



ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА,
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 518, 2024

МАТЕМАТИКА

Об устранимых особенностях гармонических функций
на стратифицированном множестве

Н. С. Даирбеков, О. М. Пенкин, Д. В. Савастеев 5

О гиперэллиптических кривых нечетной степени
и рода g с 6 точками кручения порядка $2g + 1$

Г. В. Федоров 10

Об условии разрушения типа Дини для решений нелинейных
дифференциальных неравенств высокого порядка

А. А. Коньков, А. Е. Шишков 18

О таутохронных движениях

А. Г. Петров 22

Численно-аналитическое решение уравнений Брента

И. Е. Капорин 29

Достаточное условие полиномиальной разрешимости
случайных 3-КНФ формул

С. И. Уваров 35

Преодоление многоногим роботом широких препятствий

Ю. Ф. Голубев 40

Новые случаи интегрируемых консервативных и диссипативных
динамических систем девятого порядка

М. В. Шамолин 51

Множество банаховых пределов
и его дискретное и непрерывное подмножества

Н. Н. Авдеев, Р. Е. Зволинский, Е. М. Семенов, А. С. Усачев 61

О точности вычисления инвариантов внутри центрированных
волн разрежения и в областях их влияния

В. В. Остапенко, Е. И. Полунина, Н. А. Хандеева 65

Компактификация пространств мер и псевдокомпактность

В. И. Богачев 75

Новая спектральная мера сложности
и её возможности по обнаружению сигналов в шуме

А. А. Галяев, В. Г. Бабилов, П. В. Лысенко, Л. М. Берлин

80

Дополнение к статье “Новая спектральная мера сложности
и её возможности по обнаружению сигналов в шуме”

А. А. Галяев, В. Г. Бабилов, П. В. Лысенко, Л. М. Берлин

89

CONTENTS

Volume 518, 2024

MATHEMATICS

On removable singularities of harmonic functions
on a stratified set

N. S. Dairbekov, O. M. Penkin, D. V. Savasteev 5

On hyperelliptic curves of odd degree and genus g
with 6 torsion points of order $2g + 1$

G. V. Fedorov 10

On a Dini type blow-up condition for solutions
of nonlinear higher order differential inequalities

A. A. Kon'kov, A. E. Shishkov 18

About tautochronic movements

A. G. Petrov 22

Semi-analytical solution of Brent equations

I. E. Kaporin 29

Sufficient condition for polynomial solvability
of random 3-CNF formulas

S. I. Uvarov 35

Getting over wide obstacles by the multi-legged robot

Yu. F. Golubev 40

New cases of integrable ninth-order conservative
and dissipative dynamical systems

M. V. Shamolin 51

The set of Banach limits and its discrete
and continuous subsets

N. N. Avdeev, R. E. Zvolinskii, E. M. Semenov, A. S. Usachev 61

On the accuracy of calculating invariants in centered
rarefaction waves and in their influence area

V. V. Ostapenko, E. I. Polunina, N. A. Khandeeva 65

Compactification of spaces of measures and pseudocompactness

V. I. Bogachev 75

A new spectral measure of complexity and its capabilities
for detecting signals in noise

A. A. Galyaev, V. G. Babikov, P. V. Lysenko, L. M. Berlin

80

Addition to the article “A new spectral measure of complexity
and its capabilities for detecting signals in noise”

A. A. Galyaev, V. G. Babikov, P. V. Lysenko, L. M. Berlin

89

УДК 517.596.2

ОБ УСТРАНИМЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

© 2024 г. Н. С. Даирбеков^{1, 2, *}, О. М. Пенкин^{1, 3, **}, Д. В. Савастеев^{3, ***}

Представлено академиком РАН И. А. Таймановым

Поступило 26.05.2024 г.

После доработки 21.06.2024 г.

Принято к публикации 05.07.2024 г.

Рассматриваются множества устранимые для гармонических функций на стратифицированном множестве с плоскими внутренними стратами. Установлено, что относительно замкнутые множества конечной $(n - 2)$ -меры Хаусдорфа являются устранимыми для ограниченных гармонических функций на n -мерном стратифицированном множестве, удовлетворяющему условию “усиленной прочности”.

Ключевые слова: стратифицированная мера, мягкий лапласиан, среднее значение, неравенство Харнака

DOI: 10.31857/S2686954324040015, EDN: YZPYUE

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных на стратифицированных множествах является относительно новым направлением современной математики. Систематические исследования дифференциальных уравнений на геометрических графах, представляющих собой одномерные стратифицированные множества, были начаты в конце 80-х годов и в настоящее время им посвящена огромная литература (см., например, [1, 2]). Уравнения в частных производных на стратифицированных множествах более высокой размерности изучены гораздо хуже. Началом исследований в этой области можно считать работу Р. Куранта [3], в которой рассмотрены колебания мембраны с приклеенным многоугольником из струн. Однако систематические исследования начались значительно позже и прогресс был достигнут благодаря введению понятия стратифицированной меры и дифференциальных операторов, связанных с ней (см. [1, 4]).

Многие факты теории эллиптических уравнений получили свои аналоги для уравнений на стратифицированных множествах. Среди них лемма о нормальной производной [1], принцип максимума [5, 6, 7], оценки нормы Гельдера [8], неравенство Харнака [9], теорема о среднем [10] и т.д.

Описание устранимых особенностей решений дифференциальных уравнений с частными производными в заданном функциональном классе традиционно привлекает внимание большого числа исследователей. Классическим результатом в этом направлении является теорема Карлесона об устранимости относительно замкнутого множества нулевой 2-емкости, в частности, относительно замкнутого множества конечной $(n - 2)$ -меры Хаусдорфа, для ограниченных гармонических функций на области евклидова пространства \mathbb{R}^n (см., например, [11]).

В данной работе приводится аналог этой теоремы для ограниченных гармонических функций в смысле “мягкого лапласиана” на стратифицированном множестве с плоскими внутренними стратами.

Основной результат утверждает, что относительно замкнутое множество конечной $(n - 2)$ -меры Хаусдорфа является устранимым для ограниченных гармонических функций на n -мерном стратифицированном множестве, удовлетворяющему условию “усиленной прочности”. Для $n = 2$ ранее в работе [12] была установлена устрани-

¹ Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

² Университет SDU, Каскелен, Казахстан

³ Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

* E-mail: nurlan.dairbekov@gmail.com

** E-mail: o.m.penkin@gmail.com

*** E-mail: savasteev@gmail.com

мость 0-мерных страт (вершин) для гармонических функций на 2-мерном стратифицированном множестве.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Под *стратифицированным множеством* Ω мы понимаем связанное подмножество эвклидова пространства \mathbb{R}^N , состоящее из конечного числа попарно непересекающихся связных подмножеств (без края), называемых стратами. Множество всех страт обозначим через Σ , а сами страты через σ_{kj} :

$$\Omega = \bigcup_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \sigma_{kj}.$$

Первый индекс показывает размерность страты, а второй является номером страты данной размерности. Предполагаются выполненными следующие требования на взаимные примыкания страт:

- замыкание $\bar{\sigma}_{kj}$ каждой страты компактно, а ее граница $\partial\sigma_{kj} = \bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ является объединением некоторых страт в Σ ;
- для любых двух страт $\sigma_{kj}, \sigma_{mi} \in \Sigma$ пересечение замыканий $\bar{\sigma}_{kj} \cap \bar{\sigma}_{mi}$ либо пусто, либо состоит из некоторых страт набора Σ .

Всюду далее соотношение $\sigma_{kj} \prec \sigma_{mi}$ означает $\sigma_{kj} \subset \partial\sigma_{mi}$. В этом случае мы говорим, что страты *примыкают* друг к другу.

Множество Ω , как подмножество \mathbb{R}^N , наследует его стандартную топологию; все топологические понятия, встречающиеся далее, предполагаются отнесенными к данной топологии.

Множество Ω предполагается представленным в виде объединения $\Omega^\circ \cup \partial\Omega^\circ$ (“*внутренности*” и “*границы*”), в котором Ω° — связанное открытое подмножество Ω , состоящее из некоторых страт из Σ и удовлетворяющее равенству $\Omega^\circ = \Omega$, а оставшаяся часть $\partial\Omega^\circ = \Omega \setminus \Omega^\circ$ называется тогда топологической границей множества Ω° .

