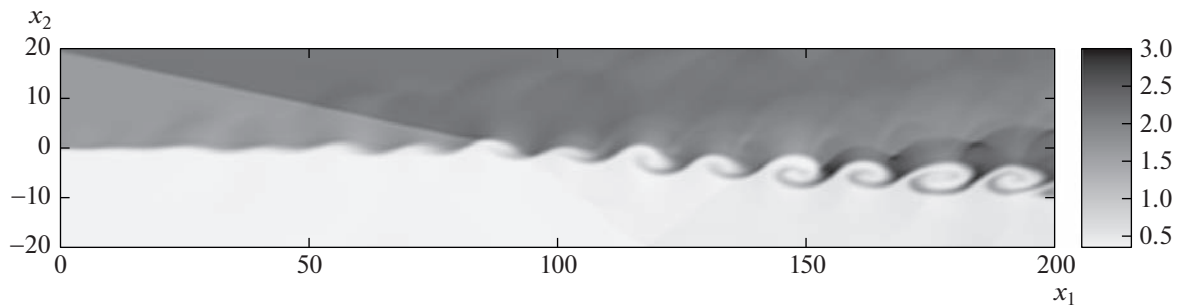


Рис. 3. Поле плотности газа в задаче о взаимодействии слоя смешения и косой УВ, момент времени $t = 120$. Решение получено на сетке 500×100 ячеек.

задается периодическое во времени возмущение скорости:

$$v_2 = 0.05 \exp(-0.1x_2^2)(\cos \omega t - \sin 2\omega t),$$

$$\omega = 2\pi \times 2.68/30.$$

В левом верхнем углу Π (точечно) выставляются параметры газа за косой УВ:

$$v_1 = 2.9709, \quad v_2 = -0.1367,$$

$$p = 2.1101, \quad \rho = 0.4754.$$

На остальных границах ставятся условия свободного выхода. Течение газа развивается таким образом. Из левого верхнего угла Π распространяется косая УВ. Она проходит (с преломлением) через слой сдвига и затем отражается от нижней границы. Отраженная УВ тоже проходит через слой сдвига. Вместе с тем возмущение вертикальной компоненты скорости в набегающем потоке нарушает устойчивость слоя сдвига и порождает вихревую дорожку, проходящую через систему УВ.

Расчет проведем на сетке 500×100 ячеек при числе $\kappa = 0.8$ и параметре $\delta = 1$.

На рис. 3 представлен график плотности при $t = 120$. Видно, что бикомпактная схема хорошо разрешает вихревую дорожку, несмотря на относительную грубость сетки. По сравнению со схемой WENO5-MR из [17], бикомпактная схема намного меньше “размазывает” спиралевидные уплотнения в центрах вихрей (см. последние четыре вихря). Отметим, что малость амплитуд УВ позволяет вести счет по бикомпактной схеме без монотонизации. Однако это не приводит к заполнению областей течения нефизическими осцилляциями.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00198).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толстых А.И. Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015, 350 с.
2. De La Llave Plata M., Couaillier V., Pape M.-C. // Comput. Fluids. 2018. V. 176. P. 320–337.
3. Faranosov G.A., Goloviznin V.M., Karabasov S.A., Kondakov V.G., Kopiev V.F., Zaitsev M.A. // Comput. Fluids. 2013. V. 88. P. 165–179.
4. Головизнин В.М., Четверушкин Б.Н. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 20–29.
5. Rogov B.V., Михайловская М.Н. // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 1. С. 99–116.
6. Михайловская М.Н., Rogov B.V. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 4. С. 672–695.
7. Rogov B.V. // Appl. Numer. Math. 2019. V. 139. P. 136–155.
8. Брагин М.Д., Rogov B.V. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1759–1778.
9. Bragin M.D. // Appl. Numer. Math. 2022. V. 174. P. 112–126.
10. Брагин М.Д. // Матем. моделирование. 2022. Т. 34. № 6. С. 3–21.
11. Douglas J., Dupont T.F. // Numerical Solution of Partial Differential Equations II / ed. by B. Hubbard. Academic Press, 1971. P. 133–214.
12. Duchemin L., Eggers J. // J. Comput. Phys. 2014. V. 263. P. 37–52.
13. Wang H., Zhang Q., Wang S., Shu C.-W. // Sci. China Math. 2020. V. 63. P. 183–204.
14. Shu C.-W. // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations / ed. by A. Quarteroni, V. 1697 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1998. P. 325–432.
15. Daru V., Tenaud C. // Comput. Fluids. 2001. V. 30. P. 89–113.
16. Bragin M.D., Rogov B.V. // Appl. Numer. Math. 2020. V. 151. P. 229–245.
17. Wang Z., Zhu J., Tian L., Zhao N. // J. Comput. Phys. 2021. V. 429. P. 110006.
18. Sjögren B., Yee H.C. // J. Comput. Phys. 2003. V. 185. P. 1–26.
19. Yee H.C., Sandham N.D., Djomehri M.J. // J. Comput. Phys. 1999. V. 150. P. 199–238.

BICOMPACT SCHEMES FOR COMPRESSIBLE NAVIER–STOKES EQUATIONS

M. D. Bragin^a

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetveryshkin

For the first time, bcompact schemes are generalized to non-stationary Navier–Stokes equations for a compressible heat-conducting fluid. The proposed schemes have an approximation of the fourth order in space and the second order in time, are absolutely stable (in the frozen-coefficients sense), conservative, and efficient. One of the new schemes is tested on several two-dimensional problems. It is shown that when the mesh is refined, the scheme converges with an increased third order. A comparison is made with the WENO5-MR scheme. The superiority of the chosen bcompact scheme in resolving vortices and shock waves, as well as their interaction, is demonstrated.

Keywords: viscous fluid, Navier–Stokes equations, high-order accurate schemes, compact schemes, bcompact schemes

УДК 519.6

СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА В УРАВНЕНИЯХ ХАРТРИ–ФОКА И КОНА–ШЭМА

© 2023 г. А. А. Даньшин^{1,*}, член-корреспондент РАН А. А. Ковалишин^{1,**}

Поступило 23.09.2022 г.

После доработки 20.10.2022 г.

Принято к публикации 20.12.2022 г.

В работе предложен способ предварительного преобразования спектра оператора уравнений метода Хартри–Фока и теории функционала плотности, позволяющий перейти от решения полной проблемы собственных значений к частичной, причем собственные функции оказываются упорядоченными удобным для расчета способом. Эти преобразования позволяют сделать старую идею точной аппроксимации решения конкурентоспособной с точки зрения скорости вычислений по сравнению с широко используемыми подходами на основе базисных наборов.

Ключевые слова: метод Хартри–Фока, теория функционала плотности, проблема собственных значений

DOI: 10.31857/S2686954322600598, EDN: CQRWAR

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория функционала плотности [1–3] и метод Хартри–Фока [4, 5] являются основными инструментами в теории электронной структуры в химии, материаловедении и в других смежных областях. Традиционные подходы к решению уравнений Кона–Шэма и Хартри–Фока включают методы с использованием явных базисных наборов (например, базисы плоских волн [6, 7], локализованные базисные наборы [8, 9]) и методы без их использования, т.е. методы реального пространства [10, 11]. Достоинства методов реального пространства понятны: такие подходы не приводят к возникновению дополнительных ошибок, связанных с центрированием базисных наборов; концептуально просты для реализации в высокопараллельных средах и позволяют избежать глобальных взаимодействий; не навязывают искусственной периодичности и др.

Идея проводить расчеты без базисных наборов, а опираясь только на конечные разности в реальном пространстве, исследуется довольно давно. Гамильтоновы матрицы, получаемые в результате дискретизации уравнений в реальном пространстве, есть матрицы гораздо большей размерности, чем матрицы, полученные в результате разложения по базисным наборам. Наиболее за-

тратной частью вычислений является решение задачи на собственные значения для каждого электрона на каждом шаге цикла по самосогласованию (SCF). При этом те методы диагонализации, которые применяются для решения задачи на собственные значения, требуют значительных вычислительных ресурсов для систем с большим числом электронов. Применение различных приемов для ускорения, таких как введение в рассмотрение только валентных электронов [12, 13], или использование чебышевских методов для ускорения поиска собственных значений [14, 15] не привело к тому, что методы реального пространства могли бы конкурировать с методами базисных наборов в плане вычислительных затрат.

Целью настоящей работы является создание асимптотически точного в смысле шага расчетной сетки алгоритма решения уравнений метода Хартри–Фока и теории функционала плотности методами реального пространства, вычислительная сложность которого будет сопоставима со сложностью алгоритмов, реализующих метод базисных наборов. Здесь мы так же, как и в большинстве работ, посвященных этому направлению, опираемся на конечно-разностные уравнения, но предварительно тождественно преобразовываем спектр конечно-разностного оператора, и, благодаря этому, поиск собственных функций осуществляется последовательно, начиная с основного состояния. Такой подход позволяет значительно ускорить вычисления за счет отказа от методов диагонализации. Используемые при

¹ Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия

*E-mail: danshin_aa@nrcki.ru

**E-mail: kovalishin_aa@nrcki.ru

этом математические приемы хорошо известны из задач переноса нейтронов в физике ядерных реакторов. Представленный алгоритм верифицирован на полном наборе элементов таблицы Менделеева.

2. ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Уравнения Кона–Шэма и Хартри–Фока есть уравнения вида:

$$\begin{aligned} \Delta \psi_k(\mathbf{r}) - J(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) + \\ + U(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) + K(\mathbf{r}, \psi_k) = E_k \psi_k(\mathbf{r}), \quad (1) \\ k = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где:

$\psi_k(\mathbf{r})$ – одноэлектронная орбитальная функция координат в трехмерном пространстве с номером k , собственная функция задачи (1), N – число электронов в системе;

E_k – энергия k -го электрона в Ридбергах, взятая с обратным знаком, собственное значение задачи (1);

$J(\mathbf{r}) = 2 \int \frac{n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$ – кулоновский потенциал системы электронов, распределенных с плотностью n ;

$U(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^M \frac{2Z_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}_j|}$ – потенциал ядер, M – число ядер в системе, \mathbf{a}_j – координаты ядер, Z_j – заряд ядер;

$K(\mathbf{r}, \psi_k)$ – обменно-корреляционный член, зависящий от используемого приближения.

Наиболее затратной частью вычислений является повторное решение задачи на собственные значения (1) для каждого k -го электрона на каждом m -м шаге итераций по самосогласованию:

$$H\psi_k^{(m)} = E_k \psi_k^{(m)}, \quad (2)$$

где $H \in \mathbb{R}^{L \times L}$, $\psi_k \in \mathbb{R}^L$, L – размерность задачи (число расчетных узлов после дискретизации уравнения (1)). Вычисление собственных пар напрямую из H стоит $O(L^3)$, что очень дорого с вычислительной точки зрения для больших L . Собственные решатели для разреженных матриц имеют сложность $O(L^2 N)$, что по-прежнему дорого, а задача (2) решается много раз на одной итерации SCF. Также для данной задачи развит подход спектральных фильтров на основе полиномов Чебышева, однако эффективность построенного фильтра зависит от выбора границ фильтрации [15]. Использование простого сдвига

спектра не дает существенного выигрыша из-за плохой обусловленности задачи.

Качественно структура собственных значений уравнений (1) известна – это знакопеременный спектр, ограниченный снизу минимальным значением (отрицательная энергия основного состояния) и неограниченный сверху (положительная энергия свободных состояний). При дискретизации уравнений неограниченный спектр заменяется ограниченным: за счет конечного числа узлов сетки качество аппроксимации собственных функций верхней части спектра падает. При этом качество аппроксимации собственных функций, соответствующих связанным состояниям, остается достаточно высоким благодаря их относительной гладкости.

Теперь необходимо сделать несколько пояснений относительно дальнейшего изложения, поскольку это место является ключевым в данной работе. Уравнение Шредингера и соответствующие ему системы уравнений Хартри–Фока и теории функционала плотности с точки зрения структуры аналогичны уравнению диффузии нейтральных частиц в среде с поглощением и размножением. В случае нейтронной задачи с целью расчета ядерных реакторов были разработаны алгоритмы и приемы преобразования спектра для обеспечения устойчивости и лучшей сходимости итерационных методов. Мы используем эти подходы, хорошо изложенные, например, в [16, 17], для решения уравнений вида (1). Проводя аналогию с уравнением диффузии нейтронов, члены J и E_k в (1) отвечают за поглощение (они неотрицательны и “вычитаются” из лапласиана), а члены K и U отвечают за размножение (они неотрицательны и “складываются” с лапласианом). Далее, следуя аналогии, введем вспомогательное собственное значение k_{eff} следующим образом:

$$\begin{aligned} -\Delta \psi_k(\mathbf{r}) + J(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) + E_k \psi_k(\mathbf{r}) = \\ = \frac{1}{k_{\text{eff}}} (U(\mathbf{r})\psi_k(\mathbf{r}) + K(\mathbf{r}, \psi_k)). \quad (3) \end{aligned}$$

При фиксированном E_k собственные значения k_{eff} в данном случае будут упорядочены удобным для нас способом с сохранением свойств (1): теперь спектр устроен так, что поиск собственных функций осуществляется последовательно, начиная с основного состояния. Это ключевое положение асимптотической теории диффузии нейтронов, а k_{eff} носит название эффективного коэффициента размножения. Очевидно, что уравнение (3) будет совпадать с уравнением (1) при $k_{\text{eff}} = 1$. Построение эффективных устойчивых методов решения уравнений вида (3) хорошо известно и описано, например, в [18]. В основе алгоритма лежит итерационный процесс, когда

после решения уравнения (3) мы “поправляем” значение E_k так, чтобы получить $k_{\text{eff}} = 1$.

Запишем (3) в виде:

$$\hat{T}\Psi_k = \frac{1}{k_{\text{eff}}}\hat{Q}\Psi_k. \quad (4)$$

Пусть задача (4) решена для заданного $\tilde{E}_k = E_k + \delta E_k$, т.е. найдено решение $\frac{1}{\tilde{k}_{\text{eff}}} = \frac{1}{k_{\text{eff}}} + \delta \frac{1}{k_{\text{eff}}}$ и $\tilde{\Psi}_k = \Psi_k + \delta \Psi_k$:

$$(\hat{T} + \delta \hat{T})\tilde{\Psi}_k = \frac{1}{\tilde{k}_{\text{eff}}}\hat{Q}\tilde{\Psi}_k. \quad (5)$$

Умножим скалярно (4) на $\tilde{\Psi}_k$, (5) – на Ψ_k , и вычтем одно из другого. Тогда с учетом $\delta \hat{T} \equiv \delta E_k$ в первом порядке теории возмущений:

$$\langle \Psi_k | \delta E_k | \Psi_k \rangle = \delta \frac{1}{k_{\text{eff}}} \langle \Psi_k | \hat{Q} | \Psi_k \rangle. \quad (6)$$

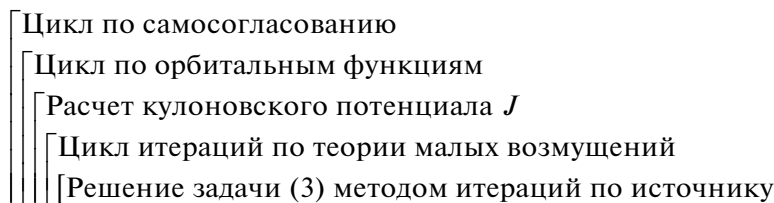
Окончательно (с учетом $k_{\text{eff}} \equiv 1$ для точного решения (1)), в соответствии с теорией малых возмущений вычисляется новое значение:

$$E_k = \tilde{E}_k + \left(1 - \frac{1}{\tilde{k}_{\text{eff}}}\right) \frac{\langle \Psi_k | \hat{Q} | \Psi_k \rangle}{\langle \Psi_k | \Psi_k \rangle}. \quad (7)$$

Затем процедура решения (3) повторяется. Организованный таким образом итерационный процесс приведет к тому, что $k_{\text{eff}} \rightarrow 1$, а собственные значения и собственные функции сойдутся к искомым для уравнений (1). В этом случае аппроксимацию операторов можно выполнить с помощью конечных разностей. Тогда мы получаем разреженную матрицу, которую удобно использовать в итерационных процедурах благодаря экономичности операций произведения разреженной матрицы на вектор. Дополнительное преимущество в скорости можно получить, если использовать конечно-разностные схемы высокого порядка аппроксимации.

3. АЛГОРИТМ

Алгоритм может быть представлен в следующем виде:



Выход из цикла по самосоглашению осуществляется, когда достигнута сходимость орбитальных функций в соседних итерациях по отношению к заданному значению параметра сходимости. В цикле по орбитальным функциям решается задача (3) для заданного числа N электронов. Цикл итераций по теории малых возмущений организован в соответствии с (7).

Теперь рассмотрим решение задачи (3) методом итераций по источнику. Введем вектор Ψ размера L , каждый элемент которого есть значение искомой функции в соответствующем узле сетки, и запишем уравнения (3) в матричной форме:

$$\mathbf{T}\Psi = \frac{1}{k_{\text{eff}}}\mathbf{Q}\Psi. \quad (8)$$

Пусть первые i орбитальных функций Ψ_k , $k = \overline{1, i}$ найдены (при этом для остальных орбитальных функций берутся значения, вычисленные на предыдущей итерации цикла по самосоглашению), а $n-1$ и n – номера итераций по источнику. Тогда следующий алгоритм используется для по-

иска собственного значения и собственной функции $(i+1)$ -го электрона:

1. Нормировка: $\langle \Psi^{(n-1)} | \Psi^{(n-1)} \rangle = 1$.
2. Формирование источника: $\mathbf{S}^{(n-1)} = \mathbf{Q}\Psi^{(n-1)}$.
3. Решение неоднородной задачи: $\mathbf{T}\tilde{\Psi}^{(n)} = \mathbf{S}^{(n-1)}$, где $\tilde{\Psi}^{(n)}$ – искомая функция.
4. Ортогонализация к первым i орбитальным функциям электронов с тем же значением проекции спина: $\Psi^{(n)} = \tilde{\Psi}^{(n)} - \sum_k^i \langle \tilde{\Psi}^{(n)} | \Psi_k \rangle \Psi_k$.
5. Оценка k_{eff} : $k_{\text{eff}} = \langle \Psi^{(n)} | \Psi^{(n-1)} \rangle$.
6. Оценка сходимости по k_{eff} и собственной функции. Если заданная точность по разнице значений k_{eff} и собственной функции в соседних итерациях не достигнута, повтор, начиная с пункта 1.

При выполнении пункта 3 необходимо решать неоднородную систему алгебраических уравне-

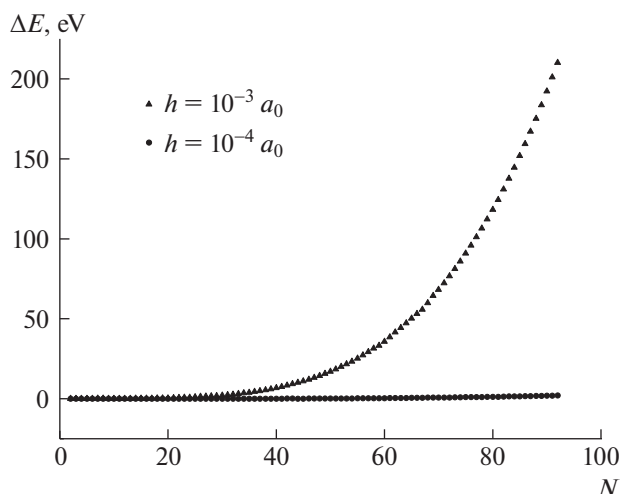


Рис. 1. Разница в энергии основного состояния между рассчитанным значением и значением, полученным в работах [21–23], в зависимости от номера элемента N .

ний с разреженной матрицей. Здесь можно использовать стандартные итерационные процедуры для решения таких систем, например, метод верхней релаксации [19] или чебышевские итерационные методы [20]. Значения J и K вычисляются стандартным способом через решения уравнений Пуассона с соответствующей правой частью [10–13].

4. ВЕРИФИКАЦИЯ

Алгоритм реализован в виде компьютерной программы. Мы использовали простейшую схему второго порядка для аппроксимации оператора Лапласа. Для верификации использовались доступные значения полных энергий основного состояния атомов из работ [21–23], в которых фактически был достигнут хартри-фоковский предел в результате вычислений на основе метода базисных наборов. Получено, что с уменьшением шага сетки решение сходится к значениям работ [21–23]. Так, например, для шага $h = 10^{-3} a_0$ (a_0 – борковский радиус) разница в решении для элементов от He до U лежит в диапазоне от 10^{-5} до 210 эВ, а для шага $h = 10^{-4} a_0$ – от 10^{-7} до 2.1 эВ. Результаты отклонений рассчитанных значений полных энергий основного состояния от значений работ [21–23] представлены на рис. 1. При дальнейшем уменьшении шага сетки решение асимптотически сходится к точному для рассматриваемых уравнений.

5. ВЫВОДЫ

Авторами создан и верифицирован асимптотически точный в смысле шага расчетной сетки алгоритм решения уравнений метода Хартри–Фока и теории функционала плотности методами реального пространства. Предварительное тождественное преобразование спектра конечно-разностного оператора позволило сразу находить решение для основного состояния системы, что привело к значительному ускорению за счет отказа от методов диагонализации. Данный подход делает старую идею сеточной аппроксимации решения конкурентоспособной с точки зрения скорости вычислений по сравнению с широко используемыми подходами на основе метода базисных наборов. Отметим, что реализация схем более высокого порядка позволит дополнительно ускорить вычисления.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса” НИЦ “Курчатовский институт”, <http://ckp.nrcki.ru/>.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке НИЦ “Курчатовский институт” (приказ № 2770 от 28.10.2021).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hohenberg P., Kohn W.* Inhomogeneous Electron Gas // *Phys. Rev.* 1973. V. 136. P. B864–B871.
2. *Kohn W., Sham L.J.* Self-Consistent Equations Including Exchange and Correlation Effects // *Phys. Rev.* 1965. V. 140. P. A1133–A1138.
3. *Kohn W.* Nobel Lecture: Electronic structure of matter—wave functions and density functionals // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V. 71. P. 1253–1266.
4. *Фок В.А.* Приближенный способ решения квантовой задачи многих тел // *Успехи физических наук.* 1967. Т. 93. С. 342–363.
5. *Pople J.A.* Nobel Lecture: Quantum chemical models // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V. 71. P. 1267–1274.
6. *Payne M.C., Teter M.P., Allan D.C., Arias T.A., Joannopoulos J.D.* Iterative minimization techniques for ab initio total-energy calculations: molecular dynamics and conjugate gradients // *Rev. Mod. Phys.* 1992. V. 64. P. 1045–1097.
7. *Kresse G., Furthmuller J.* Efficient iterative schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 54. P. 11169–11186.
8. *Koch W., Holthausen M.C.* A Chemist’s Guide to Density Functional Theory, 2nd Edition. Wiley-VCH, Weinheim, 2001. 313 p.

9. *Martin R.M.* Electronic Structure: Basic Theory and Practical Methods. Cambridge University Press, 2004. 624 p.
10. *Beck T.L.* Real-space mesh techniques in density-functional theory // *Rev. Mod. Phys.* 2000. V. 72. P. 1041–1080.
11. *Torsti T. et al.* Three real-space discretization techniques in electronic structure calculations // *physica status solidi (b)*. 2006. V. 243. P. 1016–1053.
12. *Marques M., Castro A., Bertsch G., Rubio A.* octopus: a first-principles tool for excited electron-ion dynamics // *Computer Physics Communications*. 2003. V. 151. P. 60–78.
13. *Kronik L. et al.* PARSEC – the pseudopotential algorithm for real-space electronic structure calculations: recent advances and novel applications to nano-structures // *physica status solidi (b)*. 2006. V. 243. P. 1063–1079.
14. *Zhou Y., Saad Y., Tiago M., Chelikowsky J.* Parallel self-consistent-field calculations via Chebyshev-filtered subspace acceleration // *Phys. Rev. E*. 2006. V. 74. P. 066704.
15. *Zhou Y., Chelikowsky J., Saad Y.* Chebyshev-filtered subspace iteration method free of sparse diagonalization for solving the Kohn-Sham equation // *Journal of Computational Physics*. 2014. V. 274. P. 770–782.
16. *Шихов С.Б.* Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. М.: Атомиздат, 1973. 376 с.
17. *Крянев А.В., Шихов С.Б.* Вопросы математической теории реакторов: Нелинейный анализ. М.: Энергоатомиздат, 1983. 280 с.
18. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981. 456 с.
19. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
20. *Лебедев В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2005. 296 с.
21. *Bunge C.F., Barrientos J.A., Bunge A.V., Cogordan J.A.* Hartree-Fock and Roothaan-Hartree-Fock energies for the ground states of He through Xe // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 46. P. 3691–3696.
22. *Koga T., Tatewaki H., Thakkar A.* Roothaan-Hartree-Fock wave functions for atoms with $Z \leq 54$ // *Phys. Rev. A*. 1993. V. 47. P. 4510–4512.
23. *Koga T., Thakkar A.* Roothaan-Hartree-Fock wave functions for atoms from Cs through U // *Phys. Rev. A*. 1993. V. 48. P. 4775–4777.

OPERATOR SPECTRUM TRANSFORMATION IN HARTREE–FOCK AND KOHN–SHAM EQUATIONS

A. A. Danshin^a and Corresponding Member of the RAS A. A. Kovalishin^a

^a *National Research Center “Kurchatov Institute”, Moscow, Russian Federation*

The paper proposes a method for preliminary transformation of the spectrum of the equation operator both in the Hartree–Fock method and in density functional theory. This method makes it possible to solve a partial eigenvalue problem instead of the complete one, and the eigenfunctions turn out to be ordered in a way convenient for calculation. The transformation makes an old idea of grid approximation of a solution competitive in terms of computational speed as compared to widely used approaches based on basis sets methods.

Keywords: Hartree–Fock method, density functional theory, eigenvalue problem

УДК 519.179.1, 519.179.4

О КОНЦЕНТРАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ j -ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ СЛУЧАЙНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

© 2023 г. И. О. Денисов¹, Д. А. Шабанов^{2,3,*}

Представлено академиком А.Н. Ширяевым

Поступило 15.12.2022 г.

После доработки 20.12.2022 г.

Принято к публикации 28.12.2022 г.

Работа посвящена изучению предельного поведения j -хроматических чисел случайного k -однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, k, p)$. Рассматривается разреженный случай, когда среднее число ребер является линейной функцией от числа вершин n , т.е. равно cn , где $c > 0$ не зависит от n . Доказано, что при всех достаточно больших значениях c величина j -хроматического числа $H(n, k, p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, концентрируется в одном или двух соседних значениях.

Ключевые слова: случайный гиперграф, раскраски гиперграфов, j -хроматическое число, пороговые вероятности, метод второго момента

DOI: 10.31857/S2686954322600756, EDN: CSTOОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается известная задача теории случайных графов и гиперграфов, связанная с изучением предельных распределений хроматических чисел. Сначала мы напомним основные определения.

1.1. Определения

Гиперграфом $H = (V, E)$ в дискретной математике называется пара множеств, где V — некоторое конечное множество вершин, а E — это некоторая совокупность выделенных подмножеств V , называемых ребрами гиперграфа. Гиперграф является k -однородным, если все его ребра имеют мощность k , как подмножества V .

В работе изучаются вершинные раскраски гиперграфов. Формально раскраской множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов называется отображение $f: V \rightarrow \{1, \dots, r\}$. Для раскраски f вводятся множества $V_i = f^{-1}(i)$, $i = 1, \dots, r$,

образующие разбиение V . Они называются *цветовыми классами* раскраски f . В теории графов широко известно понятие *правильной* раскраски графа, в которой любые две смежные вершины имеют разные цвета. Оно неоднозначно переносится на случай гиперграфов, здесь можно ввести целую серию j -правильных раскрасок, параметризуемую натуральной величиной j . А именно, для $j > 0$ раскраска множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$ в r цветов называется j -правильной, если в ней каждое ребро гиперграфа содержит не более j вершин каждого из r цветов. Например, при $j = 1$ это означает, что все вершины ребра должны быть покрашены в разные цвета. Если гиперграф k -однороден, то имеет смысл рассматривать только $1 \leq j \leq k - 1$, иначе любая раскраска будет j -правильной.

Минимальное число цветов r , необходимое для j -правильного раскрашивания вершин гиперграфа H , называется j -хроматическим числом H и обозначается через $\chi_j(H)$. Отметим, что для графов (2-однородных гиперграфов) параметр j может быть равен только 1. В теории гиперграфов классическому понятию хроматического числа гиперграфа, $\chi(H)$, введенному Эрдемем и Хайналом, соответствует ситуация $j = k - 1$.

В работе исследуется j -хроматическое число случайного k -однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, k, p)$, где $n > k \geq 2$, $p \in (0, 1)$. Напомним, что модель $H(n, k, p)$ пред-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия

³ Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: shabanov.da@mipt.ru

ставляет собой схему Бернулли на ребрах полного k -однородного гиперграфа на n вершинах: каждое k -подмножество n -элементного множества вершин включается в $H(n, k, p)$ в качестве ребра независимо с вероятностью p . При $k = 2$ мы получаем хорошо известную модель случайного графа $G(n, p)$, также называемую моделью Эрдеша–Реньи. Перечисленные модели являются центральными объектами изучения вероятностной комбинаторики. В рамках статьи мы предполагаем, что $k > 2$ и $1 \leq j \leq k - 1$ фиксированы, n стремится к бесконечности и $p = p(n) \in (0, 1)$ является функцией от n .

1.2. История задачи

Исследования асимптотического поведения хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ начались еще в 70-е годы прошлого века. Здесь стоит отметить работы Дж. Гримметта, К. Макдиармида [1], Б. Боллобаша [2], Т. Лучака [3, 4], Н. Алона и М. Кривелевича [5]. Из работ [4, 5] в частности, следовало, что при достаточно быстро стремящейся к нулю функции $p(n)$ (например, $p(n) \leq n^{-1/2-\epsilon}$ для некоторого фиксированного $\epsilon > 0$) $\chi(G(n, p))$ с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом n , принадлежит множеству из двух соседних значений $\{h, h + 1\}$ для некоторой неизвестной функции $h = h(n, p)$. В дальнейшем поиску данной функции были посвящены работы Д. Аклиоптаса, А. Наора [6], А. Койя-Оглана, К. Панайоту, А. Штегер [7], С. Каргальцева, Д. Шабанова и Т. Шайхеевой [8]. В работе [6] искомая функция h была найдена в так называемом разреженном случае, когда среднее число ребер

линейно по числу вершин, т.е. когда $p(n) = cn / \binom{n}{2}$ для $c > 0$, не зависящего от n . А именно, если $c > 1$ задано и $r_c = \min\{r \in \mathbb{N} : c < r \ln r\}$, то при $p = cn / \binom{n}{2}$

$$P(\chi(G(n, p)) \in \{r_c, r_c + 1\}) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Тем не менее оказалось, что в разреженном случае для большинства значений параметра c имеет место даже односточечная предельная концентрация значения хроматического числа случайного графа. Связан подобный эффект с наличием точной пороговой вероятности для свойства наличия правильной раскраски в r цветов при $r \geq 3$, ее наилучшие текущие оценки были получены в работах [9, 10].

Хроматические числа случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ стали активно изучаться с 1980-х. В работах Дж. Шмидт, Э. Шамира и Э. Упфола [11–

13] было найдено асимптотическое поведение $\chi_j(H(n, k, p))$ при определенных условиях на величину $p = p(n)$. В дальнейшем наиболее общий результат был получен в работе М. Кривелевича и Б. Судакова [14]. Для его формулировки введем величину $d = p \binom{n-1}{k-1}$, равную математическому ожиданию степени вершины в $H(n, k, p)$, и положим $d_j = j \binom{k-1}{j} d$. Если $pn^{k-1} \rightarrow \infty$ и $pn^{k-1-j} \rightarrow 0$, то для j -хроматического числа случайного гиперграфа выполнена следующая сходимость по вероятности:

$$\chi_j(H(n, k, p)) \cdot \left(\frac{d_j}{(j+1) \ln d_j} \right)^{-1/j} \xrightarrow{P} 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Авторами [14] также было доказано, что в разреженном случае, когда снова среднее число ребер линейно по числу вершин, имеет место концентрация j -хроматического числа в ограниченном числе значений. А именно, если параметр d_j фиксирован, но достаточно велик, то с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, выполнены следующие неравенства

$$\left(\frac{d_j}{(j+1) \ln d_j} \right)^{1/j} \leq \chi_j(H(n, k, p)) \leq \left(\frac{d_j}{(j+1) \ln d_j} \left(1 + \frac{1}{\ln^{0.1} d_j} \right) \right)^{1/j}. \tag{1}$$

Дальнейшие продвижения в вопросе концентрации j -хроматического числа были сделаны в классическом случае $j = k - 1$, т.е. для обычного хроматического числа. Нам снова будет удобно ввести параметр c , отвечающий пропорции среднего числа ребер по отношению к числу вершин, т.е. пусть $p = cn / \binom{n}{k}$. В разреженном случае, когда c не зависит от n , хроматическое число согласно (1) ограничено, но можно гораздо более точно указать его значения. Обозначим $r_c = \min\{r \in \mathbb{N} : c < r^{k-1} \ln r\}$. Тогда, конечно, $c \in [(r_c - 1)^{k-1} \ln(r_c - 1), r_c^{k-1} \ln r_c)$, но в зависимости от положения параметра c на отрезке хроматическое число будет равно r_c или $r_c + 1$. А именно, в работах М. Дайера, А. Фриза и К. Гринхилл [15], П. Эйра, А. Койя-Оглана, К. Гринхилл [16] и Д. Шабанова [17] было доказано, что

- если $c > r_c^{k-1} \ln r_c - \frac{1}{2} \ln r_c$, то

$$P(\chi_{k-1}(H(n, k, p)) = r_c + 1) \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

• если $c < r_c^{k-1} \ln r_c - \frac{1}{2} \ln r_c - \psi(k, r)$, где $\psi(k, r)$ – некоторая ограниченная функция, которую можно выбрать равной $\psi(k, r) = \frac{r-1}{r} + o_{k,r}(1)$ и которую можно уменьшить до $\psi(k, r) = \ln 2 + o_{k,r}(1)$ при $r > r_0(k)$, то

$$P(\chi_{k-1}(H(n, k, p)) = r_c) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Внутри же небольшого отрезка $\left[r_c^{k-1} \ln r_c - \frac{1}{2} \ln r_c - \psi(k, r), r_c^{k-1} \ln r_c - \frac{1}{2} \ln r_c \right]$ известно лишь, что хроматическое число s с вероятностью, стремящейся к 1, равно r_c или $r_c + 1$. Концентрация $\chi_{k-1}(H(n, k, p))$ в неразрезанном случае изучалась в работе [18], где было доказано, что при не слишком медленно убывающей функции $p(n)$ хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано в некоторых двух соседних значениях, а также были найдены эти два значения в определенных случаях.

В общем случае, когда $j < k - 1$, концентрация j -хроматического числа изучалась, помимо уже упомянутого результата (1), только в разреженном случае. В работе [19] исследовалась пороговая вероятность j -правильной r -раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в ситуации, когда значение параметра однородности k сильно превышает значение числа цветов r . Авторы [19] показали, что в разреженном случае, когда $p = cn / \binom{n}{k}$ и где $c > 0$ не зависит от n , для любого $r > 2$ существуют такие положительные числа $C_l = C_l(r)$, $C_u = C_u(r)$ и $k_0 = k_0(r)$, что при $k > k_0$ и $1 < k - j < k^{1/4}$ выполнено следующее: если

$$c > \frac{r^{k-1} \ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} (r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} + C_u \cdot \binom{k}{j+1} \cdot r^{-j}, \quad (2)$$

то $P(\chi_j(H(n, k, p)) > r) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$, а если

$$c < \frac{r^{k-1} \ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} (r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} - C_l \cdot k^{(j-k+1)/2}, \quad (3)$$

то $P(\chi_j(H(n, k, p)) \leq r) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим несколько моментов относительно этой теоремы. Во-первых, параметр j должен быть примерно равен k , $j \sim k$, но, все-таки, j должно быть меньше $k - 1$. Во-вторых, зазор между оценками (2) и (3) стремится к нулю с ростом k . В-третьих, параметр r , отвечающий за ограни-

чение на j -хроматическое число, должен быть заметно меньше k . Тем самым, данная теорема не позволяет сделать выводы о концентрации хроматического числа, но дает очень точные оценки пороговой вероятности для j -правильной r -раскрашиваемости при больших k .

Целью настоящей работы было получение схожих результатов, но для обратного случая, когда параметр однородности k фиксирован, а параметр r может быть сколь угодно большим. Единственный подобный результат был ранее получен также А. Семеновым и Д. Шабановым в [20] для случая $j = k - 2$. Авторами [20] было показано, что если $p = cn / \binom{n}{k}$, $c > 0$ не зависит от n , $k \geq 9$ и $r > r_0(k)$, то при

$$c > - \frac{\ln r}{\ln(1 - r^{1-k}(kr - k + 1))} = \frac{r^{k-1} \ln r}{kr - k + 1} - \frac{\ln r}{2} + O(kr^{2-k}), \quad (4)$$

выполнено $P(\chi_{k-2}(H(n, k, p)) > r) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, а при

$$c < \frac{r^{k-1} \ln r}{kr - k + 1} - \frac{\ln r}{2} - \frac{r-1}{k(r-1)+1} r^{\frac{k-1}{k(r-1)+1}} + O(k^2 r^{-k/3} \ln r), \quad (5)$$

выполнено $P(\chi_{k-2}(H(n, k, p)) \leq r) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым, при фиксированном k и растущем r , получается зазор порядка $1/k + o_r(1)$. Целью нашей работы было получить аналоги результатов (4)–(5) для общей ситуации, когда $k/2 \leq j < k - 2$.

2. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные результаты настоящей работы дополняют результаты (2)–(5) и дают новые оценки пороговой вероятности свойства j -правильной r -раскрашиваемости у случайного гиперграфа $H(n, k, p)$ в ранее не рассмотренных областях изменений параметров. Первая теорема дополняет (2) и (4).

Теорема 1. Пусть $H(n, k, p)$ – случайный k -однородный гиперграф на n вершинах, где $p = cn / \binom{n}{k}$, $c > 0$ не зависит от n . Для любого $k \geq 7$ существуют такие положительные числа $C_u = C_u(k)$ и $r_0 = r_0(k)$, что для любых $r > r_0$, $k/2 \leq j < k$ и

$$c > \frac{r^{k-1} \ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} (r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} + C_u \cdot r^{-j} \ln r \quad (6)$$

выполнено $\mathbb{P}(\chi_j(H(n, k, p)) > r) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Вторая теорема дополняет результаты (3) и (5)

Теорема 2. Пусть $H(n, k, p)$ – случайный k -однородный гиперграф на n вершинах, где $p = cn/\binom{n}{k}$, $c > 0$. Для любого $k \geq 7$ существуют такие положительные числа $C_l = C_l(k)$ и $r_0 = r_0(k)$, что при $r > r_0$ и $k/2 \leq j \leq k - 3$ выполнено следующее: если

$$c < \frac{r^{k-1} \ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} (r-1)^s} - \frac{\ln r}{2} - \frac{1}{\binom{k}{j+1}} - C_l \cdot \frac{\ln^3 r}{r}, \quad (7)$$

то

$$\mathbb{P}(\chi_j(H(n, k, p)) \leq r) \rightarrow 1$$

при $n \rightarrow \infty$.

Прокомментируем полученные результаты:

1. По сравнению с результатами из [20] удалось значительно расширить область изменения параметра j . В теоремах 1 и 2 требуется лишь, чтобы $j \geq k/2$, в то время как в работе [20] рассматривалось значение j асимптотически то же самое, что и у k .

2. Условие $j \geq k/2$, в некотором смысле, является граничным. В этом случае j -хроматические числа k -однородных гиперграфов также называются *слабыми*. Суть в том, что если ребро оказалось плохо раскрашено, то это обеспечивается лишь одним большим набором вершин одного цвета. В то время, как при $j < k/2$ таких наборов может быть несколько, и, значит, необходимое для j -правильной раскраски число цветов уже не может быть произвольным. Для таких раскрасок требуется несколько другой анализ. Подобные результаты могут быть найдены, например, в [21].

3. Условие $k \geq 7$ является техническим, для меньших значений можно получить похожие результаты, но это потребует некоторого дополнительного анализа при применении метода второго момента. С учетом работ [15] и [20] получается, что среди пар значений (k, j) , $j \geq k/2$ формально результаты отсутствуют только для наборов (8,6), (7,5), (6,4), (6,3), (5,3), (4,2).

4. Выведем следствие о концентрации значений j -хроматического числа. Обозначим

$$u_k(r) = \frac{r^{k-1} \ln r}{\sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} (r-1)^s} - \frac{\ln r}{2}.$$

Заметим, что при всех достаточно больших r функция $u_k(r)$ является возрастающей, причем разность $u_k(r+1) - u_k(r)$ растет по порядку как $r^{j-1} \ln r$.

Следствие 1. Пусть $k \geq 7$, $k/2 \leq j \leq k - 3$, а $r \geq r_0(k)$ достаточно велико. Пусть $p = cn/\binom{n}{k}$.

1) Если

$$c \in \left(u_k(r-1) + C_u \cdot (r-1)^{-j} \ln(r-1), u_k(r) - \frac{1}{\binom{k}{j+1}} - C_l (\ln r)^{3/r} \right),$$

то $\mathbb{P}(\chi_j(H(n, k, p)) = r) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

2) Если

$$c \in \left[u_k(r) - \frac{1}{\binom{k}{j+1}} - C_l (\ln r)^{3/r}, u_k(r) + C_u \cdot r^{-j} \ln r \right],$$

то $\mathbb{P}(\chi_j(H(n, k, p)) \in \{r, r+1\}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

3) Если

$$c \in \left(u_k(r) + C_u \cdot r^{-j} \ln r, u_k(r+1) - \frac{1}{\binom{k}{j+1}} - C_l (\ln(r+2))^{3/(r+1)} \right),$$

то $\mathbb{P}(\chi_j(H(n, k, p)) = r+1) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Следствие 1 показывает, что при почти всех значениях параметра c в разреженном случае j -хроматическое число имеет односточное предельное распределение, а для всех достаточно больших значений оно сконцентрировано в двух соседних значениях.

Важным вспомогательным результатом, лежащим в основании доказательства теоремы 2, является решение следующей оптимизационной задачи для дважды стохастических матриц. Обозначим через \mathbf{M}_r множество матриц размера $r \times r$ с неотрицательными элементами и следующим свойством: для любой $M = (m_{ij}, i, j = 1, \dots, r) \in \mathbf{M}_r$ для любых $i, u = 1, \dots, r$ выполнено

$$\sum_{u=1}^r m_{iu} = \frac{1}{r}, \quad \sum_{i=1}^r m_{i,u} = \frac{1}{r},$$

т.е. сумма элементов матрицы по любому столбцу и любой строке равны $1/r$. Далее, для $M \in \mathbf{M}_r$ введем две функции:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(M) &= -\sum_{i,u=1}^r m_{iu} \ln(m_{iu}), \\ \mathcal{E}(M) &= \ln(1 - Q(M)), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} Q(M) &= 2q - \\ &- \sum_{i,u=1}^r \sum_{s=j+1}^k \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s-j-1+h} \sum_{t=0}^h \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \left(\frac{1}{r} - m_{iu}\right)^{h+t} \times \\ &\times m_{iu}^{s-t} \left(\frac{r-2}{r} + m_{iu}\right)^{k-h-s}, \\ q &= r^{1-k} \sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{k}{s} (r-1)^s. \end{aligned}$$

Отметим, что функция $Q(M)$ и, следовательно, функция $\mathcal{E}(M)$ являются параметрическими и зависят от выбранных ранее параметров j и k .

Наконец, для $c > 0$ введем $G_c(M) = \mathcal{H}(M) + c \cdot \mathcal{E}(M)$. Обозначим через J_r матрицу, все элементы которой равны $1/r^2$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Если выполнено условие (7), то существует такая функция $b = b(r, k, j) > 0$, что для любой матрицы $M \in \mathbf{M}_r$ выполнено неравенство

$$G_c(J_r) - G_c(M) \geq b \sum_{i,u=1}^r \left(m_{iu} - \frac{1}{r^2}\right)^2. \tag{9}$$

Результаты в духе теоремы 3 весьма полезны и могут быть применены для исследования j -хроматических чисел случайных гиперграфов даже в неразрезанном случае, см., например, [7, 18].

3. ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

3.1. Идеи доказательств теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1 следует методу первого момента. Мы переходим к равномерной модели случайного гиперграфа $H'(n, k, m)$, где

$$m = \left\lfloor p \binom{n}{k} \right\rfloor \text{ и } c > 0 \text{ удовлетворяет неравенству (6).}$$

В модели $H'(n, k, m)$ независимо, равновероятно и с возвращением выбираются m ребер из всевозможных k -подмножеств множества вершин. С помощью метода каплинга можно показать,

что при $p' = c'n / \binom{n}{k}$, где $c' > c$, будет выполнено неравенство

$$\mathbb{P}(\chi_j(H'(n, k, m)) > r) \leq \mathbb{P}(\chi_j(H(n, k, p')) > r) + o(1).$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что левая часть неравенства стремится к 1. Далее, рассматривается случайная величина X_n , равная числу j -правильных раскрасок $H'(n, k, m)$ в r цветов. С помощью нижеприведенной комбинаторной леммы можно оценить математическое ожидание X_n .

Лемма 1. Пусть $k \geq 7$, $k/2 \leq j < k$. Существует такое $r_0 = r_0(k)$, что при $r \geq r_0$ и всех достаточно больших n выполнено: для любых v_1, \dots, v_r с условием $\sum_{i=1}^r v_i = n$ верно неравенство

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{v_i}{k-s} \binom{n-v_i}{s} \geq \\ &\geq r \sum_{s=0}^{k-j-1} \binom{n/r}{k-s} \binom{n-n/r}{s} + o(n^k). \end{aligned}$$

Применяя лемму 1, можно показать, что при условии (6) выполнено $\mathbb{E} X_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, что завершает доказательство теоремы 1.

Утверждение теоремы 2 обосновывается с помощью метода второго момента. Возможность применения данного метода следует из наличия точной пороговой вероятности для свойства j -правильной раскрашиваемости в заданное число цветов у случайного гиперграфа $H(n, k, p)$. По определению функция $\hat{p}_{r,k,j} = \hat{p}_{r,k,j}(n)$ является точной пороговой вероятностью для свойства j -правильной раскрашиваемости в r цветов, если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выполнено, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\chi_j(H(n, k, p)) \leq r) = \begin{cases} 1, & \text{если } p < (1 - \varepsilon)\hat{p}; \\ 0, & \text{если } p > (1 + \varepsilon)\hat{p}. \end{cases}$$

Существование точной пороговой вероятности в нашей задаче вытекает из работы Х. Хатами и М. Моллоя из [22], в которой утверждается, что любое свойство, выражаемое как наличие гомоморфизма из изучаемого гиперграфа в некоторый фиксированный (может быть, содержащий не-правильные ребра) связный гиперграф, имеет точную пороговую вероятность. Существование точной пороговой вероятности заметно облегчает нашу задачу. Теперь нам не нужно доказывать напрямую, что вероятность наличия искомой раскраски стремится к единице, достаточно лишь показать, что в условиях теоремы 2 она отделена от нуля.

Как и в доказательстве теоремы 1, нам снова будет удобно перейти к равномерной модели случайного гиперграфа. Но в этот раз модель будет немного другая, а именно, мы вводим случайный гиперграф $H''(n, k, m)$, где $m = \lceil cn \rceil$, состоящий из m независимых случайных k -подмножеств множества вершин, причем и в каждом таком k -под-

множестве все k вершин выбираются случайно, независимо и равновероятно. Конечно, в подобном гиперграфе мы можем получить и совпадающие ребра, и ребра размера меньше, чем k , когда нам выпали повторяющиеся вершины. Поясним, как будем раскрашивать ребра, в которых встречаются повторяющиеся вершины: по-прежнему будет говорить, что ребро раскрашено j -правильно, если оно с учетом кратности повторяющихся вершин содержит не более j вершин каждого цвета. Снова с помощью техники каплинга можно

показать при $c' < c$ и $p' = c' n / \binom{n}{k}$ будет выполнено соотношение

$$P(\chi_j(H(n, k, p')) \leq r) \geq P(\chi_j(H''(n, k, m)) \leq r) + o(1).$$

Следовательно, остается проверить, что в модели $H''(n, k, m)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\chi_j(H''(n, k, m)) \leq r) > 0. \quad (10)$$

Остается свести задачу к вычислению моментов некоторой случайной величины. В этом качестве мы будем использовать X_n — число j -правильных сбалансированных раскрасок случайного гиперграфа $H''(n, k, m)$. Напомним, что раскраска называется *сбалансированной*, если все ее цветовые классы имеют одинаковую мощность. В лемме 1.4 работы [15] было доказано, что соотношение (10) достаточно проверить только по подпоследовательности тех n , что делятся на r , так что всюду далее мы будем считать, что n делится на r .

Применяя неравенство Пэли–Зигмунда, мы получаем следующую цепочку неравенств

$$P(\chi_j(H''(n, k, m)) \leq r) \geq P(X_n > 0) \geq \frac{(E X_n)^2}{E X_n^2}.$$

В итоге остается проверить, что в условиях теоремы имеет место следующее соотношение между моментами случайной величины X_n :

$$E X_n^2 = O_{k,j,r} \left((E X_n)^2 \right). \quad (11)$$

Комбинаторными вычислениями и применением формулы Стирлинга можно получить следующее выражение для отношения моментов случайной величины X_n :

$$\frac{E X_n^2}{(E X_n)^2} = \Theta_{k,j,r} \left(n^{r-1/2} \sum_{T=(\tau_{iu}) \in \mathbf{T}_r} \left(\prod_{i,u=1}^r \sqrt{\tau_{iu} + 1} \right)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \exp[n(G_c(T/n) - G_c(J_r))], \right) \quad (12)$$

где функция G_c определялась в теореме 3, как $G_c(M) = \mathcal{H}(M) + c \cdot \mathcal{E}(M)$, а функции \mathcal{H} и \mathcal{E} были определены в (8). Кроме того, \mathbf{T}_r в формуле (12) обозначает множество матриц размера $r \times r$, у которых все элементы являются целыми неотрицательными числами, а сумма в каждой строке и в каждом столбце равна n/r . Для завершения обоснования соотношения (11) остается применить теорему 3 и аппроксимировать получившуюся сумму гауссовским интегралом.

3.2. Идеи доказательств теоремы 3

Итак, пусть дана матрица $M \in \mathbf{M}_r$. Несложными преобразованиями можно получить следующее представление исследуемого выражения:

$$G_c(J_r) - G_c(M) = \sum_{i,u=1}^r m_{iu} \ln(r^2 m_{iu}) - c \ln \frac{1 - Q(M)}{(1 - q)^2}.$$

Для каждого $i = 1, \dots, r$ введем следующие функции:

$$\mathcal{H}_i(M) = \sum_{u=1}^r m_{iu} \ln(r^2 m_{iu}), \\ \mathcal{E}_i(M) = \frac{1}{(1 - q)^2} \left[\sum_{u=1}^r \sum_{s=j+1}^k \binom{k}{s} \sum_{h=0}^{k-s-j-1+h} \sum_{t=0}^{k-s} \binom{k-s}{h} \binom{s}{t} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{r} - m_{iu} \right)^{h+t} (m_{iu})^{s-t} \left(\frac{r-2}{r} + m_{iu} \right)^{k-h-s} - q^2/r \right].$$

Тогда в силу (8) будут выполнены следующие соотношения:

$$\mathcal{H}(J_r) - \mathcal{H}(M) = \sum_{i=1}^r \mathcal{H}_i(M),$$

$$\mathcal{E}(M) - \mathcal{E}(J_r) = \ln \left(1 + \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i(M) \right) \leq \sum_{i=1}^r \mathcal{E}_i(M).$$

В связи с этим удобно рассматривать разности $\mathcal{H}_i(M) - c \mathcal{E}_i(M)$ для всех $i = 1, \dots, r$. Отметим очень важный факт: функции $\mathcal{H}_i(M)$ и $\mathcal{E}_i(M)$ зависят не от всей матрицы, а только лишь от ее i -й строки.

Основная идея анализа состоит в разбиении множества строк матрицы M на центральные, хорошие и плохие в зависимости от максимального значения элемента. Строку с номером i будем называть

- *центральной*, если

$$0 \leq \max_{u=1, \dots, r} m_{iu} < \frac{1}{r} - \frac{2}{r \ln r}.$$

- *хорошей*, если

$$\max_{u=1,\dots,r} m_{iu} \in \left[\frac{1}{r} - \frac{2}{r \ln r}, \frac{1}{r} - r^{-k/2} \ln r \right].$$

• плохой, если

$$\max_{u=1,\dots,r} m_{iu} > \frac{1}{r} - r^{-k/2} \ln r.$$

Следующие три леммы оценивают разности $\mathcal{H}_i(M) - c \cdot \mathcal{E}_i(M)$ для разных типов строк.

Лемма 2. Если r достаточно велико, то для любой центральной строки с номером i выполнено

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(M) - c \cdot \mathcal{E}_i(M) &\geq \\ &\geq \frac{r^2}{4} \sum_{u: m_{iu} < r^{-2}} \left(m_{iu} - \frac{1}{r^2} \right)^2 + \frac{r}{2} \sum_{u: m_{iu} > r^{-2}} \left(m_{iu} - \frac{1}{r^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Лемма 3. Если r достаточно велико, то для любой хорошей строки с номером i выполнено

$$\mathcal{H}_i(M) - c \cdot \mathcal{E}_i(M) \geq \frac{1}{2} r^{-k/2} \ln^2 r.$$

Лемма 4. Если r достаточно велико, то для любой плохой строки с номером i выполнено

$$\mathcal{H}_i(M) - c \cdot \mathcal{E}_i(M) \geq -f(k)r^{-1-j} \ln r,$$

где $f(k) > 0$ — некоторая положительная функция от k .

С помощью лемм 2–4 можно вывести необходимое неравенство (9), если в матрице M есть хотя бы одна центральная строка или одна хорошая. Единственный непокрываемый ими случай — это одни плохие строки в матрице M . Данный случай рассматривается отдельно и именно в нем выводится ограничение (6).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа второго автора выполнена в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grimmett G.R., McDiarmid C.J.* On colouring random graphs // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1975. V. 77. P. 313–324. <https://doi.org/10.1017/S0305004100051124>
2. *Bollobás B.* The chromatic number of random graphs // *Combinatorica.* 1988. V. 8. P. 49–56. <https://doi.org/10.1007/BF02122551>
3. *Łuczak T.* The chromatic number of random graphs // *Combinatorica.* 1991. V. 11. № 1. P. 45–54. <https://doi.org/10.1007/BF01375472>
4. *Łuczak T.* A note on the sharp concentration of the chromatic number of random graphs // *Combinatorica.* 1991. V. 11. № 3. P. 295–297. <https://doi.org/10.1007/BF01205080>
5. *Alon N., Krivelevich M.* The concentration of the chromatic number of random graphs // *Combinatorica.* 1997. V. 17. № 3. P. 303–313. <https://doi.org/10.1007/BF01215914>
6. *Achlioptas D., Naor A.* The two possible values of the chromatic number of a random graph // *Annals of Mathematics.* 2005. V. 162. № 3. P. 1335–1351. <https://doi.org/10.4007/annals.2005.162.1335>
7. *Coja-Oghlan A., Panagiotou K., Steger A.* On the chromatic number of random graphs // *Journal of Combinatorial Theory Series B.* 2008. V. 98. P. 980–993. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2007.11.009>
8. *Kargaltsev S.A., Shabanov D.A., Shaikheeva T.M.* Two values of the chromatic number of a sparse random graph // *Acta Mathematica Universitatis Comenianae.* 2019. V. 88. № 3. P. 849–854.
9. *Coja-Oghlan A., Vilenchik D.* The Chromatic Number of Random Graphs for Most Average Degrees // *International Mathematics Research Notices.* 2015. V. 2016. No.19. P. 5801–5859. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnv333>
10. *Coja-Oghlan A.* Upper-bounding the k -colorability threshold by counting cover // *Electronic Journal of Combinatorics.* 2013. V. 20. № 3. Research paper № 32. <https://doi.org/10.37236/3337>
11. *Schmidt-Pruzan J., Shamir E., Upfal E.* Random hypergraph coloring algorithms and the weak chromatic number // *J. Graph Theory.* 1985. V. 8. P. 347–362. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190090307>
12. *Schmidt J.* Probabilistic analysis of strong hypergraph coloring algorithms and the strong chromatic number // *Discrete Mathematics.* 1987. V. 66. P. 258–277. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(87\)90101-4](https://doi.org/10.1016/0012-365X(87)90101-4)
13. *Shamir E.* Chromatic number of random hypergraphs and associated graphs // *Adv. Comput. Res.* 1989. V. 5. P. 127–142.
14. *Krivelevich M., Sudakov B.* The chromatic numbers of random hypergraphs // *Random Structures and Algorithms.* 1998. V. 12. № 4. P. 381–403. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1098-2418\(199807\)12:4<381::aid-rsa5>3.0.co;2-p](https://doi.org/10.1002/(sici)1098-2418(199807)12:4<381::aid-rsa5>3.0.co;2-p)
15. *Dyer M., Frieze A., Greenhill C.* On the chromatic number of a random hypergraph // *Journal of Combinatorial Theory, Series B.* 2015. V. 113. P. 68–122. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.01.002>
16. *Ayre P., Coja-Oghlan A., Greenhill C.* Hypergraph coloring up to condensation // *Random Structures and Algorithms.* 2019. V. 54. № 4. P. 615–652. <https://doi.org/10.1002/rsa.20824>
17. *Shabanov D.A.* Estimating the r -colorability threshold for a random hypergraph // *Discrete Applied Mathematics.* 2020. V. 282. P. 168–183. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.10.031>
18. *Демидович Ю.А., Шабанов Д.А.* О двух предельных значениях хроматического числа случайного ги-

- перграфа // Теория вероятностей и ее применения. 2022. Т. 67. № 2. С. 223–246.
<https://doi.org/10.1137/S0040585X97T990861>
19. Семенов А.С., Шабанов Д.А. Оценки пороговых вероятностей для свойств раскрасок случайных гиперграфов // Проблемы передачи информации. 2022. Т. 58. № 1. С. 72–101.
<https://doi.org/10.1134/S0032946022010057>
20. Semenov A., Shabanov D. On the weak chromatic number of random hypergraphs // Discrete Applied Mathematics. 2020. V. 276. P. 134–154.
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.03.025>
21. Матвеева Т.Г., Хузиева А.Э., Шабанов Д.А. О сильном хроматическом числе случайных гиперграфов // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502. С. 37–41.
<https://doi.org/10.1134/s1064562422010094>
22. Hatami H., Molloy M. Sharp thresholds for constraint satisfaction problems and homomorphisms // Random Structures and Algorithms. 2008. V. 33. № 3. P. 310–332.
<https://doi.org/10.1002/rsa.20225>

ON THE CONCENTRATION OF VALUES OF j -CHROMATIC NUMBERS OF RANDOM HYPERGRAPHS

I. O. Denisov^a and D. A. Shabanov^{b,c}

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

^b HSE University, Moscow, Russian Federation

^c Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation

Presented by Academician A.N. Shiryayev

The paper deals with the study of the limit distribution of the j -chromatic numbers of a random k -uniform hypergraph in the binomial model $H(n, k, p)$. We consider the sparse case when the expected number of edges is a linear function of the number of vertices n , i.e. is equal to cn for $c > 0$ not depending on n . We prove that for all large enough values of c , the j -chromatic number of $H(n, k, p)$ is concentrated in one or two consecutive numbers with probability tending to 1.

Keywords: random hypergraph, colorings of hypergraphs, j -chromatic number, probability thresholds, second moment method

УДК 62.50

УТОЧНЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЕЕ РЕШЕНИЯ

© 2023 г. А. И. Дивеев^{1,*}

Представлено академиком РАН И.А. Соколовым

Поступило 06.07.2022 г.

После доработки 24.12.2022 г.

Принято к публикации 26.12.2022 г.

Решение задачи оптимального управления в классической постановке представляет собой управление в форме функции времени. Реализация такого решения приводит к разомкнутой системе управления и поэтому не может применяться непосредственно на практике. Считается, что решение классической задачи оптимального управления приводит к получению оптимальной программы управления и программной траектории в пространстве состояний. Для реализации движения объекта управления по программной траектории необходимо построение дополнительной системы стабилизации движения. Задача синтеза системы стабилизации движения по программной траектории и требования, которым должна удовлетворять эта система, не вытекают из классической постановки задачи оптимального управления. Приведена уточненная постановка задачи оптимального управления, которая включает дополнительное требование к оптимальной траектории, и решение которой может быть непосредственно применено на практике в реальном объекте управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, синтез управления, сжимающее отображение

DOI: 10.31857/S2686954322600458, **EDN:** CPZONE

Рассмотрим классическую постановку задачи оптимального управления [1].

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

$$\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f, \quad (4)$$

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}, \quad (5)$$

где \mathbf{x} – вектор состояния, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{u} – вектор управления, U – компактное множество, \mathbf{x}^0 – заданный вектор начального состояния, \mathbf{x}^f – заданный вектор терминального состояния, t_f – время достижения терминального состояния, как правило, не задано, но ограничено, $t_f \leq t^+$, t^+ – заданная положительная величина, J – значение критерия качества управления.

В классической постановке никаких дополнительных требований к управлению, кроме удовлетворения ограничению на управление (2), не предъявляется, поэтому управление ищется как функция времени

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(t) \in U. \quad (6)$$

Если подставить найденное управление (6) в правую часть модели объекта (1), то полученная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(t)) \quad (7)$$

будет иметь частное решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$, которое из начального состояния (3) достигнет терминального состояния (4)

$$\mathbf{x}(t_f, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^f, \quad t_f \leq t^+, \quad (8)$$

с оптимальным значением критерия качества (5).

Математическая модель (7) описывает динамику разомкнутой системы управления, поскольку функция управления (6) не зависит от вектора состояния объекта управления. Математическая модель используется для оценки текущего состояния реального объекта управления. Любая математическая модель дает ошибку при оценке состояния реального объекта. Введем определения.

Определение 1. Математическая модель объекта является качественно подходящей, если в рас-

¹ Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: aidiveev@mail.ru

сматриваемой области пространства состояний она описывает качественные свойства реального объекта.

Если объект устойчив относительно некоторой точки в пространстве состояний, то качественно подходящая математическая модель также устойчива.

Определение 2. Математическая модель объекта гарантированно реализуема, если на интервале $\Delta t > 0$ первоначальная ошибка не возрастает со временем

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(\Delta t) - \mathbf{x}(\Delta t)\| \leq \|\tilde{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0)\|, \quad (9)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ – вектор состояния реального объекта в момент t .

Теорема 1. Если качественно подходящая математическая модель реального объекта в области $X \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет свойство сжимающего отображения и $\mathbf{x}(t_f, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^f \in X$, является неподвижной точкой, то этого достаточно, чтобы она была реализуема в этой области.

Доказательство. Согласно определению 1, математическая модель и реальный объект обладают в области $X \subseteq \mathbb{R}^n$ свойством сжимающего отображения.

Пусть

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (10)$$

модель объекта. Пусть в какой-то момент времени t' из-за неучтенных в модели возмущений реального объекта состояние реального объекта $\tilde{\mathbf{x}}(t')$ не совпадает с состоянием, вычисленным по модели

$$\delta(t') = \|\tilde{\mathbf{x}}(t') - \mathbf{x}(t')\|, \quad (11)$$

где δ – ошибка определения состояния объекта по его модели.

Согласно свойству сжимающего отображения $\forall \Delta t > 0$

$$\begin{aligned} \delta(t' + \Delta t) &= \|\tilde{\mathbf{x}}(t' + \Delta t) - \mathbf{x}(t' + \Delta t)\| \leq \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{x}}(t') - \mathbf{x}(t')\| = \delta(t'). \end{aligned} \quad (12)$$

Следовательно, ошибка не возрастает во времени. Так как $\mathbf{x}^f \in X$ является неподвижной точкой сжимающего отображения, то

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}_f, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^f, \quad (13)$$

где \tilde{t}_f – время достижения неподвижной точки реальным объектом. Тогда в момент

$$t_1 = \max\{t_f, \tilde{t}_f\} \quad (14)$$

выполняются условия

$$\delta(t_1) = \|\tilde{\mathbf{x}}(t_1) - \mathbf{x}(t_1)\| = 0. \quad (15)$$

Ошибка (11) не возрастает во времени и при $\Delta t \geq t_1 - t'$ равна нулю. Модель реализуема согласно определению 2.

Причиной нереализуемости решения задачи оптимального управления является то, что получаемая в результате решения модель разомкнутой системы управления описывает объект управления с ошибкой, которая может расти во времени из-за возмущений, например по начальным условиям. Для обеспечения реализуемости решения задачи оптимального управления в классическую постановку задачи введены некоторые уточнения. Вместо соотношения (6) управление ищем в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in U, \quad (16)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

После подстановки функции управления (16) в правые части модели (1) получаем систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)). \quad (17)$$

Частное решение системы (17) из начального состояния (3) достигает терминальное состояние (4) в момент t_f (8) с оптимальным значением критерия качества (5).

Введем также дополнительные условия, которым должна удовлетворять оптимальная траектория, т.е. частное решения уравнения (17) из начального состояния (3). Для оптимального частного решения $\mathbf{x}^*(t, \mathbf{x}^0)$ должна существовать окрестность, определяемая параметром $\delta^*(t) > 0$, $0 \leq t \leq t^+$, такая, что, если для другого частного решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$ системы (17) из другого начального состояния

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{y} \neq \mathbf{x}^0, \quad (18)$$

в момент t' , $0 \leq t' < t^+$, выполняются условия

$$\|\mathbf{x}(t', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t', \mathbf{y})\| \leq \delta^*(t'), \quad (19)$$

то $\exists \epsilon^* > 0$ и $\exists t'' > t'$, $0 \leq t'' \leq t^+ - t'$ такие, что должно выполняться неравенство

$$\|\mathbf{x}(t'', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'', \mathbf{y})\| < \epsilon^*. \quad (20)$$

Тогда в области, определяемой параметром ϵ^* , выполняются условия: $\forall \Delta t', \Delta t'', 0 \leq \Delta t' < \Delta t''$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t'' + \Delta t'', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{y})\| < \\ < \|\mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{y})\| \leq \epsilon^*. \end{aligned} \quad (21)$$

Определение 3. Задача (1)–(5), (16)–(21) называется расширенной задачей оптимального управления.

Цель формулировки расширенной постановки задачи оптимального управления состоит в обес-

печение возможности непосредственного применения ее решения в реальном объекте управления. Параметр $\delta^*(t) > 0$ определяет область в пространстве, из которой объект попадает в другую, возможно, большую область, определяемую параметром $\varepsilon^* > 0$, где выполняются условия сжимающего отображения. Величина $\delta^*(t)$ указывает на сложность решения расширенной задачи оптимального управления. Если $\delta^*(t) = 0$, то получаем задачу оптимального управления в классической постановке. Если $\delta^*(t) = \infty$, то получаем самый сложный случай, когда необходимо решить задачу общего синтеза управления [2] для всего пространства состояний.

Теорема 2. Система дифференциальных уравнений, частные решения которой обладают свойством (16)–(21), при $\delta^*(0) > 0$ обладают свойством сжимающего отображения в области пространства состояний, определяемой параметром ε^* .

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,1})$ и $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,2})$ – два частных решения дифференциального уравнения из двух разных начальных условий $\mathbf{x}^{0,1} \neq \mathbf{x}^{0,2} \neq \mathbf{x}^0$. Пусть в момент $t' = 0$ выполняются условия

$$\|\mathbf{x}(0, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(0, \mathbf{x}^{0,1})\| \leq \delta^*(0), \quad (22)$$

$$\|\mathbf{x}(0, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(0, \mathbf{x}^{0,2})\| \leq \delta^*(0). \quad (23)$$

Тогда в момент $t'' > t' = 0$

$$\|\mathbf{x}(t'', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'', \mathbf{x}^{0,1})\| \leq \varepsilon^*, \quad (24)$$

$$\|\mathbf{x}(t'', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'', \mathbf{x}^{0,2})\| \leq \varepsilon^*. \quad (25)$$

Согласно условию (21) $\exists \Delta t'' > \Delta t' \geq 0$, что

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}(t'' + \Delta t'', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'' + \Delta t'', \mathbf{x}^{0,1})\| < \\ & < \|\mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{x}^{0,1})\| \leq \varepsilon^*, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}(t'' + \Delta t'', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'' + \Delta t'', \mathbf{x}^{0,2})\| < \\ & < \|\mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{x}^{0,2})\| \leq \varepsilon^*. \end{aligned} \quad (27)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}(t'' + \Delta t'', \mathbf{x}^{0,1}) - \mathbf{x}(t'' + \Delta t'', \mathbf{x}^{0,2})\| < \\ & < \|\mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{x}^{0,1}) - \mathbf{x}(t'' + \Delta t', \mathbf{x}^{0,2})\|. \end{aligned} \quad (28)$$

Система уравнений описывает сжимающее отображение в области, определяемой параметром $\varepsilon^* > 0$.

Рассмотрим методы решения расширенной задачи оптимального управления. Одним из подходов к решению расширенной задачи оптимального управления является решение задачи синтеза управления. В задаче синтеза управления задана модель объекта управления (1), ограничения

на управления (2), начальные условия в виде области пространства состояний

$$X_0 \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (29)$$

Заданы терминальное состояние (4) и критерий качества управления (5). Необходимо найти управление в форме функции

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}^f - \mathbf{x}) \in U \subseteq \mathbb{R}^m. \quad (30)$$

Если подставить найденную функцию управления (30) в модель объекта управления (1), то получим систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}^f - \mathbf{x})), \quad (31)$$

любое частное решение которой из любого начального условия из заданной области (29)

$$\mathbf{x}^0 \in X_0 \subseteq \mathbb{R}^n \quad (32)$$

за конечное время $t_f(\mathbf{x}^0) \leq t^+$ попадет в терминальное состояние (4) с оптимальным значением критерия качества (5).

В данном случае после решения задачи синтеза управления получаем не одну оптимальную траекторию, а множество оптимальных траекторий из любого начального состояния из области (29). В этом случае область ε^* со свойствами сжимающего отображения может оказаться малой окрестностью терминального состояния (4). Универсальных методов решения задачи синтеза управления нет. Аналитические методы решения задачи синтеза, метод бэкстеппинг [3] и аналитическое конструирование агрегированных регуляторов (АКАР) [4] привязаны к виду модели объекта управления и направлены на обеспечения его устойчивости по Ляпунову. В настоящее время для решения задачи синтеза управления используют машинное обучение численными методами символьной регрессии [5].

Методы символьной регрессии кодируют математическое выражение в форме специального кода и ищут оптимальное решение на пространстве кодов с помощью специального генетического алгоритма, в котором изменены основные операции скрещивания и мутации для работы с соответствующим кодом символьной регрессии. Для кодирования математического выражения первоначально устанавливается алфавит элементов кода. В алфавит входят элементарные функции и аргументы искомого математического выражения. Каждый элемент алфавита в общем случае кодирует элементарную функцию с помощью целочисленного вектора из двух компонент

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2]^T, \quad (33)$$

где a_1 – количество аргументов элементарной функции, a_2 – номер функции. Если $a_1 = 0$, то это

код аргумента искомого математического выражения.

Код математического выражения любого метода символьной регрессии представляет собой упорядоченное множество упорядоченных множеств кодов элементов (33) алфавита

$$G = (G_1, \dots, G_L) = (G_1 = (\mathbf{a}^{1,1}, \dots, \mathbf{a}^{1,M_1}), \dots, G_L = (\mathbf{a}^{L,1}, \dots, \mathbf{a}^{L,M_L})), \quad (34)$$

где

$$\mathbf{a}^{i,j} = [a_1^{i,j} \ a_2^{i,j}]^T, \quad i = 1, \dots, M_j, \quad j = 1, \dots, L. \quad (35)$$

Операция скрещивания кодов математических выражений в форме (34), (35) выполняется в соответствии с правилами кодирования, чтобы полученные в результате скрещивания коды имели правильную запись и могли быть декодированы. Например, код генетического программирования [5] в общем случае представляет собой граф в форме дерева, на листьях которого расположены коды аргументов, которые можно в коде (33) рассматривать как функции без аргументов, $a_1 = 0$. При скрещивании выполняется операция обмена ветвей двух отобранных деревьев. Скрещивание для кодов в форме (34) означает обмен двух подмножеств элементов кода. При этом необходимо найти по первому элементу обмениваемой ветви дерева конечный код подмножества, который соответствует последнему элементу этой ветви дерева, при этом длины кодов после операции скрещивания могут измениться.

Основным недостатком выполнения операции скрещивания для кодов в форме (34) является сильное изменение кодов полученных новых возможных решений. Коды “потомков” часто оказываются не похожими на коды их “родителей”. В результате операция скрещивания становится операцией генерации новых кодов, при этом не соблюдаются свойство наследования и принцип эволюционного поиска. Поиск решения в этом случае становится прямым случайным поиском, что не приемлемо для поиска на нечисловом пространстве.

Для эффективного поиска на пространстве кодов, сохранения свойства наследования и условий эволюции используется принцип малых вариаций базисного решения [5, 6], согласно которому множество возможных решений кодируется с помощью кода в форме (34) одного базисного возможного решения и упорядоченных множеств кодов малых вариаций этого базисного решения.

$$W = \{W_1, \dots, W_H\} = \{W_1 = (\mathbf{w}^{1,1}, \dots, \mathbf{w}^{1,d}), \dots, W_H = (\mathbf{w}^{H,1}, \dots, \mathbf{w}^{H,d})\}, \quad (36)$$

где

$$\mathbf{w}^{i,j} = [w_1^{i,j} \ \dots \ w_k^{i,j}]^T, \quad i = 1, \dots, H, \quad j = 1, \dots, d, \quad (37)$$

вектор кода малой вариации, H – количество возможных решений, d – длина вариации.

Компоненты вектора кода малой вариации указывают тип и место изменения кода базисного решения. Например, w_1 – номер подмножества в коде (34), w_2 – номер элемента этого подмножества, w_3 – номер элемента в коде элементарной функции и w_4 – новое значение элемента,

$$a_{w_3}^{w_1, w_2} = w_4. \quad (38)$$

Операция скрещивания в данном случае выполняется по правилам классического генетического алгоритма над упорядоченными множествами кодов малых вариаций. Отбираются два “родителя”

$$W_\alpha = (\mathbf{w}^{\alpha,1}, \dots, \mathbf{w}^{\alpha,d}), \quad W_\beta = (\mathbf{w}^{\beta,1}, \dots, \mathbf{w}^{\beta,d}), \quad (39)$$

находится случайно точка скрещивания $k \in \{1, \dots, d\}$ и обмениваются элементы после точки скрещивания. В результате получаем два новых возможных решения – “потомка”

$$W_{H+1} = (\mathbf{w}^{\alpha,1}, \dots, \mathbf{w}^{\alpha,k}, \mathbf{w}^{\beta,k+1}, \dots, \mathbf{w}^{\beta,d}), \quad (40)$$

$$W_{H+2} = (\mathbf{w}^{\beta,1}, \dots, \mathbf{w}^{\beta,k}, \mathbf{w}^{\alpha,k+1}, \dots, \mathbf{w}^{\alpha,d}).$$

Задача машинного обучения всегда связана с поиском неизвестной функции,

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \quad (41)$$

где \mathbf{y} – вектор значений функции, $\mathbf{y} \in Y \subseteq \mathbb{R}^r$, \mathbf{x} – вектор аргументов, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{q} – вектор постоянных параметров, $\mathbf{q} \in Q \subseteq \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$, либо эта функция при обучении аппроксимирует некоторый набор данных, который называется обучающей выборкой,

$$J = \sum_{i=1}^N \|\hat{\mathbf{y}}^i - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}^i, \mathbf{q})\|, \quad (42)$$

где $\hat{Y} = \{\hat{\mathbf{y}}^1, \dots, \hat{\mathbf{y}}^N\}$ – обучающая выборка, либо она непосредственно используется для минимизации некоторого заданного функционала

$$J = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}(t), \mathbf{q})) dt, \quad (43)$$

t_f – время достижения цели.

Особенность машинного обучения состоит в том, что при обучении не требуется точного достижения минимума критерия (42) или (43)

$$J_1 \leq \min J + \Delta^*, \quad (44)$$

где Δ^* – заданная положительная величина, которая определяет достижимое при обучении значение функционала.

Для критерия (42) минимальное значение равно нулю. Для критерия (43) оно может быть неизвестно, тогда вместо $\min J$ следует использовать предельное значение критерия J^-

$$J_1 \leq J^- + \Delta^*, \quad (45)$$

где $J^- \leq \min J$.

Если в результате обучения найденная функция (41) должна приобрести некоторые свойства, то доказательство наличия этих свойств подтверждается моделированием

$$J_2 = \sum_{i=1}^K \vartheta(\varphi(\alpha(\mathbf{x}^i, \mathbf{q}))) = 0, \quad (46)$$

где $\vartheta(z)$ – функция Хэвисайда,

$$\vartheta(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0 \\ 0 & \text{– иначе} \end{cases}, \quad (47)$$

$\varphi(\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{q}))$ – условие, которое определяет наличие свойства функции

$$\varphi(\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{q})) \leq 0, \quad (48)$$

K – количество экспериментов с выполненным условием (48).

Переформулируем задачу синтеза управления так, чтобы при ее решении использовать машинное обучение методом символьной регрессии. Задана математическая модель объекта управления (1), ограничение на управление (2). Задано множество точек начальных состояний

$$\tilde{X}_0 = \{\mathbf{x}^{0,1}, \dots, \mathbf{x}^{0,K}\}. \quad (49)$$

Задано терминальное состояние (4). Задан критерий качества управления

$$J_3 = \sum_{i=1}^K \left(p_1 \|\mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i})\| + \int_0^{t_{f,i}} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \right) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}, \quad (50)$$

где p_1 – заданный весовой коэффициент,

$$t_{f,i} = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ и } \|\mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i})\| \leq \varepsilon \\ t^+, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (51)$$

t^+ , ε – заданные положительные величины. Необходимо найти управление в форме (30), чтобы минимизировать функционал (50) для любого количества K начальных условий из заданной области (49). Постановка задачи включает функционал, который вместе с минимизацией заданного критерия (5) учитывает проверку свойства устойчивости терминального состояния. Решение задачи синтеза управления обеспечивает за счет свойства устойчивости терминального состояния

свойство сжимающего отображения в окрестности этого терминального состояния.

Другим подходом к решению расширенной задачи оптимального управления является метод синтезированного управления [7]. Согласно этому методу, первоначально независимо от вида функционала (5) решается задача синтеза управления для обеспечения устойчивости относительно некоторой точки в пространстве состояний.

В задаче задана модель (1), множество точек начальных условий (49) в некоторой области (29) пространства состояний

$$\tilde{X}_0 \subset X_0, \quad (52)$$

задано терминальное состояние в той же области

$$\mathbf{x}^* \in X_0, \quad \mathbf{x}^* \notin \tilde{X}_0, \quad (53)$$

задан функционал качества

$$J_4 = \sum_{i=1}^K (p_1 \|\mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i})\| + t_{f,i}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}. \quad (54)$$

Необходимо найти управление в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \in U, \quad (55)$$

чтобы минимизировать функционал (54).

На втором этапе рассматриваем модель замкнутой системы управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})). \quad (56)$$

Для этой системы решаем задачу оптимального управления с критерием качества (5).

$$J_5 = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})) dt \rightarrow \min_{z^*}. \quad (57)$$

В качестве управления используем вектор $\mathbf{x}^* = [x_1^* \dots x_n^*]^T$, определяющий положение устойчивой точки равновесия в пространстве состояний с ограничением (55). В синтезированном управлении в окрестности оптимальной траектории всегда существует устойчивая точка равновесия, к которой стремится объект управления, поэтому траектория движения объекта всегда находится в области, где имеются свойства сжимающего отображения, т.е. выполняются требования расширенной задачи оптимального управления.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимального управления группой из двух мобильных роботов с дифференциальным приводом [8]. Два одинаковых мобильных робота должны поменяться местами, не столкнувшись друг с другом в процессе движения за минимальное время. Математические модели роботов имеют следующий вид:

$$\dot{x}_1^j = 0.5(u_1^j + u_2^j) \cos(x_3^j), \quad (58)$$

$$\dot{x}_2^j = 0.5(u_1^j - u_2^j) \sin(x_3^j), \quad (59)$$

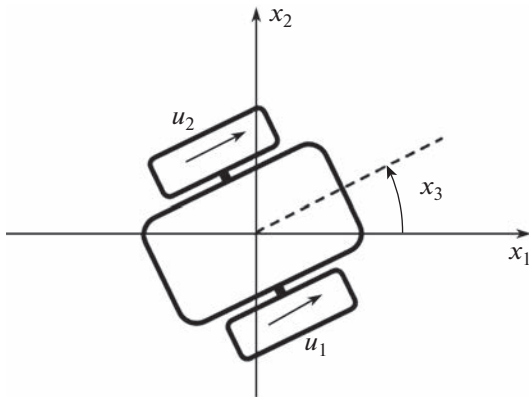


Рис. 1. Схема мобильного робота с дифференциальным приводом.

$$\dot{x}_3^j = 0.5(u_1^j - u_2^j), \quad (60)$$

$$-10 = u_i^- \leq u_i^j \leq u_i^+ = 10, \quad i = 1, 2, \quad (61)$$

$j = 1, 2.$

Схема мобильных роботов с дифференциальным приводом с указанием компонент вектора состояний приведена на рис. 1 [8].