Определения стратифицированного множества и относящихся к нему понятий в более общей ситуации можно найти в [1]. Эти определения, в значительной степени, инспирированы работой [13].

В данной статье *все внутренние страты предполагаются плоскими* в следующем смысле: каждая страта $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ является подобластью

некоторого k -мерного аффинного подпространства \mathbb{R}^N .

Множество $\omega \subset \Omega$ назовем μ -измеримым, если каждое пересечение $\sigma_{kj} \cap \omega$ измеримо в смысле k -мерной меры Лебега на σ_{kj} . Нетрудно заметить, что множество \mathcal{M}_Ω всех μ -измеримых множеств является σ -алгеброй на Ω . *Стратифицированная мера* μ_Ω на Ω (точнее на \mathcal{M}_Ω) определяется формулой:

$$\mu_\Omega(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \mu^k(\omega_{kj}),$$

в которой $\mu^k(\omega_{kj})$ обозначает k -мерную меру Лебега множества $\omega_{kj} = \omega \cap \sigma_{kj}$. Измеримость функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ определяется стандартно: f является μ -измеримой, если лебеговы множества $L_f(c) = \{X \in \Omega : f(X) \leq c\}$ принадлежат \mathcal{M}_Ω при всех $c \in \mathbb{R}$. Нетрудно заметить, что интеграл Лебега μ -измеримой функции по μ -измеримому множеству ω сводится к сумме

$$\int_\omega f d\mu_\Omega = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \int_{\omega_{kj}} f d\mu^k.$$

Мы часто будем опускать Ω в обозначении μ_Ω , надеясь, что стратифицированное множество однозначно определяется контекстом.

Обозначение $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$ далее применяется к пространству касательных векторных полей F на Ω° , сужения $\vec{F}|_{\sigma_{ki}}$ которых на каждую страту $\sigma_{ki} \subset \Omega^\circ$ принадлежат пространству $C^1(\sigma_{kj})$.

Дивергенция векторного поля $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega)$ в точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ задается формулой:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$

где суммирование проводится по всем $(k+1)$ -мерным стратам σ_{k+li} , примыкающим к σ_{kj} . Здесь ∇_k в правой части обозначает оператор обычной, k -мерной, дивергенции, примененный к сужению $\vec{F}|_{\sigma_{kj}}$ на страту σ_{kj} , \vec{v}_i — единичная внутренняя нормаль к σ_{kj} в σ_{k+li} в точке X , а $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i)$ — предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \in \sigma_{k+li}$, стремящемся к X изнутри страты $\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}$.

Так определенная дивергенция является точным аналогом классической. Можно показать, что, как и в обычной ситуации, дивергенция $\nabla \cdot \vec{F}(X)$, является плотностью потока векторного поля \vec{F} в точке X , отнесенной к стратифицированной мере.

Для достаточно гладкой скалярной функции u градиент ∇u является касательным векторным полем (в этом случае ∇u представляет собой просто набор градиентов сужений u на страты), поэтому естественно определить лапласиан на стратифицированном множестве посредством формулы $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$. Так определенный лапласиан часто называют “жестким”. В данной работе мы рассматриваем только так называемый “мягкий” лапласиан, определяемый следующим образом.

Страта σ_{kj} называется свободной, если она не примыкает ни к какой страте большей размерности. Мягкий лапласиан функции u на Ω° определяется равенством

$$\tilde{\Delta}u = \nabla \cdot (p\nabla u),$$

где $p = 1$ на свободных стратах, $p = 0$ на остальных стратах.

Явное выражение мягкого лапласиана в точках свободных страт совпадает с обычным лапласианом.

Если же страта σ_{kj} не является свободной, но существуют свободные страты $\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}$, то тогда в точке $X \in \sigma_{kj}$ выражение для мягкого лапласиана имеет следующий вид:

$$\tilde{\Delta}u(X) = \sum_{\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}} \nabla u(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$

в котором суммирование распространяется на все свободные страты $\sigma_{k+li} \succ \sigma_{kj}$.

Наконец, если страта не является свободной и не примыкает ни к каким свободным стратам на единицу большей размерности, то на такой страте $\tilde{\Delta}u = 0$ автоматически.

Определение 1. Для открытого множества $U \subset \Omega^\circ$ обозначим через $\tilde{C}_{loc}^2(U)$ множество функций $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- u непрерывна на U ,
- для каждой свободной страты σ_{ni} сужение $u|_{U \cap \sigma_{ni}}$ дважды непрерывно дифференцируемо, а градиент ∇u этого сужения имеет непрерывное продолжение в каждую точку $X \in U \cap \sigma_{n-1j}$ любой внутренней страты σ_{n-1j} , примыкающей к σ_{ni} .

Функция $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ называется гармонической на U , если $u \in \tilde{C}_{loc}^2(U)$ и u удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Delta}u(X) = 0$$

для всех $X \in U$.

Как отмечалось во введении, для эллиптических уравнений на стратифицированных множествах получены аналоги многих результатов из теории таких уравнений на областях эвклидова пространства. Для результатов настоящей работы ключевую роль играют аналоги теоремы о среднем и неравенства Харнака.

Шар $B_r(X_0) = \{X \in \Omega : d(X, X_0) < r\}$, относительно внутренней метрики $d(\cdot, \cdot)$ на Ω , называется допустимым, или, подробнее, открытым шаром допустимого радиуса $r > 0$ с центром в точке $X_0 \in \Omega^\circ$, если r меньше расстояния от X_0 до всех страт, замыкания которых не содержат X_0 . В этом случае множество $S_r(X_0) = \{X \in \Omega : d(X, X_0) = r\}$ называется допустимой сферой. Допустимые шары и сферы наследуют естественную стратификацию из Ω . Например, для допустимой сферы S все непустые пересечения $\sigma_{kj} \cap S$, $\sigma_{kj} \in \Sigma$, являются ее $(k - 1)$ -мерными стратами. Стратифицированная мера μ_S на стратифицированной сфере S определяется также, как на произвольном стратифицированном множестве.

Пусть Ω — стратифицированное множество, у которого все свободные страты имеют одну и ту же размерность n . В этом случае $p = 1$ на всех n -мерных стратах и обращается в нуль на всех других стратах из Σ .

Для $X_0 \in \Omega^\circ$ и допустимой сферы $S_r(X_0)$ рассмотрим среднее значение по сфере:

$$M[S_r(X_0)]u = \frac{1}{|S_r(X_0)|_p} \int_{S_r(X_0)} pud\mu_S,$$

где $|S_r(X_0)|_p = \int_{S_r(X_0)} pd\mu_S$.

Теорема А (о среднем [10]). Пусть Ω — стратифицированное множество, у которого все свободные страты имеют одну и ту же размерность, u — гармоническая функция на Ω° , $X_0 \in \Omega^\circ$ и $S_r(X_0)$ — допустимая сфера. Тогда

$$M[S_r(X_0)]u = u(X_0).$$

Замечание 1. Аналогичное утверждение верно, если вместо средних по допустимым сферам рассмотреть средние по допустимым шарам.

Следующее утверждение является точным аналогом классического неравенства Харнака.

Теорема В ([9]). Пусть Ω — стратифицированное множество, а K — произвольный компакт в Ω° . Тогда для каждой неотрицательной гармонической в Ω° функции u выполняется неравенство

$$\sup_{X \in K} u(X) \leq C \inf_{X \in K} u(X)$$

с константой $C = C(K, \Omega^\circ)$, не зависящей от u .

3. ТЕОРЕМА ОБ УСТРАНИМОЙ ОСОБЕННОСТИ

Для стратифицированного множества Ω обозначим через Σ^k объединение всех внутренних страт размерности k и обозначим через Σ_k объединение всех внутренних страт размерности, не превосходящей k :

$$\Sigma^k = \bigcup_j \sigma_{kj}, \quad \Sigma_k = \bigcup_{l=0}^k \Sigma^l.$$

Назовем Ω *усиленно прочным* (размерности n), если все свободные страты имеют одну и ту же размерность n и для любой точки $X \in \Sigma_{n-2}$ существует такой допустимый радиус $r > 0$, что множество $B_r(X) \setminus \Sigma_{n-2}$ связно.

Следующая теорема является основным результатом данной статьи.

Теорема 1 (об устранимой особенности). Пусть Ω — усиленно прочное стратифицированное множество размерности n , $S \subset \Omega^\circ$ — относительно замкнутое подмножество конечной $(n-2)$ -меры Хаусдорфа и $u : \Omega^\circ \setminus S \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная гармоническая функция. Тогда и можно продолжить до гармонической функции на всем Ω° .

Условие усиленной прочности существенно. Рассмотрим, для примера, стратифицированное множество Ω составленное из двух плоских треугольников, имеющих одну общую вершину σ_{01} и не имеющих других общих точек (см. рис. 1). Положим $\partial\Omega^\circ = \emptyset$, т. е., $\Omega^\circ = \Omega$. Функция u , равная 0 на одном треугольнике и 1 на другом, является гармонической на $\Omega \setminus \sigma_{01}$, но не имеет продолжения до гармонической функции на Ω .

Теорема 1 является прямым следствием следующих двух лемм.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 функцию u можно продолжить до ограниченной гармонической функции на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$.

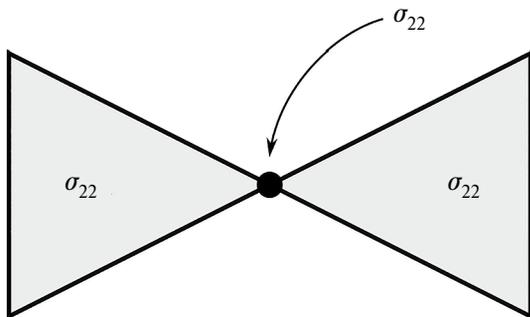


Рис. 1.

Лемма 2. Пусть Ω — усиленно прочное стратифицированное множество размерности n , а $u : \Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная гармоническая функция. Тогда и можно продолжить до гармонической функции на всем Ω° .

Для двумерных стратифицированных множеств утверждение леммы 2 было ранее установлено в [12].

Лемма 1 выводится из стандартной теоремы об устранимых особенностях для ограниченных гармонических функций на областях эвклидова пространства. Доказательство леммы 2 более сложно и опирается на вышеприведенные теоремы 1 и 2.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке МНВО РК (проект AP14871251).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М: Физматлит, 2005.
2. Kuchment P. Quantum graphs: I. Some basic structures. // Waves Random Media. 2004. V. 14. P. 107–128.
3. Courant R. Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen. // Acta Math. 1926, V. 49. P. 1–68.
4. Penkin O.M. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 219). Marcel Dekker. 2001. P. 183–191.
5. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированном множестве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 8. С. 1107–1113.
6. Мироненко Ф.Д. Оценки максимума для решений эллиптического и параболического уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка” // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64. № 6. С. 1263–1278.
7. Мироненко Ф.Д., Назаров А.И. Локальная оценка максимума типа Александрова–Бакельмана для решений эллиптических уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка” // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 50, Зап. научн. сем. ПОМИ, 519, ПОМИ, СПб. 2022. С. 105–113.
8. Медведев К.М., Назаров А.И. Оценка нормы Гельдера для решения дивергентного эллиптического уравнения на стратифицированном множестве // Алгебра и анализ. 2024. Т. 36. № 1. С. 170–194.
9. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Савастеев Д.В. Неравенство Харнака для гармонических функций

- на стратифицированном множестве // Сиб. матем. журн. 2023. Т. 64. № 5. С. 971–981.
10. *Ощепкова С.Н., Пенкин О.М.* Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 3. С. 417–426.
11. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. М: Мир, 1971.
12. *Савастеев Д.В.* Теорема об устранимой особенности для гармонической функции на двумерном стратифицированном множестве // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 1. С. 108–116.
13. *Pham F.* Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur, 1967.

ON REMOVABLE SINGULARITIES OF HARMONIC FUNCTIONS ON A STRATIFIED SET

N. S. Dairbekov^{a, b}, O. M. Penkin^{a, c}, D. V. Savasteev^c

Presented by Academician of the RAS I. A. Taimanov

^a*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, the Republic of Kazakhstan*

^b*SDU University, Kaskelen, the Republic of Kazakhstan*

^c*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

We consider sets removable for bounded harmonic functions on a stratified set with flat interior strata. We establish that relatively closed sets of finite Hausdorff $(n - 2)$ -measure are removable for bounded harmonic functions on an n -dimensional stratified set satisfying the “strong sturdiness” condition.

Keywords: stratified measure, soft Laplacian, mean value, Harnack inequality

УДК 511.6

О ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ И РОДА $g \leq 5$ С 6 ТОЧКАМИ КРУЧЕНИЯ ПОРЯДКА $2g + 1$

© 2024 г. Г. В. Федоров^{1, *}

Представлено академиком РАН В. П. Платоновым

Поступило 10.03.2024 г.

После доработки 05.07.2024 г.

Принято к публикации 05.07.2024 г.

Пусть гиперэллиптическая кривая C рода g , определенная над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0, задана уравнением $y^2 = f(x)$, где многочлен $f(x) \in K[x]$ свободен от квадратов и имеет нечетную степень $2g + 1$. Кривая C содержит единственную “бесконечную” точку \mathcal{O} , которая является точкой Вейерштрасса. Существует классическое вложение $\mathcal{C}(K)$ в группу K -точек $J(K)$ якобиева многообразия J кривой C , отождествляющее точку \mathcal{O} с единичным элементом группы $J(K)$. При $2 \leq g \leq 5$ в статье явно найдены представители классов бирациональной эквивалентности таких гиперэллиптических кривых C с отмеченной единственной точкой на бесконечности \mathcal{O} , что множество $\mathcal{C}(K) \cap J(K)$ содержит не менее 6 точек кручения порядка $2g + 1$. Ранее было известно, что при $g = 2$ таких классов эквивалентности ровно 5, а при $g \geq 3$ была известна верхняя оценка, зависящая только от рода g . Мы улучшаем ранее известную верхнюю оценку почти в 36 раз.

Ключевые слова: гиперэллиптическая кривая, якобиево многообразие, точки кручения, метод Фли-на-Лепревоста

DOI: 10.31857/S2686954324040028, EDN: YZPDFK

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 и K^* — мультипликативная группа поля K . Пусть $f(x) \in K[x]$ — многочлен степени $2g + 1$, не имеющий кратных корней. Гладкой плоской аффинной кривой $C_f^\circ : y^2 = f(x)$ соответствует неособая проективная кривая C_f , являющаяся гиперэллиптической кривой рода g с единственной точкой “на бесконечности”, которую обозначим ∞ . Множество K -точек кривой C_f имеет вид $C_f(K) = \{(x_0, y_0) \in K^2 : y_0^2 = f(x_0)\} \cup \{\infty\}$. Точки вида $(x_j, 0) \in C_f(K)$ и ∞ являются точками Вейерштрасса кривой C_f , где x_j — нули многочлена $f(x)$. Отмеченной гиперэллиптической кривой нечетной степени и рода g , определенной над полем K , будем называть пару (C_f, ∞) .

Известно (см. [1]), что для определенной над полем K отмеченной гиперэллиптической кривой (C, \mathcal{O}) нечетной степени и рода g найдется многочлен $f(x) \in K[x]$ степени $2g + 1$, не имеющий кратных корней, для которого (C, \mathcal{O}) бирационально эквивалентна (C_f, ∞) над K .

Пусть (C, \mathcal{O}) — определенная над полем K отмеченная гиперэллиптическая кривая нечетной степени и рода g . Рассмотрим классическое отображение Альбанезе, сопоставляющее каждой точке $P \in \mathcal{C}(K)$ класс дивизора $P - \mathcal{O}$ в группе классов дивизоров степени ноль $\Delta_K^\circ(C)$ кривой C . Над алгебраически замкнутым полем K характеристики 0 группу $\Delta_K^\circ(C)$ можно отождествить с группой K -точек многообразия Якоби (якобиана) $J(K)$ кривой C . Поэтому существует вложение $\mathcal{C} \rightarrow J$, при котором мы можем рассматривать K -точки кривой C как их образы в $J(K)$, и, в частности, будем говорить, что точка $P \in \mathcal{C}(K)$ является точкой кручения порядка n в якобиане J , если соответствующий класс дивизора имеет порядок n в якобиане J .

В [2] доказано, что если (C, \mathcal{O}) — определенная над полем K отмеченная гиперэллиптическая кривая нечетной степени и рода g , то не существует точек кручения $P \in \mathcal{C}(K)$ порядка n для $3 \leq n \leq 2g$. Если точка $P \in \mathcal{C}(K)$ является точкой кручения порядка $n \geq 2g + 1$, то точка $\iota P \neq P$ также является точкой кручения порядка n , где ι — гиперэллиптическая инволюция.