Для системы (58)–(61) заданы начальные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(0) = \mathbf{x}^{1,0} &= [0 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{x}^2(0) = \mathbf{x}^{2,0} &= [10 \ 10 \ \pi]^T. \end{aligned} \quad (62)$$

Заданы терминальные состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1(t_f) = \mathbf{x}^{1,f} &= [10 \ 10 \ 0]^T, \\ \mathbf{x}^2(t_f) = \mathbf{x}^{2,f} &= [0 \ 0 \ \pi]^T, \end{aligned} \quad (63)$$

где $t_{j,f}$ – время достижения терминального состояния роботом j не задано, но ограничено и вычисляется из следующего соотношения

$$t_{j,f} = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ и } \|\mathbf{x}^{j,f} - \mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon_0, \\ t^+ & - \text{иначе} \end{cases}, \quad (64)$$

$$t^+ = 2.8, \varepsilon_0 = 0.01, j = 1, 2.$$

Задан критерий качества

$$\begin{aligned} J_6 = p_1 \sum_{j=1}^2 \|\mathbf{x}^{j,f} - \mathbf{x}^j(t_{j,f})\| + t_f + \\ + p_2 \sum_{j=1}^2 \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^2 \vartheta(\varphi_i(\mathbf{x}^j)) dt + \\ + p_3 \int_0^{t_f} \theta(\chi(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)) dt \rightarrow \min_{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in U}, \end{aligned} \quad (65)$$

где $p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 3, t_f = \max\{t_{1,f}, t_{2,f}\},$

$$\varphi_i(\mathbf{x}^j) = r_i - \sqrt{(x_1^j - x_{1,i})^2 + (x_2^j - x_{2,i})^2}, \quad i = 1, 2, \quad (66)$$

$$r_1 = 1, r_2 = 1, x_{1,1} = 1, x_{1,2} = 2.5, x_{2,1} = 4, x_{2,2} = 2.5, j = 1, 2,$$

$$\chi(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = r_0 - \sqrt{(x_1^1 - x_1^2)^2 + (x_2^1 - x_2^2)^2}, \quad (67)$$

$$r_0 = 1.$$

Первоначально была решена задача оптимального управления в классической постановке. Для решения задачи был использован прямой подход, в котором функция управления была аппроксимирована кусочно-линейной функцией времени

$$u_i^j = \begin{cases} u_i^+, & \text{если } \tilde{u}_i^j \geq u_i^+ \\ u_i^-, & \text{если } \tilde{u}_i^j \leq u_i^- \\ \tilde{u}_i^j & - \text{иначе} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^j = (q_{k+1+M(i-1)+(j-1)2(M+1)} - q_{k+M(i-1)+(j-1)2(M+1)}) \times \\ \times \frac{t - k\Delta t}{\Delta t} + q_{k+M(i-1)+(j-1)2(M+1)}, \end{aligned} \quad (69)$$

$i = 1, 2, j = 1, 2, k = 1, \dots, M + 1, M$ – количество интервалов, Δt – временной интервал, $\Delta t = 0.2, M = \lfloor t^+ / \Delta t \rfloor = \lfloor 2.8 / 0.2 \rfloor = 14.$

В каждом интервале необходимо найти по два значения на границах интервала для каждого управления. Итого необходимо найти $(2 + 2) \times (14 + 1) = 4 \times 15 = 60$ значений параметров, $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_{60}]^T$. Многочисленные исследования по сравнению градиентных алгоритмов с эволюционными для решения сложных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями показали преимущество последних [9], так как фазовые ограничения рассматриваемого типа приводят к неунимодальности функционала. Для поиска решения был использован эволюционный гибридный алгоритм [10]. В результате были получены кусочно-линейные аппроксимации функций управления для каждого робота, определяемые значением вектора параметров. Найденное значение вектора параметров приведено в Приложении 1.

На рис. 2 представлены оптимальные траектории движения роботов на горизонтальной плоскости. На рисунке сплошная линия – траектория первого робота, пунктирная линия – траектория второго робота. Красные окружности обозначают фазовые ограничения. Как видно из рис. 2, оба робота достигают терминального состояния и не нарушают фазовых ограничений. Значение функционала (65) для найденного оптимального решения составило величину $J_6 = 2.8101.$

Далее данная задача была решена методом синтезированного управления. Первоначально

решена задача синтеза управления для каждого объекта с целью обеспечения устойчивости относительно точки в пространстве состояний. Для этой цели сформируем множество из 27 начальных состояний

$$\hat{X}_0 = \{x^{0,i+(j-1)3+(k-1)9} = [d_1 + (i-1)\Delta_1 \ d_2 + (j-1)\Delta_2 \ d_3 + (k-1)\Delta_3]^T, \quad (70)$$

где $d_1 = -2.5$, $d_2 = -2.5$, $d_3 = -5\pi/12$, $\Delta_1 = 2.5$, $\Delta_2 = 2.5$, $\Delta_3 = 5\pi/12$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Задаем одно терминальное состояние

$$x^* = [0 \ 0 \ 0]^T. \quad (71)$$

Необходимо найти функцию управления вида (55), обеспечивающую минимум следующего критерия

$$J_7 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (p_i \|x^* - x(t_{f,r})\| + t_{f,r}) \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (72)$$

где $t_{f,r}$ – время достижения терминального состояния (71) определяется из соотношения (51) с $t^+ = 2$, $\epsilon_0 = 0.01$, $r = i + (j-1)3 + (k-1)9$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Для решения задачи использован метод сетевого оператора [5], который нашел следующую функцию управления:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+, & \text{если } \hat{u}_i \geq u_i^+ \\ u_i^-, & \text{если } \hat{u}_i \leq u_i^- \\ \hat{u}_i & \text{иначе} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \quad (73)$$

где

$$\hat{u}_1 = A^{-1} + \sqrt[3]{A} + \text{sgn}(q_3(x_3^* - x_3)) \times \quad (74)$$

$$\times \exp(-|q_3(x_3^* - x_3)|) + \text{sgn}(x_3^* - x_3) + \mu(B),$$

$$\hat{u}_2 = \hat{u}_1 + \sin(\hat{u}_1) + \arctan(H) + \mu(B) + C - C^3, \quad (75)$$

$$A = \tanh(D) + \left(B + \sqrt[3]{x_1^* - x_1} \right)^3 +$$

$$+ C + \sin(q_3(x_3^* - x_3)),$$

$$B = \text{sgn}(\text{sgn}(x_1^* - x_1)q_2(x_2^* - x_2)) \times$$

$$\times \exp(-|\text{sgn}(x_1^* - x_1)q_2(x_2^* - x_2)|) +$$

$$+ G + \sin(x_1^* - x_1) + \tanh(G) + x_1^* - x_1,$$

$$C = \text{sgn}(\text{sgn}(x_1^* - x_1)q_2(x_2^* - x_2)) \times$$

$$\times \exp(-|\text{sgn}(x_1^* - x_1)q_2(x_2^* - x_2)|) +$$

$$+ \sin(x_1^* - x_1),$$

$$D = H + C - C^3 + \text{sgn}(q_1(x_1^* - x_1)) +$$

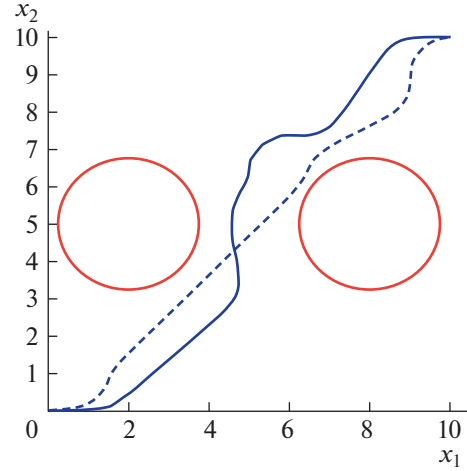


Рис. 2. Оптимальные траектории движения роботов по горизонтальной плоскости.

$$+ \arctan(q_1) + \vartheta(x_3^* - x_3),$$

$$G = \text{sgn}(x_1^* - x_1)q_2(x_2^* - x_2) +$$

$$+ q_3(x_3^* - x_3) + \tanh(q_1(x_1^* - x_1)),$$

$$H = \arctan(q_1(x_1^* - x_1)) + \text{sgn}(W)\sqrt{|W|} +$$

$$+ W + V + 2\text{sgn}(W + \tanh(V)) +$$

$$+ \sqrt[3]{W + \tanh(V)} + \sqrt[3]{x_1^* - x_1} +$$

$$+ \text{sgn}(x_1^* - x_1)\sqrt{|x_1^* - x_1|} + \sqrt[3]{x_1^* - x_1} + \tanh(V),$$

$$W = \text{sgn}(x_1^* - x_1) + \text{sgn}(q_2(x_2^* - x_2)) \times$$

$$\times \text{sgn}(x_1^* - x_1) \tanh(x_1^* - x_1),$$

$$V = q_3(x_3^* - x_3) + \text{sgn}(x_1^* - x_1)q_2(x_2^* - x_2) +$$

$$+ \tanh(x_1^* - x_1),$$

$$\mu(\alpha) = \text{sgn}(\alpha) \min\{1, |\alpha|\}, \quad \tanh(\alpha) = \frac{1 - \exp(-2\alpha)}{1 + \exp(-2\alpha)},$$

$$q_1 = 14.7288, \quad q_2 = 2.0271, \quad q_3 = 4.0222.$$

На втором этапе решаем задачу оптимального управления, в которой необходимо найти кусочно-постоянную функцию времени

$$x_i^{j*,k} = q_{i+(k-1)3+(j-1)M}, \quad (k-1)\Delta t \leq t < k\Delta t, \quad (76)$$

где $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, M$, M – число интервалов времени, $\Delta t = 0.4$, $M = \lceil t^+ / \Delta t \rceil = \lfloor 2.8 / 0.4 \rfloor = 7$. Всего необходимо найти вектор из $6 \times 7 = 42$ параметров для оптимизации функционала

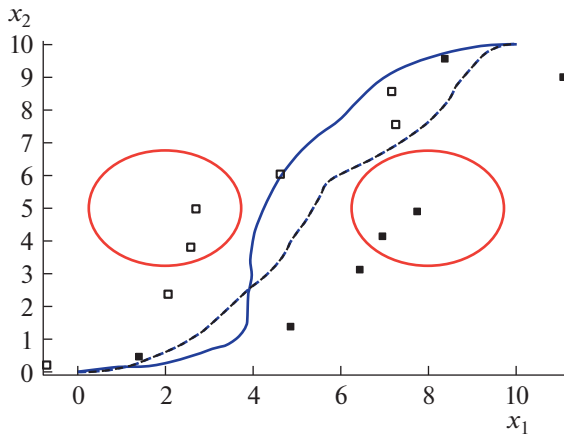


Рис. 3. Оптимальные траектории для синтезированного управления.

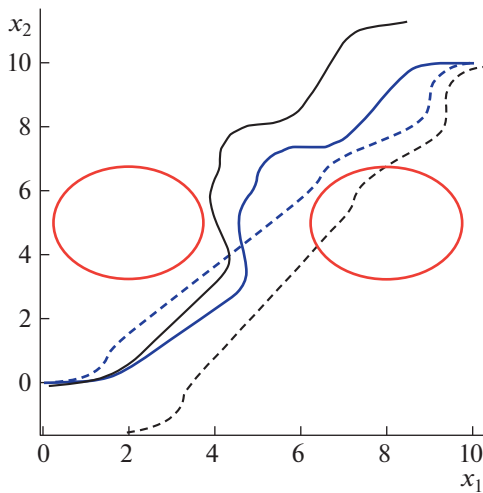


Рис. 4. Возмущенные и оптимальные траектории для прямого управления.

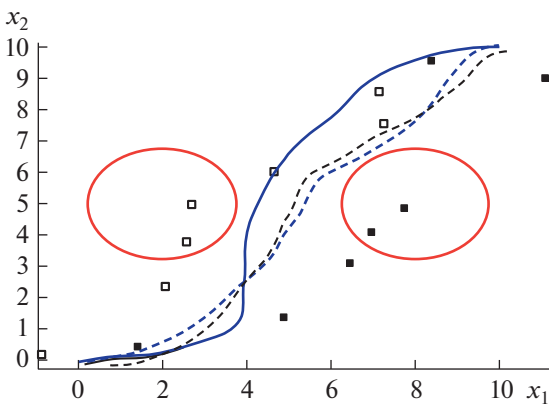


Рис. 5. Возмущенные и оптимальные траектории для синтезированного управления.

$$\begin{aligned}
 J_8 = & p_1 \sum_{j=1}^2 \|x^{j,f} - x^j(t_{j,f})\| + t_f + \\
 & + p_2 \sum_{j=1}^2 \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^2 \vartheta(\varphi_i(x^j)) dt + \\
 & + p_3 \int_0^{t_f} \theta(\chi(x^1, x^2)) dt \rightarrow \min_{x^{1,*}, x^{2,*}}.
 \end{aligned} \tag{77}$$

Для решения задачи был использован тот же гибридный эволюционный алгоритм [10].

На рис. 3 приведены оптимальные траектории движения мобильных роботов на плоскости для найденного оптимального управления. Значение функционала для полученного решения равно $J_8 = 2.9283$. Значения найденных оптимальных параметров приведены в приложении 2. На рис. 3 в виде малых квадратов приведены проекции на плоскость $\{x_1, x_2\}$ найденных оптимальных значений векторов управлений, черные квадраты – проекции точек стабилизации первого робота $x^{1,*k} = [x_1^{1,*k} \ x_2^{1,*k} \ x_3^{1,*k}]^T$, белые квадраты – проекции точек стабилизации второго робота $x^{2,*k} = [x_1^{2,*k} \ x_2^{2,*k} \ x_3^{2,*k}]^T, k = 1, \dots, 7$.

Для сравнения полученных результатов начальные состояния объектов управления были подвергнуты случайным возмущениям. Во всех испытаниях траектории, полученные синтезированным управлением, сохраняли характер движения. Значение функционала при возмущениях синтезированного управления не сильно отличалось от оптимального. Те же возмущения при прямом управлении существенно меняли характер движения и увеличивали значение функционала.

На рис. 4 и 5 приведены возмущенные траектории движения для прямого и синтезированного управлений для одних и тех же начальных условий

$$x^{0,1} = [0.15 \ -0.1 \ 0.15]^T, \quad x^{0,2} = [10.2 \ 9.88 \ 3.3]^T.$$

На рис. 4, 5 приведены синим цветом для сравнения также оптимальные невозмущенные траектории. Как видно из результатов эксперимента, возмущенные траектории прямого управления имеют существенную ошибку достижения терминальных состояний. Значение функционала для возмущенного решения для прямого управления составило $J_6 = 7.625$, т.е. увеличилось более, чем на 170%. Возмущенные траектории для синтезированного управления незначительно отличаются от оптимальных. Для первого робота возмущенная и оптимальная траектории практически совпали. Значение функционала для возмущенного решения для синтезированного управления

составило $J_8 = 4.11$, т.е. увеличилось на 40%, по-видимому, из-за нарушений динамических фазовых ограничений (67).

В результате решения расширенной задачи оптимального управления была найдена функция управления в форме (16), которая является кусочно-постоянной функцией времени и зависит от координат вектора пространства состояний. Найденная функция управления на каждом определенном временном интервале обеспечивает для модели замкнутой системы управления

наличие устойчивой точки равновесия в пространстве состояний, что приводит к выполнению условий (20), (21), наличию окрестности у оптимального решения со свойствами сжимающего отображения. Экспериментально подтверждено, что найденное решение расширенной задачи оптимального управления существенно менее чувствительно к возмущениям модели, чем прямое решение классической задачи оптимального управления.

Приложение 1

Оптимальные значения параметров для прямого метода

$$\mathbf{q} = [15.7490 \ 15.4717 \ 14.3902 \ 6.0419 \ 10.3588 \ 5.9336 \ -0.1257 \ 8.7810 \\ -16.5382 \ -0.0040 \ 3.5222 \ 11.1793 \ 15.4434 \ -18.1304 \ 19.9967 \ 12.0334 \\ -0.5850 \ 17.2859 \ 5.7742 \ -4.0897 \ 14.5804 \ 6.9570 \ -17.6313 \ 15.2778 \\ 18.8768 \ -16.5075 \ 0.3253 \ 16.7574 \ 3.4849 \ 19.9379 \ -0.4417 \ 19.9998 \\ 3.7046 \ -6.5899 \ 10.1436 \ 10.6777 \ -2.8380 \ 18.2116 \ 15.2737 \ 19.2273 \\ 7.6933 \ -16.2777 \ -0.9072 \ 0.0478 \ 5.5856 \ -0.4617 \ -19.6399 \ -4.8071 \\ 15.3430 \ 11.5493 \ 0.0603 \ 4.9952 \ 16.3146 \ 15.9367 \ 19.9823 \ -4.5805 \\ 5.9542 \ -15.3081 \ 19.5269 \ 4.9039]^T$$

Приложение 2

Оптимальные значения параметров для синтезированного управления

$$\mathbf{x}^{1*,1} = [1.4057 \ 0.4520 \ -0.1663]^T, \\ \mathbf{x}^{2*,1} = [7.2674 \ 7.5531 \ 3.1760]^T, \\ \mathbf{x}^{1*,2} = [4.8571 \ 1.3882 \ -0.1167]^T, \\ \mathbf{x}^{2*,2} = [7.1637 \ 8.5559 \ 4.1323]^T, \\ \mathbf{x}^{1*,3} = [6.9637 \ 4.1181 \ 0.6035]^T, \\ \mathbf{x}^{2*,3} = [4.6354 \ 6.0315 \ 3.3282]^T, \\ \mathbf{x}^{1*,4} = [6.4364 \ 3.12121 \ 1.5037]^T, \\ \mathbf{x}^{2*,4} = [2.6965 \ 4.9781 \ 4.1777]^T, \\ \mathbf{x}^{1*,5} = [7.7471 \ 4.9075 \ 1.5244]^T, \\ \mathbf{x}^{2*,5} = [2.5864 \ 3.8087 \ 4.1210]^T, \\ \mathbf{x}^{1*,6} = [8.3708 \ 9.5678 \ 0.1377]^T, \\ \mathbf{x}^{2*,6} = [2.0666 \ 2.3788 \ 4.3185]^T,$$

$$\mathbf{x}^{1*,7} = [11.1035 \ 9.0000 \ 0.4429]^T,$$

$$\mathbf{x}^{2*,7} = [-0.7062 \ 0.2167 \ 3.2446]^T.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 23-29-00339 “Исследование расширенной задачи оптимального управления и разработка численных методов ее решения”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. Наука. Главное издание физико-математической литературы. 1983. 392 с.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука. Главное издание физико-математической литературы. 1969. 408 с.
3. Халил Х.К. Нелинейные системы. Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2009. 814 с.
4. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами. Теория системного анализа. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ” 2012. 237 с.
5. Diveev A.I., Shmalko E.Yu. Machine learning Control by Symbolic Regression. Cham, Switzerland, Springer,

2021. 155 p. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-83213-1>
6. Diveev A.I., Sofronova E.A. Universal Approach to Solution of Optimization Problems by Symbolic Regression // Applied Science. 2021. V. 11. P. 5081.
 7. Diveev A., Shmalko E. Yu., Serebrenny V. Zentay P. Fundamentals of Synthesized Optimal Control // Mathematics. 2021. V. 9. P. 21.
 8. Dhaouadi R., Abu Hatab A. Dynamic Modelling of Differential-Drive Mobile Robots using Lagrange and Newton-Euler Methodologies: A Unified Framework // Advances in Robotics A & Automation. 2013. V. 2. Issue 2. P. 1–7.
 9. Дивеев А.И., Константинов С.В. Исследование практической сходимости эволюционных алгоритмов оптимального программного управления колесным роботом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. Т. 57. № 4. С. 80–106.
 10. Дивеев А.И. Гибридный эволюционный алгоритм для решения задачи оптимального управления // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. 2021. № 23. С. 3–12.

REFINEMENT OF OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR PRACTICAL IMPLEMENTATION OF ITS SOLUTION

A. I. Diveev^a

^a Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS I.A. Sokolov

The solution of the optimal control problem in the classical formulation is control in the form of a function of time. The implementation of such a solution leads to an open control system and therefore cannot be applied directly in practice. It is believed that solving the classical optimal control problem leads to an optimal control program and program trajectory in state space. To implement the movement of the control object along the program trajectory, it is necessary to build an additional movement stabilization system. The problem of synthesizing a system for stabilizing movement along a program trajectory and the requirements that this system should meet do not arise from the classical setting of the optimal control problem. An updated statement of the optimal control problem is given, which includes an additional requirement for an optimal trajectory, and the solution of which can be directly applied in practice in a real control object.

Keywords: optimal control, control synthesis, contracting mapping

УДК 519.175.4

СЛАБО НАСЫЩЕННЫЕ ПОДГРАФЫ СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

© 2023 г. О. И. Калинин^{1,*}, Б. Тайфе-Реза^{2,**}, М. Е. Жуковский^{1,***}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 28.11.2022 г.

После доработки 11.12.2022 г.

Принято к публикации 21.12.2022 г.

В работе исследуется значение числа слабого насыщения случайного графа. Мы доказали стабильность числа слабого насыщения для некоторых паттерн-графов, а также доказали асимптотическую стабильность для всех паттерн-графов.

Ключевые слова: случайный граф, число слабого насыщения, бутстрап перколяция

DOI: 10.31857/S268695432370008X, EDN: STARUK

Пусть F, G – некоторые графы, а $H \subset G$ – остоновый подграф G . Граф H слабо F -насыщен в G , если существует последовательность графов $H = H_0 \subset \dots \subset H_m = G$ такая, что каждый граф H_i получен из H_{i-1} добавлением ребра, которое принадлежит некоторой копии F в H_i . Иначе говоря, все ребра графа $G \setminus H$ могут быть добавлены одно за другим таким образом, что при каждом добавлении создается хотя бы одна новая копия F . Наименьшее количество ребер в слабо F -насыщенном графе в G называется *числом слабого F -насыщения графа G* и обозначается $\text{wsat}(G, F)$. Это понятие было впервые предложено Боллобашем в 1968 г. в работе [3].

Точное значение числа слабого насыщения $\text{wsat}(K_n, K_s)$ (как обычно, K_n – полный граф на n вершинах) было найдено Ловасом в работе [9]: при всех $n \geq s \geq 2$

$$\text{wsat}(K_n, K_s) = \binom{n}{2} - \binom{n-s+2}{2}.$$

Другим естественным паттерн-графом F является полный двудольный граф $K_{s,t}$. Значение $\text{wsat}(K_n, K_{s,t})$ для произвольных s, t до сих пор не

найден. Наиболее общий результат был получен Калаи [4] в 1985 г., а также Кроненбер, Мартинс и Моррисон [8] в 2020 г.: при $t \geq 2$ и $n \geq 3t - 3$

$$\text{wsat}(K_n, K_{t,t}) = (t-1)(n+1-t/2),$$

$$\text{wsat}(K_n, K_{t,t+1}) = (t-1)(n+1-t/2) + 1.$$

Кроме того, в [8] были получены следующие оценки для произвольных s и t :

$$\text{wsat}(K_n, K_{s,t}) \leq (s-1)(n-s) + \binom{t}{2}, \quad (1)$$

$$t > s \geq 2, \quad n \geq 2(s+t) - 3;$$

$$\text{wsat}(K_n, K_{s,t}) \geq (s-1)(n-t+1) + \binom{t}{2}, \quad (2)$$

$$t > s \geq 2, \quad n \geq 3t - 3.$$

При $s = 1$ несложно видеть, что $\text{wsat}(K_n, K_{1,t}) = \binom{t}{2}$. Случай $s = 2$ гораздо сложнее. Тем не менее нам удалось найти точное значение числа слабого насыщения и в этом случае.

Теорема 1. Для всех натуральных $t \geq 3$ и $n \geq t + 2$ справедливо следующее.

- Если t нечетно или $n \geq 2t - 1$, то $\text{wsat}(K_n, K_{2,t}) = n - 2 + \binom{t}{2}$.

- Если t четно и $n \leq 2t - 2$, то $\text{wsat}(K_n, K_{2,t}) = n - 1 + \binom{t}{2}$.

Как обычно, $G(n, p)$ – это биномиальный случайный граф на множестве вершин $[n] := \{1, \dots, n\}$, где каждая пара различных вершин $i, j \in [n]$ смеж-

¹ Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), лаборатория комбинаторных и геометрических структур, Москва, Россия

² School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran

* E-mail: s15b1_kalinichenko@179.ru

** E-mail: tayfeh-r@ipm.ir

*** E-mail: zhukmax@gmail.com

на с вероятностью p независимо от всех других пар. Здесь и далее мы будем говорить, что свойство графов выполнено *асимптотически почти наверное*, если его вероятность стремится к 1 при $n \rightarrow \infty$. В 2017 г. Коранди и Судаков [6] доказали, что если $s \geq 3$, то $\text{wsat}(K_n, K_s)$ *стабильно*, т.е. при постоянной вероятности $p \in (0, 1)$ асимптотически почти наверное

$$\text{wsat}(G(n, p), K_s) = \text{wsat}(K_n, K_s),$$

и задали вопрос о существовании пороговой вероятности для свойства стабильности и о ее значении. Нам удалось доказать, что пороговая вероятность существует и предъявить нетривиальные оценки ее значения [2].

Теорема 2. *Существует такое c , что при $p < c n^{\frac{2}{s+1}} (\ln n)^{\frac{2}{(s-2)(s+1)}}$ асимптотически почти наверное $\text{wsat}(G(n, p), K_s) \neq \text{wsat}(K_n, K_s)$, а при $p > n^{\frac{1}{2s-3}} (\ln n)^2$ асимптотически почти наверное $\text{wsat}(G(n, p), K_s) = \text{wsat}(K_n, K_s)$.*

Естественно задаться вопросом о существовании графа F , для которого свойство стабильности не выполнено. Мы предполагаем, что такого графа не существует.

Гипотеза 1. *Пусть $p \in (0, 1)$ – некоторая константа. Тогда для каждого графа F асимптотически почти наверное*

$$\text{wsat}(G(n, p), F) = \text{wsat}(K_n, F). \quad (3)$$

В подтверждение этой гипотезы мы установили достаточно общее достаточное условие стабильности [5]. Обозначим $\delta(H)$ минимальную степень вершины в графе H . Без потери общности положим $V(K_n) = [n]$.

Теорема 3. *Пусть F – граф без изолированных вершин, $p \in (0, 1)$, $C \geq \delta(F) - 1$ – константы. Для каждого $n \in \mathbb{N}$, пусть H_n^0 – слабо F -насыщенный подграф K_n , содержащий такое множество вершин $S_n^0 \subset [n]$ с $|S_n^0| \leq C$, что каждая вершина из $[n] \setminus S_n^0$ смежна с хотя бы $\delta(F) - 1$ вершинами из S_n^0 . Тогда асимптотически почти наверное найдется подграф $F_n \subset G(n, p)$, являющийся слабо F -насыщенным, и у него $\min\{|E(G(n, p))|, |E(H_n^0)|\}$ ребер.*

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. *Пусть $p \in (0, 1)$ – константа. Для произвольного графа F без изолированных вершин асимптотически почти наверное равенство (3) выполнено, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует наименьший (с $\text{wsat}(K_n, F)$ ребрами) слабо F -насыщенный подграф K_n , обладающий свойством, описанным в теореме 3.*

Действительно, условие из теоремы 3 влечет неравенство $\text{wsat}(G(n, p), F) \leq \text{wsat}(K_n, F)$ асимптотически почти наверное. Так как асимптотически почти наверное каждая пара вершин $G(n, p)$ имеет хотя бы $|V(F)|$ попарно смежных общих соседей [10], то асимптотически почти наверное $G(n, p)$ слабо (K_n, F) -насыщен, что влечет ограниченность снизу числа слабого насыщения в $G(n, p)$ числом слабого насыщения в K_n .

Легко видеть, что следствие 1 влечет свойство стабильности (3) для $F = K_s$ и $F = K_{s,t}$ асимптотически почти наверное для всех возможных значений s, t (несмотря на тот факт, что, вообще говоря, точное значение $\text{wsat}(K_n, K_{s,t})$ неизвестно). Заметим, что в силу (1) и (2) асимптотически почти наверное $\text{wsat}(G(n, p), K_{s,t}) = (s-1)n + C(s, t)$ для некоторой константы $C = C(s, t)$.

Как было замечено выше, для $F = K_s$ мы до сих пор не знаем значение пороговой вероятности для свойства стабильности (даже в простейшем случае $s = 3$). Тем не менее нам удалось найти пороговую вероятность для звезд $F = K_{1,t}$ [5].

Теорема 4. *Пусть $t \geq 3$. Обозначим $p_t = n^{\frac{1}{t-1}} [\ln n]^{\frac{t-2}{t-1}}$.*

• *Существует такая константа $c > 0$, что при $\frac{1}{n^2} \ll p < c p_t$ асимптотически почти наверное $\text{wsat}(G(n, p), K_{1,t}) \neq \text{wsat}(K_n, K_{1,t})$.*

• *Существует такая константа $C > 0$, что при $p > C p_t$ асимптотически почти наверное $\text{wsat}(G(n, p), K_{1,t}) = \text{wsat}(K_n, K_{1,t})$.*

Заметим, что теорема 4 не покрывает случай $t = 2$, как и случай $p = O(1/n^2)$. Тем не менее эти случаи гораздо проще. Во-первых, если $t \geq 3$ и $p < \frac{Q}{n^2}$ для некоторого $Q > 0$, то асимптотически почти наверное $G(n, p)$ не содержит $K_{1,t-1}$, и поэтому асимптотически почти наверное стабильность выполнена, если количество ребер в случайном графе строго равно $\binom{t}{2}$, что не выполнено асимптотически почти наверное при $p \ll \frac{1}{n^2}$ и выполнено с вероятностью, отделенной от 0 и 1, при $\frac{q}{n^2} < p < \frac{Q}{n^2}$ для некоторых $0 < q < Q$. Случай $t = 2$ тоже прост. Если $p > (1 + \varepsilon) \frac{\ln n}{2n}$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то асимптотически почти наверное

$\text{wsat}(G(n, p), K_{1,2}) = \text{wsat}(K_n, K_{1,2})$. Если $\frac{1}{n^2} \ll p < (1 - \varepsilon) \frac{\ln n}{2n}$, то асимптотически почти наверное $\text{wsat}(G(n, p), K_{1,2}) \neq \text{wsat}(K_n, K_{1,2})$. Если $\frac{q}{n^2} < p < \frac{Q}{n^2}$ для некоторых $0 < q < Q$, то

$$\begin{aligned} P[\text{wsat}(G(n, p), K_{1,2}) = \text{wsat}(K_n, K_{1,2})] &= \\ = P(G(n, p) \text{ содержит ровно 1 ребро}) + o(1) &= \\ = \binom{n}{2} p(1-p)^{\binom{n}{2}-1} + o(1) \end{aligned}$$

отделена от 0 и 1. Если же $p \ll \frac{1}{n^2}$, то асимптотически почти наверное $\text{wsat}(G(n, p), K_{1,2}) = 0 \neq \text{wsat}(K_n, K_{1,2})$.

Заметим, наконец, что выполнена асимптотическая версия гипотезы 1.

Теорема 5. Для любой константы $p \in (0, 1)$ и всякого графа F асимптотически почти наверное

$$\text{wsat}(G(n, p), F) = \text{wsat}(K_n, F)(1 + o(1)).$$

Коротко изложим основные этапы доказательства. Зафиксируем граф F и $p \in (0, 1)$. Напомним, что (см. [1]) найдется константа c_F такая, что $\text{wsat}(K_n, F) = (c_F + o(1))n$. Более того, $c_F > 0$ тогда и только тогда, когда F не содержит вершин степени 1. Если же F содержит вершину степени 1, то несложно видеть, что для некоторой константы w_F асимптотически почти наверное

$$\text{wsat}(G(n, p), F) = \text{wsat}(K_n, F) = w_F.$$

Предположим, что F содержит $s \geq 3$ вершин, и ни одна из них не имеет степень, равную 1. Хорошо известно [7], что множество вершин $G(n, p)$ может быть покрыто кликами размера $\log_{1/p} n$. Более строго, асимптотически почти наверное найдутся такие непересекающиеся множества $V_1, \dots, V_m \subset [n]$, что $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_m = [n]$, каждое множество V_i имеет размер $v_i \in \{\lfloor \log_{1/p} n \rfloor, \lceil \log_{1/p} n \rceil\}$, и V_i индуцирует клику в $G(n, p)$. Стандартным образом можно показать, что V_i могут быть выбраны таким образом, что двудольные графы с частями (V_i, V_{i+1}) псевдослучайны в следующем смысле: для каждого $i \in [m]$ существуют непересекающиеся множества $S_i^1, S_i^2 \subset V_i$ размера $s - 2$, удовлетворяющие условиям

- $S_i^2 \sqcup S_{i+1}^1$ индуцируют полные подграфы в $G(n, p)$;

- каждая вершина из $V_{i+1} \setminus S_{i+1}^1$ имеет хотя бы $s - 2$ соседа v_1, \dots, v_{s-2} в V_i таких, что каждая вершина v_i смежна со всеми вершинами из S_{i+1}^1 .

Каждый индуцированный подграф $G(n, p)[V_i]$ содержит подграф H_i с $\text{wsat}(K_{v_i}, F)$ ребрами. Рассмотрим граф H , полученный объединением H_i с $m - 1$ полными двудольными графами с частями (S_i^2, S_{i+1}^1) , $i \in [m - 1]$. Заметим, что у H не более

$$m(c_F + o(1)) \log_{1/p} n + (m - 1)(s - 2)^2 = (c_F + o(1))n$$

ребер, и что он является слабо F -насыщенным в $G(n, p)$. Остается заметить, что асимптотически почти наверное $G(n, p)$ является слабо F -насыщенным в K_n , и поэтому асимптотически почти наверное $\text{wsat}(G(n, p), F) \geq \text{wsat}(K_n, F)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта РФФИ 20-51-56017 и гранта Iran National Science Foundation, номер проекта 99003814.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alon N. An extremal problem for sets with applications to graph theory // J. Combin. Theory Ser. A. 1985. V. 40. № 1. P. 82–89.
2. Bidgoli M.R., Mohammadian A., Tayfeh-Rezaie B., Zhukovskii M. Threshold for weak saturation stability // arXiv:2006.06855. 2020.
3. Bollobás B. Weakly k -saturated graphs // Beiträge zur Graphen—theorie. 1968. P. 25–31.
4. Kalai G. Hyperconnectivity of graphs // Graphs Combin. 1985 V. 1. P. 65–79.
5. Kalinichenko O., Zhukovskii M. Weak saturation stability // arXiv:2107.11138. 2022.
6. Korándi D., Sudakov B. Saturation in random graphs // Random Structures Algorithms. 2017. V. 51. № 1. P. 169–181.
7. Krivelevich M., Patkós B. Equitable coloring of random graphs // Random Structures Algorithms. 2009. V. 35. № 1. P. 83–99.
8. Kronenberg, G., Martins T., Morrison N. Weak saturation numbers of complete bipartite graphs in the clique // J. Combin. Theory Ser. A. 2021. V. 178. 105357.
9. Lovász, L. Flats in matroids and geometric graphs // Combinatorial Surveys. 1977. P. 45–86.
10. Spencer J. Threshold Functions for Extension Statements // J. Combin. Theory Ser. A. 1990. V. 53. P. 286–305.

WEAKLY SATURATED SUBGRAPHS OF RANDOM GRAPHS**O. Kalinichenko^a, B. Tayfeh-Rezaie^b, and M. Zhukovskii^a**^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures, Moscow, Russia*^b *School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper, we study weak saturation numbers of binomial random graphs. We proved stability of the weak saturation for several pattern graphs, and proved asymptotic stability for all pattern graphs.

Keywords: random graph, weak saturation, bootstrap percolation

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОБОБЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО–ИОНКИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. А. И. Кожанов^{1,2,*}

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым

Поступило 02.09.22 г.

После доработки 28.10.2022 г.

Принято к публикации 23.12.2022 г.

В работе изучается разрешимость нелокальных по пространственной переменной краевых задач для одномерных параболических уравнений, а также для некоторых уравнений соболевского типа. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений – именно, решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Ключевые слова: параболические уравнения, уравнения соболевского типа, нелокальные задачи, обобщенное условие Самарского–Ионкина, регулярные решения, существование, единственность

DOI: 10.31857/S2686954323700091, EDN: СТНУQW

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений – именно, задачи, в которых вместо обычных локальных (точечных) граничных условий задаются условия, связывающие значения решения и (или) его производных в граничных точках со значениями решения и (или) его производных в точках иных граничных или внутренних многообразий – исследуются с давних времен, причем как с математической точки зрения, так и с точки зрения математического моделирования. Современный этап в развитии теории таких задач начался, по-видимому, с работы А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1], опубликованной в 1969 г. В этой работе был предложен новый подход к постановке нелокальных краевых задач; этот подход с тех пор активно используется многими авторами. Среди многочисленных работ, посвященных задаче Бицадзе–Самарского и близких к ней задачам, выделим сыгравшие особую роль работы [2–5]. В первой из них – работе Н.И. Ионкина [2], опубликованной в 1977 г. – изучалась нелокальная задача для одномерного параболического уравнения, возникающая при моделировании некоторых неклассических теп-

ловых процессов, и был предложен метод, основанный на разложении решения по специальной биортогональной системе функций, с помощью которого удалось доказать существование и в дальнейшем в работе [3] – устойчивость решений.

В 1980 г. была опубликована работа А.А. Самарского [4], в которой также для параболического уравнения с одной пространственной переменной была предложена постановка нелокальной краевой задачи, включающая в себя как постановку классических начально-краевых задач, так и задачу Н.И. Ионкина работ [2] и [3]. Исследованию разрешимости нелокальных задач с условиями А.А. Самарского посвящены работы Н. Лажетича, А.И. Кожанова, Л.С. Пулькиной и многих других.

Как сыгравшую особую роль, отметим также работу [5], принадлежащую Н.И. Юрчуку. В этой работе изучалась задача Н.И. Ионкина для одномерных параболических уравнений с переменными коэффициентами, метод исследования отличался от метода работ [2, 3], но ее разрешимость была установлена лишь в весовых пространствах.

Заметим также следующее. Как уже говорилось выше, работы Н.И. Ионкина [2, 3] появились во многом благодаря некоторым потребностям математического моделирования. Но впервые, по-видимому, на связь теории нелокальных краевых задач с задачами математического моделирования обратил внимание В.А. Стеклов еще в конце XIX века в работе [6] (см. также [7]), посвя-

¹ Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

² Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

*E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

щенной изучению некоторых процессов теплопроводности.

Именно нелокальная задача Н.И. Ионкина, но в более общей постановке – с условием, которое можно назвать обобщенным условием Самарского–Ионкина – и будет основной целью настоящей работы. Более точно, будут изучаться некоторые нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для параболических уравнений с переменными коэффициентами, а также для уравнений, которые в последнее время – см., например, [8–10] – называют уравнениями соболевского типа. Уточним, что метод исследования при этом будет отличаться как от метода работ [2, 3], так и от метода работы [5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox , Q есть прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$, переменных x и t . Далее, пусть $a(x)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ и $\gamma(t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Нелокальная задача I: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t - \frac{\partial}{\partial x}(a(x)u_x) + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \gamma(t)u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (3)$$

Нелокальная задача II: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), а также условие

$$u_x(0, t) = \gamma(t)u_x(1, t), \quad u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Нелокальная задача III: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt} - u_{xxt} + b(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (5)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Нелокальная задача IV: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (5) и такую, что для нее выполняются условия (2), (4) и (6).

В данных задачах условие (4) в случае $\gamma(t) \equiv 1$ есть условие Ионкина (в дифференциальной форме), и тем самым задачи II и IV можно назвать обобщением задачи Ионкина. Нелокальные задачи I и III имеют самостоятельное значение, но в

то же время ниже будет показано, что они тесно связаны с задачами II и IV.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ I И II

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$a(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad c(x, t) \in C(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0, T]),$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad a'(x) \leq 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}.$$

Тогда нелокальная задача I не может иметь в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ более одного решения.

Доказательство. Умножим уравнение (1) с нулевой правой частью на функцию xu и проинтегрируем по прямоугольнику $\Omega \times (0, t)$. Используя далее неравенство

$$\psi^2(1) \leq \delta^2 \int_{\Omega} x\psi'^2(x)dx + \left(2 + \frac{1}{\delta^2}\right) \int_{\Omega} x\psi^2(x)dx, \quad (7)$$

в котором $\psi(x) \in W_2^1(\Omega)$, δ есть произвольное положительное число, и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решения $u(x, t)$ нелокальной задачи I в случае $f(x, t) \equiv 0$ при $t \in (0, T)$ выполняется равенство $u(0, t) = 0$. Другими словами, функция $u(x, t)$ будет решением однородной начально-краевой задачи со смешанными условиями для параболического уравнения второго порядка. Как хорошо известно [11], функция $u(x, t)$ будет тождественно нулевой в Q функцией. А это и означает требуемое.

Определим пространство V_0 :

$$V_0 = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^{2,1}(Q), v_x(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)\}.$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0, T]),$$

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad (xc_x(x, t))_x \leq 0$$

при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, $a'(1) = 0$.

Тогда нелокальная задача II не может иметь в пространстве V_0 более одного решения.

Доказательство. Если $u(x, t)$ есть решение из пространства V_0 нелокальной задачи II в случае $f(x, t) \equiv 0$, то для функции $v = u_x$ будет выполняться уравнение

$$v_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x)v) + c(x, t)v + c_x(x, t)u = 0.$$

Умножая это уравнение на функцию xv , интегрируя по прямоугольнику $\Omega \times (0, t)$, применяя неравенство (7) и лемму Гронуолла, получим $v(x, t) \equiv 0$ в Q . Отсюда и следует требуемое.

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0,T]),$
 $a(x) \geq a_0 > 0, \quad a'(x) \leq 0 \quad c(x,t) \geq 0, \quad c_{xx}(x,t) \leq 0,$
 $2c(x,t) - a''(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0,T].$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q), f_x(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью метода регуляризации. Именно, для положительных чисел ε и μ рассматривается задача: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_t - \frac{\partial}{\partial x}(a(x)v_x) + c(x,t)v + \varepsilon(v_{xxx} - \mu v_{tt}) = g(x,t) \quad (*)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$v_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Как для доказательства существования регулярного решения этой задачи, так и для организации предельного перехода необходимы априорные оценки. Эти оценки выводятся с помощью анализа равенств, полученных умножением уравнения (*) на функции $(T_0 - t)xv(x,t), -x(T_0 - t)v_{tt}(x,t), -v_{xx}(x,t), v_t(x,t)$ и $\varepsilon v_{xxx}(x,t)$ ($T_0 > T$), с последующим интегрированием по прямоугольнику Q .

Теорема 4. Пусть выполняются условия

$a(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad c(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0,T]),$
 $a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x,t) \geq 0, \quad 2c(x,t) - a''(x) \geq 0,$
 $(xc_x(x,t))_x \leq 0$
 при $x \in \bar{\Omega}, \quad t \in [0,T], \quad a'(1) = 0.$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q), f_x(x,t) \in L_2(Q), f_{xt}(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача II имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q), u_x(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью перехода к продифференцированному по переменной x уравнению (*).

4. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ III И IV

Определим пространства V_1 и V_2 :

$$V_1 = \{v(x,t): v(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),$$

$$v_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)), v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\},$$

$$V_2 = \{v(x,t): v(x,t) \in V_1, \quad v_x(x,t) \in V_1\}.$$

Теорема 5. Пусть выполняются условия

$b(x,t) \in C(\bar{Q}), \quad c(x,t) \in C(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0,T]).$

Тогда нелокальная задача III не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

Теорема 6. Пусть выполняются условия

$b(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \quad c(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C([0,T]),$
 $(xb_x(x,t))_x \leq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \bar{Q}.$

Тогда нелокальная задача IV не может иметь в пространстве V_2 более одного решения.

Уравнение (5) на функциях из пространства V_1 можно записать в виде

$$u_t - u_{xx} + b(x,t)u = \int_0^t R(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f_1(x,t),$$

$$R(x,t,\tau) = e^{\int_0^t b(x,\tau)d\tau - \int_0^\tau b(x,\xi)d\xi} [b_\tau(x,\tau) - b^2(x,\tau) - c(x,\tau)],$$

$$f_1(x,t) = \int_0^t e^{\int_0^t b(x,\tau)d\tau - \int_0^\tau b(x,\xi)d\xi} f(x,\tau)d\tau.$$

Повторяя для уравнения (8) доказательство теорем 1 и 2, получим требуемое.

Используя представление (8), нетрудно установить и разрешимость нелокальных задач III и IV.

Теорема 7. Пусть выполняются условия

$b(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad c(x,t) \in C(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0,T]),$
 $b(x,t) \geq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \bar{Q}.$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача III имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_1 .

Теорема 8. Пусть выполняются условия

$b(x,t) \in C^2(\bar{Q}), \quad c(x,t) \in C^1(\bar{Q}), \quad \gamma(t) \in C^2([0,T]),$
 $b(x,t) \geq 0, \quad (xb_x(x,t))_x \leq 0 \quad \text{при } (x,t) \in \bar{Q}.$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q), f_x(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача IV имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_2 .

Сделаем несколько заключительных замечаний:

1. Уравнения (1) и (5) имеют модельный вид. Представленные в работе результаты можно получить и в более общих ситуациях – например, функция a в уравнении (1) может зависеть и от переменной t , в уравнениях (1) и (5) могут присутствовать слагаемые с первой производной по переменной x , и т.д. Соответствующие условия разрешимости (существования и единственности) легко выводятся.

2. Краевые условия (3) и (4) также можно “пошевелить” – второе условие (3) можно заменить условием $u_x(1, t) + \alpha(t)u(1, t) = 0$, первое условие (4) можно заменить условием $u_x(0, t) + \beta(t)u(0, t) = \gamma(t)u_x(1, t)$.

3. Теоремы 1 и 2, 4 и 5 говорят о единственности регулярных решений соответствующих нелокальных задач для любой функции $\gamma(t)$. Вместе с тем для близкого к изученным уравнения

$$u_t - u_{xxt} + b(x, t)u_{xx} + c(x, t)u = f \quad (9)$$

(называемого в некоторых источниках псевдопараболическим) это не так. В случае $b(x, t) \equiv c(x, t) \equiv 0$, $\gamma = \frac{1}{2}(e + e^{-1})$, $f(x, t) \equiv 0$ нелокальная задача I для уравнения (9) имеет ненулевое решение $u(x, t) = t(e^x + e^{-x})$, что и говорит о неединственности решений.

4. Краевые и начальные условия в нелокальных задачах можно задавать неоднородными. Суть полученных результатов от этого не изменится.

5. И последнее замечание: разрешимость нелокальных задач I и II для гиперболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной с произвольной функцией $\gamma(t)$ доказана в работе [12].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2022–282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
3. Ионкин Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1279–1283.
4. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
5. Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 12. С. 2117–2126.
6. Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела. Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1897. Т. 5. № 3–4. С. 136–181.
7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.
8. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
9. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, the Netherlands: VSP, 2003.
10. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
12. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Математическиезаметки. 2011. Т. 90. Вып. 2. С. 254–268.

NONLOCAL PROBLEMS WITH GENERALIZED SAMARSKY-IONKIN CONDITION FOR SOME CLASSES OF NONSTATIONARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. I. Kozhanov^{a,b}

^a Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

^b Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

In this paper, we study the solvability of boundary value problems that are nonlocal with respect to the spatial variable for one-dimensional parabolic equations, as well as for some equations of the Sobolev type. Existence and uniqueness theorems are proved regular solutions – namely, solutions having all the derivatives generalized in the sense of S.L. Sobolev entering the corresponding equation.

Keywords: parabolic equations, Sobolev type equations, nonlocal problems, generalized Samarskii–Ionkin condition, regular solutions, existence, uniqueness

УДК 517.984

К ТЕОРИИ БИРМАНА–КРЕЙНА–ВИШИКА

© 2023 г. М. Маламуд^{1,2,*}

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым

Поступило 07.09.2022 г.

После доработки 16.11.2022 г.

Принято к публикации 26.12.2022 г.

DOI: 10.31857/S2686954322600574, EDN: CQMCAS

Введение. Пусть $A \geq 0$ – замкнутый неотрицательный плотно определенный симметрический оператор в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} . Согласно теореме Стоуна–Фридрихса, множество $\text{Ext}_A(0, \infty)$ всех неотрицательных самосопряженных расширений $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора A непусто (см. [1, 5]). Наиболее полная теория расширений оператора $A \geq 0$, включающая описание всех расширений $\tilde{A} = \tilde{A}^* \geq 0$, была построена М. Крейном [13]. В частности, им было доказано [13] (см. также [1, 10]), что множество $\text{Ext}_A(0, \infty)$ содержит максимальное (Фридрихса) и минимальное (Крейна–фон Неймана) расширения \hat{A}_F и \hat{A}_K . Они однозначно характеризуются неравенствами:

$$\begin{aligned} (\hat{A}_F + a)^{-1} &\leq (\tilde{A} + a)^{-1} \leq (\hat{A}_K + a)^{-1}, \\ \tilde{A} &\in \text{Ext}_A(0, \infty), \quad a > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Теория Крейна была существенно дополнена Вишиком [15] и Бирманом [4]. В настоящее время она известна как теория Бирмана–Крейна–Вишика (см. [2]).

Обозначим через $m_A = \inf \{ \|Af, f\| : \|f\| = 1 \}$ нижнюю грань оператора A . Подчеркнем, что расширение Фридрихса \hat{A}_F всегда сохраняет нижнюю грань, т.е. ($m_{\hat{A}_F} = m_A$), в то время как расширение Крейна \hat{A}_K сохраняет ее, только если $m_A = 0$.

В дальнейшем мы будем систематически использовать ортогональное разложение

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1^\perp, \quad \text{где} \quad \mathfrak{H}_1 := \text{ran}(I + A) \\ \text{и} \quad \mathfrak{H}_1^\perp &= \ker(I + A^*) =: \mathfrak{N}_{-1}(A). \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим P_1 и P_{-1} ортопроекторы в разложении [2] на подпространства \mathfrak{H}_1 и $\mathfrak{H}_1^\perp = \mathfrak{N}_{-1}(A)$ соответственно. Далее, считая A положительно определенным, $A \geq m_A > 0$, и полагая $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}_0(A) := \ker A^*$, приходим к следующему представлению для \hat{A}_K :

$$\begin{aligned} \hat{A}_K &= \hat{A}_K^i \oplus (\mathbb{O} \upharpoonright \mathfrak{N}_0), \\ \text{где} \quad \hat{A}_K^i &:= \hat{A}_K \upharpoonright \mathfrak{N}_0, \\ \mathfrak{N}_0 &:= \mathfrak{N}_0(A) := \mathfrak{N}_0^\perp = \text{ran} A. \end{aligned} \quad (3)$$

Оператор \hat{A}_K^i называют редуцированным расширением Крейна.

В заметке развивается и дополняется следующий результат Крейна ([13], теорема 26):

$$\begin{aligned} (I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F)^{-1} &\in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}) \Rightarrow \\ \Rightarrow (I_{\mathfrak{N}_0} + \hat{A}_K^i)^{-1} &\in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{N}_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Мы показываем, что многие спектральные свойства оператора $(I_{\mathfrak{N}_0} + \hat{A}_K^i)^{-1}$ близки к соответствующим спектральным свойствам оператора $P_1(I + A)^{-1}$, а не оператора $(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F)^{-1}$. В частности, показано, что обратная к (4) импликация, вообще говоря, неверна, а замена оператора $(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F)^{-1}$

на $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ превращает ее в эквивалентность (предложение 1). Более того, показывается (см. теорему 2), что собственные значения этих операторов имеют одинаковую степенную асимптотику.

Мы также приводим полное отрицательное решение следующей проблемы Бирмана:

Проблема 1 (Бирман). Верна ли импликация $A^{-1} \in \mathfrak{S}_{S_\infty} \Rightarrow (\hat{A}_F)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$?

Именно, показано, что при условии $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ спектр \hat{A}_F может быть произвольным (см. теорему 4).

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

* E-mail: malamud3m@gmail.com

В частности, каждый симметрический оператор $A \geq 0$, удовлетворяющий условиям $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ и $(\hat{A}_F)^{-1} \notin \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, не допускает полуограниченных расширений $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ с компактной резольвентой, однако, в силу классической теоремы Вишика [15], всегда допускает расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ с $(\tilde{A})^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. В этом случае все расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ с компактной резольвентой – не полуограниченные.

Мы также дополняем исследования Бирмана [4] и Грубб [7] об эквивалентности полуограниченности расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора A и граничного оператора (теорема 6).

Обозначения. Всюду в заметке $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}', \mathfrak{H})$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{H}', \mathfrak{H})$ – обозначают, соответственно, пространства ограниченных и замкнутых операторов из гильбертова пространства \mathfrak{H}' в гильбертово пространство \mathfrak{H} ; $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}) := \mathfrak{B}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{U}(\mathfrak{H}) := \mathfrak{U}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$. В дальнейшем, $\text{dom}(T)$, $\text{ran}(T)$ и $\text{ker}(T)$ – область определения, образ и ядро оператора $T \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ соответственно; $\sigma_{ac}(T)$, $\sigma_{ess}(T)$ и $\sigma_p(T)$ обозначают абсолютно непрерывный, существенный и точечный спектры оператора $T = T^*$ (см. [5]).

1. Преобразование М.Г. Крейна. Следуя [13], рассмотрим дробно-линейное преобразование М.Г. Крейна:

$$A \mapsto T_1 := X(A) := (I - A)(I + A)^{-1} = -I + 2(I + A)^{-1}. \quad (5)$$

Хорошо известно ([1, 13]), что $T_1 \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H})$ – симметрическое неплотно заданное сжатие в \mathfrak{H} с областью определения $\text{dom}(T_1) = \text{ran}(I + A) = \mathfrak{H}_1$. В соответствии с ортогональным разложением (2) сжатие T_1 допускает блочно-матричное представление

$$T_1 = X(A) = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} \\ VD_{T_{11}} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad (6)$$

$$T_{11} \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1), \quad V := \text{clos}(T_{21}D_{T_{11}}^{(-1)}) \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_1^+).$$

Здесь $D_{T_{11}} := \sqrt{I - T_{11}^2}$, V – сжатие, однозначно определяемое условием $\text{ker } V \supset \text{ker } D_{T_{11}}$, и $D_{T_{11}}^{(-1)}$ обозначает обобщенный обратный оператор, $D_{T_{11}}^{(-1)} \upharpoonright \text{ker } D_{T_{11}} = 0$.

2. Основное тождество, связывающее \hat{A}'_K и A .

Теорема 1. Пусть A – замкнутый положительно определенный ($m_A > 0$), плотно заданный симметрический оператор в \mathfrak{H} , $T_1 = X(A) = \begin{pmatrix} T_{11} \\ VD_{T_{11}} \end{pmatrix}$ определен

соотношениями (5), (6) и $D_V := (I - V^*V)^{1/2}$ – дефектный оператор оператора V . Тогда:

(i) операторы $(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1}$ и $D_V P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} D_V$ унитарно эквивалентны, т.е. существует изометрия $U \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{M}_0)$ из \mathfrak{H}_1 на \mathfrak{M}_0 такая, что

$$U^{-1} \left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K \right)^{-1} U = D_V P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} D_V \quad \text{и} \quad 0 \in \rho(D_V); \quad (7)$$

(ii) если дополнительно $\dim(\text{ker } V) = \dim(\text{ker } V^*)$, то существует изометрия $U_1 \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ из \mathfrak{H}_1 на \mathfrak{H}_2 такая, что оператор D_V в (7) допускает представление

$$D_V = U_1^* \left[\left((I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}'_K)^{-1} - (I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}'_F)^{-1} \right) \upharpoonright \mathfrak{M}_{-1}(A) \right]^{1/2} U_1. \quad (8)$$

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1, $c = \|D_V\| (\leq 1)$. Тогда:

(i) существует изометрия U_1 из \mathfrak{H}_1 на \mathfrak{M}_0 такая, что справедливы неравенства:

$$U_1^* \left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K \right)^{-1} U_1 \leq c^2 P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \leq P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}; \quad (9)$$

(ii) если, к тому же, $(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ компактен, то собственные значения операторов $(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1}$, $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ упорядоченные по убыванию, связаны неравенствами

$$\lambda_n \left((I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1} \right) \leq c^2 \lambda_n \left(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \right) \leq \lambda_n \left(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (10)$$

(iii) если, к тому же, $(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}'_F)^{-1}$ компактен, то верны неравенства:

$$\lambda_n \left(\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K \right)^{-1} \right) \leq \lambda_n \left(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \right) \leq \lambda_n \left((I + \hat{A}'_F)^{-1} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Спектральные свойства редуцированного расширения Крейна оператора A с компактным обратным. В соответствии с результатом Крейна ([13], теорема 26) верна импликация (4). Заметим, что обратная к (4) импликация, вообще говоря, неверна, но замена $(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}'_F)^{-1}$ на $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ в (4) превращает ее в эквивалентность.

Как вытекает из результатов раздела 4, оператор \hat{A}'_K не наследует другие спектральные свойства \hat{A}'_F такие, как абсолютная непрерывность, сингулярность и т.д.

3А. Компактность резольвенты редуцированного расширения Крейна. Применяя теорему 1, мы дополняем и обобщаем результат Крейна (импликацию (4)).

Как обычно, $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ – класс компактных операторов в \mathfrak{H} , а $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$ – идеалы Неймана-Шаттена в \mathfrak{H} : $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}) = \{T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}) : s_n(T) \in l^p(\mathbb{N})\}$, $p \in (0, \infty)$.

Определение 1. Оператор $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ принадлежит классу $\Sigma_p(\mathfrak{H})$, $p \in (0, \infty)$, если

$$\|T\|_p := \sup_n n^{1/p} \cdot s_n(T) < \infty. \quad (11)$$

Класс $\Sigma_p^0(\mathfrak{H})$ – подкласс класса $\Sigma_p(\mathfrak{H})$, выделяемый условием $s_n(T) = o(n^{-1/p})$, $n \rightarrow \infty$.

Классы $\mathfrak{S}_p(\mathfrak{H})$ и $\Sigma_p(\mathfrak{H})$ не могут быть нормированы при $p \in (0, 1)$ и $p \in (0, 1]$ соответственно. Для таких p они могут быть квазинормированы. Для любого $p \in (0, \infty)$ класс $\Sigma_p(\mathfrak{H})$, снабженный квазинормой (11), образует квазинормированный идеал в $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$.

Предложение 1. Пусть A – замкнутый плотно заданный положительно определенный симметрический оператор в \mathfrak{H} и \hat{A}'_K – редуцированное расширение Крейна оператора A , заданное соотношением (3). Тогда:

(i) для любого симметрично нормированного идеала \mathfrak{S} в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_1)$ справедлива следующая эквивалентность:

$$P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_1) \Leftrightarrow (I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}_0); \quad (12)$$

(ii) для любого $p \in (0, \infty]$ верна эквивалентность:

$$\begin{aligned} P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{H}_1) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathfrak{M}_0); \end{aligned} \quad (13)$$

(iii) для любого $p \in (0, \infty)$ справедливы эквивалентности:

$$\begin{aligned} P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \Sigma_p(\mathfrak{H}_1) &\Leftrightarrow (I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1} \in \Sigma_p(\mathfrak{M}_0), \\ P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \Sigma_p^0(\mathfrak{H}_1) &\Leftrightarrow (I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1} \in \Sigma_p^0(\mathfrak{M}_0). \end{aligned} \quad (14)$$

В частности, операторы $(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1}$ и $(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ компактны лишь одновременно.

Замечание 1. Заметим также, что импликация \Rightarrow в (13) усиливает импликацию Крейна (4). При этом эквивалентность (13) вместе с отрицательным решением проблемы 1 Бирмана показывают, что импликация обратная к (4) не верна.

Любопытно, что замена оператора $P_1(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}'_K)^{-1}$ в (4) оператором $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}$ позволила заменить крейновскую импликацию (4) эквивалентностью (13).

3В. Асимптотическое поведение собственных значений редуцированного расширения Крейна. Вначале сравним асимптотическое поведение собственных значений операторов $P_1(I + A)^{-1}$ и $(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1}$.

Предложение 2. Пусть A – замкнутый плотно заданный положительно определенный симметрический оператор в \mathfrak{H} , имеющий компактный обратный A^{-1} . Пусть также \hat{A}'_K – редуцированное расширение Крейна оператора A , заданное соотношением (3). Тогда для любого $p \in (0, \infty)$ справедливы следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} 0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \lambda_n(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}) < \infty &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}\right) < \infty, \\ 0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \lambda_n(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}) < \infty &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}\right) < \infty. \end{aligned}$$

Покажем, что при дополнительном предположении предложение 2 можно усилить.

Теорема 2. Пусть A – замкнутый плотно заданный положительно определенный симметрический оператор в \mathfrak{H} , имеющий компактный обратный A^{-1} . Пусть также \hat{A}'_K – редуцированное расширение Крейна оператора A , заданное соотношением (3), и $P_{-1} := P_{\mathfrak{N}_{-1}}$ – ортопроектор в \mathfrak{H} на $\mathfrak{N}_{-1}(A)$. Если дополнительно

$$P_{-1}(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}'_K)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{N}_{-1}(A)), \quad (15)$$

то для любых фиксированных $p \in (0, \infty)$ и $a \geq 0$ верны соотношения при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lambda_n(P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1}) &= an^{-1/p}(1 + o(1)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K\right)^{-1}\right) &= an^{-1/p}(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Предложение 3. Пусть в условиях теоремы 2, вместо условия (15) выполнено условие $P_1(I_{\mathfrak{H}} + A)^{-1} \in \Sigma_p^0(\mathfrak{H}_1)$ с $p \in (0, \infty)$ и $a > 0$. Тогда верна эквивалентность:

$$\begin{aligned} \lambda_n\left(P_{-1}(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}'_K)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1}\right) &= an^{-1/p}(1 + o(1)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_n\left(\left(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}'_K\right)^{-1}\right) &= an^{-1/p}(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Теперь сравним асимптотики спектров операторов \hat{A}_F и \hat{A}'_K . Следующее предложение можно рассматривать в рамках абстрактной версии проблемы Алонсо–Саймона [2]. Именно, в [2] сформулирована проблема о совпадении асимптотик спектров двух реализаций выражения Лапласа в ограниченной области: оператора задачи Дирихле и редуцированного расширения Крейна. Эта проблема положительно решена в [8] (эллиптические операторы порядка $2m$) и [3] (оператор Шредингера) при различных ограничениях на коэффициенты и границу области (см. также литературу в [3]).

Предложение 4. Пусть A – замкнутый плотно заданный положительно определенный симметрический оператор в \mathfrak{H} и \hat{A}'_K – редуцированное расширение Крейна оператора A . Пусть также $(I + \hat{A}_F)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ и $p \in (0, \infty)$, $a \geq 0$. Тогда:

(i) справедлива следующая импликация:

$$\lambda_n(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F)^{-1} = an^{-1/p}(1 + o(1))$$

при $n \rightarrow \infty \Rightarrow (I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1} \in \Sigma_p(\mathfrak{M}_1);$

(ii) если дополнительно $P_{-1}(I + \hat{A}_F)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1}(A) \in \Sigma_p^0(\mathfrak{N}_{-1}(A))$, то при $n \rightarrow \infty$ верна эквивалентность:

$$\begin{aligned} \lambda_n(\hat{A}_F) &= a^{-1}n^{1/p}(1 + o(1)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_n(\hat{A}'_K) &= a^{-1}n^{1/p}(1 + o(1)). \end{aligned} \tag{17}$$

Эквивалентность (17) верна не всегда. Именно, существует такой симметрический оператор $A \geq m_A$, что операторы \hat{A}_F и \hat{A}'_K имеют различные степенные асимптотики.

Предложение 5. Пусть $p > p_1 > 0$ и $a, a_1 > 0$ – две пары положительных чисел. Существует положительно определенный симметрический оператор A в \mathfrak{H} , $\overline{\text{dom}}(A) = \mathfrak{H}$, $n_{\pm}(A) = \infty$ и такой, что его расширение Фридрихса \hat{A}_F и редуцированное расширение Крейна \hat{A}'_K удовлетворяют асимптотическим соотношениям:

$$\begin{aligned} \lambda_n((I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F)^{-1}) &= an^{-1/p}(1 + o(1)) \\ \text{и } \lambda_n((I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}'_K)^{-1}) &= a_1n^{-1/p_1}(1 + o(1)). \end{aligned} \tag{18}$$

4. Спектры расширений Крейна-фон Неймана и Фридрихса. Решение проблемы Бирмана. Контр-пример к проблеме 1 Бирмана легко извлекается (см. [12]) из блочного представления оператора $(I_{\mathfrak{H}} + \hat{A}_F)^{-1}$ (см. [10, 14]). Здесь приведено полное

(на абстрактном уровне) решение проблемы 1. Оказывается, что при условии $(I + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ спектр расширения Фридрихса \hat{A}_F может иметь произвольную природу, хотя, в силу классической теоремы Вишика [15], всегда существуют *неполоуграниченные* расширения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора A с компактной резольвентой. Также приведем общий результат о спектре оператора \hat{A}_K при условии $(I + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$.

Предложение 6. Пусть A – неотрицательный плотно заданный симметрический оператор в \mathfrak{H} , $n_{\pm}(A) = \infty$ и $(I + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда верны следующие утверждения.

(i) Существенный спектр расширения Крейна \hat{A}_K состоит из двух точек – нуля и бесконечности, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(\hat{A}_K) = \{0, +\infty\}$.

(ii) Равенство $\sigma_{\text{ess}}(\hat{A}_K) = \sigma_{\text{ess}}(\hat{A}_F)$ справедливо в точности тогда, когда

$$\{0\} \subseteq \sigma_{\text{ess}}\left(\left[(I + \hat{A}_K)^{-1} - (I + \hat{A}_F)^{-1}\right] \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1}\right) \subseteq \{0, 1\}. \tag{19}$$

(iii) Если расширения \hat{A}_F и \hat{A}_K трансверсальны, то $\sigma_{\text{ess}}(\hat{A}_K) \neq \sigma_{\text{ess}}(\hat{A}_F)$.

(iv) Если A положительно определен, то редуцированное расширение Крейна \hat{A}'_K положительно определено, $m_{\hat{A}'_K} \geq m_A$ и его спектр дискретен, т.е.

$$(\hat{A}'_K)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{M}_0).$$

Следующий результат дает полное решение проблемы 1 Бирмана.

Теорема 3. Пусть $R = R^* \geq 0$ – оператор в \mathfrak{H} . Тогда существует неотрицательный симметрический оператор $A \geq 0$ в \mathfrak{H} с $n_{\pm}(A) = \infty$ и компактной пререзольвентой $(I + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, для которого операторы \hat{A}_F и R унитарно эквивалентны, $\hat{A}_F \sim R$.

Кроме того, покажем, что для любого оператора $A \geq 0$, можно указать другой оператор $S \geq 0$, близкий в некотором смысле к A и такой, что его расширение Фридрихса \hat{S}_F удовлетворяет требуемому спектральному свойству. Для этого свяжем с оператором $A \geq 0$ множество \mathfrak{A}_A симметрических неотрицательных операторов, полагая:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_A &:= \{S \subset S^*, S \geq 0 : \text{ran}(I + S) = \\ &= \text{ran}(I + A) = \mathfrak{H}_1, P_1(I + S)^{-1} = P_1(I + A)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть $A \geq 0$ – неотрицательный симметрический оператор в \mathfrak{H} с $n_{\pm}(A) = \infty$ и ком-

пактной пререзольвентой $(I + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$. Пусть также $R = R^* \geq 0$ – неотрицательный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1^\perp = \mathfrak{N}_{-1}(A)$. Тогда:

(i) существует оператор $S \geq 0$, $S \in \mathfrak{A}_A$ такой, что его расширение Фридрихса \hat{S}_F удовлетворяет соотношению

$$\sigma_{\text{ess}}(\hat{S}_F) = \sigma_{\text{ess}}(R); \tag{20}$$

(ii) кроме того, если $P_1(I + A)^{-1} \in \mathfrak{S}_{1/2}(\mathfrak{H}_1)$, то абсолютно непрерывные части (ac-части) операторов \hat{S}_F и R унитарно эквивалентны, т. е. $(\hat{S}_F)^{ac} \sim R^{ac}$.

Явные примеры неотрицательных дифференциальных операторов, дающих (отрицательное) решение проблемы 1 Бирмана, будут опубликованы в другом месте.

5. Полуограниченность самосопряженных расширений оператора A . Следуя [4], с каждым расширением $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \text{Ext}_A$ у которого $-1 \notin \sigma_p(\tilde{A})$ связывают самосопряженный оператор

$$B^{-1} := (I + \tilde{A})^{-1} - (I + \hat{A}_F)^{-1} (= (B^{-1})^*) \in \mathcal{C}(\mathfrak{N}_{-1}). \tag{21}$$

Оператор B называют граничным для \tilde{A} и полагают $\tilde{A} = A_B (= A_B^*)$. Отметим еще, что B^{-1} ограничен, $B^{-1} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{N}_{-1})$, в точности тогда, когда $-1 \in \rho(\tilde{A})$.

В своей фундаментальной работе [4] Бирман открыл следующее соотношение между свойствами полуограниченности расширения A_B и его граничного оператора B .

Предложение 7 [4]. Пусть A – симметрический положительно определенный оператор в \mathfrak{H} , $A \geq m_A > 0$, $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \text{Ext}_A$ – расширение, у которого $-1 \notin \sigma_p(\tilde{A})$, и B – граничный оператор (см. [21]). Тогда справедлива следующая импликация

$$\begin{aligned} A_B = A_B^* \text{ полуограничен снизу} &\Rightarrow \\ \Rightarrow B = B^* \text{ полуограничен снизу.} &\tag{22} \end{aligned}$$

Другими словами, граничный оператор B реализации $\tilde{A} = A_B = A_B^*$ наследует у A_B свойство полуограниченности снизу. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Грубб [7] нашла дополнительное достаточное условие на оператор $A \geq m_A$, превращающее импликацию (22) в эквивалентность.

Теорема 5 ([7]). Пусть выполнены условия Предложения 7 и пусть оператор $(\hat{A}_F)^{-1}$ компактен. Тогда справедлива следующая эквивалентность:

$$\begin{aligned} A_B = A_B^* (\in \text{Ext}_A) \text{ полуограничено снизу} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B = B^* \text{ полуограничен снизу.} &\tag{23} \end{aligned}$$

Другие доказательства этого результата были получены в [6] и [11] (см. также [10]). Справедливость эквивалентности (23) в некоторых эллиптических граничных задачах исследована в [9]. Здесь мы существенно усиливаем теорему 5 Грубб.

Теорема 6. Пусть $A \geq 0$ – неотрицательный оператор в \mathfrak{H} . Пусть также P_{-1} – ортопроектор на $\mathfrak{N}_{-1} = \ker(I + A^*)$. Тогда эквивалентность (23) верна при условии:

$$P_{-1}(I + \hat{A}_F)^{-1} \upharpoonright \mathfrak{N}_{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{N}_{-1}). \tag{24}$$

Доказательство основано на общем критерии из [11] (см. также [10]), ретранслирующем свойство (23) в соотношение для функции Вейля: $M_F(x) \rightrightarrows -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$.

Следующий результат показывает, что условие (24) действительно слабее условия $(\hat{A}_F)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, и, значит, теорема 6 усиливает теорему 5.

Предложение 8. Пусть $R = R^* \geq 0$. Тогда существует симметрический оператор $A \geq 0$ с расширением Фридрихса \hat{A}_F , удовлетворяющим условию [24], и такой, что

$$\sigma_{\text{ess}}(\hat{A}_F) = \sigma_{\text{ess}}(R) \quad \text{и} \quad (\hat{A}_F)^{ac} \sim R^{ac}.$$

В частности, существует оператор $A \geq 0$, у которого расширение \hat{A}_F удовлетворяет условиям $\sigma_{ac}(\hat{A}_F) = [0, \infty)$ и (24).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение 075-15-2021-602.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовых пространствах. Т. 2. Москва: Наука, 1978.
2. Alonso A., Simon B. // J. Operator Theory. 1980. V. 4. P. 251–270.
3. Ashbaugh M.S., Gesztesy F., Mitrea M., Teschl G. // Adv. Math. 2010. V. 223. 1372–1467.
4. Бирман М.Ш. // Матем. сб. 1956. Т. 38 (80). № 4. С. 431–450.
5. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Санкт-Петербург: Лань, 2010. 458 с.
6. Горбачук М.Л., Михайлец В.А. // Докл. Акад. наук СССР. 1976. Т. 226. № 4. С. 765–767.
7. Grubb G. // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1968. V. 22. № 3, P. 425–513.

8. Grubb G. // J. Operator theory. 1983. V. 10. P. 9–20.
9. Grubb G. // J. Differential Equat. 2012. V. 252. P. 852–885.
10. Деркач В.А., Маламуд М.М. *Теория расширений операторов и граничные задачи*. Киев: Институт математики НАН Украины, 2017.
11. Derkach V.A., Malamud M.M. // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 1–95.
12. Hassi S., Malamud M.M., and de Snoo H.S.V. // Math. Nachr. 2004. V. 274–275. P. 40–73.
13. Крейн М.Г. // Матем. сб. 1947. Т. 20. С. 431–495.
14. Маламуд М.М. // Украинский Мат. Ж-л. 1992. Т. 44. № 2. С. 190–204.
15. Вишик М.И. // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 186–246.

TO THE BIRMAN–KREIN–VISHIK THEORY

M. M. Malamud^{a,b}

^a Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation

^b St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

Let $A \geq m_A > 0$ be a closed positive definite symmetric operator in a Hilbert space \mathfrak{H} , let \hat{A}_F and \hat{A}_K be its Friedrichs and Krein extensions, and let \mathfrak{S}_∞ be the ideal of compact operators in \mathfrak{H} . The following problem has been posed by M.S. Birman: Is the implication $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty \Rightarrow (\hat{A}_F)^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ holds true or not? It turns out that under condition $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ the spectrum of Friedrichs extension \hat{A}_F might be of arbitrary nature. This gives a complete negative solution to the Birman problem.

Let \hat{A}_K^* be the reduced Krein extension. It is shown that certain spectral properties of the operators $(I_{\mathfrak{M}_0} + \hat{A}_K^*)^{-1}$ and $P_1(I + A)^{-1}$ are close. For instance, these operators belong to a symmetrically normed ideal \mathfrak{S} , say are compact, only simultaneously. Moreover, it turns out that under a certain additional condition the eigenvalues of these operators have the same asymptotic.

Besides we complete certain investigations by Birman and Grubb regarding the equivalence of semiboundedness property of selfadjoint extensions of A and the corresponding boundary operators.

Keywords: positive definite symmetric operator, Friedrichs and Krein extensions, compactness of resolvent, asymptotic of spectrum

УДК 517, 517.9, 536

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ КАК РЕЗОНАНС ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ

© 2023 г. Е. В. Радкевич^{1,*}, О. А. Васильева^{2,3,**}, М. И. Сидоров^{4,***}, М. Е. Ставровский^{4,****}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 17.01.2022 г.

После доработки 30.07.2022 г.

Принято к публикации 26.12.2022 г.

Опираясь на термодинамический анализ процесса горения, построена новая модель ламинарного процесса горения. При управлении температурой на входе (рост температуры на входе в камеру сгорания), в зависимости от структуры стандартного химического потенциала, возникают высокочастотные колебания резонанса теплового взрыва. Смоделированы режимы резонанса при накачке теплоты, установлена природа их зарождения в зависимости от структуры стандартного химического потенциала и приведены численные эксперименты возникновения этих режимов.

Ключевые слова: термодинамический анализ, математические модели процесса горения, локальное равновесие, ламинарный процесс горения, высокочастотные колебания

DOI: 10.31857/S2686954323700108, EDN: CTNGXA

1. ВВЕДЕНИЕ

Термодинамическим анализом процесса горения строится новая модель ламинарного процесса горения. Будет показано, что при управлении скоростью роста температуры на входе, в зависимости от стандартного химического потенциала, возникают высокочастотные колебания резонанса в процессе развития теплового взрыва. Мы рассматриваем идеализированную модель процесса горения, моделируется задача для открытой системы с обменом массой с внешней средой. Для такой системы возможно изменение молекулярной массы реагирующих компонентов, однако предполагается, что эти изменения настолько малы, что можно считать молекулярную массу постоянной. Учет переменной молекулярной массы

приведет к не столь сложным изменениям в термодинамическом анализе процесса горения, при этом он уточнит выражение для энтропии и давления. Представленный анализ проведен для простейшего случая идеального газа с постоянными теплоемкостью и молекулярной массой, что влечет выбор фиксированной γ – постоянной адиабаты, и входящая в расчеты R – газовая постоянная также является константой. Основной задачей статьи является формализация возникающих при горении обратных связей, приводящих к резонансу теплового взрыва [1]. Другой подход к моделированию детонационного горения, без жестких ограничений, приведенных выше, рассмотрен в [3–6]. Как мы уже упоминали выше, в рамках выбранной модели при управлении скоростью возрастания температуры на входе, в зависимости от стандартного химического потенциала, возникают высокочастотные колебания резонанса в процессе развития теплового взрыва.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

³ Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева, Москва, Россия

⁴ Инжиниринговый центр мобильных решений, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “МИРЭА – Российский технологический университет”, Москва, Россия

* E-mail: evrad07@gmail.com

** E-mail: vasiljeva.ovas@yandex.ru

*** E-mail: mihail.sidorov0213@gmail.com

**** E-mail: stavrov@list.ru

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наша задача – вывести систему уравнений, описывающих процесс горения в режиме детонации, а также численным экспериментом построенной ниже модели дать возможный ответ на давно стоящий вопрос о реализации режима детонации (существенного роста давления) при ламинарном процессе горения. Мы покажем, что также, как при вибрационном горении [7], при накачке теплоты (нагреве входа камеры сгорания) возникает резонанс (который можно интерпретировать как тепловой взрыв), реализующий взаимодействие не-

устойчивости Рэля–Бенара [1] и процесса горения. Численным экспериментом мы установим, что вблизи резонанса при дополнительном условии перемешивания смеси возникает режим детонации, но существующий недолго.

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕПЛОВОГО ВЗРЫВА

В отличие от исследования механизма резонанса вибрационного горения [7], при накачке кинетической энергии мы будем исследовать влияние управления ростом температуры на входе камеры сгорания (накачки теплоты). Имеет место следующая

Теорема. Замыканием двумя уравнениями состояния (определяющими давление и энтропию)

$$P = (\gamma - 1)\rho E + \frac{P_{ad}^0}{\rho_0} \rho - \rho^3 g(x, e_1) + TS\rho + n\rho\mu + RnT\rho \quad (1)$$

и

$$S + n \left(\frac{d\mu_0(T)}{dT} \right) + R \ln \left(\frac{nT\rho^2}{n_0T_0\rho_0^2} \right) = 0 \quad (2)$$

классической двухкомпонентной модели процесса горения в поле силы тяжести:

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{U}) &= 0, \\ \partial_{\tilde{t}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2) + \partial_{\tilde{x}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2^2) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} &= \\ = \varepsilon \Delta \tilde{u}_2 + \tilde{\varepsilon}_g (1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} & \quad (3) \end{aligned}$$

$$\partial_{\tilde{t}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1) + \partial_{\tilde{x}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1^2) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} = \varepsilon \Delta \tilde{u}_1 + \tilde{\varepsilon}_g c_0 \tilde{n} \tilde{\rho},$$

$$\tilde{\rho} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{E} + \tilde{P} \operatorname{div} \tilde{U} = \varepsilon \Delta \tilde{E},$$

ε – динамическая вязкость, средняя скорость смеси –

$$\tilde{U} = c_0 \tilde{n} \tilde{u}_1 + (1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{u}_2, \quad \frac{d}{d\tilde{t}} = \partial_{\tilde{t}} + \tilde{U} \partial_{\tilde{x}} \text{ и см. [1]:}$$

$$\tilde{\rho} \tilde{c} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{T} = \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\lambda} \partial_{\tilde{x}} \tilde{T}) + \tilde{Q} \tilde{W}(\tilde{n}, \tilde{T}), \quad (4)$$

$$\tilde{\rho} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{n} = \partial_{\tilde{x}} (\tilde{D} \partial_{\tilde{x}} \tilde{n}) - \tilde{W}(\tilde{n}, \tilde{T})$$

$$\tilde{W} = \tilde{k}_0 \tilde{\rho} \tilde{n}^\beta e^{-\frac{\tilde{E}_*}{RT}} \quad (5)$$

мы моделируем высокочастотные колебания резонанса в процессе развития теплового взрыва. Переменные фазового пространства: – \tilde{P} – давление, \tilde{S} – энтропия, \tilde{T} – температура, \tilde{E} – внутренняя энергия, $\tilde{\rho}$ – плотность, \tilde{n} – приведенное количество активной компоненты (горючего) двухкомпонентной смеси, \tilde{u}_1 – скорость активной компоненты, \tilde{u}_2 – скорость пассивной компоненты соответственно,

$\tilde{P}_0, \tilde{T}_0, \tilde{S}_0, \tilde{\rho}_0, \tilde{n}_0$ – начальные давление, температура, энтропия, плотность и приведенное количество активной компоненты. В то же время x – пространственные переменные, вектор $g_1 = (1, 0, 0)$, ε – динамическая вязкость, $\tilde{\varepsilon}_g$ – ускорение свободного падения, c_0 – концентрация активной компоненты. Здесь теплота $\tilde{Q} = \tilde{T} \tilde{S}$ при дополнительном условии в начальный момент достаточной перемешиваемости компонент смеси или низкой начальной температуры (когда начальная энтропия $S_0 \sim 0$, в классике $Q = \text{const}$ [1]), β – порядок реакции ($\beta = 0, 1, 2$), E_* – энергия активации формулы Аррениуса (5) для скорости [1].

Доказательство. В случае одной активной компоненты глобальную неоднородность системы можно характеризовать как неоднородное распределение энthalпии по потоку (смеси). Для неоднородности системы вызванной накачкой теплоты в процессе горения в фазовом пространстве переменных (V, P, T, n, S, E) плотность приращения энthalпии $\rho \Delta H$ не есть полный дифференциал. Плотность приращения энthalпии есть полный дифференциал на многообразии локального равновесия. Стандартный химический потенциал представим в виде

$$\mu = \mu_0(T) + RT \ln \left(\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \right),$$

где приведенное давление

$$P_{pr} = P - \left((\gamma - 1)\rho E + \frac{P_{ad}^0}{\rho_0} \rho + TS\rho + n\rho\mu - 3\rho^3 g(x, e_1) \right)$$

и его плотность

$$\mathcal{P} = \frac{P_{pr}}{V} = \rho P_{pr}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho \Delta H d((\gamma - 1)\rho E + \frac{P_{ad}^0}{\rho_0} \rho + T\rho S + n\rho\mu - \rho^3 g(x, e_1) - P_{pr}) + \left(V - \frac{RnT\rho}{\mathcal{P}} \right) d\mathcal{P} - \\ - \rho \left(S + n \left(\frac{d\mu_0(T)}{dT} \right) + R \ln \left(\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \right) \right) dT. \quad (6) \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициент при $d\mathcal{P}$, получим уравнение состояния

$$V - \frac{RnT\rho}{P} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}P = RnT\rho^2,$$

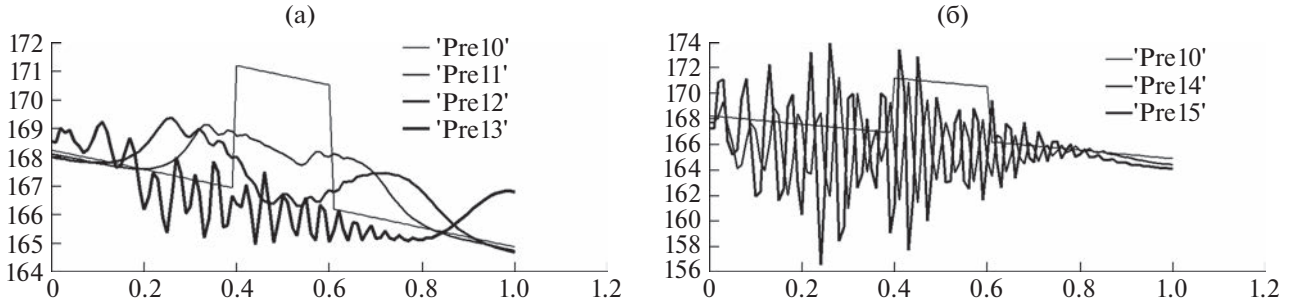


Рис. 1. (а) Временные сечения давления \tilde{P} для $t = 0; 0.005; 0.01; 0.025$; (б) временные сечения давления \tilde{P} для $t = 0.035; 0.04; 0.125$.