В недавней статье [3] рассмотрена задача об описании множества пар (C, \mathcal{O}) таких, что (C, \mathcal{O}) — определенная над полем K отмеченная гипер-

¹ Научно-технологический университет “Сириус”, пгт Сириус, Краснодарский край, Россия

*E-mail: fedorov.gv@talantiuspeh.ru

эллиптическая кривая нечетной степени и рода g , и существует $d = 2, 4, 6$ или более точек кручения $P \in \mathcal{C}(K)$ порядка $2g + 1$ в якобиане J . Множество пар $(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ можно рассматривать с точностью до бирациональной эквивалентности, определенной над полем K . При $g = 2$ эта задача решена в [4], а именно при $d = 2, 4, 6$ описано множество классов бирациональной эквивалентности пар $(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ путем сопоставления их точкам на определенной поверхности.

При $g \geq 2$ обозначим S_g множество классов бирациональной эквивалентности пар $(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ таких, что определенная над полем K отмеченная гиперэллиптическая кривая $(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ содержит не менее 6 K -точек кручения порядка $2g + 1$ в ее якобиане J . В [3] доказано, что $\#S_g \leq 9(4g - 1) \binom{2g}{g}$.

Цель этой работы — ответить на вопрос из статьи [3] о явном виде представителей классов бирациональной эквивалентности, входящих в множество S_g , или доказательстве, что множество S_g пусто. В теоремах 1-4 найдены соответствующие результаты для $2 \leq g \leq 5$. Отдельно отметим теорему 3, в которой доказано, что $\#S_4 = 1$, и явно выписан представитель единственного класса бирациональной эквивалентности. Этот результат очень неожиданный, поскольку для нахождения соответствующей отмеченной гиперэллиптической кривой необходимо было решить систему полиномиальных уравнений, в которой количество неизвестных больше, чем количество переменных (см. предложение 2). При $g \geq 6$ мы высказываем предположение, что множество S_g пусто. В теореме 5 мы несколько улучшаем результат [3] об оценке $\#S_g$, но все же мы пока далеки от указанного предположения.

Найденные результаты в теоремах 1-4 можно отнести к теоремам о конечности классов определенных кривых с явным описанием представителей этих классов (см. [5], [6], [7], [8]). Развитые в этой статье исследования являются продолжением [3], [9] с применением метода Флина-Левроста (см. [10], [11], [12]).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При $g = 2$ в [4] выделены 5 классов бирациональной эквивалентности пар $(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, удовлетворяющих указанным выше условиям. В теореме 1 мы еще раз независимо доказываем этот результат и явно находим представителей всех 5 классов.

Теорема 1. Пусть $S_2 = \{(\mathcal{C}_{2,j}, \infty) : y^2 = f_{2,j}(x), j = 1, \dots, 5\}$ — множество из пяти отмеченных гиперэллиптических кривых нечетной степени и рода 2, где

$$f_{2,1}(x) = 1 - 4x^5, \quad b_1 = -\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4},$$

$$f_{2,2}(x) = 4x^5(2b_2 - 1)(2b_2^2 - 6b_2 + 5) + 20x^4(b_2 + 1)(2b_2^2 - 6b_2 + 5) + 40x^3(b_2 + 1)(2b_2^2 - 6b_2 + 5) + 4x^2(16b_2^3 - 35b_2^2 + b_2 + 37) + 12x(2b_2^3 - 5b_2^2 + 2b_2 + 4) + 9,$$

$$b_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{5}}}{2},$$

$$f_{2,3}(x) = -4x^5(79b_3^3 - 201b_3^2 + 144b_3 - 170) - 100x^4(7b_3^3 - 18b_3^2 + 13b_3 - 15) - 40x^3(14b_3^3 - 37b_3^2 + 28b_3 - 31) - 20x^2(9b_3^3 - 25b_3^2 + 21b_3 - 23) - 20x(b_3^3 - 3b_3^2 + 3b_3 - 4) + 5,$$

$$b_3 = -\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{2}\sqrt{1 + 3\sqrt{5}}}{4},$$

$$f_{2,4}(x) = -8x^5(\sqrt{15}i + \sqrt{5}) - 25x^4(-\sqrt{3}i + \sqrt{15}i + 3\sqrt{5} + 1) + 20x^3(5\sqrt{3}i - 7\sqrt{5}) + 5x^2(5\sqrt{15}i + 21\sqrt{3}i + 21 - 15\sqrt{5}) + 10x(\sqrt{15}i + 3\sqrt{3}i + 9 - \sqrt{5}) + 20,$$

$$b_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2},$$

$$f_{2,5}(x) = -4x^5(-3\sqrt{3}i + \sqrt{15}i + \sqrt{5} - 7) - 5x^4(-7\sqrt{3}i + \sqrt{15}i - 3\sqrt{5} - 7) - 10x^3(-7\sqrt{3}i + \sqrt{15}i - 3\sqrt{5} - 7) - x^2(-55\sqrt{3}i + 9\sqrt{15}i - 19\sqrt{5} - 95) - 4x(-5\sqrt{3}i + \sqrt{15}i - \sqrt{5} - 15) + 16,$$

$$b_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

Тогда

- для каждого $j = 1, \dots, 5$ точки $P \in C_{2,j}$ такие, что $x(P) \in \{0, -1, -b_j\}$, являются точками кручения порядка 5 в якобиане $J_{2,j}(K)$ соответствующей кривой $(C_{2,j}, \infty)$;
- кривые $(C_{2,j}, \infty)$ попарно бирационально неэквивалентны над K ;
- если (C, \mathcal{O}) — определенная над полем K отмеченная гиперэллиптическая кривая нечетной степени и рода 2, содержащая не менее 6 точек кручения порядка 5 в ее якобиане J , то (C, \mathcal{O}) бирационально эквивалентна над K одной из кривых в S_2 .

В ходе доказательства теоремы 1 при $g = 2$ была найдена единственная с точностью до бирациональной эквивалентности пара (C, \mathcal{O}) , для которой кривая C является особой. В связи с этим, для формулировки следующего результата мы используем понятие обобщенного якобиана в терминологии [13], [14], [15].

Теорема 2. Пусть $(C_1, \infty) : y^2 = f_1(x)$ — кубическая эллиптическая кривая с отмеченной точкой на бесконечности, где $f_1(x) = 20x^3 + 25x^2 + 10x + 1$. Тогда

- две точки $P \in C_1(K)$ такие, что $x(P) = 0$, имеют порядок 3 на эллиптической кривой (C_1, ∞) ;
- четыре точки $P \in C_1(K)$ такие, что $x(P)$ — корень $5x^2 + 5x + 1 = 0$, являются точками кручения порядка 5 в обобщенном якобиане $J_{m_1}(K)$ кривой (C_1, ∞) , где $m_1 = \{P \in C_1 : x(P) = 0\}$;
- если (C, \mathcal{O}) — определенная над полем K кубическая эллиптическая кривая с отмеченной точкой Вейерштрасса \mathcal{O} , на которой существуют не менее 4 точек кручения порядка 5 в ее обобщенном якобиане J_m , где $m = \{P, \iota P\}$ для некоторой точки $P \in C$, $P \neq \mathcal{O}$, $P \neq \iota P$, порядка 3 на эллиптической кривой (C, \mathcal{O}) , то (C, \mathcal{O}) бирационально эквивалентна над K отмеченной эллиптической кривой нечетной степени (C_1, ∞) .

Следующие две теоремы отвечают на вопрос из статьи [3] о явном виде представителей классов бирациональной эквивалентности, входящих в множество S_g при $3 \leq g \leq 5$.

Теорема 3. Пусть $(C_4, \infty) : y^2 = f_4(x)$ — отмеченная гиперэллиптическая кривая нечетной степени и рода 4, где

$$\begin{aligned} f_4(x) = & x^9 - 3x^8(b-2) - 12x^7(b-3) - \\ & - 2x^6(10b-47) - 18x^5(b-8) - \\ & - 2x^4(4b-71) + 92x^3 + 2x^2(b+19) + \\ & + x(b+9) + \frac{2b+11}{12}, \end{aligned}$$

и b — любой из корней $x^2 - x + 1 = 0$. Тогда

• точки $P, \iota P \in C_4(K)$ такие, что $x(P) \in \{0, -1, -b\}$, являются точками кручения порядка 9 в якобиане $J_4(K)$ кривой (C_4, ∞) ;

• если (C, \mathcal{O}) — определенная над полем K отмеченная гиперэллиптическая кривая нечетной степени и рода 4, содержащая не менее 6 точек кручения порядка 9 в ее якобиане J , то (C, \mathcal{O}) бирационально эквивалентна над K кривой (C_4, ∞) .

Теорема 4. При $g = 3$ и $g = 5$ не существует определенных над полем K отмеченных гиперэллиптических кривых (C_g, ∞) нечетной степени и рода g , содержащих 6 точек кручения порядка $2g + 1$ в соответствующем якобиане $J_g(K)$.

Доказательство теорем 1-4 опирается на алгоритмический подход, который мы описываем в §4, а также на символьные компьютерные вычисления, реализованные на языке программирования Python с применением системы компьютерной алгебры SymPy и выполненные на персональном компьютере. При $g \geq 6$ в связи с большим объемом вычислений для получения подобных результатов необходимы более серьезные компьютерные мощности.

3. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 и $g \geq 2$. Пусть определенная над полем K отмеченная гиперэллиптическая кривая (C, \mathcal{O}) нечетной степени и рода g содержит три пары $(P_j, \iota P_j)$, $j = 1, 2, 3$, точек кручения порядка $2g + 1$ в ее якобиане J . Без ограничения общности (см. [1]), можем считать, что $(C, \mathcal{O}) = (C_f, \infty)$ и $x(P_1) = 0$, $x(P_2) = -1$, $x(P_3) = -b$, где $b \in K^*$, $b \neq 1$.

По теореме 1 [4] существуют такие многочлены $v_1, v_2, v_3 \in K[x]$, что $\deg v_j \leq g$, $j = 1, 2, 3$, и справедлива система уравнений

$$\begin{aligned} v_1^2(x) - f(x) &= -x^{2g+1}, \\ v_2^2(x) - f(x) &= -(x+1)^{2g+1}, \\ v_3^2(x) - f(x) &= -(x+b)^{2g+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Верно и обратное утверждение: если для некоторого значения параметра b существуют многочлены $v_1, v_2, v_3, f \in K[x]$, $\deg v_j \leq g$, $j = 1, 2, 3$, $\deg f = 2g + 1$, являющиеся решением системы (1), и многочлен f свободен от квадратов, то отмеченная гиперэллиптическая кривая $(C_f, \infty) : y^2 = f(x)$ нечетной степени и рода g содержит не менее 6 различных точек кручения порядка $2g + 1$ в якобиане J кривой (C, ∞) .

Обозначим K_{2n+1} — круговое поле степени $2n + 1$ и $M_{2g+1} \subset K_{2g+1} \subset K$ — множество всех корней степени $2g + 1$ из 1, где $g \geq 2$. Обозначим $M_{2g+1}^* = M_{2g+1} \setminus \{1\}$. Для некоторого множества M обозначим $\#M$ количество элементов в M . Для двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$ будем писать $A(x) \equiv B(x)$, если все соответствующие коэффициенты этих многочленов попарно совпадают.

Предложение 1. *Для некоторого фиксированного значения параметра $b \in K^*$, $b \neq 1$, существует решение системы (1) относительно неизвестных многочленов $v_1, v_2, v_3, f \in K[x]$ тогда и только тогда, когда для некоторого выбора $I, L \subset M_{2g+1}^*$, $\#I = \#L = g$, существуют значения параметров $\kappa, \tau \in K^*$ такие, что соотношение*

$$\kappa\tau\Phi(1+t) + \bar{\Phi}(1+t) = \kappa\Psi(1+bt) + \tau b\bar{\Psi}(1+bt) \quad (2)$$

справедливо для любого $t \in K$, где многочлены $\Phi(z), \bar{\Phi}(z), \Psi(z), \bar{\Psi}(z) \in K_{2g+1}[z]$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \prod_{\varepsilon \in I} (z - \varepsilon), & \bar{\Phi}(z) &= \frac{z^{2g+1} - 1}{(z-1)\Phi(z)}, \\ \Psi(z) &= \prod_{\varepsilon \in L} (z - \varepsilon), & \bar{\Psi}(z) &= \frac{z^{2g+1} - 1}{(z-1)\Psi(z)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Докажем необходимость. Исключим из системы (1) многочлен f , тогда

$$\begin{aligned} v_1^2 - v_2^2 &= (x+1)^{2g+1} - x^{2g+1}, \\ v_1^2 - v_3^2 &= (x+b)^{2g+1} - x^{2g+1}. \end{aligned}$$

Первое и второе уравнение разделим на x^{2g+1} и сделаем замену $t = 1/x$, при которой $v_j(x)/x^g = u_j(t) \in K[t]$, $j = 1, 2, 3$. Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} u_1^2(t) - u_2^2(t) &= \frac{1}{t} \left((1+t)^{2g+1} - 1 \right), \\ u_1^2(t) - u_3^2(t) &= \frac{1}{t} \left((1+bt)^{2g+1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В правых частях стоят многочлены от t степени $2g$, поэтому степени многочленов $u_1(t) \pm u_2(t)$ и $u_1(t) \pm u_3(t)$ равны g . Выберем $I, L \subset M_{2g+1}^*$, $\#I = \#L = g$, и $\mu, \nu \in K^*$ так, что

$$\begin{aligned} 2u_1(t) &= \frac{1}{\mu} \bar{\Phi}(1+t) + \mu\Phi(1+t), \\ 2u_2(t) &= \frac{1}{\mu} \bar{\Phi}(1+t) - \mu\Phi(1+t), \\ 2u_1(t) &= \frac{b}{\nu} \bar{\Psi}(1+bt) + \nu\Psi(1+bt), \\ 2u_3(t) &= \frac{b}{\nu} \bar{\Psi}(1+bt) - \nu\Psi(1+bt), \end{aligned} \quad (5)$$

где многочлены $\Phi(z), \bar{\Phi}(z), \Psi(z), \bar{\Psi}(z) \in K_{2g+1}[z]$ определены как в (3). Приравнявая правые части первого и третьего равенств, получаем следующее условие

$$\mu\Phi(1+t) + \frac{1}{\mu} \bar{\Phi}(1+t) = \nu\Psi(1+bt) + \frac{b}{\nu} \bar{\Psi}(1+bt), \quad (6)$$

которое должно быть справедливо для всех $t \in K$. Поскольку $\mu \neq 0$, то можно уравнение (6) умножить на μ и сделать замену $\kappa = \mu\nu$, $\tau = \mu/\nu$, тогда $\mu^2 = \kappa\tau$ и справедливо соотношение (2) для всех $t \in K$.

Докажем достаточность. По известным значениям параметров $\kappa, \tau \in K^*$, исходя из равенств $\kappa = \mu\nu$, $\tau = \mu/\nu$, значения $\mu, \nu \in K^*$ восстанавливаются однозначно с точностью до замены (μ, ν) на $(-\mu, -\nu)$, поэтому из (2) получаем (6). Если значения $b, \mu, \nu \in K^*$, $b \neq 1$, такие, что соотношение (6) справедливо для всех $t \in K$, то можно однозначно восстановить $u_1, u_2, u_3 \in K[t]$, далее $v_1, v_2, v_3 \in K[x]$, и, наконец, многочлен $f \in K[x]$. Замена (μ, ν) на $(-\mu, -\nu)$ меняет знак у многочленов u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 , а многочлен f при этом не меняется.