для плотности приведенного давления P_{pr} : аналог формулы Менделеева–Клайперона

$$P_{pr} = RnT\varrho.$$

Отсюда

$$P = (\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_{ad}^0}{\varrho_0} \varrho - \varrho^3 g(x, e_1) + TS\varrho + n\varrho\mu + RnT\varrho. \quad (7)$$

Мы получили уравнение состояния, определяющее давление в поле силы тяжести с учетом гидродинамического процесса. Приравнявая к нулю коэффициент при dT , получим уравнение состояния для энтропии

$$S = -n \left(\frac{d\mu_0(T)}{dT} \right) + R \ln \left(\frac{nT\varrho^2}{n_0T_0\varrho_0^2} \right), \quad (8)$$

где P_{ad}^0 – начальное давление адиабатического гидродинамического процесса в поле силы тяжести $P_{ad} = (\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_0}{\varrho_0} \varrho$, $P_{comb} = RTn\varrho$ – Из (2)–(3) следует, что в фазовом пространстве переменных (n, P, E, ϱ, S, T) соотношения (7), (8) определяют многообразие \mathcal{M}_V локального равновесия, на котором плотность приращения энтальпии есть полный дифференциал:

$$\varrho \Delta H = dH_{\mathcal{M}} \quad (9)$$

где

$$H_{\mathcal{M}} = P_{ad,g} - P_{comb} + \left[-T \frac{d\mu_0(T)}{dT} + \mu_0(T) \right] n - (\gamma - 1)\varrho_0 E_0 - P_{ad}^0$$

В случае $H_{\mathcal{M}} > 0$, $H_{\mathcal{M}}$ естественно назвать энергией завихренности. На этом доказательство завершено.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ МОДЕЛИ (3)–(5), (7), (8)

Мы приведем результаты численного эксперимента, подтверждающие наличие резонанса теплового взрыва [1]. Численный эксперимент модели (2)–(3) на отрезке $\tilde{x} \in [0, 1]$ с граничным условием, включающим управление ростом температуры на входе:

$$\tilde{T}|_{\tilde{x}=0} = \tilde{T}^0(0) + K\tilde{t}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{x}} \tilde{\varrho}|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{\varrho}|_{\tilde{x}=1} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_1|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_1|_{\tilde{x}=1} = \\ = \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_2|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_2|_{\tilde{x}=1} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{T}|_{\tilde{x}=1} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{n}|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{n}|_{\tilde{x}=1} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

и начальными условиями, моделирующими в одномерном случае впрыскивание из форсунки горючей компоненты двухкомпонентной смеси:

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}|_{\tilde{r}=0} = \tilde{\varrho}_0, \quad \tilde{u}_1|_{\tilde{r}=0} = \tilde{u}_1^0, \\ \tilde{u}_2|_{\tilde{r}=0} = \tilde{u}_2^0 = 1.5, \quad \tilde{T}|_{\tilde{r}=0} = \tilde{T}_0 = 10 \end{aligned} \quad (12)$$

$\tilde{n}|_{\tilde{r}=0} = n_1 = 0.5$, $\tilde{x} \in (0, 0.3) \cup (0.4, 0.5)$, $\tilde{n}|_{\tilde{r}=0} = 0.52$, $\tilde{x} \in (0.3, 0.4)$, $\tilde{E}_* = 100$. Начальные данные для внутренней энергии $\tilde{E}_0 = 1$. Поведение графиков решения смешанной задачи (3)–(5), (7), (8), (10)–(12) зависит от структуры производной $\frac{d}{d\tilde{T}} \tilde{\mu}_0(\tilde{T})$. В отличие от вибрационного горения [7] резонанс теплового взрыва возникает в случае $\tilde{\mu}_0(\tilde{T}) = \tilde{T}_0 \left[B_* - (R + A_*) \frac{\tilde{T}^2}{\tilde{T}_0^2} \right]$.

ПРИМЕР 1. В численном эксперименте для значений $A_* + R = 0.5$, $\tilde{\varrho}_0 = 0.8$ меньше критического $A_*^{cr} + R = 2$ характерно возникновение высокочастотных колебаний, достаточно быстро разрушающихся во времени. Процесс стремится к однородному состоянию.

ПРИМЕР 2. Ниже (см. рис. 1) приведем численный эксперимент со значением параметра

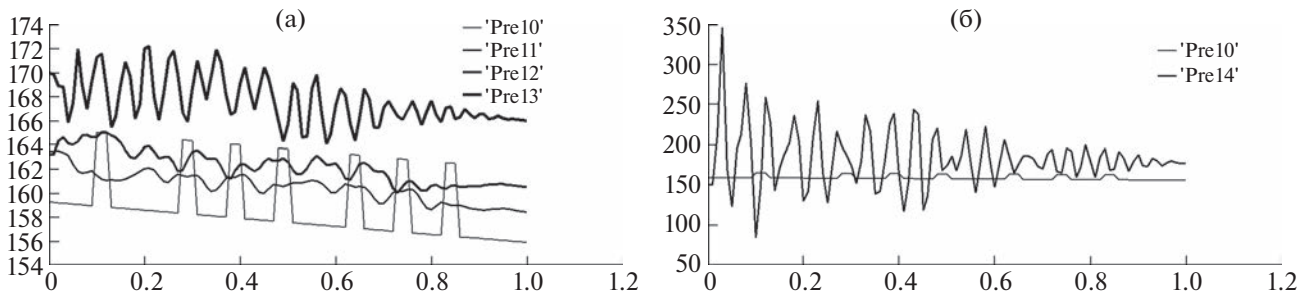


Рис. 2. (а) Временные сечения давления \tilde{P} для $t = 0; 0.005; 0.01; 0.025$; (б): временные сечения давления \tilde{P} для $t = 0.035; 0.04$.

$A_* + R = 1.5$, $\tilde{Q}_0 = 1.5$, близким к критическим, что приводит к взрыву.

Как видим, здесь режим дефлаграции, давление падает. Режим существует вблизи резонанса. Из проведенных численных экспериментов следует, что без дополнительных условий в ламинарном процессе горения в приближении локально-го равновесия не рождается режим детонации.

Перемешивание. Теперь перейдем к начальным условиям, моделирующим в одномерном случае впрыскивание из семи форсунок горючей компоненты двухкомпонентной смеси:

$$\tilde{n}|_{t=0} = \tilde{n}_0 = \begin{cases} 0.52, & x \in \Omega \\ 0.5 & x \in [0, 1] \setminus \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Omega = & [0.1, 0.12] \cup [0.28, 0.3] \cup [0.38, 0.4] \cup \\ & \cup [0.48, 0.5] \cup [0.63, 0.65] \cup \\ & \cup [0.73, 0.75] \cup [0.83, 0.85]. \end{aligned}$$

Моделируется условие равных расходов для одной форсунки и для смеси. Далее, однородные условия начальных данных: $\tilde{\rho}|_{t=0} = \tilde{\rho}_0 = 1.5$, $\tilde{u}_1|_{t=0} = \tilde{u}_1^0 = 1.5$, $\tilde{u}_2|_{t=0} = \tilde{u}_2^0 = 1.5$, $\tilde{T}|_{t=0} = \tilde{T}_0 = 10$, $\tilde{E}_* = 100$. Начальные данные для внутренней энергии $\tilde{E}_0 = \text{const}$. Так же как выше, приводим результаты счета активного существования зоны детонации при $A + R = 2$. Как видим (см. рис. 2), этот случай “перемешивания” имеет рост давления зоны детонации. Здесь одинаковые площади под графиком с 1 форсункой и 7.

Как видим, мы имеем рост давления зоны детонации. Время жизни небольшое, процесс быстро стабилизируется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из проведенных численных экспериментов следует, что без дополнительных условий в моделировании ламинарного процесса горения в приближении локального равновесия рождается про-

цесс детонации. Численным экспериментом мы установим, что вблизи резонанса при дополнительном условии перемешивания смеси возникает режим детонации, но существующий недолго. В натурном эксперименте получена обширная зона детонации при существенном росте давления при наличии шероховатостей на поверхности камеры сгорания. Последнее указывает на возможное участие в рождении зоны детонации — турбулизации процесса горения. Это станет задачей ближайшей публикации, в которой мы уйдем от ограничения “идеального газа с постоянными теплоемкостью и молекулярной массой” (переходя к переменному R).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 472 с.
2. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961. 500 с.
3. Smirnov N.N., Nikitin V.F., Stamov L.I. Different scenarios of shock wave focusing inside a wedge-shaped cavity in hydrogen-air mixtures // *Aerospace Science and Technology*, издательство Elsevier BV (Netherlands). 2022. Т. 121. С. 107382.
4. Smirnov N.N., Betelin V.B., Nikitin V.F., Philippov Yu G., Jaye Koo. Detonation engine fed by acetylene-oxygen mixture // *Acta Astronautica*, издательство Pergamon Press Ltd. (United Kingdom). 2014. Т. 104. С. 134–146.
5. Smirnov N.N., Nikitin V.F., Philippov Yu.G. Deflagration to detonation transition in gases in tubes with cavities // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. Springer Nature (Switzerland). 2010. Т. 83. № 6. С. 1287–1316.
6. Смирнов Н.Н., Никитин В.Ф., Алиари Шурехделу Ш. Переходные режимы распространения волн в метастабильных системах // *Физика горения и взрыва*. Издательство Сиб. отд-ния Рос. акад. наук (Новосибирск). 2008. Т. 44. № 5. С. 25–37.
7. Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Sidorov M.I., Stavrovskii M.E. On the Raushenbakh Resonance // *Moscow*

- University Mechanics Bulletin. 2021. V. 76. № 3. P. 65–77.
8. *Радкевич Е.В., Лукашев Е.А., Яковлев Н.Н., Васильева О.А., Сидоров М.И.* Введение в обобщенную теорию неравновесных фазовых переходов и термодинамический анализ задач механики сплошной среды. М.: Издательство Московского университета, 2019. 342 с.
9. *Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Yakovlev N.N.* Mechanism of Detonation Formation in the Process of Vibration Combustion // *Aurasian Journal of Mathematical and Computer Applization*. ISSN 2306-6172. 2022. № 20. P. 1–11.

THERMAL EXPLOSION AS A RESONANCE OF THE COMBUSTION PROCESS

E. V. Radkevich^a, O. A. Vasilieva^b, M. I. Sidorov^c, and M. E. Stavrovskii^d

^a *Moscow State University M.V. Lomonosov, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation*

^c *Russian University of Chemical Technology named after D.I. Mendeleev, Moscow, Russian Federation*

^d *Engineering Center for Mobile Solutions, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Based on the thermodynamic analysis of the combustion process, a new model of the laminar combustion process is constructed. When controlling the temperature at the inlet (an increase in the temperature at the inlet to the combustion chamber), depending on the structure of the standard chemical potential, high-frequency oscillations of the thermal explosion resonance occur. Resonance regimes are modeled during heat pumping, the nature of their nucleation is established depending on the structure of the standard chemical potential, and numerical experiments on the occurrence of these modes are presented.

Keywords: thermodynamic analysis, mathematical models whether the combustion process, local equilibrium, laminar combustion process, high frequency vibrations

УДК 517.968

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

© 2023 г. Академик РАН В. Г. Романов^{1,*}

Поступило 29.11.2022 г.

После доработки 11.12.2022 г.

Принято к публикации 28.12.2022 г.

Для системы уравнений электродинамики с нелинейной проводимостью рассматривается обратная задача об определении переменного коэффициента проводимости. Предполагается, что искомым коэффициентом является гладкой функцией пространственных переменных, финитной в \mathbb{R}^3 . Из однородного пространства на неоднородность падает плоская волна с резким фронтом, бегущая в некотором направлении ν . Направление является параметром задачи. В качестве информации для решения обратной задачи задается модуль вектора электрической напряженности поля для некоторого диапазона направлений падающей плоской волны и для моментов времени, близких к приходу волны в точки поверхности шара, внутри которого содержится неоднородность. Показывается, что эта информация приводит обратную задачу к задаче рентгеновской томографии, алгоритмы численного решения которой хорошо разработаны.

Ключевые слова: нелинейное уравнение электродинамики, плоские волны, рентгеновская томография, единственность

DOI: 10.31857/S2686954322600719, **EDN:** CSAJTT

Рассмотрим нелинейную систему уравнений электродинамики:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon \mathbf{E}_t + \sigma(\mathbf{x}) |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu \mathbf{H}_t, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4; \end{aligned} \quad (1)$$

в которой ε и μ – положительные постоянные, а $\sigma(\mathbf{x}) \geq 0$ – гладкая в \mathbb{R}^3 финитная функция, носитель которой содержится внутри шара $B(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| < R\}$. Уравнение (1) описывает распространение электромагнитных волн в среде с нелинейной проводимостью, влияние которой локализовано областью $B(R)$.

Обозначим через $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ скорость распространения электромагнитных волн, и через $\theta_0(t)$ функцию Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$.

Рассмотрим для уравнения (1) задачу с данными

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|_{r<0} &= \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}^0 \theta_0(t - (R + \mathbf{x} \cdot \nu)/c), \\ \mathbf{H}|_{r<0} &= \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}^0 \theta_0(t - (R + \mathbf{x} \cdot \nu)/c), \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (2)

$$\nu = \nu(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = \mathbf{e}_r, \quad \varphi \in [0, \pi),$$

$$\mathbf{E}^0 = A \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1), \quad A > 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{H}^0 = -A \mathbf{e}_\varphi / (c\mu), \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

Векторы \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z образуют ортонормированный базис в \mathbb{R}^3 .

Нетрудно проверить, что функции $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t)$ являются обобщенным решением (в смысле теории распределений) уравнений (1) для непроводящей среды (т.е. при $\sigma \equiv 0$) и представляют собой плоскую волну, с резким фронтом $t = (R + \mathbf{x} \cdot \nu)/c$, распространяющуюся в направлении ν . В момент времени $t = 0$ эта волна касается поверхности шара $B(R)$ в точке $\mathbf{x} = -R\nu$. В задаче (1), (2) φ играет роль параметров. Поэтому ее решение обозначим через $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t, \varphi)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t, \varphi)$. Иногда зависимость решения от φ (или от ν) будет для краткости опускаться.

Обозначим $S_+(R, \nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R, \mathbf{x} \cdot \nu > 0\}$. Ниже будет изучаться задача об определении функции $\sigma(\mathbf{x})$ по информации о решениях задачи

¹ Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

* E-mail: romanov@math.nsc.ru

(1), (2) на множестве $S_+(R, \mathbf{v})$ для всевозможных значений параметра $\varphi \in [0, \pi)$.

Обратная задача. Найти $\sigma(\mathbf{x})$ в области $B(R)$ по следующей информации о решениях задачи (1), (2):

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t, \varphi)| &= h(\mathbf{x}, t, \varphi), \quad \text{для всех } \varphi \in [0, \pi), \\ \mathbf{x} &\in S_+(R, \mathbf{v}(\varphi)), \quad t \in (0, (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(\varphi))/c + \eta), \end{aligned} \quad (4)$$

где $h(\mathbf{x}, t, \varphi)$ – заданная функция и η – произвольное малое положительное число.

Обратные задачи об определении коэффициентов в нелинейных гиперболических уравнениях или системах интенсивно изучаются в последние годы (см. [1–12]). Для системы нестационарных нелинейных уравнений электродинамики обратные задачи ранее не изучались.

Предположим, что при сделанных выше предположениях о функции $\sigma(\mathbf{x})$ существует обобщенное решение задачи (1), (2), по крайней мере, в некоторой окрестности характеристической плоскости $t = (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c$. Вычислим скачок решения при переходе через эту плоскость.

Пусть

$$\theta_k(t) = \frac{t^k}{k!} \theta_0(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Представим решение задачи (1), (2) в окрестности характеристической плоскости $t = (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c$ в виде разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \alpha^0(\mathbf{x})\theta_0(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c) + \\ &+ \alpha^1(\mathbf{x})\theta_1(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c) + \dots, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= \beta^0(\mathbf{x})\theta_0(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c) + \\ &+ \beta^1(\mathbf{x})\theta_1(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c) + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

в котором точками обозначены члены разложения, отвечающие $\theta_k(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c)$, $k \geq 2$. Подставляя эти выражения в уравнения (1) и приравнявая члены при $\delta(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c)$ и $\theta_0(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c)$, находим равенства для α^k, β^k , $k = 0, 1$:

$$\beta^0 \times \mathbf{v} = c\epsilon\alpha^0, \quad \alpha^0 \times \mathbf{v} = -c\mu\beta^0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \beta^1 \times \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \beta^0 &= c\epsilon\alpha^1 + c\sigma(\alpha^0 \cdot \alpha^0)\alpha^0, \\ \alpha^1 \times \mathbf{v} + c \operatorname{rot} \alpha^0 &= -c\mu\beta^1. \end{aligned} \quad (7)$$

Равенства (6) эквивалентны двум скалярным соотношениям

$$\alpha^0 \cdot \mathbf{v} = 0, \beta^0 \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8)$$

Из равенств (7), используя (8), находим связь между проекциями векторов α^1 и β^1 на вектор \mathbf{v} и векторами α^0 и β^0 :

$$\alpha^1 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \beta^0 \cdot \mathbf{v}, \quad \beta^1 \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \alpha^0 \cdot \mathbf{v}. \quad (9)$$

Умножим второе равенство (7) векторно на \mathbf{v} и используем равенство

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

Тогда получим соотношение

$$(\alpha^1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - \alpha^1 + c \operatorname{rot} \alpha^0 \times \mathbf{v} = -c\mu\beta^1 \times \mathbf{v}.$$

Умножим это соотношение на $(-c\epsilon)$, сложим его с первым равенством (7) и воспользуемся тем, что $c^2\epsilon\mu = 1$. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} c \operatorname{rot} \beta^0 - c\epsilon[(\alpha^1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + c \operatorname{rot} \alpha^0 \times \mathbf{v}] &= \\ = c\sigma(\alpha^0 \cdot \alpha^0)\alpha^0. \end{aligned} \quad (10)$$

Исключая из (10) член $(\alpha^1 \cdot \mathbf{v})$ с помощью (9), находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \beta^0 - (\operatorname{rot} \beta^0 \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - c\epsilon \operatorname{rot} \alpha^0 \times \mathbf{v} &= \\ = \sigma(\alpha^0 \cdot \alpha^0)\alpha^0. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \beta^0 - (\operatorname{rot} \beta^0 \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} &= -(\operatorname{rot} \beta^0 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \\ = (\operatorname{rot}(\alpha^0 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}/(c\mu), \end{aligned}$$

то, умножая (11) на $(-c\mu)$, получаем уравнение для отыскания α^0 :

$$\begin{aligned} -(\operatorname{rot}(\alpha^0 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \operatorname{rot} \alpha^0 \times \mathbf{v} &= \\ = -c\mu\sigma(\alpha^0 \cdot \alpha^0)\alpha^0. \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразуем это уравнение, используя формулы векторного анализа

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Положим в этих формулах $\mathbf{a} = \alpha^0$, $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ и применим их в равенстве (12), принимая во внимание, что $\alpha^0 \cdot \mathbf{v} = 0$ и \mathbf{v} не зависит от \mathbf{x} . Тогда получим уравнение

$$\begin{aligned} [(\mathbf{v}(\nabla \cdot \alpha^0) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha^0) \times \mathbf{v}] \times \mathbf{v} + \\ + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha^0 = -c\mu\sigma(\alpha^0 \cdot \alpha^0)\alpha^0. \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ и

$$\begin{aligned} [((\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha^0) \times \mathbf{v}] \times \mathbf{v} = \\ = (\mathbf{v} \cdot \nabla)[(\alpha^0 \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}] = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha^0, \end{aligned}$$

то предыдущее уравнение принимает окончательный вид:

$$2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha^0 = -c\mu\sigma(\alpha^0 \cdot \alpha^0)\alpha^0. \quad (13)$$

Из равенства (2) следует, что $\alpha^0(\mathbf{x}) = A\mathbf{e}_z$ для $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \leq -R$. Отсюда находятся начальные данные для α^0 в виде

$$\alpha^0|_{\Sigma(\mathbf{v})} = A\mathbf{e}_z. \quad (14)$$

В этом равенстве $\Sigma(\mathbf{v})$ – плоскость, касающаяся поверхности шара $B(R)$ в точке $\mathbf{x} = -R\mathbf{v}$, т.е. $\Sigma(\mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -R\}$.

Пусть \mathbf{x}^0 – произвольная точка плоскости $\Sigma(\mathbf{v})$. Рассмотрим луч $L(\mathbf{x}^0, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + s\mathbf{v}, s \geq 0\}$. Вдоль этого луча уравнение (13) и начальные данные (14) при $s = 0$ можно представить в виде

$$2\frac{d\alpha^0}{ds} = -c\mu\sigma(\alpha^0 \cdot \alpha^0)\alpha^0, \quad s > 0, \quad \alpha^0|_{s=0} = A\mathbf{e}_z. \quad (15)$$

Решение задачи (15) можно выписать в явном виде. Умножим равенство (15) скалярно на α^0 . Тогда для $|\alpha^0| =: w(\mathbf{x})$ получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения вдоль луча $L(\mathbf{x}^0, \mathbf{v})$:

$$2\frac{dw}{ds} = -c\mu\sigma w^3, \quad s > 0, \quad w|_{s=0} = A.$$

Отсюда

$$w(\mathbf{x}^0 + s\mathbf{v}) = A \left(1 + A^2 c\mu \int_0^s \sigma(\mathbf{x}^0 + s'\mathbf{v}) ds' \right)^{-1/2}, \quad (16)$$

$$s \geq 0.$$

Теперь задачу (15) можно переписать в виде

$$\frac{d}{ds} \left[\alpha^0 \exp \left(-\frac{c\mu}{2} \int_0^s \sigma(\mathbf{x}^0 + s'\mathbf{v}) w^2(\mathbf{x}^0 + s'\mathbf{v}) ds' \right) \right] = 0, \quad (17)$$

$$s > 0, \quad \alpha^0|_{s=0} = A\mathbf{e}_z.$$

Решение задачи (17) определяется формулой

$$\alpha^0(\mathbf{x}^0 + s\mathbf{v}) = A\mathbf{e}_z \exp \left(-\frac{c\mu}{2} \int_0^s \sigma(\mathbf{x}^0 + s'\mathbf{v}) w^2(\mathbf{x}^0 + s'\mathbf{v}) ds' \right), \quad (18)$$

$$s > 0,$$

в которой функция $w(\mathbf{x}^0 + s'\mathbf{v})$ вычисляется по формуле (16).

Чтобы найти w и α^0 как функции \mathbf{x} , надо найти s и $\mathbf{x}^0 \in \Sigma(\mathbf{v})$ из соотношений $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + s\mathbf{v}$,

$\mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{v} = -R$. Это приводит к формулам: $s = R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x} - \mathbf{v}(R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})$. В результате, с учетом того, что носитель функции $\sigma(\mathbf{x})$ содержится в шаре $B(R)$, получаем равенства

$$|\alpha^0(\mathbf{x})| = w(\mathbf{x}) = A \left(1 + A^2 c\mu \int_0^{R+\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}} \sigma(\mathbf{x} - \mathbf{v}(R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - s')) ds' \right)^{-1/2} =$$

$$= A \left(1 + A^2 c\mu \int_0^\infty \sigma(\mathbf{x} - s''\mathbf{v}) ds'' \right)^{-1/2}, \quad (19)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \geq -R,$$

$$\alpha^0(\mathbf{x}) = A\mathbf{e}_z \exp \left(-\frac{c\mu}{2} \int_0^\infty \sigma(\mathbf{x} - s''\mathbf{v}) w^2(\mathbf{x} - s''\mathbf{v}) ds'' \right), \quad (20)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \geq -R.$$

Как видно из формулы (20), вектор $\alpha^0(\mathbf{x})$ имеет единственную ненулевую проекцию на орт $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$. В силу этого факта и положительности постоянной A , упомянутая проекция совпадает с $|\alpha^0(\mathbf{x})|$. Поэтому формулу для $\alpha^0(\mathbf{x})$ можно представить в более простом виде

$$\alpha^0(\mathbf{x}) = A\mathbf{e}_z \left(1 + A^2 c\mu \int_0^\infty \sigma(\mathbf{x} - s''\mathbf{v}) ds'' \right)^{-1/2},$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \geq -R.$$

Вектор $\beta^0(\mathbf{x})$ вычисляется по второй формуле (6). Он имеет также только одну ненулевую компоненту на орт \mathbf{e}_φ .

Заметим, что векторы α^1 и β^1 равенствами (7) полностью не определяются, находятся только их проекции на орт $\mathbf{e}_r = \mathbf{v}$. Их можно найти полностью, введя в разложениях (5) явным образом члены $\alpha^2(\mathbf{x})\theta_2(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c)$, $\beta^2(\mathbf{x})\theta_2(t - (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c)$, и, выписав соответствующие уравнения для $\alpha^2(\mathbf{x})$ и $\beta^2(\mathbf{x})$.

Векторы α^0 и β^0 зависят не только от \mathbf{x} , но также и от $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\varphi)$. Ранее мы эту зависимость их от параметра φ опускали для краткости записи.

В силу формулы (19), информация (4) определяет интегралы

$$\int_0^\infty \sigma(\mathbf{x} - s\mathbf{v}(\varphi)) ds = g(\mathbf{x}, \varphi), \quad (21)$$

$$\varphi \in [0, \pi), \quad \mathbf{x} \in S_+(R, \mathbf{v}(\varphi)),$$

в которых функция $g(\mathbf{x}, \varphi)$ вычисляется по формулам

$$g(\mathbf{x}, \varphi) = \frac{1}{A^2 c \mu} \left(\frac{A^2}{|\alpha^0(\mathbf{x}, v(\varphi))|^2} - 1 \right),$$

$$|\alpha^0(\mathbf{x}, v(\varphi))| = \lim_{t \rightarrow (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c + 0} h(\mathbf{x}, t, \varphi).$$

Зафиксируем плоскость $P(z_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z = z_0\}$, $z_0 \in (-R, R)$, и рассмотрим интегралы (21), отвечающие точкам $\mathbf{x} \in S_+(R, v(\varphi))$, лежащим в плоскости $P(z_0)$, и всевозможным $\varphi \in [0, \pi)$. В этом случае, с учетом того, что $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ вне $B(R)$, нам известны интегралы по всем прямым, пересекающим область $B(R) \cap P(z_0)$. В результате задача об определении $\sigma(\mathbf{x})$ по информации (4) сводится к задаче рентгеновской томографии для каждой плоскости $P(z_0)$ (см., например, [13]). Решая ее, находим $\sigma(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in P(z_0)$. Так как совокупность сечений $B(R) \cap P(z_0)$, $z_0 \in (-R, R)$, образует шар $B(R)$, то тем самым функция $\sigma(\mathbf{x})$ определяется всюду в $B(R)$.

Редукция обратной задачи к проблеме томографии открывает путь к ее эффективному решению. К настоящему времени разработаны и успешно работают многочисленные алгоритмы решения задачи компьютерной томографии.

Известно, что решение задачи томографии единственно. Поэтому верна следующая теорема единственности.

Теорема. *Решение обратной задачи единственно.*

Замечание 1. Как видно из анализа решения задачи (1), (2), имеет место равенство $|\alpha^0| = |\beta^0|$. Поэтому в обратной задаче в информации (4) вместо $|\mathbf{E}|$ можно задавать $|\mathbf{H}|$.

Замечание 2. В уравнениях (1) можно рассматривать более общий случай нелинейности, а именно, заменить в первом уравнении $|\mathbf{E}|^2$ на

$f(|\mathbf{E}|^2)$, полагая, что функция $f(z)$ является гладкой и $f(z) > 0$ для $z > 0$. В этом случае анализ прямой задачи (1), (2) может быть выполнен по той же самой схеме и вычислены конечные скачки функций \mathbf{E} и \mathbf{H} на фронте $t = (R + \mathbf{x} \cdot \mathbf{v})/c$ бегущей волны. В связи с этим сформулированная выше постановка обратной задачи с данными (4) также приводит к задаче рентгеновской томографии.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. *Invent. Math.* 2018. V. 212. P. 781–857.
2. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. *Comm. Math. Phys.* 2018. V. 360. P. 555–609.
3. Barreto A.S. *Inverse Probl. Imaging.* 2020. V. 14. № 6. P. 1057–1105.
4. Lassas M. *Proc. Int. Congress of Math. ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil.* 2018. V. III. P. 3739–3760.
5. Stefanov P., Barreto A.S. *arXiv:2102.06323.* 2021.
6. de Hoop M., Uhlmann G., Wang Y. *Mathematische Annalen.* 2020. V. 376. № 1–2. P. 765–795.
7. Wang Y., Zhou T. *Comm. PDE.* 2019. V. 44. № 11. P. 1140–1158.
8. Uhlmann G., Zhai J. *Discrete Continuous Dynamical Systems - A.* 2021. V. 41. № 1. P. 455–469.
9. Barreto A.S., Stefanov P. *arXiv: 2107.08513v1. [math. AP]* 18 Jul 2021.
10. Романов В.Г. *Доклады АН.* 2022. Т. 504. № 1. С. 36–41.
11. Романов В.Г., Бугуева Т.В. *Сиб. журн. индустр. матем.* 2022. Т. 25. № 2. С. 83–100.
12. Романов В.Г., Бугуева Т.В. *Сиб. журн. индустр. матем.* 2022. Т. 25. № 3. С. 154–169.
13. Наттерер Ф. *Математические аспекты компьютерной томографии.* М.: Мир, 1990, 279 с.

AN INVERSE PROBLEM FOR ELECTRODYNAMIC EQUATIONS WITH A NONLINEAR CONDUCTIVITY

Academician of the RAS V. G. Romanov^a

^a Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk 630090, Russian Federation

An inverse problem of determination of a variable coefficient in electrodynamic equations with a nonlinear conductivity is considered. It is supposed that the unknown coefficient is a smooth function of space variables and finite in \mathbb{R}^3 . From a homogeneous space a plane wave going in a direction fall down on a heterogeneousness. The direction is a parameter of the problem. The module of the electrical strength vector for some diapason of directions and for moments of the time close to arriving the wave at points of a surface of a ball, inside of which the heterogeneousness is contained, is given as the information for solution of the inverse problem. It is shown that this information reduces the inverse problem to the well known X-ray tomography. Algorithms of the numerical solution of the later problem is well developed.

Keywords: nonlinear electrodynamic equations, plane waves, X-ray tomography, uniqueness

УДК 517+531.01

ИНВАРИАНТНЫЕ ФОРМЫ ОБЪЕМА ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2023 г. М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 22.12.2022 г.

После доработки 24.12.2022 г.

Принято к публикации 30.12.2022 г.

В данной работе предьявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма

DOI: 10.31857/S2686954322600768, EDN: CSVYJQ

Обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (и не только первых интегралов), как известно [1–3], позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Как известно, для консервативных систем этот факт естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т.е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции (см. также [4–6]).

Кратко приведем примеры часто встречающихся тензорных инвариантов. Скалярные инварианты – это первые интегралы рассматриваемой системы. Инвариантные векторные поля – поля симметрий (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемые этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные

формы (что, в основном, и проведено в данной работе) порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы. При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из n дифференциальных уравнений, помимо упомянутого тривиального инварианта, надо знать еще $n - 1$ независимых тензорных инвариантов.

Как показано ранее, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, который можно образно описать как “поток набегающей среды, заполняющей всеобъемлющее пятимерное пространство”, эта задача приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. То же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по четырехмерной сфере с индуцированной метрикой все-

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@rambler.ru

объемлющего пятимерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д.

Впервые частные случаи систем с четырьмя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в [5]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [6]). Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, четырехмерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. И в заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Также указываются достаточные условия интегрируемости.

1. Инварианты уравнений геодезических. Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие $M^4\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\alpha^{\cdot}, \beta_1^{\cdot}, \beta_2^{\cdot}, \beta_3^{\cdot}; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (ср. с [5, 8]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha^{\cdot} &= z_4 f_4(\alpha), & \beta_1^{\cdot} &= z_3 f_1(\alpha), \\ \beta_2^{\cdot} &= z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), & \beta_3^{\cdot} &= z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, 4$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, \dots, z_4 в касательном пространстве уместно вводить тогда, когда рассматриваются

следующие уравнения геодезических (ср. с [5, 7, 9, 10]) с 13 ненулевыми коэффициентами связности:

$$\begin{aligned} \alpha^{\cdot\cdot} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) \alpha^{\cdot 2} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_1^{\cdot 2} + \\ + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_2^{\cdot 2} + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_3^{\cdot 2} &= 0, \\ \beta_1^{\cdot\cdot} + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \alpha^{\cdot} \beta_1^{\cdot} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \beta_2^{\cdot 2} + \\ + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \beta_3^{\cdot 2} &= 0, \\ \beta_2^{\cdot\cdot} + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \alpha^{\cdot} \beta_2^{\cdot} + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \beta_1^{\cdot} \beta_2^{\cdot} + \\ + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \beta_3^{\cdot 2} &= 0, \\ \beta_3^{\cdot\cdot} + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \alpha^{\cdot} \beta_3^{\cdot} + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \beta_1^{\cdot} \beta_3^{\cdot} + \\ + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \beta_2^{\cdot} \beta_3^{\cdot} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

т.е. остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении

$TM^4\{\alpha^{\cdot}, \beta_1^{\cdot}, \beta_2^{\cdot}, \beta_3^{\cdot}; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, примут вид

$$\begin{aligned} z_1^{\cdot} &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] z_1 z_4 - \\ &- f_1(\alpha) [2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)] z_1 z_3 - \\ &- f_2(\alpha) g_1(\beta_1) [2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)] z_1 z_2, \\ z_2^{\cdot} &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] z_2 z_4 - \\ &- f_1(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] z_2 z_3 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1)}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_3^{\cdot} &= -f_4(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] z_3 z_4 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_4^{\cdot} &= -f_4(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)] z_4^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (3)$$

$Dj(\gamma) = \frac{d \ln |j(\gamma)|}{d\gamma}$, и уравнения (2) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (1), (3)

на многообразии $TM^4\{\alpha^{\cdot}, \beta_1^{\cdot}, \beta_2^{\cdot}, \beta_3^{\cdot}; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (2) (к системе (1), (3)).

(а) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай – метрика, индуцированная евклидовой метрикой всеобъемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай – приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для динамики динамически симметричного пятимерного твердого тела.

(б) Системы на касательных расслоениях более общих четырехмерных поверхностей вращения.

(в) Системы на касательном расслоении четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Для полного интегрирования системы (1), (3) достаточно знать, вообще говоря, пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. То, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов, будет показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (2), переписанных в виде $x^{i''} + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x)x^{j'}x^{k'} = 0$, $i = 1, \dots, 4$, является гладкая функция $\sum_{j,k=1}^4 g_{jk}(x)x^{j'}x^{k'}$, но мы представим его в более простой форме. Кроме того, в следующей теореме (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются алгебраические и дифференциальные соотношения на функции $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, 4$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ из (1) и на 13 ненулевых коэффициентов связности.

Теорема 1. Если выполнены условия

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) = f(\alpha), \quad (4)$$

$$g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) = g(\beta_1),$$

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad (5)$$

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2),$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) \equiv \\ \equiv \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha), \\ \Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2), \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2) + h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2) \equiv 0, \end{cases} \quad (6)$$

то система (1), (3) обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (7)$$

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (8)$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\},$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) &= \\ &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\},$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = \\ &= C_4 = \text{const}, \end{aligned} \quad (9-1)$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\},$$

$$\begin{aligned} \Phi_5(\beta_2, \beta_3) &= \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = \\ &= C_5 = \text{const}. \end{aligned} \quad (10)$$

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ и фазовых $w_4 = z_4$, $w_3^* = \ln|w_3|$, $w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$, $w_s^* = \ln|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, 2$, $w_2 = z_2/z_1$, $w_1 = z_3/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$) фазовый поток системы (1), (3) сохраняет объем на касательном расслоении TM^4 , т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема

$$dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3.$$

Видно, что условий (4)–(6) заведомо меньше, чем количество “произвольных” функций $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, 4$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, 2$, $h(\beta_2)$ и 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности.

Система дифференциальных равенств из (6) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (12)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). При этом поиск как интеграла (7), так и (8)–(10) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 11].

Примеры 1, 2. В случае обобщенных сферических координат, когда метрика на четырехмерной сфере

индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пятимерного пространства ($k(\alpha) \equiv 1$), или когда метрика на четырехмерной сфере индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий ($k(\alpha) \equiv \cos \alpha$) (задачи класса (а)), однопараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha \dot{} &= -z_4, & z_4 \dot{} &= -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}, \\ z_3 \dot{} &= z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha} + \\ &+ (z_1^2 + z_2^2) \frac{k(\alpha) \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ z_2 \dot{} &= z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha} - \\ &- z_2 z_3 \frac{k(\alpha) \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}} - \\ &- z_1^2 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ z_1 \dot{} &= z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha} - \\ &- z_1 z_3 \frac{k(\alpha) \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}} + \\ &+ z_1 z_2 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \beta_1 \dot{} &= z_3 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \beta_2 \dot{} &= -z_2 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \\ \beta_3 \dot{} &= z_1 \frac{k(\alpha)}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \mu_1 \in R. \end{aligned}$$

Пример 3. В случае четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна (задачи класса (в)), четырехпараметрическая система, почти всюду эквивалентная уравнениям геодезических

$$\begin{aligned} \alpha \ddot{} - \frac{1}{\alpha} (\alpha \dot{}^2 - \beta_1 \dot{}^2 - \beta_2 \dot{}^2 - \beta_3 \dot{}^2) &= 0, \\ \beta_r \ddot{} - \frac{2}{\alpha} \alpha \dot{} \beta_r \dot{} &= 0, \quad r = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

и имеющая первые интегралы (7)–(10), примет следующий вид:

$$\alpha \dot{} = z_4 \mu_1 \alpha,$$

$$\begin{aligned} z_4 \dot{} &= -z_3^2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2} - z_2^2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_3} - z_1^2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_4}, \\ z_3 \dot{} &= z_3 z_4 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_2}, & z_2 \dot{} &= z_2 z_4 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_3}, \\ z_1 \dot{} &= z_1 z_4 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_4}, \\ \beta_1 \dot{} &= z_3 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \mu_2}}, & \beta_2 \dot{} &= z_2 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \mu_3}}, \\ \beta_3 \dot{} &= z_1 \frac{\mu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \mu_4}, \quad \mu_1, \dots, \mu_4 \in R. \end{aligned}$$

2. Инварианты потенциальных систем. Несколько модифицируем систему (1), (3), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле с аддитивными компонентами $F_3(\alpha)$, $F_2(\beta_1)$, $F_1(\beta_2)$ с потенциалом (12), см. далее. В проекциях на оси $z_k \dot{}$, $k = 1, \dots, 4$, силовое поле будет иметь следующие комбинированные компоненты, соответственно: $F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2)$, $F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1)$, $F_3(\beta_1) f_1(\alpha)$, $F_4(\alpha) f_4(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{aligned} \alpha \dot{} &= z_4 f_4(\alpha), \\ z_4 \dot{} &= F_4(\alpha) f_4(\alpha) - f_4(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) \right] z_4^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_3 \dot{} &= F_3(\beta_1) f_1(\alpha) - f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] z_3 z_4 - \\ &- \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ &- \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_2 \dot{} &= F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) - \\ &- f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] z_2 z_4 - \\ &- f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] z_2 z_3 - \\ &\frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \\ z_1 \dot{} &= F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) - \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& - f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha) \right] z_1 z_4 - \\
& - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1) \right] z_1 z_3 - \\
& - f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2) \right] z_1 z_2, \\
& \beta_1^{\cdot} = z_3 f_1(\alpha), \quad \beta_2^{\cdot} = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \\
& \beta_3^{\cdot} = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}
& \alpha^{\cdot\cdot} - F_4(\alpha) f_4^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) \alpha^{\cdot 2} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_1^{\cdot 2} + \\
& + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_2^{\cdot 2} + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta_3^{\cdot 2} = 0, \\
& \beta_1^{\cdot\cdot} - F_3(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \alpha^{\cdot} \beta_1^{\cdot} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \beta_2^{\cdot 2} + \\
& + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \beta_3^{\cdot 2} = 0, \\
& \beta_2^{\cdot\cdot} - F_2(\beta_2) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \alpha^{\cdot} \beta_2^{\cdot} + \\
& + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \beta_1^{\cdot} \beta_2^{\cdot} + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \beta_3^{\cdot 2} = 0, \\
& \beta_3^{\cdot\cdot} - F_1(\beta_3) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \alpha^{\cdot} \beta_3^{\cdot} + \\
& + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \beta_1^{\cdot} \beta_3^{\cdot} + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \beta_2^{\cdot} \beta_3^{\cdot} = 0
\end{aligned}$$

на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

Теорема 2. Если выполнены условия (4)–(6), то система (11) обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов вида:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta) &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + V(\alpha, \beta) = \\
&= C_1 = \text{const}, \\
V(\alpha, \beta) &= V_3(\alpha) + V_2(\beta_1) + V_1(\beta_2) = \\
&= -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_3(a) da - 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} F_2(b) db - 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} F_1(b) db,
\end{aligned} \tag{12}$$

а также при $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$, – первых интегралов (8)–(10).