Пусть $g \geq 2$ и многочлены $\Phi(z), \bar{\Phi}(z), \Psi(z), \bar{\Psi}(z) \in K_{2g+1}[z]$ определены как в (3) для фиксированного выбора $I, L \subset M_{2g+1}^*$, $\#I = \#L = g$. Обозначим $\Phi_k = \Phi^{(k)}(1)$, $\bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}^{(k)}(1)$, $\Psi_k = \Psi^{(k)}(1)$, $\bar{\Psi}_k = \bar{\Psi}^{(k)}(1)$, при $k = 0, \dots, g$. Определим матрицу $A(b)$ следующим образом:

$$A(b) = \begin{pmatrix} \Phi_k & \bar{\Phi}_k & b^k \Psi_k & b^k \bar{\Psi}_k \\ & & 0 \leq k \leq g \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Лемма 1. *Пусть $b = b_0 \in K^*$, $b_0 \neq 1$. Если ранг матрицы $A(b_0)$ равен 2, то существует не более 2 значений (κ, τ) , для которых соотношение (2) справедливо для любого $t \in K$. Если ранг матрицы $A(b_0)$ равен 1, то таких значений (κ, τ) не существует.*

Доказательство. Элементы k -ой строки матрицы $A(b_0)$, умноженные на $t^k/k!$, в точности совпадают с соответствующими k -ыми слагаемыми разложения в ряд Маклорена многочленов

$$\Phi(1+t), \bar{\Phi}(1+t), \Psi(1+b_0t), \bar{\Psi}(1+b_0t). \quad (8)$$

Поэтому линейная зависимость каких-то столбцов матрицы $A(b_0)$ равносильна линейной зависимости соответствующих многочленов (8) с теми же коэффициентами. Следовательно, из

справедливости соотношения (2) при некоторых значениях $b = b_0, \kappa, \tau$ следует, что ранг матрицы $A(b_0)$ не превосходит 3.

Предположим, что ранг матрицы $A(b_0)$ равен 1. Значит, $\Phi(1+t) \equiv \overline{\Phi}(1+t)$ и $\Psi(1+b_0t) \equiv \overline{\Psi}(1+b_0t)$, но это противоречит соотношениям

$$\begin{aligned} \Phi(1+t)\overline{\Phi}(1+t) &= ((1+t)^{2g+1} - 1) / t, \\ \Psi(1+b_0t)\overline{\Psi}(1+b_0t) &= ((1+b_0t)^{2g+1} - 1) / t. \end{aligned} \quad (9)$$

Предположим, что ранг матрицы $A(b_0)$ равен 2, то есть любые три столбца матрицы $A(b_0)$ линейно зависимы. Рассмотрим последнюю строку матрицы $A(b_0)$: $(1, 1, b_0^g, b_0^g)$. Из (9) имеем $\Phi(1+t) \equiv \overline{\Phi}(1+t)$ и $\Psi(1+b_0t) \equiv \overline{\Psi}(1+b_0t)$. Значит, существует номер $0 \leq k \leq g-1$ такой, что $\Phi_k \neq \overline{\Phi}_k$, и существуют единственные $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq \beta$, такие, что

$$\begin{cases} \alpha b_0^g \Phi(1+t) + (1-\alpha) b_0^g \overline{\Phi}(1+t) = \Psi(1+b_0t), \\ \beta b_0^g \Phi(1+t) + (1-\beta) b_0^g \overline{\Phi}(1+t) = \overline{\Psi}(1+b_0t). \end{cases}$$

Для того, чтобы при $b = b_0$ выполнялось (2) для некоторых значений κ_0, τ_0 параметров κ, τ необходимо и достаточно

$$\begin{cases} b_0^g(\alpha\kappa_0 + \beta b_0\tau_0) = \kappa_0\tau_0, \\ b_0^g((1-\alpha)\kappa_0 + (1-\beta)b_0\tau_0) = 1. \end{cases}$$

Эта система уравнений относительно κ_0, τ_0 имеет не более 2 решений. \square

Положим

$$A_k(b) = \begin{pmatrix} \Phi_0 & \overline{\Phi}_0 & \Psi_0 & \overline{\Psi}_0 \\ \Phi_k & \overline{\Phi}_k & b^k \Psi_k & b^k \overline{\Psi}_k \\ 1 & 1 & b^g & b^g \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$k = 1, 2, \dots, g-1,$$

Обозначим за $A_{j,k}(b)$ матрицу, полученную из матрицы $A_k(b)$ вычеркиванием j -го столбца, $j = 1, 2, 3, 4$. При $k = 1, \dots, g-1$, $j = 1, 2, 3, 4$ определим многочлены $P_{j,k}(b) = \det A_{j,k}(b) \in K_{2g+1}[b]$.

В следующем предложении мы считаем, что любое число является корнем многочлена, тождественно равного нулю.

Предложение 2. 1. Для $b = b_0 \in K^*$, $b_0 \neq 1$, существуют значения $\kappa_0, \tau_0 \in K^*$ параметров κ, τ , для которых соотношение (2) справедливо для любого $t \in K$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$A(b_0)$ не превосходит 3, и значение b_0 является общим корнем многочленов

$$\begin{aligned} R_k(b) &= bP_{1,k}(b)P_{2,k}(b) - \\ &- P_{3,k}(b)P_{4,k}(b), \quad k = 1, \dots, g-1. \end{aligned} \quad (11)$$

2. При фиксированном $b = b_0$ существует не более δ значений (κ, τ) , для которых соотношение (2) справедливо для любого $t \in K$, где $\delta = 0$, если ранг матрицы $A(b_0)$ равен 1, $\delta = 2$, если ранг матрицы $A(b_0)$ равен 2, $\delta = 1$, если ранг матрицы $A(b_0)$ равен 3.

Доказательство. Докажем необходимость в пункте 1. Пусть значения $b_0, \kappa_0, \tau_0 \in K^*$, $b_0 \neq 1$, параметров b, κ, τ такие, что соотношение (2) справедливо для любого $t \in K$. Продифференцируем k раз соотношение (2) и подставим $t = 0$, $b = b_0$, $\kappa = \kappa_0$, $\tau = \tau_0$: $\kappa_0\tau_0\Phi_k + \overline{\Phi}_k = \kappa_0 b_0^k \Psi_k + \tau_0 b_0^{k+1} \overline{\Psi}_k$. Отсюда получаем линейную зависимость столбцов матрицы $A(b_0)$ с набором коэффициентов $(\kappa_0\tau_0, 1, \kappa_0, \tau_0 b_0)$. Значит, ранг матрицы $A(b_0)$ не превосходит 3, и каждая однородная система линейных уравнений с матрицей $A_k(b_0)$ имеет общее ненулевое решение $(\kappa_0\tau_0, 1, -\kappa_0, -\tau_0 b_0)$. Заметим, что набор

$$(P_{1,k}(b), -P_{2,k}(b), P_{3,k}(b), -P_{4,k}(b)) \quad (12)$$

принадлежит множеству решений однородной системы линейных уравнений с матрицей $A_k(b)$, поскольку линейная комбинация каждой строки матрицы $A_k(b)$ с коэффициентами из этого набора есть разложение определителя матрицы, составленной из матрицы $A_k(b)$, дополненной соответствующей повторной строкой.

Если при фиксированном k хотя бы одно из значений $P_{j,k}(b_0)$, $1 \leq j \leq 4$, отлично от нуля, то ранг матрицы $A_k(b_0)$ равен 3, и, следовательно, размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений с матрицей $A_k(b_0)$ равна 1. В этом случае при $b = b_0$ набор (12) должен быть пропорционален $(\kappa_0\tau_0, 1, -\kappa_0, -\tau_0 b_0)$, откуда получаем, что b_0 является корнем $R_k(b)$. Если же при фиксированном k все значения $P_{j,k}(b_0)$, $1 \leq j \leq 4$, равны нулю, то при $b = b_0$ многочлен $R_k(b)$ также обращается в ноль.

Докажем достаточность в пункте 1. Пусть b_0 является общим корнем всех многочленов (11) при $k = 1, \dots, g-1$ и ранг матрицы $A(b_0)$ не превосходит 3. Если при некотором $1 \leq k \leq g-1$ имеем $P_{1,k}(b_0) = 0$, то в силу $R_k(b_0) = 0$ либо $P_{3,k}(b_0) = 0$, либо $P_{4,k}(b_0) = 0$, следовательно любые три столбца матрицы $A(b_0)$ линейно зависимы, то есть $P_{j,k}(b_0) = 0$ для любого $1 \leq j \leq 4$. Аналогично, если предположить, что $P_{j,k}(b_0) = 0$ при не-

которых $1 \leq j \leq 4, 1 \leq k \leq g - 1$, то $P_{j,k}(b_0) = 0$ для любого $1 \leq j \leq 4$.