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ и фазовых $w_4 = z_4$, $w_3^* = \ln|w_3|$, $w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$, $w_s^* = \ln|w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, 2$, $w_2 = z_2/z_1$, $w_1 = z_3/\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$) фазовый поток системы (11) сохраняет объем на касательном расслоении TM^4 , т.е. сохраняется дифференциальная форма фазового объема

$$dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3.$$

3. Инварианты систем с диссипацией. Далее несколько модифицируем систему (11) при условиях (4)–(6), а также, для простоты, при

$F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$, вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (13) (в отличие от системы (11)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси z_k^{\cdot} , $k = 1, \dots, 4$, соответственно: $z_1 F^1(\alpha)$, $z_2 F^1(\alpha)$, $z_3 F^1(\alpha)$, $F_4(\alpha) f_4(\alpha) + z_4 F_4^1(\alpha)$. Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{aligned}
& \alpha^{\cdot} = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
& z_4^{\cdot} = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha) z_3^2 - \\
& - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta_1) z_2^2 - \\
& - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta_1, \beta_2) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha), \\
& z_3^{\cdot} = -f_4(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_3 z_4 - \\
& - f(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) z_2^2 - \\
& - f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) z_1^2 + z_3 F^1(\alpha), \\
& z_2^{\cdot} = -f_4(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_2 z_4 - \\
& - f(\alpha) [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] z_2 z_3 - \\
& - f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\beta_2) z_1^2 + z_2 F^1(\alpha), \\
& z_1^{\cdot} = -f_4(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] z_1 z_4 - \\
& - f(\alpha) [2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] z_1 z_3 - \\
& - f(\alpha) g(\beta_1) [2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)] z_1 z_2 + z_1 F^1(\alpha), \\
& \beta_1^{\cdot} = z_3 f(\alpha), \quad \beta_2^{\cdot} = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \\
& \beta_3^{\cdot} = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2),
\end{aligned} \tag{13}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}
& \alpha^{\cdot\cdot} - \{b\tilde{\delta}(\alpha) + F_4^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha)\} \alpha^{\cdot} - \\
& - F_4(\alpha) f_4^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_4^1(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha) \alpha^{\cdot 2} + \\
& + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha) \beta_1^{\cdot 2} + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta_1) \beta_2^{\cdot 2} + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta_1, \beta_2) \beta_3^{\cdot 2} = 0, \\
& \beta_1^{\cdot\cdot} - \{F^1(\alpha) + b\delta(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\} \beta_1^{\cdot} + \\
& + 2\Gamma_1(\alpha) \alpha^{\cdot} \beta_1^{\cdot} + \Gamma_{22}^1(\beta_1) \beta_2^{\cdot 2} + \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) \beta_3^{\cdot 2} = 0, \\
& \beta_2^{\cdot\cdot} - \{F^1(\alpha) + b\delta(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\} \beta_2^{\cdot} + \\
& + 2\Gamma_1(\alpha) \alpha^{\cdot} \beta_2^{\cdot} + 2\Gamma_2(\beta_1) \beta_1^{\cdot} \beta_2^{\cdot} + \Gamma_{33}^2(\beta_2) \beta_3^{\cdot 2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta_3'' - \{F^1(\alpha) + b\delta(\alpha)[2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)]\}\beta_3' + \\ & + 2\Gamma_1(\alpha)\alpha'\beta_3' + \Gamma_2(\beta_1)\beta_1'\beta_3' + 2\Gamma_3(\beta_2)\beta_2'\beta_3' = 0, \\ & \tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha, \quad \text{на касательном} \\ & \text{расслоении } TM^4\{\alpha', \beta_1', \beta_2', \beta_3'; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}. \end{aligned}$$

Для полного интегрирования системы необходимо знать, вообще говоря, семь независимых тензорных инвариантов. Однако после следующей замены переменных $w_4 = z_4, w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, w_2 = \frac{z_2}{z_1}, w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$, система (13) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha' &= w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ w_4' &= F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \end{aligned} \quad (14)$$

$$w_3' = \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha)w_3w_4 + w_3 F^1(\alpha),$$

$$\begin{aligned} w_2' &= (\pm)w_3\sqrt{1 + w_2^2}f(\alpha)g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)], \\ \beta_2' &= (\pm)\frac{w_2w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} w_1' &= (\pm)w_3\sqrt{1 + w_1^2}f(\alpha)[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)], \\ \beta_1' &= (\pm)\frac{w_1w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}}f(\alpha), \end{aligned} \quad (15-1)$$

$$\beta_3' = (\pm)\frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2). \quad (16)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (14)–(16) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (14), по одному – для систем (15) и (15-1) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный тензорный инвариант, “привязывающий” уравнение (16) (т.е. всего пять).

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (17)$$

а для некоторых $\lambda_4^0, \lambda_s^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$F_4(\alpha) = \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \quad F_s^1(\alpha) = \lambda_s^1 f_4(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \quad (18)$$

$s = 1, \dots, 4.$

Здесь $F_1^1(\alpha) = F_2^1(\alpha) = F_3^1(\alpha) = F^1(\alpha)$, т.е. $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = \lambda^1$. Условие (17) назовем “геометрическим”, а условия из группы (18) – “энергетическими”.

Условие (17) названо геометрическим, в том числе потому, что накладывает условие на приведенный коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (18) названы энергетическими, в том числе, потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$ и вводит в систему диссипацию разных знаков.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (17) и (18) на внешнее силовое поле. Тогда система (14)–(16) обладает пятью независимыми, вообще говоря, трансцендентными [12, 13] первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1, \lambda^1 = \lambda_4^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_4, w_3; \alpha) &= G_1\left(\frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ &= \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = \\ &= C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом дополнительный первый интеграл для системы (14) имеет следующий структурный вид:

$$\begin{aligned} \Theta_2(w_4, w_3; \alpha) &= G_2\left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = \\ &= C_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (20)$$

Первые интегралы для систем (15) и (15-1) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2, \quad (21)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s), s = 1, 2$, см. (9), (9-1). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (16), находится по аналогии с (10):

$$\begin{aligned} \Theta_5(\beta_2, \beta_3) &= \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = \\ &= C_5 = \text{const}, \end{aligned} \quad (22)$$

где, после взятия интеграла (22), вместо постоянных C_3, C_4 можно подставить левые части первых интегралов (9), (9-1) соответственно.

Выражение функций (19), (20) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при

$\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ дополнительный первый интеграл системы (14) найдется из дифференциального соотношения

$$d \ln |\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_4) du_4}{U_2(C_1, u_4)}, \quad u_4 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)},$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}, \quad U_1(u_4) = u_4^2 + (b - \lambda^1)u_4 - \lambda_4^0,$$

$$U_2(C_1, u_4) = 2U_1(u_4) - C_1 \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_4)} \right\} / 2, \\ C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. Если для систем вида (14)–(16) выполняются геометрическое и энергетические свойства (17), (18), то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие пять инвариантных дифференциальных форм с трансцендентными (в смысле комплексного анализа) коэффициентами:

$$\rho_1(w_4, w_3; \alpha) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(w_4, w_3; \alpha) =$$

$$= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_3}{U_2(C_1, u_4)} \right\} \frac{u_4^2 + u_3^2 + (b - \lambda^1)u_4 - \lambda_4^0}{u_3},$$

$$\rho_2(w_4, w_3; \alpha) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_2(w_4, w_3; \alpha) =$$

$$= \Delta(\alpha) \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\} \exp \left\{ - \int \frac{(b + u_4) du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\};$$

$$\rho_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1 + w_s^2}} dw_s \wedge d\beta_s \quad (\text{после замены независимых переменных в системах (15), (15-1)});$$

$$\rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) dw_4 \wedge \\ \wedge dw_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

$$\rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) =$$

$$= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\} \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3),$$

но зависимые с первыми интегралами (19)–(22).

Для полной интегрируемости системы (14)–(16) можно использовать или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством пять.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [5, 14]. Заметим, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле комплексного

анализа – наличия существенно особых точек после продолжения функций) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих (асимптотических) предельных множеств [13].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения [14], касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к четырехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении четырехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. также [14–16]). При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим также работы [17, 18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *H. Poincaré*, Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1912. 340 p.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР, 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74, вып. 1. С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53, вып. 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН, 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
6. *Шамолин М.В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2021. Т. 501. № 1. С. 89–94.
7. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 352 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. – М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38, вып. 1. С. 3–67.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

14. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // *Фундам. и прикл. матем.* 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика.* 1984. № 6. С. 31–33.
16. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // *ДАН СССР.* 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.
17. Новиков С.П., Тайманов И.А. *Современные геометрические структуры и поля.* М.: МЦНМО, 2005.
18. Тамура И. *Топология слоений.* М.: Мир, 1979.

INVARIANT VOLUME FORMS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON A TANGENT BUNDLE OF A FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLD

M. V. Shamolin^a

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Complete set of invariant differential forms of phase volume for homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth four-dimensional manifolds are presented in this paper. The connection between the presence of these invariants and the complete set of the first integrals which are necessary for the integration of geodesic, potential and dissipative systems is shown. At the same time, the introduced force fields make the considered systems dissipative with dissipation of different signs and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form

УДК 514.86

ИДЕНТИФИКАЦИЯ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. Е. И. Шифрин^{1,*}, А. В. Капцов^{1,**}

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым

Поступило 16.11.2022 г.

После доработки 20.12.2022 г.

Принято к публикации 28.12.2022 г.

Рассматривается геометрическая обратная задача идентификации изотропного, линейно упругого включения в изотропной, линейно упругой плоскости. Предполагается, что на бесконечности заданы постоянные напряжения и на некоторой, охватывающей включение, замкнутой кривой известны перемещения и действующие усилия. В случае, когда включение представляет собой квадратурную область, разработан метод идентификации ее узловых точек. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: теория упругости, плоская задача, включение, квадратурная область, узловые точки, обратная задача

DOI: 10.31857/S268695432370011X, EDN: СТРNFY

1. ВВЕДЕНИЕ

В случае, когда переопределенные данные (данные Дирихле и Неймана) известны на замкнутой кривой (в пространственном случае поверхности), охватывающей неоднородность (включение, полость или трещину), весьма эффективным методом идентификации указанной неоднородности является метод, основанный на скачке в функционале взаимности [1]. В результате применения этого метода к обратным задачам теории упругости были решены задачи идентификации множественных прямолинейных трещин в упругой плоскости, а также плоской трещины, эллипсоидального включения и нескольких эллипсоидальных включений в упругом пространстве (см. [2–4] и имеющиеся там ссылки). В упомянутых публикациях, в основном, решались задачи для неоднородностей, имеющих каноническую форму. В данной работе рассматривается плоская задача обнаружения и идентификации неоднородностей, имеющих, в том числе, неканоническую форму.

Поскольку ниже рассматриваются включения, являющиеся квадратурными областями, коротко напомним определение и основные свойства квадратурных областей. Мы ограничимся рас-

смотрением односвязных областей $D \subset R^2$, ограниченных гладкой, замкнутой, жордановой кривой ∂D . Начало изучению квадратурных областей было положено в [5, 6]. Обозначим $AL^1(D)$ множество функций, голоморфных в D и принадлежащих $L_1(D)$. Согласно [6] область D называется квадратурной, если существуют точки z_1, z_2, \dots, z_m , $z_i \in D$ такие, что $\forall f(z) \in AL^1(D)$ справедливо равенство

$$\int_D f(z) dS = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n_k-1} a_{kj} f^{(j)}(z_k). \quad (1)$$

Здесь Ox_1x_2 – декартова система координат, $z = x_1 + ix_2$, a_{kj} – комплексные постоянные, не зависящие от функции $f(z)$. Точки $z_k = x_{k1} + ix_{k2}$ назовем узловыми точками. Величина $n = \sum_{k=1}^m n_k$ называется порядком квадратурного тождества (1).

Другое, эквивалентное (1), определение квадратурной области дано в [5]. Согласно [5], область D называется квадратурной, если существует функция $S(z)$, называемая функцией Шварца, которая удовлетворяет следующим условиям. Функция $S(z)$ мероморфна в D . Полюсы $S(z)$ совпадают с точками z_k из (1), а порядок полюсов совпадает с соответствующими величинами n_k . Кроме того, на границе ∂D справедливо равенство

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: shifrin@ipmnet.ru

**E-mail: kaptsov@ipmnet.ru

$$S(z) = \bar{z}, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad z \in \partial D. \quad (2)$$

Плотность квадратурных областей в классе односвязных областей, ограниченных простой, замкнутой, C^∞ кривой, доказана в [7–9].

До настоящего времени открытой остается проблема единственности для квадратурных областей, т.е. вопрос о том, в какой степени равенство (1) определяет область D . Здесь известны лишь частные результаты. Например, доказано, что квадратурная область порядка 1 ($m = 1, n_1 = 1$) является кругом. Другие результаты, касающиеся проблемы единственности для квадратурных областей, можно найти в [6, 10].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $D \subset R^2$ – односвязная область, ограниченная простой, замкнутой, C^∞ кривой. Предположим, что область D занята материалом с модулем сдвига μ_I и коэффициентом Пуассона ν_I . Границу области D обозначим ∂D . Предположим, что область $S = R^2 \setminus D$ занята материалом с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M . Предполагается, что в заданной декартовой системе координат на бесконечности заданы постоянные напряжения $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty$ и σ_{22}^∞ . Вектор перемещений, тензоры деформаций и напряжений в матрице S будем помечать верхним индексом M : $\mathbf{u}^M(x)$ – вектор перемещений, $e_{\alpha\beta}^M(x)$ – тензор деформаций, $\sigma_{\alpha\beta}^M(x)$ – тензор напряжений, $x \in S$. Уравнения теории упругости в области S имеют вид

$$e_{\alpha\beta}^M(x) = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^M(x) + u_{\beta,\alpha}^M(x)),$$

$$\alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in S$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^M(x) = 2\mu_M \left(\frac{\nu_{M^*}}{1 - 2\nu_{M^*}} \theta^M(x) \delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}^M(x) \right), \quad (3)$$

$$\theta^M(x) = \sum_{k=1}^2 e_{kk}^M(x)$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^M(x) = 0.$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, $\nu_{M^*} = \nu_M$ в случае плоской деформации и $\nu_{M^*} = \nu_M / (1 + \nu_M)$ в случае плоского напряженного состояния.

Упругое поле во включении D помечаем верхним индексом I : $\mathbf{u}^I(x)$ – вектор перемещений, $e_{\alpha\beta}^I(x)$ – тензор деформаций, $\sigma_{\alpha\beta}^I(x)$ – тензор напряжений, $x \in D$. Упругое поле во включении

удовлетворяет уравнениям, аналогичным уравнениям (3), с заменой упругих постоянных μ_M и ν_M на упругие постоянные μ_I и ν_I соответственно.

Между матрицей и включением предполагаются выполненными условия полного сцепления

$$\mathbf{u}^M(x^*) = \mathbf{u}^I(x^*),$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^M(x^*) n_\beta(x^*) = \sigma_{\alpha\beta}^I(x^*) n_\beta(x^*), \quad x^* \in \partial D. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{N}(x^*) = (N_1(x^*), N_2(x^*))$ – единичная нормаль к границе включения ∂D в точке x^* .

Предполагается, что $D \subset \Omega$, где Ω , односвязная, ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается также, что на границе $\partial\Omega$ известны приложенные усилия и перемещения:

$$\sigma_{\alpha\beta}^M(x') n_\beta(x') = t_\alpha^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}^M(x') = \mathbf{u}^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Здесь $n(x') = (n_1(x'), n_2(x'))$ – единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x' .

В общем виде задача заключается в идентификации включения D по имеющимся данным. В данной статье мы рассматриваем более скромную задачу идентификации узловых точек квадратурного включения D .

3. ФУНКЦИОНАЛ СКАЧКА В СООТНОШЕНИИ ВЗАИМНОСТИ И ЕГО СВОЙСТВА

Назовем регулярными упругие поля, удовлетворяющие уравнениям (3) во всей плоскости, и будем помечать их верхним индексом r . Рассмотрим функционал, зависящий от регулярных упругих полей

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_{\partial\Omega} (t_\alpha^0(x') u_\alpha^r(x') - t_\alpha^r(x') u_\alpha^0(x')) dl,$$

$$t_\alpha^r(x') = \sigma_{\alpha\beta}^r(x') n_\beta(x'). \quad (7)$$

Из принципа взаимности следует, что в случае, когда внутри области Ω нет никаких дефектов, справедливо равенство $RG(\mathbf{u}^r) = 0$ для любого регулярного упругого поля $\mathbf{u}^r(x)$. Если внутри области Ω содержится включение D , то для некоторых регулярных упругих полей величина функционала $RG(\mathbf{u}^r)$ может отличаться от нуля, причем значения функционала несут информацию об области D . Заметим также, что из предположения о том, что функции $t_\alpha^0(x')$ и $u_\alpha^0(x')$ известны на всей границе $\partial\Omega$, следует, что величина $RG(\mathbf{u}^r)$ может

быть вычислена для любого регулярного упругого поля. При наличии включения D выражение (7) сводится к интегралу по области D .

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_D [(\lambda_I - \lambda_M)\theta^r\theta^r + 2(\mu_I - \mu_M)e'_{\alpha\beta}e^r_{\alpha\beta}] dx. \quad (8)$$

Здесь $\lambda_I = 2\mu_I\nu_{I^*}/(1 - 2\nu_{I^*})$, $\lambda_M = 2\mu_M\nu_{M^*}/(1 - 2\nu_{M^*})$ – постоянные Ламе, $\theta^r(x) = \sum_{k=1}^2 e^r_{kk}(x)$.

Как известно [11], любое упругое поле в односвязной области может быть представлено с помощью двух голоморфных функций. В частности, регулярное упругое поле может быть представлено в виде

$$2\mu_M(u^r_1 + iu^r_2) = \kappa_M\Phi_r(z) - \overline{z\Phi'_r(z)} - \overline{\Psi_r(z)} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma^r_{11} + \sigma^r_{22} &= 4 \operatorname{Re}[\Phi_r(z)], \\ \sigma^r_{22} - \sigma^r_{11} + 2i\sigma^r_{12} &= 2[\overline{z\Phi'_r(z)} + \overline{\Psi_r(z)}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $\kappa_M = 3 - 4\nu_M$ для плоско деформированного состояния и $\kappa_M = (3 - \nu_M)/(1 + \nu_M)$ для плоско напряженного состояния, $\Phi_r(z) = \phi'_r(z)$, $\Psi_r(z) = \psi'_r(z)$ – голоморфные функции.

Пусть $H(z)$ – голоморфная функция во всей плоскости. Обозначим верхними индексами r и p регулярные упругие поля, построенные согласно формулам (9), (10) с помощью голоморфных функций $\Phi_r(z) = 0$, $\Psi_r(z) = \mu_M H(z)$ и $\Phi_p(z) = 0$, $\Psi_p(z) = i\mu_M H(z)$ соответственно.

Лемма 1. *Нетрудно доказать следующее равенство*

$$RG(\mathbf{u}^r) - iRG(\mathbf{u}^p) = \frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_D [(\sigma^r_{22}(x) - \sigma^r_{11}(x)) - 2i\sigma^r_{12}(x)] H(z) dx \quad (11)$$

Выражение в правой части (11) представляет собой функционал на пространстве голоморфных функций $H(z)$. Обозначим этот функционал $P(H)$.

Отметим, что упругое поле в односвязной области D определяется двумя голоморфными функциями $\phi_I(z)$ и $\psi_I(z)$ аналогично формулам (9) и (10) с заменой μ_M и κ_M на μ_I и κ_I соответственно.

Область S не является односвязной, однако усилия, приложенные к границе ∂D , в силу условий сопряжения (4) самоуравновешены, поэтому напряженное состояние в области S также представляется двумя голоморфными функциями

$\phi_M(z)$ и $\psi_M(z)$ согласно формулам (9) и (10). При этом, голоморфные функции удовлетворяют условиям [11]

$$\begin{aligned} \phi_M(z) &= \Gamma z + \phi_M^0(z), \quad \psi_M(z) = \Gamma' z + \psi_M^0(z), \\ \phi_M^0(\infty) &= \psi_M^0(\infty) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty). \quad (13)$$

На границе $(x_1, x_2) \in \partial D$ определим две функции

$$\begin{aligned} f_I(x_1, x_2) &= \phi_I(z) + \overline{z\phi'_I(z)} + \overline{\psi_I(z)}, \\ f_M(x_1, x_2) &= \phi_M(z) + \overline{z\phi'_M(z)} + \overline{\psi_M(z)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Лемма 2. *Выражение (11) для функционала $P(H)$ можно привести к следующему виду*

$$P(H(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) f_I(x_1, x_2) dz. \quad (15)$$

Условия сопряжения (4) в терминах введенных голоморфных функций имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_I} \left[\kappa_I \phi_I(z) - \overline{z\phi'_I(z)} - \overline{\psi_I(z)} \right] &= \\ = \frac{1}{2\mu_M} \left[\kappa_M \phi_M(z) - \overline{z\phi'_M(z)} - \overline{\psi_M(z)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$(x_1, x_2) \in \partial D,$$

$$f_I(x_1, x_2) = f_M(x_1, x_2). \quad (17)$$

Пусть область D является квадратурной и $S(z)$ – мероморфная функция Шварца, определенная в \bar{D} . \bar{D} – замыкание области D . Построим функции, определенные в $D \times \bar{D}$ и $D \times (R^2 \setminus D)$ соответственно.

$$Q_1(z, \zeta) = \phi_I(z) + z\bar{\Phi}_I(\zeta) + \bar{\Psi}_I(\zeta), \quad z \in D, \quad \zeta \in \bar{D}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Q_2(z, \zeta) &= \frac{1}{\gamma\kappa_M + 1} [(\kappa_I + 1)\phi_I(z) + \\ &+ \gamma(\kappa_M + 1)(z\bar{\Phi}_M(\zeta) + \bar{\Psi}_M(\zeta))], \end{aligned} \quad (19)$$

$$z \in D, \quad \zeta \notin D.$$

Здесь $\gamma = \frac{\mu_I}{\mu_M}$.

Лемма 3. *Из определения функции Шварца, определений (14) и условий сопряжения (16), (17) следует равенство*

$$Q_1(z, S(z)) = Q_2(z, S(z)) = f_I(x_1, x_2), \quad z \in \partial D. \quad (20)$$

Построим функцию, определенную в области D

$$Q(z) = \begin{cases} Q_1(z, S(z)), & z \in D, \quad S(z) \in D, \\ Q_2(z, S(z)), & z \in D, \quad S(z) \notin \bar{D}. \end{cases} \quad (21)$$

Теорема. Функция $Q(z)$ мероморфна в D , полюсами $Q(z)$ являются полюсы функции Шварца и справедливо равенство

$$P(H(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) Q(z) dz. \quad (22)$$

Предположим для простоты, что функция $S(z)$ имеет простые полюсы в D . Обозначим их z_1, z_2, \dots, z_n . Таким образом, в окрестности точки z_k функция $S(z)$ имеет вид

$$S(z) = \frac{R_k}{z - z_k} + g_k(z), \quad (23)$$

где $g_k(z)$ – голоморфная в окрестности точки z_k функция.

Учитывая поведение упругого поля $\mathbf{u}^M = (u_1^M, u_2^M)$ на бесконечности (12), получим асимптотику $Q_2(z, S(z))$ при $z \rightarrow z_k$

$$Q_2(z, S(z)) = \frac{\gamma(\kappa_M + 1)\bar{\Gamma}R_k}{(\gamma\kappa_M + 1)(z - z_k)} + G_k(z). \quad (24)$$

Здесь $G_k(z)$ – голоморфная в окрестности точки z_k функция.

Следствие. Из (22) и (24) следует

$$P(H(z)) = \sum_{k=1}^n A_k H(z_k), \quad (25)$$

$$\text{где } A_k = \frac{\pi(\mu_I - \mu_M)(\kappa_M + 1)\bar{\Gamma}R_k}{(\mu_I\kappa_M + \mu_M)}.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК КВАДРАТУРНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Рассмотрим последовательность голоморфных функций $H_m(z) = \left(\frac{z}{L}\right)^m$, где L – некоторый линейный размер, $m = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим

$$P(H_m(z)) = b_m. \quad (26)$$

Из (25) и (26) получаем систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_k w_k^m = b_m, \quad w_k = \frac{z_k}{L}. \quad (27)$$

Уравнения (27) содержат $2n$ неизвестных: A_k и $w_k, k = 1, \dots, n$. Методы нахождения этих неизвестных по известным значениям $b_m, m = 0, \dots, 2n - 1$ хорошо разработаны [12–14]. В этих методах предполагается, что число n известно. В рассматриваемой задаче число узловых точек, отвечающих области D , заранее неизвестно. Поэтому нужно решать последовательность задач в предположении, что имеется $n = 1, 2, \dots$ узловых точек. В случае, когда предполагаемое количество узловых точек n превосходит действительное количество узловых точек области D , некоторые получаемые значения w_k окажутся паразитными. Для исключения паразитных решений используется следующий критерий.

Обозначим $A_{n\max} = \max_{k=1, \dots, n} |A_k|$. Узловые точки z_k , для которых соответствующие коэффициенты A_k удовлетворяют неравенству $|A_k|/A_{n\max} < \epsilon_{cr}$, где ϵ_{cr} – некоторая малая величина, считаются паразитными и исключаются из рассмотрения. В численном примере, рассмотренном ниже, принято $\epsilon_{cr} = 0.01$.

В представленных выше теоретических результатах упругое тело предполагалось безграничным. В рассмотренном ниже примере упругое тело конечно, но характерные размеры дефекта малы по сравнению с характерными размерами тела, что позволяет использовать полученные результаты.

Пример. Предположим, что упругое тело занимает квадратную область $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : |x_i| \leq L, i = 1, 2\}$, $L = 10$ см. Упругие постоянные материала предполагаются равными: модуль Юнга $E_M = 2\mu_M(1 + \nu_M) = 68.5$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_M = 0.36$. Предположим также, что приложенные к границе тела $\partial\Omega$ нагрузки пред-

Таблица 1. Получаемые узловые точки в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	5.54×10^{-8}	4.60×10^{-10}	1.40×10^{-7}	9.61×10^{-5}	1
z_k	$-9.55 - 9.63i$	$-8.11 + 8.34i$	$-7.56 - 7.98i$	$-0.42 - 1.88i$	$-0.226 - 0.003i$
k	6	7	8	9	10
α_k	0.997	5.36×10^{-8}	1.04×10^{-7}	1.88×10^{-10}	4.14×10^{-8}
z_k	$0.227 - 0.003i$	$4.07 + 4.03i$	$7.55 - 8.07i$	$9.07 + 8.12i$	$9.54 - 9.64i$

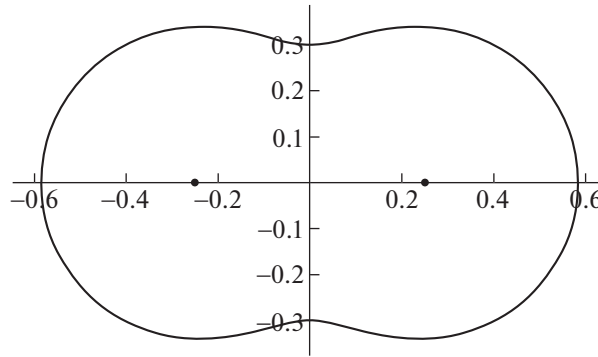


Рис. 1. Полость в форме овала Неймана.

ставляют собой одноосное растяжение в направлении оси x_2 .

$$\mathbf{t}^0(x') = (0, \sigma n_2(x')), \quad x' \in \partial\Omega, \quad (28)$$

где $\sigma = 100$ МПа.

Переопределенные данные (перемещения на внешней границе тела $\partial\Omega$) получены путем численного решения прямой задачи для тела с неоднородностью при заданных условиях (28) на границе тела $\partial\Omega$. Рассмотрим случай, когда дефектом является полость, имеющая форму овала Неймана, ограниченного контуром (см. рис. 1).

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sqrt{a^2 + 4\varepsilon^2 \cos^2(t)} \cos t, \\ x_2(t) &= \sqrt{a^2 + 4\varepsilon^2 \cos^2(t)} \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi. \end{aligned} \quad (29)$$

В примере приняты следующие значения постоянных: $a = 0.3$ и $\varepsilon = 0.25$.

Согласно [5], функция Шварца для овала Неймана, соответствующего уравнению (29), имеет вид

$$S(z) = \frac{z(a^2 + 2\varepsilon^2) + z\sqrt{a^4 + 4(a^2 + z^2)\varepsilon^2}}{2(z^2 - \varepsilon^2)}. \quad (30)$$

Как видно из (30), функция Шварца имеет два простых полюса в точках $z = \pm\varepsilon$. Таким образом, полость является квадратурной областью второго порядка. Проведенные численные расчеты показали, что, начиная с $n = 2$, после применения принятого выше критерия остаются ровно две узловые точки. Проиллюстрируем это результатом расчетов для предполагаемого количества узловых точек $n = 10$. В табл. 1 представлены все 10 узловых точек z_k , отвечающих $n = 10$, и соответствующие им нормированные коэффициенты $\alpha_k = |A_k|/A_{n\max}$.

Из табл. 1 следует, что согласно принятому критерию остаются только две узловые точки под номерами $k = 5$ и $k = 6$. Полученные приближенно значения координат этих точек достаточно близки к точным.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andrieux S., Ben Abda A.* Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // *Inverse Problems*. 1996. V. 12. P. 553–563.
2. *Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.* Reciprocity principle and crack identification // *Inverse Problems*. 1999. V. 15. P. 59–65.
3. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // *International Journal of Solids and Structures*. 2013. V. 50. P. 3707–3716.
4. *Shifrin E.I., Kaptsov A.V.* Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis // *Inverse Problems*. 2018. V. 34. 015009.
5. *Davis P.J.* The Schwarz function and its applications. *The Carus Mathematical Monographs* 17. Mathematical Association of America. 1974. 228 p.
6. *Aharonov D., Shapiro H.S.* Domains on which analytic functions satisfy quadrature identities // *Journal d'Analyse Mathématique*. 1976. V. 30. P. 39–73.
7. *Gustafsson B.* Quadrature identities and the Schottky double // *Acta Applicandae Mathematicae*. 1983. V. 1. P. 209–240.
8. *Bell S.R.* Quadrature domains and kernel function zip-ping // *Arkiv for matematik*. 2005. V. 43. P. 271–287.
9. *Bell S.R.* Density of quadrature domains in one and several complex variables // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2009. V. 54. P. 165–171.
10. *Ameur Y., Helmer M., Tellander F.* On the uniqueness problem for quadrature domains // *Computational Methods and Function Theory*. 2021. V. 21. P. 473–504.
11. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука. 1966. 708 с.
12. *Golub G.H., Milanfar P., Varah J.* A stable numerical method for inverting shape from moments // *SIAM J. Sci. Comput.* 1999. V. 21. P. 1222–1243.

13. *El Badia A., Ha-Duong T.* An inverse source problem in potential analysis // *Inverse Problems* 2000. V. 16. P. 651–663.
14. *Kang H., Lee H.* Identification of simple poles via boundary measurements and an application of EIT // *Inverse Problems*. 2004. V. 20. P. 1853–1863.

IDENTIFICATION OF NODAL POINTS OF ELASTIC INCLUSION IN ELASTIC PLANE

E. I. Shifrin^a and A. V. Kaptsov^a

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

A geometric inverse problem of identifying an isotropic, linearly elastic inclusion in an isotropic, linearly elastic plane is considered. It is assumed that constant stresses are given at infinity, and the displacements and acting loads are known on some closed curve enclosing the inclusion. In the case when the inclusion is a quadrature domain, a method for identifying its nodal points has been developed. A numerical example is considered.

Keywords: elasticity theory, plane problem, inclusion, quadrature domain, nodal points, inverse problem

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЕ ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ БЕРЛИНГА–МАЛЬЯВЕНА

© 2023 г. И. М. Васильев^{1,*}

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым

Поступило 08.09.2022 г.

После доработки 14.11.2022 г.

Принято к публикации 20.12.2022 г.

В данной работе анонсируется результат, обобщающий первую теорему Берлинга–Мальявена. Другими словами, устанавливается новое достаточное условие на функцию, гарантирующее ее принадлежность классу мажорант Берлинга–Мальявена. Также показано, что основной результат этой статьи точен во многих смыслах.

Ключевые слова: преобразование Фурье, спектр, преобразование Гильберта, логарифмический интеграл, теорема Берлинга–Мальявена

DOI: 10.31857/S2686954322600550, **EDN:** CQEOWO

1. ВВЕДЕНИЕ

Следующая теорема впервые доказана в 1962 г. (см. [2]) Арне Берлингом и Полем Мальявеном.

Теорема А. Пусть $\omega: \mathbb{R} \rightarrow (0,1]$ – непрерывная функция, такая что $\log(1/\omega) \in L^1(\mathbb{R}, dx/(1+x^2))$ и функция $\log(1/\omega)$ липшицева. Тогда для всякого $\delta > 0$ найдется функция $f \in L^2(\mathbb{R})$, не равная нулю почти всюду и удовлетворяющая $\text{spes}(f) \subset [0, \delta]$ и $|f(x)| \leq \omega(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ (под $\text{spes}(f)$ мы подразумеваем носитель преобразования Фурье функции f).

Если для некоторой функции ω верно, что для некоторого $\delta > 0$ найдется функция $f \in L^2(\mathbb{R})$, не равная нулю почти всюду и удовлетворяющая условиям $\text{spes}(f) \subset [0, \delta]$ и $|f(x)| \leq \omega(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то такую ω мы будем называть δ -допустимой мажорантой. Если описанное выше верно для всех $\delta > 0$, то ω по определению является *ВМ* мажорантой.

Теорему А также иногда называют теоремой Берлинга–Мальявена о мажоранте.

Теорема А неразрывно связана со второй теоремой Берлинга–Мальявена, также называемой теоремой Берлинга–Мальявена о полноте системы гармоник, см. [9]. Действительно, первая теорема Берлинга–Мальявена существенно используется при доказательстве второй теоремы Бер-

линга–Мальявена. Не приводя формулировки, скажем лишь, что по мнению некоторых видных аналитиков, этот результат является одной из глубочайших теорем математического анализа двадцатого века.

Отметим также, что теорема А – очень важный результат и в современной теории функций. Чтобы это проиллюстрировать, подчеркнем ее связь с задачей о лакуне, см. [11], и с теорией теплицевых ядер, см. [8]. Отдельно процитируем относительно недавнее ее применение в теории резонансов гиперболических поверхностей, см. [3].

Заметим, что теорема А интересна и сама по себе, так как в каком-то смысле указывает границы следующей наивной формулировки принципа неопределенности в гармоническом анализе: “Ненулевая функция и ее преобразование Фурье не могут быть одновременно малы.” Недавние границы совсем другого рода для принципа неопределенности содержатся в статьях [10] и [7].

У доказательств первой и второй теорем Берлинга–Мальявена есть богатая история, но мы опишем ее здесь лишь вкратце. Помимо оригинального доказательства, существует множество других подходов к доказательству теорем Берлинга–Мальявена, принадлежащих следующим авторам: Г. Редхефферу (см. [12]), Л. Де Бранжу (см. [4]), П. Каргаеву, Н. Макарову и А. Полторацкому (см. [8]), и многим другим. В 2005 г. В. Хавин, Дж. Машреги и Ф. Назаров, см. [9], предложили новое доказательство первой теоремы Берлинга–Мальявена. Существенная новизна их доказательства состояла в том, что оно было сделано полностью вещественными методами и не использовало комплексный анализ. Слегка забега-

¹Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: milavas@mail.ru

вперед, отметим, что наш подход при доказательстве основного результата этой работы будет частично основан на приведенной работе вышеупомянутых трех авторов.

Цель нашей работы – проанонсировать новое нетривиальное обобщение теоремы А. Чтобы сформулировать наш основной результат, введем один класс функций.

Определение 1. Пусть $j \in \mathbb{N}$ и пусть r – положительное число. Рассмотрим следующую систему интервалов: $J_0 := [-2, 2)$, при $j \in \mathbb{N}$ положим $J_j := [2^j, 2^{j+1})$ и $J_{-j} := [-2^{j+1}, -2^j)$. Условимся считать, что абсолютно непрерывная функция φ лежит в классе V_r , если выполняется условие

$$\left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|J_j|} \int_{J_j} |\varphi'(x)|^r dx \right)^{1/r} < \infty.$$

Следующая теорема – главный результат этой статьи.

Теорема 1. Пусть $\omega : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$ – непрерывная функция, такая что $\log(1/\omega) \in L^1(\mathbb{R}, dx/(1+x^2))$, и пусть при этом функция $\log(1/\omega)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет $\log(1/\omega) \in V_r$ для некоторого $r > 1$. Тогда для всякого $\delta > 0$ найдется функция $f \in L^2(\mathbb{R})$, не равная нулю почти всюду и удовлетворяющая $\text{spes}(f) \subset [0, \delta]$ и $|f(x)| \leq \omega(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Заметим, что теорема 1 очевидно влечет теорему А. Кроме того, нетрудно привести пример функции ω , к которой применима теорема 1, но не применима первая теорема Берлинга–Мальявена. Можно также показать, что существуют мажоранты, удовлетворяющие условиям теоремы 1, к которым не применим так называемый общий вид теорем Берлинга–Мальявена о мажоранте и мультипликаторе (имеется в виду теорема из раздела 3.4 статьи [9]).

Второй основной результат данной статьи показывает, что теорема 1 довольно точна.

Теорема 2. Существуют функции $\omega : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$, такие что $\log(1/\omega) \in V_1 \cap L^1(\mathbb{R}, dx/(1+x^2))$, не являющиеся VM мажорантами.

Чтобы доказать теорему 2, мы пользуемся одной идеей А.А. Боричева, которую автор данной статьи узнал из обзора [1]. Эта идея заключается в наблюдении, что функция с малым спектром, большая на некотором интервале, остается относительно большой на существенно большем центрическом интервале. Точной формулировке этого принципа посвящены лемма 1 и теорема 2 из статьи [1]. Заметим, что в [1] этот принцип применяется только к функциям, растущим на бесконечности строго быстрее линейной. Наши

же функции в теореме 2 могут линейно расти на бесконечности. Поэтому, чтобы доказать теорему 2, нам пришлось совместить идею А.А. Боричева с неким итеративным процессом.

Теорема 1 точна также в следующих смыслах. Теорема 1, вообще говоря, не будет выполняться, если в ее формулировке заменить классы V_r на аналогичные, в которых длины отрезков J_j образуют последовательность, лакунарную по Адамару. То же самое верно и для концов отрезков J_j . Соответствующие утверждения доказываются аналогично теореме 2.

В следующей главе мы опишем вкратце основные идеи доказательства главного результата работы – теоремы 1. Развернутая версия доказательства будет опубликована позднее.

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА СТАТЬИ

Доказательство теоремы 1 ведется по схеме, предложенной и разработанной в статье [9]. Предварительная версия доказательства доступна в препринте [14].

Мы будем использовать следующий критерий для принадлежности функции классу VM мажорант.

Это утверждение принадлежит В.П. Хавину и Дж. Машреги, см. [5] и [6].

Теорема В. Если $\omega : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1]$, $\log(1/\omega) \in L^1(\mathbb{R}, dx/(1+x^2))$ и $\|(\mathcal{H} \log(1/\omega))'\|_\infty < \pi\sigma$, то ω – σ -допустимая мажоранта.

Благодаря теореме В, чтобы доказать теорему 1, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\Omega \in L^1(\mathbb{R}, dx/(1+x^2))$ – неотрицательная, абсолютно непрерывная функция, такая что $\Omega \in V_r$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется функция Ω_1 , удовлетворяющая условиям

- 1) $\Omega(x) \leq \Omega_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$;
- 2) $\Omega_1 \in L^1(\mathbb{R}, dx/(1+x^2))$;
- 3) $\mathcal{H}\Omega_1 \in \text{Lip}(\mathbb{R}, \varepsilon)$, где \mathcal{H} – преобразование Гильберта на вещественной прямой.

Напомним, что для функций $\psi \in L^1(\mathbb{R}, dx/(1+x^2))$ преобразование Гильберта задается такой формулой:

$$\mathcal{H}\psi(x) := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{t^2+1} \right) \psi(t) dt.$$

Утверждения типа леммы 1 называются иногда в литературе леммами Назарова, см. [13]. Оставшаяся часть доказательства посвящена лемме 1.

Достаточно доказать такой локальный вариант леммы 1.

Лемма 2. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – интервал и пусть $\delta > 0$ и $\kappa > 0$. Предположим, что f – неотрицательная, абсолютно непрерывная функция, такая что $\|f'\|_{L^1(I)} \leq \kappa l(I)^{1/r}$ и $\|f\|_{L^\infty(I)} \leq \delta l(I)$. Тогда найдется неотрицательная функция $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям

- 1) $F = 0$ вне $1.5I$,
- 2) $f(x) \leq F(x)$ для всех $x \in I$,
- 3) $\|(\mathcal{H}F)'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \delta$,
- 4) $\left(\frac{\delta}{\kappa}\right)^{2r/(2r-1)} \int_{\mathbb{R}} F(x) dx \leq \left(\int_I f(x) dx\right)^{(2r-2)/(2r-1)}$.

Действительно, вывести глобальный вариант из локального не составляет особого труда: для этого достаточно применить последний к сужениям функции Ω на интервалы J_j из определения 1.

Сосредоточимся теперь на лемме 2. Несложно видеть, что, ввиду однородности условий, наложенных на функцию f , этот результат достаточно доказать для интервала $[-1/2, 1/2]$ и $\delta = 1$.

Чтобы построить искомую мажоранту, рассмотрим вспомогательную систему интервалов. (Отныне и до конца статьи все интервалы будут диадическими.)

Будем говорить, что интервал $I \subset [-1/2, 1/2]$ – существенный, если $\|f\|_{L^\infty(I)} \geq l(I)/2$. Обозначим через A систему всех существенных интервалов. Возьмем ее максимальную по включению подсистему, которую обозначим символом A^M . Присоединим к каждому интервалу из системы A^M его так называемый “хвост”, см. [9], раздел 2.6.5, где находится определение “хвоста” интервала. Затем, после присоединения всех “хвостов”, у получившейся системы еще раз возьмем максимальную по включению подсистему. То, что получится в итоге – так называемая регуляризованная система интервалов, обозначаемая здесь τ . Искомая мажоранта определяется теперь формулой

$$F := \sum_{a \in \tau} \phi_a,$$

где ϕ_a – функция–“шапочка”, подогнанная под интервал a (т.е., бесконечно дифференцируемая функция, тождественно равная длине интервала a на этом интервале, всюду на \mathbb{R} меньшая этой длины и обнуляющаяся на концентрическом a интервале, в полтора раза большей чем у a длины).

Далее, проверим у мажоранты F нужные в лемме 2 свойства. Первые два свойства проверяются легко. Оценка преобразования Гильберта следует из третьего свойства и проводится спосо-

бом, сходным с методом доказательства из раздела 2.6.8 статьи [9].

Опишем теперь, как проверить третье свойство. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $a \in \tau$ и пусть f удовлетворяет $\|f'\|_{L^1(a)} \leq \kappa l(a)^{1/r}$ для некоторых $\kappa \geq 1$ и $r > 1$. Обозначим $\alpha := (2r - 2)/(2r - 1)$. Тогда выполняется

$$\|f\|_{L^\infty(a)} \leq \left(\int_a f\right)^{\alpha/2} \cdot \left(\int_a |f'|^r\right)^{(1-\alpha/2)/r}.$$

Доказательство этой леммы проводится с помощью формулы Ньютона–Лейбница и неравенства Гельдера.

Благодаря лемме 3, мы можем, наконец, завершить описание доказательства леммы 2. Действительно, из конструкции системы интервалов τ следует, что величина $\int_{\mathbb{R}} F$ мажорируется, с точностью до мультипликативной константы, выражением

$$\sum_{b \in A^M} l(b)^2,$$

где $l(b)$ обозначает длину интервала b . Слагаемое в последней сумме оценивается теперь благодаря лемме 3, а проверка третьего свойства из локальной леммы 2 завершается еще одним применением неравенства Гельдера.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00053, <https://rscf.ru/project/18-11-00053/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belov Y., Havin V. *The Beurling–Malliavin Multiplier Theorem and its analogs for the de Branges spaces*. Springer series: Operator theory, ed. Alpay. 2015. V. 1. P. 581–609.
2. Beurling A., Malliavin P. *On Fourier transforms of measures with compact support*, Acta Math. 1962. V. 107. P. 291–309.
3. Bourgain J., Dyatlov S. *Spectral gaps without the pressure condition*, Annals of Math. 2018. V. 187. P. 825–867.
4. De Branges L. *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, 1968.
5. Havin V., Mashreghi J. *Admissible majorants for model subspaces of H^2 , Part I: Slow winding of the generating inner function*, Canad. J. Math. 2003. V. 55. Issue 6. P. 1231–1263.
6. Havin V., Mashreghi J. *Admissible majorants for model subspaces of H^2 , Part II: Fast winding of the generating inner function*, Canad. J. Math. 2003. V. 55. Issue 6. P. 1264–1301.
7. Kislyakov S., Perstneva P. *Indicator functions with uniformly bounded Fourier sums and large gaps in the spec-*

- trum*, Journal of Fourier Analysis and Applications. 2022.
8. Makarov N., Poltoratski A. *Beurling–Malliavin theory for Toeplitz kernels*, Invent. Math. 2010. V. 180. № 3. P. 443–480.
 9. Mashregi D., Nazarov F., Khavin V. *The Beurling–Malliavin multiplier theorem: The seventh proof*, Algebra i Analiz. 2005. V. 17. № 5. P. 3–68.
 10. Nazarov F., Olevskii A. *A Function with Support of Finite Measure and “Small” Spectrum*, 50 Years with Hardy Spaces. In: Baranov A., Kisliakov S., Nikolski N. (eds) 50 Years with Hardy Spaces. Operator Theory: Advances and Applications, V. 261. Birkhäuser.
 11. Poltoratski A. *Spectral gaps for sets and measures*, Acta Math. 2012. V. 208. № 1. P. 151–209.
 12. Redheffer H. *Completeness of sets of complex exponentials*, Adv. Math. 1977. V. 24. Issue 1. P. 1–62.
 13. Vasilyev I. *On the multidimensional Nazarov lemma*, Proc. Amer. Math Soc. 2022. V. 150. № 4. P. 1601–1611.
 14. Vasilyev I. *On the first Beurling–Malliavin Theorem*, <https://arxiv.org/pdf/2203.16674.pdf>. 2022.

A GENERALIZATION OF THE FIRST BEURLING AND MALLIAVIN THEOREM

I. M. Vasilyev^a

^a*St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.V. Kislyakov

In this paper, we announce a result that generalizes the first Beurling–Malliavin theorem. In other words, we give a new sufficient condition on a function, which guarantees that it belongs to the Beurling–Malliavin class of majorants. It is also shown that the main result of this article is sharp in many senses.

Keywords: Fourier transform, spectrum, Hilbert transform, logarithmic integral, Beurling and Malliavin’s theorem

УДК 534.141

ОЦЕНИВАНИЕ РАЗМЕРА СТРУКТУРНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ ПРИ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭХО-СИГНАЛА

© 2023 г. Т. В. Яковлева^{1,*}, Н. С. Кульберг¹, Д. В. Леонов²

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко

Поступило 06.12.2022 г.

После доработки 16.12.2022 г.

Принято к публикации 20.12.2022 г.

В работе рассматривается принципиально новый подход к решению задачи определения размеров структурных образований при ультразвуковой диагностике, в основе которого лежит теоретически обоснованная возможность оценивания размеров неоднородностей исследуемой среды посредством анализа статистических характеристик рассеянного на этих неоднородностях ультразвукового сигнала. Эта возможность обусловлена тем, что статистическое распределение данных, формирующих ультразвуковое изображение, варьируется от распределения Рэлея до распределения Райса в зависимости от соотношения между размером области когерентности рассеянного сигнала и шириной луча. Работа направлена на развитие нового метода статистического анализа данных, который позволит эффективно выявлять значительную когерентную составляющую в эхо-сигнале и тем самым будет использоваться как математический инструмент оценивания размера неоднородностей среды при ультразвуковой визуализации. Такой подход к анализу ультразвуковых изображений обеспечит возможность количественного оценивания структурных образований и тем самым – существенное повышение информативности ультразвуковой диагностики и возможность выявления патологий на ранней стадии их образования, открывая перспективы повышения эффективности лечения.

Ключевые слова: рассеяние, дифференциация тканей, Релей, Райс, ультразвуковая диагностика

DOI: 10.31857/S2686954322600744, **EDN:** CSNGDL

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы методы статистической обработки сигналов широко используются в различных областях науки как эффективный инструмент анализа стохастических данных различной природы. При этом существенное значение имеет характер статистического распределения, которому подчиняются анализируемые данные. Стохастические данные, получаемые при ультразвуковой визуализации в рамках рассматриваемой в данной работе задачи, адекватно описываются статистической моделью Райса [1].

Распределение Райса и его частный случай – распределение Рэлея – в ультразвуковой визуализации соответствуют распределению амплитуды изображения в режиме В-mode при достаточно однородном составе отражателей и их высокой плотности, причем изображение формируется огибающей радиочастотного сигнала (RF image). При этом в отсутствие когерентной компоненты сигнала мы имеем дело с распределением Рэлея [2]. Что касается распределения Райса, то оно также соответствует случаю высокой плотности случайных отражателей, формирующих диффузную составляющую сигнала, но при этом в составе сигнала присутствует и заметная когерентная составляющая [3]. Распределение Райса широко используется применительно к задачам ультразвуковой визуализации [4]. Так, в работе [5] рассматривается использование особенностей этого распределения для улучшения качества сонограммы посредством борьбы с шумами.

Как известно, применимость рэлеевского и райсовского распределений к рассеянному ультразвуковому сигналу (эхо-сигналу) признается многими авторами, (см., напр., [7]). Однако ре-

¹ Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия

² Государственное бюджетное учреждение здравоохранения города Москвы “Научно-практический клинический центр диагностики и телемедицинских технологий Департамента здравоохранения города Москвы” (ГБУЗ “НПКЦ ДиТ ДЗМ”), Москва, Россия

*E-mail: tan-ya@bk.ru

шение задачи количественного оценивания размера неоднородностей среды на основании выявления заметной когерентной составляющей в эхо-сигнале при переходе рэлеевского распределения в райсовское является принципиально новым.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ РАЗМЕРА СТРУКТУРНЫХ ОБРАЗОВАНИЙ И СУТЬ ПРЕДЛАГАЕМОГО ПОДХОДА К ЕЕ РЕШЕНИЮ

В основе предлагаемого подхода к оцениванию размеров неоднородностей среды посредством ультразвуковой визуализации лежит зависимость степени когерентности рассеянного ультразвукового сигнала от соотношения геометрических параметров ультразвукового луча и рассеивающих неоднородностей. А именно: по мере приближения к фокальной плоскости и сужения луча количество некоррелированных между собой рассеивателей, попадающих в область луча, уменьшается, и при этом рэлеевское распределение, характеризующее рассеяние звука многими некоррелированными неоднородностями, переходит в распределение Райса, характеризующее эхо-сигнал со значительной когерентной составляющей, когда в области луча оказывается практически всего один рассеиватель. Такой переход от рэлеевского распределения эхо-сигнала к райсовскому имеет место на той глубине, где ширина луча соответствует размеру рассеивающей неоднородности, и соответствует переходу от полностью некогерентного рассеяния к появлению значительной когерентной составляющей в эхо-сигнале. Таким образом, выявление факта такой трансформации одного распределения в другое может стать эффективным инструментом оценивания размера структурных неоднородностей исследуемой среды как величины, соотносимой с размером области когерентности при рассеянии ультразвуковой волны.

Таким образом, основополагающим теоретическим инструментом, определяющим суть предлагаемого подхода, является анализ характера статистического распределения эхо-сигнала, которое определяется степенью когерентности эхо-сигнала.

Рассматривается неоднородная биологическая среда, в которой рассеивающие ультразвук неоднородности имеют примерно одинаковый размер и одинаковую плотность, что является характерной особенностью ряда исследуемых биологических тканей, таких, например, как печень. В результате рассеяния ультразвука на структурных образованиях исследуемой среды формируется ультразвуковое диагностическое изображение. При этом исследуемый процесс рассеяния ультразвука в биологической среде характеризуется наличием большого числа однородных рас-

сеивателей, что соответствует условиям рэлеевского и райсовского статистических распределений амплитуды эхо-сигнала.

Распространение ультразвуковой волны в среде описывается основным уравнением акустики, конкретное решение которого однозначно определяется свойствами рассеивающей неоднородной среды, в первую очередь – флуктуациями плотности и сжимаемости. Записанное относительно Фурье-преобразования $P(\vec{R}, \omega)$ пространственно-временной функции давления $p(\vec{R}, t)$, данное уравнение имеет следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} \Delta P + \frac{\omega^2}{c^2} P + 2i\gamma(\omega, \vec{R}) P = \\ = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\beta}(\vec{R}) P + \nabla(\hat{\rho}(\vec{R})) \nabla P, \end{aligned} \quad (1)$$

где ω – частота, t – время, $c = (\rho_0 \beta_0)^{-1/2}$ – скорость звука в среде с плотностью ρ_0 и сжимаемостью β_0 , $\frac{\rho(\vec{R})}{\rho_0}$ – относительное изменение плотности, $\frac{\beta(\vec{R})}{\beta_0}$ – относительное изменение сжимаемости среды, $\gamma(\omega, \vec{R})$ – преобразование Фурье функции поглощения звука в среде, \vec{R} – пространственная координата рассматриваемой точки среды. Как правило, выше приведенное уравнение для спектральной плотности функции давления $P(\vec{R}, \omega)$ решается в борновском приближении.

Функция давления как основная характеристика процесса распространения звука в среде представляет собой комплексную величину и характеризуется амплитудой и фазой. В процессе распространения по неоднородной среде величина рассеянного сигнала неизбежно искажается спекл-шумом, образованным суммированием многих независимых компонент от рассеяния звуковой волны точечными отражателями и поэтому обладающим гауссовской статистикой. Результирующая функция давления и, соответственно, значение эхо-сигнала может быть представлена как сумма некоторой детерминированной величины и искажающей его шумовой компоненты с гауссовской статистикой.

Рассмотрим искомую комплексную величину пространственно-временной функции давления $p(\vec{R}, t)$ в конкретной точке пространства \vec{R} и в момент времени t : $p(\vec{R}, t) = p_{Re} + ip_{Im}$ как случайную величину, формируемую некой изначально детерминированной составляющей и гауссовским шумом с дисперсией σ^2 . Обозначим амплитуду детерминированной компоненты функции дав-

ления в конкретной точке $p(\bar{R}, t)$ как A . При этом действительная p_{Re} и мнимая p_{Im} части измеряемого и анализируемого комплексного сигнала искажаются гауссовским шумом независимо. Тогда действительная p_{Re} и мнимая p_{Im} компоненты анализируемой комплексной величины представляют собой независимые гауссовские величины с одинаковыми дисперсиями σ^2 и ненулевыми математическими ожиданиями, в то время как амплитуда $p = \sqrt{p_{Re}^2 + p_{Im}^2}$ результирующего сигнала, как известно, подчиняется распределению Райса с параметрами A и σ^2 . Функция плотности вероятности распределения Райса определяется выражением [1]:

$$f(p|A, \sigma^2) = \frac{p}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{p^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{pA}{\sigma^2}\right). \quad (2)$$

Оба параметра статистического распределения Райса в выражении (2) имеют конкретный физический смысл: σ^2 – это дисперсия искажающего сигнала гауссовского шума, а параметр A совпадает с величиной амплитуды исходного детерминированного сигнала, с чем связана значимость задачи как можно более точного оценивания этого параметра при анализе данных. Задача совместного определения обоих параметров сигнала A и шума σ на основе выборочных измерений p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) суммарного сигнала p может быть эффективно решена методами двухпараметрического анализа данных [8–11]. Именно эти методы используются в качестве математического инструмента статистического анализа эхо-сигнала при решении поставленной задачи определения размера неоднородности среды.

В качестве примера приведем формулы для вычисления искомых райсовских параметров двухпараметрическим методом моментов, основанным на анализе данных выборочных измерений 2-го и 4-го моментов и в силу этого обозначаемого как ММ24. Известно, что для 2-го и 4-го начальных моментов случайной величины p , подчиняющейся распределению Райса с параметрами (A, σ^2) , справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \overline{p^2} &= 2 \cdot \sigma^2 + A^2, \\ \overline{p^4} &= 8 \cdot \sigma^4 + 8 \cdot \sigma^2 \cdot A^2 + A^4. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти формулы представляют собой простую систему двух уравнений для двух неизвестных A и σ^2 . В решении данной системы и состоит метод ММ24, [9, 10]. Для определения искомых пара-

метров A и σ^2 данным методом нетрудно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} A^2 &= \overline{p^2} \sqrt{1 - \tau}, \\ \sigma^2 &= \overline{p^2} (1 - \sqrt{1 - \tau}) / 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tau = \overline{p^4} / (\overline{p^2})^2 - 1$. Нетрудно видеть, что для любой случайной величины p в силу стохастичности величины p^2 выполняется условие $\overline{p^4} - (\overline{p^2})^2 > 0$,

так как разность $\overline{p^4} - (\overline{p^2})^2$ определяет дисперсию случайной величины p^2 . Поэтому введенный параметр τ растет с ростом стохастичности процесса и удовлетворяет соотношению: $0 < \tau \leq 1$. Предельный случай $\tau = 1$ соответствует частному случаю распределения Райса – распределению Рэлея, когда присутствует гауссовский шум, а детерминированная составляющая сигнала отсутствует ($A = 0$).

Таким образом, рассчитывая по формуле (4) параметры статистического распределения эхо-сигнала на основе его выборочных измерений, и, прежде всего – величину амплитуды A , мы можем определить, какое именно распределение – Райса или Рэлея – характеризует эхо-сигнал, формирующий ультразвуковое изображение, и таким образом выявить момент перехода от одного распределения к другому. Соответствующий данному моменту размер фокальной перетяжки будет характеризовать искомый размер структурных неоднородностей исследуемой среды.

Физическая сущность предлагаемого подхода состоит в следующем. Большинство схем построения изображения в приборах ультразвуковой визуализации основаны на регистрации импульса, рассеянного в обратном направлении, причем в диагностических приборах, как правило, имеется возможность перемещения фокальной плоскости вглубь среды. Рисунок 1 схематически иллюстрирует процесс рассеяния на неоднородностях среды. Плоскость, на которой в данный момент сфокусировано излучение, обозначена буквой f . Для примера показаны две другие плоскости в рассеивающей среде, обозначенные цифрами 1 и 2. Они находятся вне фокуса, и в этих плоскостях расфокусированный падающий луч имеет достаточно большую ширину, так что в пределах луча помещаются несколько рассеивающих неоднородностей. Плоскость излучения и приема ультразвуковых сигналов условно показана в правой части рисунка и обозначена цифрой 3 (конструктивные детали, такие как линзы, отдельные датчики излучающей и принимающей сигналы фазовой решетки в данной схематичной иллюстра-

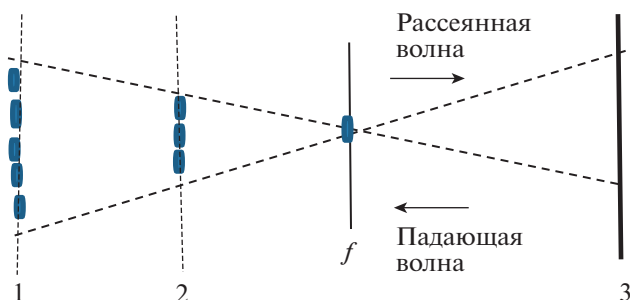


Рис. 1. Схематическое представление процессов рассеяния ультразвука от неоднородностей, находящихся в фокальной f и других (1 и 2) плоскостях исследуемой среды.

ции не детализированы, а условно объединены в плоскости 3).

Очевидно, что статистические особенности регистрируемого приемником рассеянного сигнала определяются взаимодействием сигналов, рассеянных отдельными неоднородностями среды, и их взаимной когерентностью: сигнал, регистрируемый с плоскости 1, находящейся на значительном расстоянии от фокальной плоскости f , будет формироваться рассеянием от большого количества неоднородностей, которые, как правило, являются независимыми, раскоррелированы по фазам, и поэтому результаты рассеяния различными неоднородностями, находящимися в плоскости 1, будут “гасить” друг друга, и результирующий рассеянный ими сигнал будет подчиняться распределению Рэлея. По мере уменьшения в зоне луча количества рассеивающих неоднородностей рассеяние от каждой из них все в меньшей степени будет “гаситься” рассеянием от соседних неоднородностей. При этом результирующий сигнал из рэлеевского будет трансформироваться в райсовский, имеющий ненулевую детерминированную составляющую амплитуды. И, наконец, если в зоне луча будет находиться только одна рассеивающая неоднородность (что возможно достичь в фокальной плоскости или на некотором расстоянии от нее, когда размер луча сужается до размера рассеивателя), то рассеяние от этой неоднородности вообще не будет “гаситься” соседними рассеивателями, и яркость соответствующих точек на изображении, формируемом рассеянным излучением, будет заметно выше. В этом случае рассеянный сигнал подчиняется статистическому распределению Райса как сигнал, имеющий отличную от нуля детерминированную составляющую амплитуды, превышающую уровень фонового спекл-шума, неизбежно возникающего в ходе распространения этого сиг-

нала от плоскости рассеяния до плоскости приемника. Такой спекл-шум присутствует в излучении, рассеянном и от других плоскостей, но детерминированная составляющая от рассеяния на неоднородности в фокальной плоскости будет в нем превалировать именно в случае соответствия размера неоднородности размеру фокальной перетяжки луча.

Из выше представленного следует, что усиление яркости изображения в фокальной плоскости, связанное с наличием в отраженной волне сильной когерентной составляющей, свидетельствует о переходе рэлеевского статистического распределения амплитуды эхо-сигнала в райсовское, и размер структурных неоднородностей исследуемой среды при этом можно оценить как величину фокальной перетяжки луча, соответствующую такому переходу.

Представленные теоретические соображения относительно зависимости яркости ультразвукового изображения в области фокальной плоскости от степени когерентности отраженной ультразвуковой волны подтверждаются результатами проведенного тестового физического эксперимента. В ходе эксперимента с помощью ультразвукового прибора Medison Sonoace 8000 EX Prime с линейным датчиком L5-9EC было проведено исследование отражения ультразвука в В-режиме на несущей частоте 7.5 МГц при глубине зондирования до 40 мм и фокальном расстоянии 28 мм. Исследование проводилось в фантоме с однородной структурой рассеивателей размером примерно 0.2 мм. Для расчета по формуле (4) использовалась область сонограммы, центр которой находился на фокальной глубине, равной 28 мм.

Как видно из представленного ниже изображения (рис. 2), в зоне ультразвукового изображения, соответствующей рассеянию сигнала от области, расположенной вблизи фокальной плоскости, действительно наблюдается повышение яркости. При расчете по формуле (4) значение параметра τ составляло 0.5. При этом второй и четвертый моменты амплитуды величины p рассчитывались как средние по выборкам значения соответствующих степеней измеренных значений этой величины. Для расчета размера неоднородностей использовалась наиболее яркая область ультразвукового изображения как соответствующая появлению заметной когерентной составляющей сигнала. Для приведенного на рис. 2 изображения рассчитанные значения отношения сигнала к шуму составляли величины в диапазоне 2.5–3.1 дБ. Полученное соотношение сигнала и шума позволяет выявить факт перехода рэлеев-

ского распределения в райсовское, когда значение сигнала заметно превосходит уровень шума.

Тем самым экспериментально подтверждается гипотеза, которая лежит в основе предлагаемого в работе теоретического метода характеристики рассеивающих неоднородностей. Такое повышение яркости, несмотря на уменьшение рассеивателей при сужении пучка по мере приближения к фокальной зоне, наблюдалось для определенного размера рассеивающих неоднородностей, который соответствовал размеру луча в фокальной перетяжке, что подтверждает возможность определения размеров неоднородностей предлагаемым методом статистического анализа эхо-сигнала.

Из вышеизложенного следует, что результирующий эхо-сигнал, формирующий диагностическое изображение, можно рассматривать как сумму некогерентной составляющей, которая подчиняется статистическому распределению Рэлея, и когерентной составляющей, которая подчиняется статистическому распределению Райса. Соотношение этих двух компонент определяет степень когерентности. Ввиду того, что распределение Рэлея является частным случаем распределения Райса, а также в силу устойчивости распределения Райса, строго доказанной в работе [11], можно утверждать, что амплитуда результирующего эхо-сигнала, независимо от степени его когерентности, подчиняется распределению Райса. Это означает применимость к решению задачи методов анализа райсовских данных, независимо от степени когерентности эхо-сигнала. Эти методы позволяют с высокой точностью рассчитать составляющие сигнала и шума в анализируемых данных без каких-либо априорных предположений, лишь на основании выборочных измерений.

Очевидно, что, когда параметр райсовского распределения, соответствующий величине сигнала, сравнивается с параметром шума и превышает его, можно говорить о наличии значительной когерентной составляющей в результирующем эхо-сигнале, т.е. о том, что рэлеевское распределение переходит в чисто райсовское, и, соответственно, размер рассеивающей ультразвуковую волну неоднородности становится сопоставим с шириной луча. Экспериментальные данные продемонстрировали превышение сигналом уровня шума на 2.5–3.1 дБ.

Если оценить ширину фокальной перетяжки, соответствующую увеличению яркости в вышеприведенном эксперименте, по известной формуле:

$$W \approx \frac{F\lambda}{D}, \quad (5)$$

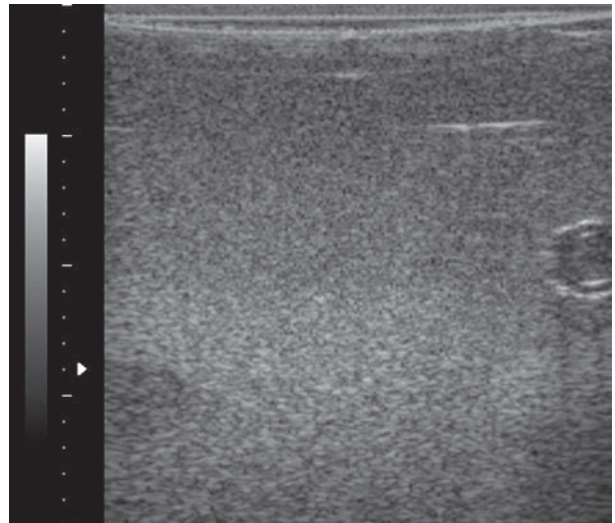


Рис. 2. Изображение фантома, полученное в тестовом режиме ультразвуковой визуализации и иллюстрирующее факт повышения яркости эхо-сигнала за счет появления когерентной составляющей (перехода рэлеевского распределения в райсовское).

где F – расстояние от апертуры до фокальной позиции, в нашем случае, равное 28 мм, λ – длина волны, равная 0.2 мм, D – ширина апертуры, равная 37 мм, то получаем для размера структурных образований, формирующих ультразвуковое изображение, величину порядка 0.15 мм.

Таким образом, физический эксперимент, проведенный с целью апробации предлагаемого подхода к определению размеров структурных образований в среде, исследуемой посредством ультразвуковой визуализации, подтвердил реализуемость данного подхода.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе развита концепция принципиально нового подхода к решению задачи определения размера структурных образований при ультразвуковой визуализации. В основе данного подхода лежит изучение характера статистического распределения анализируемых в задаче данных.

В представленном подходе к количественному оцениванию размеров рассеивателей при ультразвуковой визуализации основным математическим инструментом определения степени когерентности эхо-сигнала являются анализ статистического распределения амплитуды эхо-сигнала и выявление момента перехода от рэлеевского распределения к райсовскому. Соответствующий такому переходу диаметр фокальной перетяжки луча можно считать соответствующим оцениваемому

размеру рассеивающих ультразвук неоднородностей исследуемой биологической среды.

Таким образом, подход к определению размеров неоднородностей среды состоит из следующих этапов:

- на основе выборочных измерений амплитуды эхо-сигнала методами двухпараметрического анализа райсовских данных рассчитывают значения райсовских параметров сигнала и шума;
- определяют глубину, которой соответствует эхо-сигнал с наибольшей яркостью;
- определяют поперечные размеры луча, соответствующие данной глубине;
- характерный размер неоднородностей, рассеяние на которых формирует эхо-сигнал максимальной яркости, принимается соответствующим поперечному размеру луча на глубине, с которой приходит эхо-сигнал максимальной яркости.

Развиваемый в работе подход к количественному анализу структуры рассеивающей среды будет способствовать разработке более совершенных ультразвуковых медицинских диагностических приборов нового поколения. В частности, следует отметить перспективу использования результатов работы в развитии ультразвуковой диагностики легочных патологий, вызванных заболеванием COVID: как показано в работе [12], ультразвуковая визуализация легких, не реализуемая в условиях других заболеваний, становится возможной при COVID именно ввиду особенностей патологий, вызванных данным заболеванием и означает возможность ультразвуковой диагностики состояния легких при COVID.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита концепция и представлены теоретические основы принципиально нового подхода к определению размера структурных образований при ультразвуковой визуализации посредством статистического анализа эхо-сигнала. Разработанный в рамках данного подхода математический метод является эффективным инструментом при решении задач количественной ультразвуковой диагностики, что подтверждается результатами проведенной апробации предлагаемого подхода путем физического эксперимента.

Основопологающим теоретическим инструментом при определении размеров неоднородностей в условиях поставленной в работе задачи является выявление момента перехода распределения эхо-сигнала от рэлеевского к райсовскому методами статистического анализа эхо-сигнала при изменении ширины луча. Как обосновано в

работе, такой переход от райсовского распределения к рэлеевскому происходит, когда размер рассеивателя ультразвукового излучения соответствует ширине луча и может быть выявлен путем статистического анализа амплитуды эхо-сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rice S.O.* Mathematical Analysis of Random Noise // Bell Syst. Tech. Journal. 1944. V. 23. P. 282–322.
2. *Cai R.* Statistical Characterization of the Medical Ultrasound Echo Signals. Sci Rep. 2016. V. 6. P. 39379.
3. *Parker K.J.* Shapes and distributions of soft tissue scatterers. Physics in Medicine and Biology. Volume 64, Issue 17, 5 September 2019, article number 175022.
4. *Mohana Shankar P.* A general statistical model for ultrasonic backscattering from tissues // IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control. 2000. V. 47. № 3. P. 727–36. <https://doi.org/10.1109/58.842062>
5. *Martínez-Graullera O., Yagüe-Jiménez V., Romero M. P. and Ibáñez Rodríguez A.* Improving ultrasonic medical image quality by attenuation of the secondary lobes // IEEE International Ultrasonics Symposium. 2019. P. 1286–1289. <https://doi.org/10.1109/ULTSYM.2019.8926260>
6. Physical Principles of Medical Ultrasonics, 2nd ed, C.R. Hill (Editor), J.C. Bamber (Editor), G.R. ter Haar (Editor), ISBN: 978-0-471-97002-6, 2004, 528 P.
7. *Yakovleva T.V., Kulberg N.S.* Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach. American Journal of Theoretical and Applied Statistics. 1013. V. 2. № 3. P. 67–79.
8. *Яковлева Т.В.* Теоретическое обоснование математических методов совместного оценивания параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8. № 3. С. 445–473. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2016-8-3-445-473>
9. *Яковлева Т.В., Кульберг Н.С.* Методы математической статистики как инструмент двухпараметрического анализа магнитно-резонансного изображения // Информатика и ее применения. 2014. Т. 8. Вып. 3. С. 79–89.
10. *Yakovleva T.* Peculiarities of the Rice Statistical Distribution: Mathematical Substantiation // Applied and Computational Mathematics. 2018. V. 7. № 4. P. 188–196. Science Publishing Group. <https://doi.org/10.11648/j.acm.20180704.12>
11. *Vetsheva N.N., Reshetnikov R.V., Leonov D.V., Kulberg N.S., Mokienko O.A.* Diagnostic value of lung ultrasound in COVID-19: systematic review and meta-analysis // Digital Diagnostics. 2020. V. 1. № 1. P. 13–26. <https://doi.org/10.17816/DD46834>

ESTIMATION OF THE SIZE OF STRUCTURAL FORMATIONS IN ULTRASOUND IMAGING THROUGH STATISTICAL ANALYSIS OF THE ECHO SIGNAL

T. V. Yakovleva^a, N. S. Kulberg^a, and D. V. Leonov^b

^a *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Moscow Center for Diagnostics and Telemedicine, MPEI, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Evtushenko

The paper considers a fundamentally new approach to solving the problem of determining the size of structural formations in ultrasonic diagnostics, based on the theoretically justified possibility of estimating the size of inhomogeneities of the studied medium by analyzing the statistical characteristics of the ultrasonic signal scattered on these inhomogeneities. This possibility is conditioned by the fact that the statistical distribution of the ultrasound image data varies from Rayleigh distribution to Reiss distribution depending on the relation between the coherence area size of the scattered signal and the beamwidth. The work aims at the development of a new method of statistical data analysis, which will effectively detect a significant coherent component in the echo signal and thereby be used as a mathematical tool to estimate the size of medium inhomogeneities in ultrasound imaging. Such approach to the analysis of ultrasound images would provide a possibility of quantitative estimation of structural formations and thereby would increase significantly the information value of ultrasound diagnostics and possibility of pathology detection at early stages of its formation that opens perspectives for treatment efficiency increase.

Keywords: scattering, tissue differentiation, Rayleigh, Rice, ultrasonic diagnostics

УДК 621.391.2

ПОДАВЛЕНИЕ СПЕКЛ ШУМОВ В МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ ПУТЕМ СЕГМЕНТАЦИИ-ГРУППИРОВАНИЯ 3D ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ДИСПЕРСНОГО КОНТУРОЛЕТ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

© 2023 г. В. Ф. Кравченко^{1,2,*}, академик РАН Ю. В. Гуляев^{1,**},
В. И. Пономарев^{3,***}, Г. Аранда-Бохорес^{3,****}

Поступило 09.09.2022 г.

После доработки 24.11.2022 г.

Принято к публикации 26.12.2022 г.

Впервые обоснована и реализована процедура фильтрации ультразвуковых и магнитно-резонансных изображений (УЗИ, МРИ), искаженных мультипликативным (спекл) шумом. Процедура включает следующие этапы: сегментация изображения в ряд однородных регионов, формирование сходных структур в трехмерном пространстве (3D), голоморфное преобразование, пороговая фильтрация изображения в пространстве контуролет преобразования (CLT) с оценкой на основе группирования 3D структур по информационной степени близости и обратное голоморфное преобразование. Дана физическая интерпретация процедуры фильтрации изображений в условиях спекл шумов и разработана структурная схема подавления шумов. Моделирование предложенного подхода подтвердило преимущество новой процедуры фильтрации изображений в терминах общепризнанных критериев: оценки структурного индекса схожести, пикового отношения сигнал/шум, индекса сохранения контуров и индекса разрешения *альфа*, а также и при визуальном сравнении профильтрованных изображений.

Ключевые слова: ультразвуковые и магнитно-резонансные изображения, суперпикельные методы сегментации, фильтрация, спекл шум, группирование объектов, голоморфное преобразование, пиковое отношение сигнал/шум

DOI: 10.31857/S2686954322600562, **EDN:** CQFB DY

1. ВВЕДЕНИЕ

Улучшение качества деталей изображений в системах дистанционного зондирования и в медицинских исследованиях существенно усложнено вследствие влияния шумов различной природы, смазывания деталей и контуров. Ультразвуковые изображения (УЗИ) и магнитно-резонансные изображения (МРИ) широко используются в диагностике, анализе органов и структур мягких тканей, вследствие неинвазивного, безболезненного характера и используемых вычислительных методов при обработке, и считаются важными

при медицинской визуализации. Основной проблемой, возникающей при интерпретации таких изображений, является наличие случайных зернистых образований в рисунке, известных как спекл-шум, который снижает контрастность мягких тканей и ограничивает возможности диагностики, обнаружения и классификации. Спекл-шум в УЗИ и МРИ должен при фильтрации подавляться без искажений каких-либо критических характеристик изображений, в частности контуров и мелких деталей, иначе анализ изображений может приводить к неверным решениям в приложениях (визуализация опухолей, распознавание видов поражений, медицинская диагностика заболеваний, др.). Устранение этого шума является обязательным для улучшения структуры контуров и их восстановления в УЗИ и МРИ [1–8]. Ряд эффективных методов фильтрации основан на применении статистических процедур [1–6] совместно с использованием дисперсного представления изображений в базисах преобразования (DCT, различных вэйвлет и контуролет функций, др.), которые позволяют улучшить ви-

¹ Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук, Москва, Россия

² Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

³ Национальный Политехнический институт Мексики (Instituto Politécnico Nacional), Мехико, Мексика

*E-mail: kvf-ok@mail.ru

**E-mail: gulyaev@cplire.ru

***E-mail: vponomar@ipn.mx

****E-mail: gibran.aranda.bionics@gmail.com

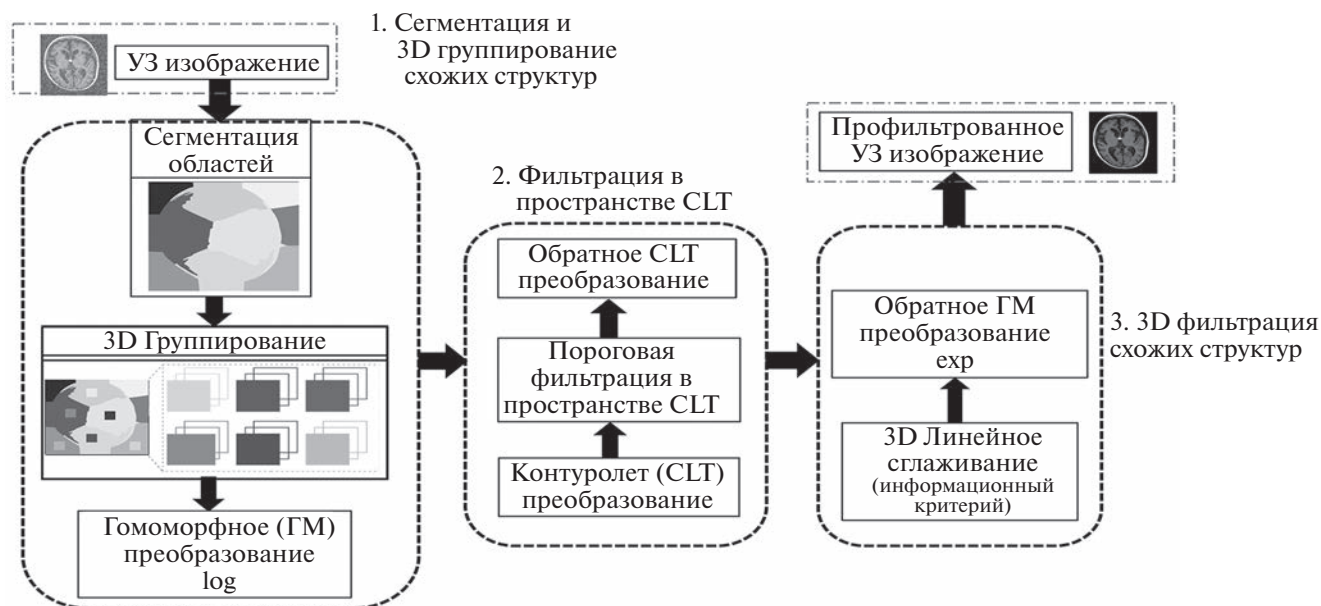


Рис. 1. Блок-схема метода фильтрации спекл шумов.

зуализацию деталей и контуров, сохранить хроматические и структурные свойства [7–9].

Представленные в литературе процедуры подавления шумов различной природы в изображениях, как правило, разработаны для конкретных моделей шумов (мультипликативного, импульсного или аддитивного) и не позволяют осуществлять эффективную фильтрацию изображений, искаженных шумом сложной структуры, в частности спекл-аддитивным шумом [5–9].

Здесь предложен и обоснован оригинальный подход в обработке МРИ и УЗИ, искаженных спекл-шумом, на основе использования идей, изложенных в [1–9]. Этот подход сочетает этапы: сегментации схожих участков в изображении, группирования 3D структур на основе информационного критерия близости, гомоморфной фильтрации, обработки изображений в дисперсном их представлении и апостериорной обработки. Метод содержит три этапа: на первом этапе изображение сегментируется в ряд областей (кластеров), которые разделяют объекты со сходными структурными свойствами, выбранными на основе предложенного критерия схожести. Внутри сегментированной области проводится группирование 3D структур (лучей) из объектов со схожими свойствами на основе нового информационного критерия близости. На заключительном шаге первого этапа каждый луч объектов подвергается гомоморфному преобразованию (\log), которое формирует новые структуры в 3D пространстве. На следующем этапе фильтрации лучи из 2D объектов изображения в сегментах преобразуются на основе дискретного контуролет пре-

образования (*Countourlet Transform: CLT*). Здесь сгруппированные схожие объекты образуют третью координату в дисперсном представлении изображения, существенно увеличивая объем выборки и улучшая качество фильтрации. Лучи из 2D объектов изображения подвергаются пороговой фильтрации в *CLT* пространстве и обратному *ICLT* преобразованию. На третьем этапе реализуется обратное гомоморфное преобразование (\exp), после которого формируется оценка профильрованного изображения путем взвешенного среднего из 2D структур изображения в каждом луче с весами, определяемыми их информационной близостью.

Критериями, используемыми при сравнении предложенных алгоритмов с известными в литературе, являются: пиковое отношение сигнал-шум в децибеллах (*PSNR*), оценка структурного индекса схожести (*SSIM*), индекс сохранения контуров (*EPI*) и индекс разрешения α (*альфа*) [1–3].

Результаты многочисленных численных экспериментов в условиях различных интенсивностей шумов на изображениях из базы данных подтверждают эффективность нового метода, позволяющего существенно уменьшить искажение МРИ и УЗИ спекл шумами, восстанавливая мелкомасштабные детали и контуры изображений, улучшая разрешение и визуальное качество изображений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Предложенная процедура фильтрации включает в себя три основных этапа обработки, как показано на рис. 1.

Регистрируемое искаженное изображение $X(i, j)$ в случае модели спекл-аддитивного шума ($\varepsilon(i, j)$ и $N(i, j)$), которая характерна для изображений дистанционного зондирования или сформиро-

ванных датчиками УЗИ или МРИ при медицинской диагностике:

$$S(i, j) = \varepsilon(i, j)Y(i, j) + n(i, j), \quad (1)$$

анализируется с целью формирования групп схожих объектов. На первом шаге на основе анализа гистограммы изображения оценивается количество однородных областей со схожими структурными свойствами и проводится сегментация (кластеризация) областей в изображении по алгоритму супер-пикселей (*Superpixel* [10]).