Предположим, что ранг матрицы $A(b_0)$ равен 3. Тогда существует номер $k, k = 1, \dots, g - 1$, для которого все значения $P_{j,k}(b_0), 1 \leq j \leq 4$, не обращаются в ноль, а набор (12) при $b = b_0$ с точностью до умножения на ненулевой коэффициент является единственным решением однородной системы линейных уравнений с матрицей $A(b_0)$. Обозначим $\kappa_0 = P_{3,k}(b_0) / P_{2,k}(b_0), \tau_0 = -b_0^{-1} P_{4,k}(b_0) / P_{2,k}(b_0)$, тогда в силу $R_k(b_0) = 0$ столбцы матрицы $A(b_0)$ линейно зависимы с коэффициентами $(\kappa_0 \tau_0, 1, -\kappa_0, -\tau_0 b_0)$. А, следовательно и многочлены (8) линейно зависимы с этими же коэффициентами.

Случаи, когда ранг матрицы $A(b_0)$ меньше 3 разобраны в лемме 1. Предложение 2 доказано. \square

Предположим, что найдены подходящие значения $b_0, \kappa_0, \tau_0 \in K^*, b_0 \neq 1$, параметров b, κ, τ , для которых соотношение (2) справедливо для всех $t \in K$. Опишем, как по этой тройке значений (b_0, κ_0, τ_0) однозначно восстановить многочлен $f(x)$, удовлетворяющий системе (1).

Возведем первое соотношение (5) в квадрат, и используя $\kappa \tau = \mu^2, \kappa / \tau = v^2$, запишем

$$4u_1^2(t) = \frac{1}{\kappa_0 \tau_0} \Phi^2(1+t) + 2 \frac{(1+t)^{2g+1} - 1}{t} + \kappa_0 \tau_0 \Phi^2(1+t). \tag{13}$$

Аналогичным образом однозначно восстанавливаются u_2^2, u_3^2 . Обозначим $F(t) = tu_1^2 + 1 = tu_2^2 + 1 + (1+t)^{2g+1} = tu_3^2 + (1-b_0t)^{2g+1}$, причем последние два равенства тождественны ввиду (4) и дальнейших построений. Отсюда имеем

$$f(x) = x^{2g+1} F(1/x) = \frac{x^{2g}}{4\kappa_0 \tau_0} \Phi^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{(x+1)^{2g+1} + x^{2g+1}}{2} + \frac{\kappa_0 \tau_0 x^{2g}}{4} \Phi^2\left(1 + \frac{1}{x}\right). \tag{14}$$

Если полученный многочлен $f(x)$ свободен от квадратов, то уравнение $y^2 = f(x)$ задает определенную над K отмеченную гиперэллиптическую кривую (C, ∞) нечетной степени и рода g , которая обладает не менее $6 - K$ -точками кручения порядка $2g + 1$ в ее якобиане J .

Предложение 3. Пусть для $(I, L) = (I_0, L_0), I_0, L_0 \subset M_{2g+1}^*, \#I = \#J = g$, существуют значения $b_0, \kappa_0, \tau_0 \in K^*, b_0 \neq 1$, параметров b, κ, τ , для которых соотношение (2) справедливо для

любых $t \in K^*$. Пусть (C, ∞) — соответствующая отмеченная гиперэллиптическая кривая нечетной степени и рода g , которая содержит не менее 6 точек кручения порядка $2g + 1$. Обозначим $\hat{I}_0 = M_{2g+1}^* \setminus I_0, \hat{L}_0 = M_{2g+1}^* \setminus L_0$. Тогда если в качестве набора (I, L) взять любой из наборов $(\hat{I}_0, L_0), (I_0, \hat{L}_0), (\hat{I}_0, \hat{L}_0), (L_0, I_0), (\hat{L}_0, I_0), (L_0, \hat{I}_0), (\hat{L}_0, \hat{I}_0)$, то найдутся значения $b_0, \tilde{\kappa}_0, \tilde{\tau}_0 \in K^*, b_0 \neq 1$, параметров b, κ, τ , для которых соотношение (2) справедливо для любых $t \in K^*$, и при этом соответствующая отмеченная гиперэллиптическая кривая (\tilde{C}, ∞) нечетной степени и рода g би-рационально эквивалентна (C, ∞) .

Доказательство. Достаточно проверить утверждение предложения только для $(I, L) = (\hat{I}_0, L_0)$ и $(I, L) = (L_0, I_0)$, поскольку остальные варианты получаются из этих путем их композиции.

Если вместо $(I, L) = (I_0, L_0)$ положить $(I, L) = (\hat{I}_0, L_0)$, то в системе (5) многочлены $\Phi(1+t)$ и $\bar{\Phi}(1+t)$ поменяются местами, при этом можно положить $\tilde{\mu} = 1/\mu$ и $\tilde{u}_2 = -u_2$, а остальные обозначения оставить прежними. Тогда тройка $(\tilde{b}_0, \tilde{\kappa}_0, \tilde{\tau}_0) = (b_0, \tau_0, \kappa_0)$ подходит под условия предложения.

Если вместо $(I, L) = (I_0, L_0)$ положить $(I, L) = (L_0, I_0)$, то в системе (5) многочлены Φ и $\Psi, \bar{\Phi}$ и $\bar{\Psi}$ поменяются местами, причем для соответствия виду системы (5) необходимо сделать следующие подстановки $\tilde{t} = b_0 t, \tilde{b}_0 = 1/b_0, \tilde{u}_j = u_j / \sqrt{b_0}, j = 1, 2, 3, \tilde{\mu} = \mu / \sqrt{b_0}, \tilde{v} = v / \sqrt{b_0}$. Тогда тройка $(\tilde{b}_0, \tilde{\kappa}_0, \tilde{\tau}_0) = (1/b_0, \kappa_0/b_0, \tau_0)$ подходит под условия предложения.

Теорема 5. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 и $g \geq 2$. Тогда существует конечное множество S_g определенных над K отмеченных гиперэллиптических кривых нечетной степени и рода g таких, что

- $\#S_g \leq \frac{4g-1}{4} \binom{2g}{g} \left(\binom{2g}{g} + 2 \right);$

- если (C, \mathcal{O}) — определенная над полем K отмеченная гиперэллиптическая кривая нечетной степени и рода g , на которой существуют не менее 6 точек кручения порядка $2g + 1$ в ее якобиане J , то (C, \mathcal{O}) би-рационально эквивалентна одной из кривых в S_g .

Доказательство. По предложению 3 необходимо рассмотреть $\frac{1}{2} \binom{2g}{g} + \frac{1}{8} \left(\binom{2g}{g}^2 - 2 \binom{2g}{g} \right)$

вариантов для пары множеств (I, L) , $I, L \subset M_{2g+1}^*$, $\#I = \#L = g$. По предложению 2 для каждой пары множеств (I, L) существует не более $\max_{1 \leq k \leq g-1} \deg R_k(b) = 4g - 1$ значений b_0 для параметра b , а для каждого b_0 существует не более 2 значений (κ_0, τ_0) для параметров (κ, τ) . По набору I, κ_0, τ_0 с помощью (14) однозначно восстанавливается многочлен $f(x)$.

4. АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Используя результаты теоремы 5 и предложения 2 можно сформулировать алгоритм для поиска подходящих значений параметров b, κ, τ , с помощью которых восстанавливается многочлен $f(x)$, задающий искомую отмеченную гиперэллиптическую кривую нечетной степени и рода g . Дадим некоторые комментарии, относящиеся к эффективной реализации этого алгоритма.

Для каждой пары (I, L) вместо уравнений вида (11) будем в первую очередь рассматривать однородную систему уравнений с матрицей, состоящей из первых трех строк матрицы $A(b)$. Для того, чтобы соотношение (2) было справедливо для любого $t \in K$, необходимо, чтобы решение $(\lambda_1(b), \lambda_2(b), \lambda_3(b), \lambda_4(b))$ этой системы уравнений было таким, что $R(b) = b\lambda_1(b)\lambda_2(b) - \lambda_3(b)\lambda_4(b) = 0$. Отсюда уже можно найти значения b_0 , которых в случае $R(b) \not\equiv 0$ будет не более $\deg R(b) \leq 7$.