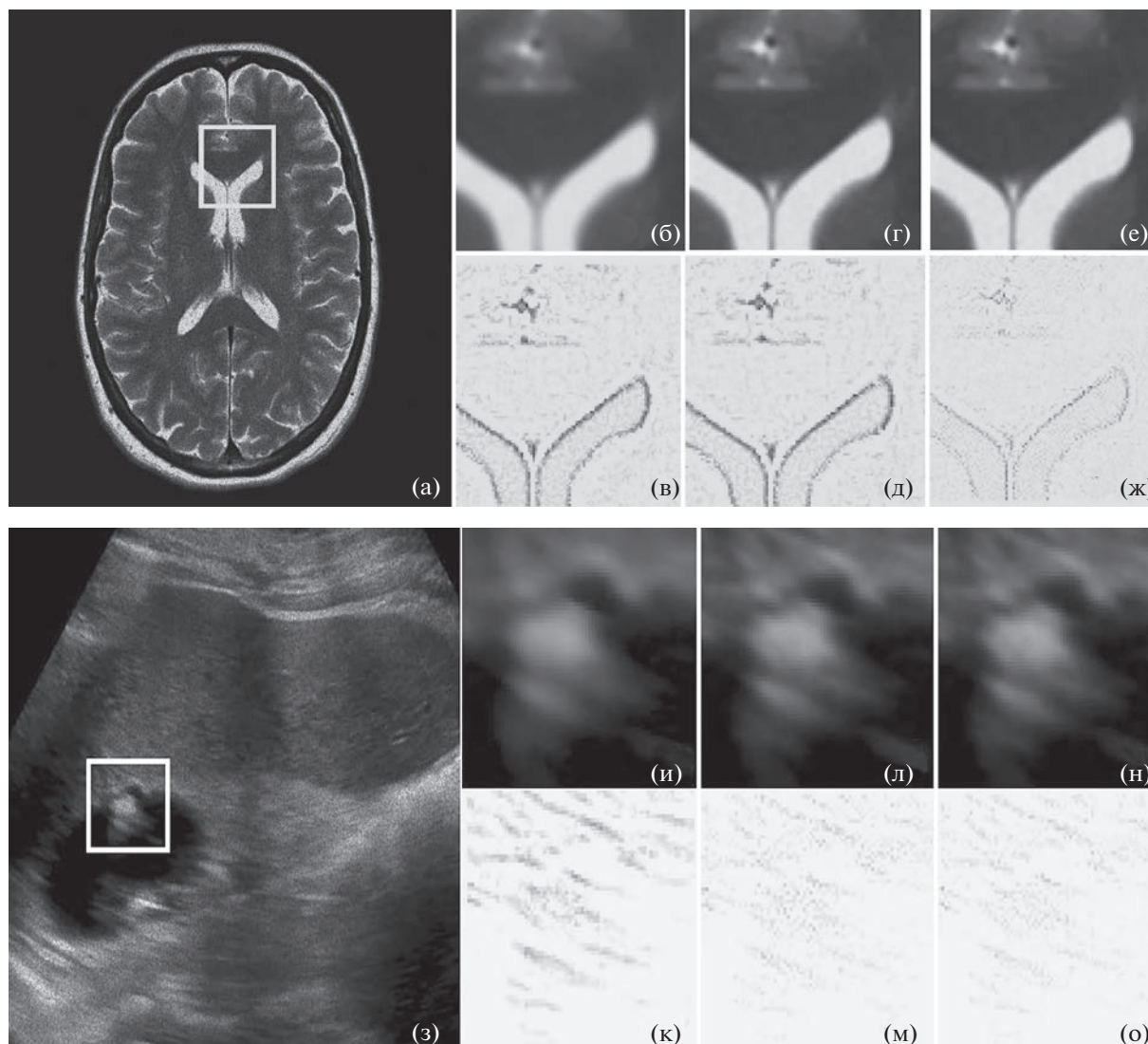


Рис. 2. Профильтрованные МРИ и инвертированные ошибки при фильтрации разными методами: (а) изображение MRI-05 искаженное спекл шумом со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0.40$. Фильтр K-SVD (PSNR = 19.38 dB, EPI = 0.710): (б) увеличенная выделенная часть из MRI-05, (в) инвертированные ошибки. Фильтр CLT (PSNR = 19.46 dB, EPI = 0.728): (г) увеличенная выделенная часть из MRI-05, (д) инвертированные ошибки. Новый фильтр SMI-3D-CLT (PSNR = 21.07 dB, EPI = 0.750): (е) увеличенная выделенная часть из MRI-05, (з) инвертированные ошибки. (ж) Профильтрованные УЗИ и инвертированные ошибки при фильтрации разными методами: (з) изображение US-12 искаженное спекл шумом со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0.80$. Фильтр DLRA (PSNR = 20.45 dB, EPI = 0.584): (и) увеличенная выделенная часть из US-12, (к) инвертированные ошибки. Фильтр CLT (PSNR = 20.98 dB, EPI = 0.618): (л) увеличенная выделенная часть из US-12, (м) инвертированные ошибки. Новый фильтр SMI-3D-CLT (21.20 dB, EPI = 0.658): (н) увеличенная выделенная часть из US-12, (о) инвертированные ошибки.

Таблица 1. Усредненные по изображениям базы данных МРПИ [13] значения PSNR/alfa, SSIM и EPI в случае применения различных алгоритмов фильтрации BM3D, SD-BM3D, K-SVD, CLT, DLRA, DES-SP-MAP и предложенного алгоритма SMI-3D-CLT

Фильтр	PSNR/alfa					SSIM					EPI				
	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
BM3D	25.28/0.125	23.12/0.124	22.33/0.122	21.69/0.120	20.92/0.119	0.645	0.601	0.576	0.566	0.524	0.738	0.719	0.696	0.684	0.676
SD-BM3D	26.52/0.130	24.56/0.129	23.45/0.127	22.77/0.125	21.97/0.123	0.677	0.631	0.594	0.573	0.550	0.775	0.755	0.731	0.718	0.710
K-SVD	25.47/0.126	23.29/0.125	22.49/0.123	21.85/0.121	21.07/0.120	0.650	0.610	0.570	0.550	0.528	0.744	0.724	0.702	0.689	0.681
DLRA	26.79/0.128	24.49/0.127	23.66/0.124	22.98/0.122	22.17/0.121	0.651	0.607	0.571	0.552	0.529	0.746	0.726	0.703	0.690	0.683
CLT	25.49/0.133	23.35/0.132	22.55/0.130	21.91/0.128	21.13/0.126	0.683	0.637	0.599	0.579	0.555	0.782	0.762	0.738	0.724	0.716
DES-SP-MAP	26.38/0.134	24.82/0.134	23.61/0.132	23.04/0.132	22.47/0.131	0.689	0.642	0.607	0.580	0.561	0.775	0.765	0.747	0.731	0.729
Новый SMI-3D-CLT	27.45/0.141	25.09/0.140	24.24/0.137	23.55/0.135	22.71/0.133	0.700	0.653	0.614	0.593	0.569	0.801	0.780	0.756	0.742	0.734

Следующим этапом в предлагаемом методе является поиск блоков (*patch*), похожих на опорный с использованием меры взаимной информации (*Mutual Information*, MI), которая характеризует статистическую зависимость между двумя случайными массивами части изображения. Эта мера $MI(X_0, X_k)$ представляет собой среднее количество информации, получаемой в формируемом 3D луче при добавлении к опорному блоку X_0 нового блока X_k в конкретной кластерной области.

В каждом сегменте реализуется поиск схожих блоков (*block-matching*, BM) и формируются 3D образования из объектов со схожими 2D структурами на основе критерия взаимной информации MI для опорной 2D структуры X_0 с пикселями X_{0p} и схожей X_k с пикселями X_{kp} :

$$MI(X_0, X_k) = -\sum_p \sum_q P(X_0 = X_{0p}, X_k = X_{kp}) \times \log_2 \frac{P(X_0 = X_{0p}, X_k = X_{kp})}{P(X_0 = X_{0p}) P(X_k = X_{kp})}, \quad (2)$$

где $P(X_0 = X_{0p}, X_k = X_{kp})$ определяет совместную плотность вероятности для пикселей в опорном и схожем блоках, а $P(X_0 = X_{0p})$ и $P(X_k = X_{kp})$ характеризуют плотности вероятности только для пикселей в каждом блоке, опорном и схожем соответственно.

Для каждого опорного блока $X_0(i, j)$ все найденные схожие блоки $X_k(i, j), k = 1, \dots, K$ определяют трехмерную структуру, луч из 2D окон, которые упорядочены с учетом степени схожести согласно критерию MI.

В дальнейшем каждый луч с выделенными объектами подвергается гомоморфному преобразованию (*log*), формируя новые структуры в 3D. Операция *log* преобразовывает спекл шум в аддитивный, причем в областях, где $\epsilon(i, j)Y(i, j)$ значительно превосходит интенсивность аддитивных шумов $N(i, j)$, модель шума (1) преобразуется в аддитивную шумовую модель:

$$\log[X(i, j)] \approx \log[\epsilon(i, j)] + \log[Y(i, j)] + N(i, j) / [\epsilon(i, j)Y(i, j)]. \quad (3)$$

На следующем этапе преобразование CLT, примененное к этим 3D структурам, формирует в пространстве преобразования массив данных $\tilde{Y}(i, j; m)$, который подвергается пороговой фильтрации. При жесткой пороговой обработке все коэффициенты, величина которых больше выбранного порогового значения, остаются неизменными, а другие, величина которых меньше λ_a , полагаются равными нулю. На основе анализа средних значений 2D структур выделяются области с плавным изменением интенсивности ($a = 1$) и области с границами или мелкими деталями ($a = 2$).

Таблица 2. Средние по изображениям базы данных УЗИ [14] значения PSNR/alpha, SSIM и EPI в случае применения различных алгоритмов фильтрации BM3D, SD-BM3D, K-SVD, CLT, DLRA, DES-SP-MAP и предложенного алгоритма SMI-3D-CLT

Фильтр	СКО										EPI				
	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10					
BM3D	20.19/0.170	18.46/0.169	17.87/0.166	17.32/0.163	16.71/0.162	0.515	0.480	0.482	0.436	0.419	0.590	0.574	0.556	0.546	0.540
SD-BM3D	21.21/0.182	19.39/0.181	18.39//0.177	18.36/0.176	17.54/0.173	0.541	0.504	0.474	0.458	0.440	0.620	0.603	0.584	0.573	0.567
K-SVD	20.35/0.172	18.60/0.171	17.97/0.168	17.44/0.165	16.83/0.163	0.519	0.484	0.455	0.439	0.422	0.594	0.579	0.560	0.550	0.544
DLRA	20.40/0.174	18.64/0.173	18.01/0.169	17.50/0.167	16.88/0.165	0.520	0.485	0.456	0.441	0.423	0.596	0.580	0.562	0.552	0.546
CLT	21.40/0.182	19.56/0.181	18.90/0.177	18.36/0.174	17.70/0.173	0.546	0.509	0.479	0.462	0.444	0.625	0.608	0.589	0.579	0.572
DES-SP-MAP	21.53/0.188	19.85/0.188	19.04/0.185	18.41/0.182	17.87/0.180	0.551	0.513	0.481	0.468	0.448	0.634	0.611	0.597	0.582	0.577
Новый SMI-3D-CLT	21.93/0.192	20.04/0.191	19.36/0.188	18.81/0.184	18.14/0.182	0.559	0.521	0.490	0.474	0.455	0.640	0.623	0.604	0.593	0.586

$$\hat{Y}(i, j; m) = \begin{cases} \tilde{Y}(i, j; m), & \tilde{Y}(i, j; m) \geq \lambda_a \\ 0, & \tilde{Y}(i, j; m) < \lambda_a; \end{cases} \quad (4)$$

$a = 1$, smooth; $a = 2$, detail.

Сгруппированные схожие объекты образуют третью координату в дисперсном представлении изображения, существенно увеличивая объем выборки и улучшая качество фильтрации. В дальнейшем массив данных $\hat{Y}(i, j; m)$ подвергается обратному преобразованию (ICLT), формируя первую аппроксимацию оцененных блоков $\hat{Y}(i, j; m)$, $m = 1, \dots, K$. На следующем этапе процесс 3D обработки завершается линейной фильтрацией, которая формирует финальную оценку изображения, используя линейный фильтр с весами, зависящими от степени информационной схожести (MI) блоков:

$$\hat{Y}(i, j) = \frac{\sum_{m=1}^K \hat{Y}(i, j; m) Q_m}{\sum_{m=1}^K Q_m}, \quad Q_m = MI(X_0, X_m). \quad (5)$$

Этот этап обработки завершается обратным гомоморфным преобразованием (exp), целью которого является вернуть профильтрованные данные в исходную реальную плоскость изображений.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Свойства нового метода фильтрации спекл-шумов, названного SMI-3D-CLT, а также известных по качеству алгоритмов [1, 5–9] были исследованы на основе стандартных численных критериев PSNR, SSIM, EPI и индекса разрешения α , а также используя субъективный визуальный анализ профильтрованных изображений. Критерий PSNR вычисляется так:

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{(255)^2}{MSE}, \quad (6)$$

а величины SSIM критерия рассчитываются по формуле:

$$SSIM(Y, \hat{Y}) = \frac{(2\mu_Y \mu_{\hat{Y}} + C_1)(\sigma_{Y\hat{Y}} + C_2)}{(\mu_Y^2 + \mu_{\hat{Y}}^2 + C_1)(\sigma_Y^2 + \sigma_{\hat{Y}}^2 + C_2)}. \quad (7)$$

В формуле (7) μ_Y и $\mu_{\hat{Y}}$ определяют локальные средние для Y и \hat{Y} соответственно; σ_Y^2 и $\sigma_{\hat{Y}}^2$ являются локальными значениями дисперсий для Y и \hat{Y} , и $\sigma_{Y\hat{Y}}$ – это локальная функция ковариации для Y и \hat{Y} . Константы c_n выбираются такими, чтобы избежать неустойчивости [12].

Индекс EPI [1, 2] оценивает количество сохраненных контуров в обработанном изображении, что важно при фильтрации медицинских УЗИ, где контуры несут информацию о подозрительных структурах, связанных с заболеванием. Критерий EPI вычисляется так:

$$EPI(Y, \hat{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\Delta Y(i, j) - \mu_{\Delta Y}) (\Delta \hat{Y}(i, j) - \mu_{\Delta \hat{Y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\Delta Y(i, j) - \mu_{\Delta Y})^2 (\Delta \hat{Y}(i, j) - \mu_{\Delta \hat{Y}})^2}}, \quad (8)$$

где ΔY и $\Delta \hat{Y}$ – это профильтрованные высокочастотным фильтром изображения Y и \hat{Y} соответственно; $\mu_{\Delta Y}$ и $\mu_{\Delta \hat{Y}}$ определяют их средние значения.

Индекс разрешения ∞ – это метрика, связанная с разрешением в МРИ или в УЗИ [6], которая вычисляется как процент пикселей функции автокорреляции профильтрованного изображения внутри области, где эта функция превышает 75% от его максимального значения. Большее значение ∞ указывает на лучшее разрешение изображения.

Изображения из баз данных МРИ и УЗИ [13, 14], искаженные спекл шумом разной интенсивности (СКО шума: 0.02–0.10), были обработаны алгоритмами. Представленные в табл. 1, 2 величины PSNR, SSIM, EPI и ∞ – это их усредненные значения по совокупности изображений из баз данных [13, 14] в случае применения алгоритмов фильтрации нового SMI -3D-CLT, и алгоритмов BM3D [5], SD-BM3D [6], DLRA [7], K-SVD [9], CLT [8] и DES-SP-MAP [1], а также визуальный анализ рис. 2 подтверждают, что новый алгоритм превосходит лучшие из известных в широком диапазоне интенсивностей шумов. Эффективная фильтрация изображений MRI-5 и US-12, в которых наблюдается много мелких деталей и контуров, и вариации интенсивности, подтверждает робастность предложенного метода для разных интенсивностей спекл-шумов.

4. ВЫВОДЫ

Теоретическое обоснование и анализ физических результатов численного моделирования нового метода в фильтрации изображений, которые искажены спекл-шумом, позволяют сделать ряд важных выводов:

1. Предложенный метод, который основан на дисперсном представлении данных путем использования CLT, пороговой фильтрации и корреляции между схожими объектами, эффективно

восстанавливает сложные структуры в МРИ и УЗИ.

2. Логарифмирование значений пикселей изображения позволяет трансформировать мультипликативную спекл шумовую модель в аддитивную и реализовать фильтрацию с использованием дисперсных методов фильтрации.

3. 3D фильтрация с весами, определяемыми информационной схожестью объектов, улучшает разрешение и визуальное качество обработанных изображений.

4. Новый метод подтвердил наилучшее качество как в значениях критериев ($PSNR$, $SSIM$, EPI и α), так и при субъективном визуальном анализе профильтрованных изображений среди всех известных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравченко В.Ф., Пономарев В.И., Пустовойт В.И., Аранда-Бохоргес Г. // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 499. № 2. С. 67–72.
2. Aranda-Bojorges G., Ponomaryov V., Reyes-Reyes R., Cruz-Ramos C., Sadovnychiy S. // IEEE Geosci. Rem. Sens. Lett. 2020. V. 19, art. 4018005. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2021.3108774>
3. Reyes-Reyes R., Aranda-Bojorges G., Garcia-Salgado B., Ponomaryov V., Cruz-Ramos C., Sadovnychiy S. // Sensors. 2022. V. 22. 5113. <https://doi.org/10.3390/s22145113>
4. Kravchenko V., Perez H., Ponomaryov V. Adaptive Signal Processing of Multidimensional Signals with Applications. Moscow: Fizmatlit, 2009.
5. Dabov K., Foi A., Katkovnik V., Egiazarian K. // IEEE Trans. Image Process. 2007. V. 16. № 8. P. 2080–2095.
6. Santos C.A.N., Martins D.L.N., Mascarenhas N.D.A. // IEEE Trans. Image Process. 2017. V. 26. 2632–2643. <https://doi.org/10.1109/TIP.2017.2685339>
7. Sameera V.M.S., Sudhish N.G. // Sensing Imaging. 2017. V. 18. P. 1–28. <https://doi.org/10.1007/s11220-017-0181-8>
8. Jubairahmed L., Satheeskumaran S., Venkatesan C. // Clust. Comput. 2019. V. 22. P. 11237–11246.
9. Jaburalla M.Y., Lee H.N. // Appl. Sci. 2018. V. 8. 903. P. 1–17. <https://doi.org/10.3390/app8060903>
10. Achanta R., Shaji A., Smith K., Lucchi A., Fua P., Süsstrunk S. // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2012. V. 34. P. 2274–2282.
11. Jensen J.A. // Med. Biol. Eng. Comput. 1996. V. 34. P. 351–352.
12. Wang Z., Bovik A. // IEEE Signal Process. Mag. 2009. V. 26. № 1. P. 98–117.
13. <https://openfmri.org/dataset/> (accessed: June 21, 2022).
14. <http://splab.cz/en/download/databaze/ultrasound> (accessed: June 19, 2022).

SUPPRESSION OF SPECKLE NOISE IN MEDICAL IMAGES VIA SEGMENTATION-GROUPING OF 3D OBJECTS USING SPARSE CONTOURLET REPRESENTATION

V. F. Kravchenko^{a,b}, Academician of RAS Yu. V. Guliaev^a,
V. I. Ponomaryov^c, and G. Aranda Bojorges^c

^a *Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

^c *Instituto Politecnico Nacional de Mexico, Mexico City, Mexico*

Novel filtering method in medical images (MRI and US) that are contaminated by noise consisting of mixture speckle and additive noise is designed in this paper. Proposed method consists of several stages: segmentation of image areas, grouping of similar 2D structures in accordance mutual information (MI) measure, homomorphic transformation, 3D filtering approach based on sparse representation in contourlet (CLT) space with posterior filtering in accordance with MI weights similar 2D structures, and final inverse homomorphic transformation. During numerous experiments, the developed method has confirmed their superiority in term of visual image quality via human visual perception as well as in better criteria values, such as PSNR, SSIM, EPI and *alfa* for different test MRI and US mages corrupted by speckle noise.

Keywords: filtering, speckle noise, additive noise, homomorphic transformation, Mutual Information, peak signal/noise ratio

УДК 519.63

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАВЛЕНИЯ ВОЛЬФРАМА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА

© 2023 г. Член-корреспондент РАН Г. Г. Лазарева^{1,*}, А. С. Аракчеев^{2,**}, В. А. Попов^{2,***}

Поступило 04.09.2022 г.

После доработки 24.10.2022 г.

Принято к публикации 26.12.2022 г.

Работа посвящена математическому моделированию процесса плавления в образце под воздействием импульсной тепловой нагрузки на основе решения двухфазной задачи Стефана. Численная модель основана на подходе Самарского, что позволяет не выделять свободную границу во время расчета. Учет аксиально-симметричной геометрии позволил показать, что на испарение расходуется около четверти падающей энергии в центре области расплава. Это в пять раз больше, чем дают оценки, основанные на решении одномерного уравнения теплопроводности. В случае учета испарения вещества получено хорошее соответствие расчетных и экспериментальных температуры остывающей поверхности и скорости сужения области расплава. Результаты математического моделирования подтвердили существование режима охлаждения испарением при нагреве вольфрама электронным пучком существенно выше порога плавления.

Ключевые слова: математическое моделирование, испарение вольфрама, задача Стефана

DOI: 10.31857/S2686954322600537, EDN: CQCAUT

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные системы магнитного удержания плазмы предполагают наличие контакта периферийной плазмы со стенкой. При этом в термоядерной плазме потоки мощности на поверхность оказываются достаточно велики [1], чтобы существенно влиять на материалы стенки. В случае же развития плазменных неустойчивостей находящиеся в контакте поверхности могут принимать значительную долю энергии удерживаемой плазмы, на несколько порядков превосходящую потоки энергии в стационарном режиме [2]. Это может приводить к разрушению первой стенки. При достаточном нагреве вольфрам разогревается до температуры вязко-хрупкого перехода и начинает деформироваться необратимо. При дальнейшем увеличении потока тепла вольфрам начинает очищаться от оксидов и захваченных газов. Известно, что при температуре плавления

начинается быстрый рост интенсивности испарения. Наблюдается движение расплава вдоль поверхности под воздействием силы Ампера на токи, текущие сквозь расплав.

Существует три распространенных способа эмульсации теплового потока предполагаемого термоядерного реактора: лазером [3], плазмой [4] и электронным пучком [5]. Они не в полной мере соответствуют тем воздействиям, что будут происходить в термоядерных реакторах. Важно описание воздействия различных источников для их сравнения и понимания границ применимости обобщений экспериментальных результатов. Исследования вольфрама, как обращенного к плазме материала, проводятся в Курчатовском институте, МИФИ, МГУ, ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Проектном центре ИТЭР, ГНЦ РФ ТРИНИТИ и др. Исследования, проводимые в ИЯФ СО РАН, сосредоточены на изучении эрозии поверхности вольфрамового образца при воздействии лазерного импульса или электронного пучка. Эксперименты проводятся на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданном в ИЯФ СО РАН [6]. Испарение вещества является одним из важнейших процессов, влияющих на импульсный тепловой нагрев выше температуры плавления, который ожидается в случае развития неустойчивостей плазмы на будущих термоядерных установках.

¹ Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: lazarevanovosibirsk@gmail.com

**E-mail: asarakcheev@gmail.com

***E-mail: v.a.popov94@gmail.com

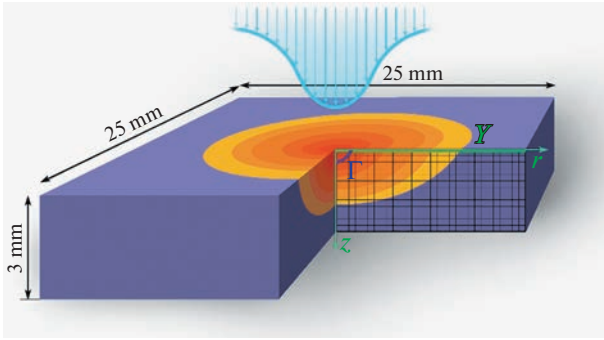


Рис. 1. Схема эксперимента. Расчетная область в поперечном сечении образца (зеленый), область нагрева (желтый) и расплава (красный) со свободной границей Γ , лазерный импульс (голубой).

Модель нагрева и плавления вольфрама основана на решении в области образца двухфазной задачи Стефана для расчета температуры. Задача Стефана является классической задачей вычислительной математики, которая актуальна и сегодня [7]. Положение и скорость движения границы раздела фаз зависят от нелинейных коэффициентов. Условие на свободной границе расплав – твердое тело состоит в непрерывности температуры и разрывности теплового потока за счет поглощения или выделения известного количества тепла. Новизна и сложность решения задачи обусловлены необходимостью верного описания нелинейных граничных условий, описывающие нагрев и испарение материала на его поверхности.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В вакууме расположена пластинка вольфрама, которая нагревается мощным лазерным импульсом (рис. 1). Поскольку за такое короткое время образец нагревается на глубину нескольких сотен микрон, область моделирования представляла собой поперечное сечение образца 2×3 мм. Плотность мощности $W(t, r)$ на нагреваемой поверхности по радиусу r имеет распределение, близкое к нормальному, что определяет выбор аксиально-симметричной постановки задачи:

$$W(t, r) = W_{\max}(t) \cdot \exp(-A \cdot r^2), \quad A = 0.03088523. \quad (1)$$

На каждом временном шаге численного моделирования $W_{\max}(t)$ берется из файла экспериментальных данных. Распределение плотности мощности нагрева по поверхности измерены с помощью рентгеновской визуализации [8]. Электроны с энергией 80–90 кэВ нагревают материал в тонком слое по сравнению с характерной глубиной нагрева материала. Для расчета поля температур в образце используется задача Стефана:

$$\begin{cases} c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}, \\ (n, \nabla T)|_{\gamma} = \frac{W(t, r) - N(T)}{\lambda(T)}, \quad (n, \nabla T)|_{\Omega-\gamma} = 0, \\ [T]|_{\Gamma} = 0, \quad \left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial t}\right]_{\Gamma} = L_m v_n, \quad T|_{t=0} = T_0, \end{cases} \quad (2)$$

где Ω – вся поверхность образца, γ – нагреваемая поверхность, Γ – свободная поверхность раздела сред расплав-металл, $T(t, r, z)$ – температура, $c(T)$ – удельная теплоемкость, $\rho(T)$ – плотность, $\lambda(T)$ – теплопроводность, $W(t, r)$ – плотность мощности на поверхности γ , $N(T)$ – мощность испарения, n – нормаль к поверхности, T_0 температура в начальный момент времени, v_n – скорость границы фазового перехода. Во время нагревания вольфрам начинает испаряться, вследствие чего происходит уменьшение потока тепла на поверхность. Процесс испарения на границе учитывается с помощью заданного результирующего потока энергии $W_*(t, r) = W(t, r) - N(T|_{\gamma})$. Здесь плотность мощности $W(t, r)$ задается распределением (1), мощность испарения $N(T|_{\gamma})$ задается через потерю мощности L_e с массовой скоростью испарения $\frac{1}{S} \frac{dm}{dt}$:

$$N(T|_{\gamma}) = L_e \cdot \frac{1}{S} \frac{dm}{dt}, \quad \frac{1}{S} \frac{dm}{dt} = P(T|_{\gamma}) \sqrt{\frac{M}{2\pi RT|_{\gamma}}}. \quad (3)$$

Здесь $L_e = 4.482 \times 10^{12} \frac{\text{W}\mu\text{s}}{\text{kg}}$, давление насыщенного пара:

$$P(T|_{\gamma}) = \exp\left(26.19104 - \frac{83971.3 \text{ K}}{T|_{\gamma}}\right) \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2 \mu\text{s}}.$$

Таким образом, потери мощности на испарение (рис. 2а), а значит и результирующий поток энергии на нагреваемой поверхности, можно определить через ее температуру. Потерю материала за счет испарения модель не учитывает. Время расчета определяется моментом, когда было произведено последнее измерение температуры поверхности.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для учета процесса плавления в уравнение температуры была введена энтальпия фазового перехода L_m :

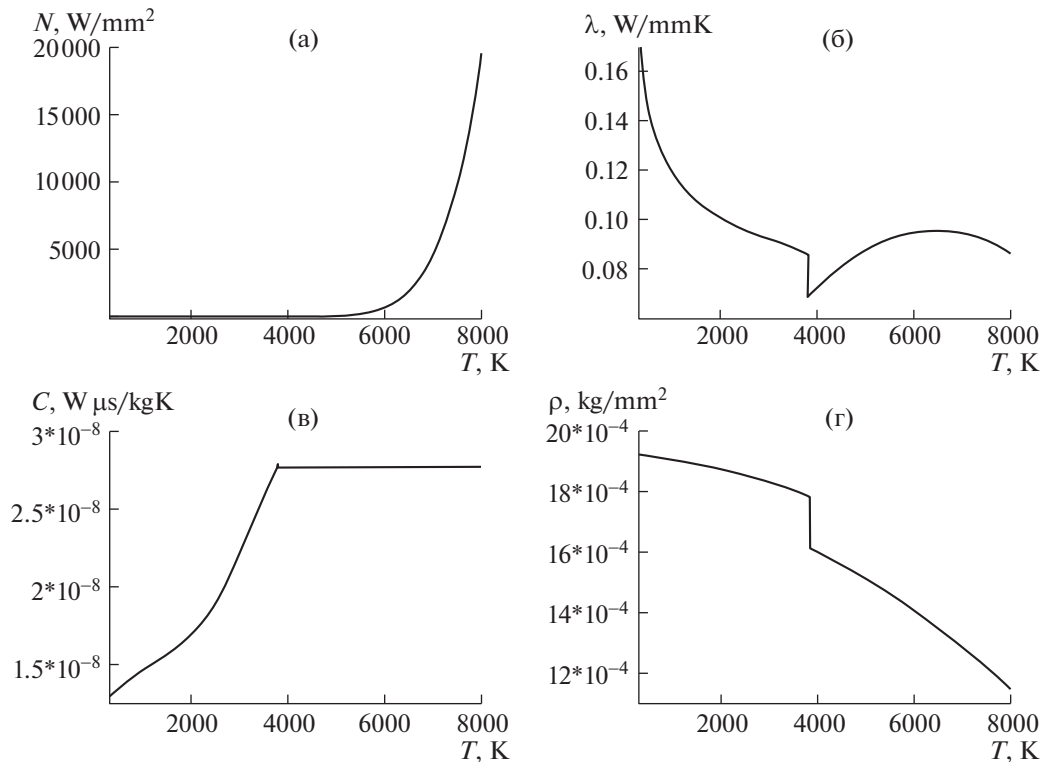


Рис. 2. Графики зависимости от температуры потери мощности на испарение (а), теплопроводности (б), удельной теплоемкости (в) и плотности (г).

$$(c(T)\rho(T) + L_m\delta(T, \epsilon)) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T) \text{grad } T),$$

$$\delta(T, \epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & |T - T_m| \leq \epsilon, \\ 0, & |T - T_m| > \epsilon, \end{cases} \quad (5)$$

где интервал сглаживания $[-\epsilon \epsilon]$, $\epsilon = 5$ К, температура плавления $T_m = 3695$ К, энтальпия фазового перехода $L_m = 51.1 \times 10^5 \frac{\text{W} \mu\text{s}}{\text{mm}^3}$. Вывод (5) и обоснование пренебрежения поверхностным температурным излучением в энергетическом балансе более подробно представлены в работе [9]. Численная реализация уравнения (5) основана на схеме стабилизирующей поправки [10].

Как показывают экспериментальные данные и аналитические оценки, разогрев поверхности не превышает 8000 К в исследуемых на ВЕТА режимах. Это обусловлено экспоненциальным ростом потерь энергии на испарение с ростом температуры поверхности. Потери мощности, теплопроводность [11], удельная теплоемкость [11] и плотность (рис. 2) используются в виде зависимостей от температуры материала. Эти функции имеют разрывы производных при температуре плавления T_m . Оценки теплопроводности $\lambda(T)$ жидкого вольфрама взяты из [12, 13], при этом уточнена

аппроксимация данных (рис. 2 б), что позволило проводить расчеты при значениях температуры более 6000 К.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Расчеты показали, что модель нагрева образца достаточно точно отражает характер решения (рис. 3а) с учетом особенностей диагностики. Учет охлаждения поверхности за счет испарения при достаточно высокой плотности мощности нагрева значительно уменьшает температуру, до которой нагревается материал. Энергия при этом уходит из вольфрама вместе с испаряющимся материалом. Как было показано в работе [14], потеря энергии S на испарение в центре пластинки составляет около 26% энергии импульсного нагрева:

$$S = \int_0^\infty \int_0^\infty N(T|_V) r dt dr / \int_0^\infty \int_0^\infty W(t, r) r dt dr. \quad (6)$$

На установке ВЕТА после импульсного нагрева во время остывания были сделаны последовательно четыре фотографии поверхности образца [6, 15]. Измерены значения радиуса расплавленной области в моменты времени, соответствующие времени экспозиции камеры от начала нагрева электронным пучком с длительностью выдержки 10 мкс. Результаты расчета совпадают с

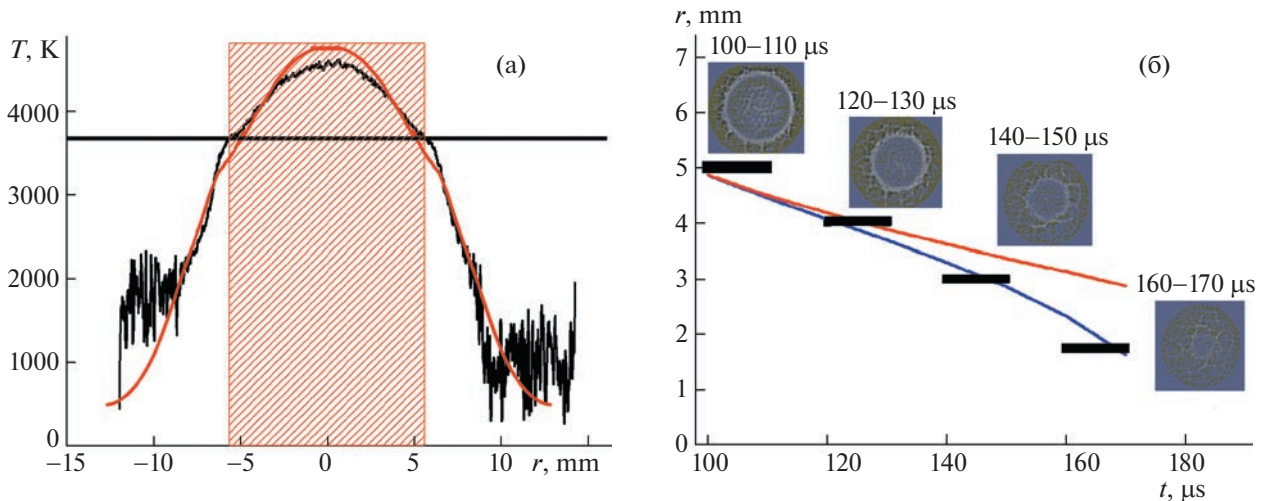


Рис. 3. Распределение температуры на поверхности (а): расчет (красная линия) и экспериментальные данные (черная линия), температура плавления (черная черта), область, соответствующая расплаву (заштриховано красным). Зависимость радиуса расплавленной области от времени (б): экспериментальные данные (черные отрезки), результат расчета без учета испарения (красная линия), результат расчета с учетом охлаждения за счет испарения (синяя линия).

экспериментальными данными (рис. 3 б) в начале охлаждения, но на поздних стадиях остывания численный расчет давал радиус расплавленной области значительно больше наблюдаемого. Более того, в этом случае расчетная температура в центре нагреваемой области дает по формуле (3) невозможно большие значения потери мощности $N(T|_y)$, которые больше поверхностной плотности мощности нагрева $W(t, r)$. После того, как в численное моделирование был добавлен учет остывания поверхности за счет испарения, температура перестала превышать предельно допустимую, и рассчитанная зависимость радиуса расплавленной области совпала с экспериментальными данными.

5. ВЫВОДЫ

Математическое моделирование процесса плавления в образце под воздействием импульсной тепловой нагрузки подтвердило существование режима охлаждения испарением при нагреве вольфрама электронным пучком существенно выше порога плавления. Этот режим характеризуется тем, что мощность испарения становится сравнимой с поступающей мощностью, но толщина испаренного материала недостаточна для парового экранирования, в результате чего температура поверхности стабилизируется. Численное решение двухфазной задачи Стефана в аксиально-симметричной постановке показало, что на испарение расходуется около четверти падающей энергии в центре области расплава. Проведено сравнение расчетных и экспериментальных данных: температуры поверхности и радиуса об-

ласти расплава. Получено хорошее соответствие в случае учета испарения вещества. Дальнейшее развитие модели предполагает решение уравнений для термотоков, определение граничных условий для паров вольфрама с использованием молекулярных моделей, и в итоге решение системы уравнений газовой динамики в самосогласованном электрическом поле. Это позволит описать движение расплава под воздействием термотоков, процесс ионизации паров, конденсацию газа в капли, а так же неустойчивости, при которых жидкость будет срывать с поверхности.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carpentier-Chouchana S., Hirai T., Escourbiac F., Durocher A., Fedosov A., Ferrand L., Firdaouss M., Kocan M., Kukushkin A.S., Jokinen T., Komarov V., Lehnen M., Merola M., Mitteau R., Pitts R.A., Stangeby P.C., Sugihara M.*, “Status of the ITER full-tungsten divertor shaping and heat load distribution analysis” *Physica Scripta*, Т. 159, 014002, 2014.
2. *Shi Y., Miloshevsky G., Hassanein A.*, “Boiling induced macroscopic erosion of plasma facing components in fusion” *Fusion Engineering and Design*, Т. 86(2–3), p. 155–162, 2011.
3. *Huber A., Arakcheev A., Sergienko G., Steudel I., Wirtz M., Burdakov A.V., Coenen J.W., Kreter A., Linke J., Mertens Ph., Philipps V., Pintsuk G., Reinhart M., Samm U., Shoshin A., Schweer B., Unterberg B., Zlobinski M.*, “Investigation of the impact of transient heat loads applied by laser ir-

- radiation on ITER-grade tungsten” *Physica Scripta*, Т. 159, 014005, 2014.
4. *Safronov V.M., Arkhipov N.I., Klimov N.S., Landman I.S., Petrov D.S., Podkovyrov V.L., Poznyak I.M., Toporkov D.A., Zhitlukhin A.M.*, “Investigation of erosion mechanisms and erosion products in tungsten targets exposed to plasma heat loads relevant to ELMS and mitigated disruptions in ITER” *Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics* (14), pp. 52–54, 2008.
 5. *Huber A., Burdakov A., Zlobinski M., Wirtz M., Coenen J. W., Linke J., Mertens Ph, Philipps V., Pintsuk G., Schweer B., Sergienko G., Shoshin A., Samm U., Unterberg B.*, “Investigation of the impact on tungsten of transient heat loads induced by laser irradiation, electron beams and plasma guns” *Fusion Science and Technology*, 63 (1T), pp. 197–200, 2013.
 6. *Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunev Y., Vasilyev A.* Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads, *AIP Conference Proceedings*, 1771, 060004 (2016).
 7. *Apushkinskaya D.* Free boundary problems: Regularity properties near the fixed boundary, *Lecture Notes in Mathematics*, 2218. Springer (2018).
 8. *Trunev Yu.A., Arakcheev A.S., Burdakov A.V., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Mekler K.I., Popov V.A., Shoshin A.A., Skovorodin D.I., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N.*, Heating of tungsten target by intense pulse electron beam, *AIP Conference Proceedings* 1771, 060016 (2016).
 9. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача // М.: Едиториал УРСС, 2003, 784 с.
 10. *Яненко Н.Н.*, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики // Новосибирск, 1967. 196 с.
 11. *Davis J.W., Smith P.D.*, ITER material properties handbook, *J. Nucl. Mater.* 233 (1996) 1593–1596.
 12. *Ho C.Y., Powell R.W., Liley P.E.* Thermal conductivity of elements, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 1, p. 279 (1972).
 13. *Талуц С.Г.* Экспериментальное исследование теплофизических свойств переходных металлов и сплавов на основе железа при высоких температурах: Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.04.14, Екатеринбург: 2001. 38 с.
 14. *Arakcheev A.S., Apushkinskaya D.E., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Lazareva G.G., Maksimova A.G., Popov V.A., Snytnikov A.V., Trunev Yu.A., Vasilyev A.A., Vyacheslavov L.N.* Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam, *Fusion Engineering and Design*, vol. 132, p. 13–17 (2018).
 15. *Vasilyev A.A., Arakcheev A.S., Bataev I.A., Bataev V.A., Burdakov A.V., Kandaurov I.V., Kasatov A.A., Kurkuchekov V.V., Mekler K.I., Popov V.A., Shoshin A.A., Skovorodin D.I., Trunev Yu.A., Vyacheslavov L.N.*, In-situ imaging of tungsten surface modification under ITER-like transient heat loads, *Nucl. Matter Energy* 12 (2017) 553–558.

MATHEMATICAL MODELING OF TUNGSTEN MELTING IN EXPOSURE TO PULSED ELECTRON BEAM

Corresponding Member of the RAS **G. G. Lazareva^a, A. S. Arakcheev^b, and V.A. Popov^b**

^a Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation

^b Budker Institute of Nuclear Physics of Siberian Branch Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

The paper is devoted to mathematical modeling of the melting process in a sample under the influence of a pulsed thermal load based on the solution of the two-phase Stefan problem. The free boundary is ignored during the calculation, since the numerical model is based on the Samarsky approach. The calculation in axially symmetric geometry allowed us to show that about a quarter of the incident energy is consumed in the center of the melt region. This is five times more than estimates based on the solution of the one-dimensional heat equation give. Considering the evaporation of the substance a good correspondence between the calculated and experimental temperatures of the cooling surface and the rate of narrowing of the melt region is obtained. The results of mathematical modeling confirmed the existence of an evaporation cooling mode when tungsten is heated by an electron beam significantly above the melting threshold.

Keywords: mathematical modeling, tungsten evaporation, Stefan’s problem

ПОПРАВКА

УДК 517.71

**ПОПРАВКА К СТАТЬЕ “МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ,
СВЯЗАННЫЕ С ОПИСАНИЕМ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ”,
2021, том 501, с. 57–61**

Поступило 13.02.2023 г.
После доработки 13.02.2023 г.
Принято к публикации 13.02.2023 г.

DOI: 10.31857/S2686954323330019, **EDN:** PJDING

К статье В. В. Козлова, О. Г. Смолянова “Математические структуры, связанные с описанием квантовых состояний, опубликованной в 2021, том 501, с. 57–61, [http \(DOI: 10.31857/S2686954321060114\)](http://doi.org/10.31857/S2686954321060114). Добавлен раздел “Источник финансирования” со следующей информацией: “Работа выполнена при финансовой поддержке Российской Федерации в лице Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2020-788)”.