Для поиска корней многочлена $R(b) \in K_{2g+1}[b]$ вычислим его норму $N(R) \in \mathbb{Q}[b]$, равную произведению сопряженных многочленов R^σ относительно автоморфизмов Галуа $\sigma \in \text{Gal}(K_{2n+1} / \mathbb{Q})$. Если $g \geq 3$, то дополнительно вычислим определитель $D(b)$ матрицы, составленной из первых четырех строк матрицы $A(b)$. Поскольку ранг матрицы $A(b)$ должен быть меньше 4, то подходящие значения b_0 являются также и корнями $D(b)$, причем $\deg D(b) \leq 7$. Вычислим $T(b) = \gcd(N(R), N(D)) \in \mathbb{Q}[b]$. Вычислим корни b_0 многочлена $T(b)$ и подставим их в $R(b) = 0$ и $D(b) = 0$ для проверки. Если $R(b_0) = D(b_0) = 0$, то в соответствии с предложением 2 находим значения параметров κ_0, τ_0 и по формуле (14) восстанавливаем многочлен $f(x)$. Остается только проверить, что $f(x)$ свободен от квадратов.

Вообще говоря, может возникнуть сложность с вычислением корней многочлена $T(b) \in \mathbb{Q}$, но на практике при $g \leq 5$ во всех случаях получаем, что многочлен $T(b)$ раскладывается на неприводимые над \mathbb{Q} множители не более 4-ой степени, то есть все корни b_0 могут быть выписаны явно в радикалах.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-71-00101) в Научно-технологическом университете “Сириус”.

СПИСОК ЛИТЕРАТЫ

1. *Lockhart P.* On the discriminant of a hyperelliptic curve. // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 342(2). P. 729–752.
2. *Зархин Ю.Г.* Деление на 2 в гиперэллиптических кривых нечетной степени и их якобианах // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83. № 3. С. 93–112.
3. *Bekker B.M., Zarhin Y.G.* Torsion points of small order on hyperelliptic curves. // European Journal of Mathematics. 2022. V. 8. № 2. P. 611–624.
4. *Boxall J., Grant D., Leprévost F.* 5-torsion points on curves of genus 2 // J. London Math. Soc. 2001. V. 64(1). P. 29–43.
5. *Платонов В.П.* Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69. № 1(415). С. 3–38.
6. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
7. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме классификации многочленов f с периодическим разложением \sqrt{f} в непрерывную дробь в гиперэллиптических полях // Известия РАН. Серия математическая. 2021. Т. 85. № 5. С. 152–189.
8. *Федоров Г.В.* Непрерывные дроби и проблема классификации эллиптических полей над квадратичными полями констант // Матем. заметки. 2023. Т. 114. № 6. С. 873–893.
9. *Bekker B.M., Zarhin Y.G.* Torsion points of order $2g+1$ on odd degree hyperelliptic curves of genus g . // Trans. Amer. Math. Soc. 2020. V. 373. № 11. P. 8059–8094.
10. *Flynn E.V.* Large Rational Torsion on Abelian Varieties // J. Number Theory. 1990. V. 36. P. 257–265.
11. *Leprévost F.* Torsion sur des familles de courbes de genre g // Manuscripta mathematica. 1992. V. 75. P. 303–326.
12. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* Бесконечное семейство кривых рода 2 над полем рациональных чисел, якобиевы многообразия которых содержат рациональные точки порядка 28 // Докл. РАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 385–388.
13. *Rosenlicht M.* Generalized Jacobian varieties // Ann. Math. 1954. V. 59. P. 505–530.
14. *Serre J.-P.* Algebraic Groups and Class Fields (Springer, New York, 1988).
15. *Платонов В.П., Жгун В.С., Федоров Г.В.* О конечности множества обобщенных якобианов с нетривиальным кручением над полями алгебраических чисел, // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2023. Т. 513. С. 66–70.

**ON HYPERELLIPTIC CURVES OF ODD DEGREE AND GENUS g
WITH 6 TORSION POINTS OF ORDER $2g + 1$** **G. V. Fedorov^a**

Presented by Academician of the RAS V. P. Platonov

^a*Sirius University of Science and Technology, Sirius, Krasnodar region, Russia*

Let a hyperelliptic curve \mathcal{C} of genus g defined over an algebraically closed field K of characteristic 0, given by the equation $y^2 = f(x)$, where the polynomial $f(x) \in K[x]$ is square-free and has odd degree $2g + 1$. The curve \mathcal{C} contains a single “infinite” point \mathcal{O} , which is the Weierstrass point. There is a classical embedding of $\mathcal{C}(K)$ into the group of K -points $J(K)$ of the Jacobian variety J of the curve \mathcal{C} , identifying the point \mathcal{O} with the unit element of the group $J(K)$. For $2 \leq g \leq 5$, the article explicitly found representatives of birational equivalence classes such hyperelliptic curves \mathcal{C} with a marked unique point at infinity \mathcal{O} that the set $\mathcal{C}(K) \cap J(K)$ contains at least 6 torsion points of order $2g + 1$. It was previously known that for $g = 2$ there are exactly 5 such equivalence classes, and for $g \geq 3$ an upper bound was known that depended only on the genus of g . We improve the previously known upper bound by almost 36 times.

Keywords: hyperelliptic curve, Jacobian variety, torsion points, Flynn-Leprevost method

УДК 517.95

ОБ УСЛОВИИ РАЗРУШЕНИЯ ТИПА ДИНИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. А. А. Коньков^{1, *}, А. Е. Шишков^{2, **}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 16.05.2024 г.

После доработки 05.07.2024 г.

Принято к публикации 05.07.2024 г.

Получено условие разрушения решений дифференциальных неравенств

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x, u) \geq g(|u|) \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

где $m, n \geq 1$ — целые числа, а a_α и g — некоторые функции.

Ключевые слова: дифференциальные неравенства высокого порядка, нелинейность, разрушение решений

DOI: 10.31857/S2686954324040039, EDN: YZCHNS

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x, u) \geq g(|u|) \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $m, n \geq 1$ — целые числа, а a_α — каратеодориевы функции такие, что

$$|a_\alpha(x, \zeta)| \leq A|\zeta|, \quad |\alpha| = m, \quad A = \text{const} > 0,$$

для почти всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и всех $\zeta \in \mathbb{R}$. Как это принято, под $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ мы подразумеваем мульти-индекс, причем $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ и $\partial^\alpha = \partial^{|\alpha|} / (\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n})$. Предполагается также, что g — неубывающая выпуклая функция на промежутке $[0, \infty)$ такая, что $g(\zeta) > 0$ для всех $\zeta > 0$.

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

² Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

* E-mail: konkov@mech.math.msu.su

** E-mail: aeshkv@yahoo.com

Обозначим через B_r^x открытый шар в \mathbb{R}^n радиуса $r > 0$ с центром в точке x . В случае $x = 0$ будем писать B_r вместо B_r^0 .

Функция $u \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ называется решением (1), если $g(|u|) \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m a_\alpha(x, u) \partial^\alpha \varphi dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} g(|u|) \varphi dx \quad (2)$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Отсутствие нетривиальных решений дифференциальных уравнений и неравенств или, другими словами, явление blow-up традиционно привлекает интерес многих математиков [1–15]. При этом большинство авторов имели дело с дифференциальными операторами второго порядка или ограничивались случаем степенной нелинейности $g(t) = t^\lambda$. Мы рассматриваем неравенства высокого порядка с нелинейностью общего вида. В представленной вашему вниманию работе удалось получить условие blow-up типа Дини, которое усиливает результаты [8].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $n > m$ и при этом

$$\int_1^\infty g^{-1/m}(\zeta) \zeta^{1/m-1} d\zeta < \infty \quad (3)$$

и

$$\int_0^1 \frac{g(r)dr}{r^{1+n/(n-m)}} = \infty. \quad (4)$$

Тогда любое решение (1) равно нулю почти всюду в \mathbb{R}^n .

Замечание 1. Случай $n \leq t$ был рассмотрен в [8, теорема 2.5]. Именно, было показано, что при $n \leq t$ и выполнении условия (3) любое решение (1) равно нулю почти всюду в \mathbb{R}^n .

Доказательство теоремы 1 будет приведено в следующем разделе. Сейчас продемонстрируем ее применение.

Пример 1. Рассмотрим неравенство

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x, u) \geq c_0 |u|^\lambda \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \quad c_0 = \text{const} > 0, \quad (5)$$

где $n > t$ λ — вещественное число. Согласно теореме 1, если

$$1 < \lambda \leq \frac{n}{n-t} \quad (6)$$

то любое решение (5) равно нулю почти всюду в \mathbb{R}^n . Хорошо известно, что условие (6) неупрощается в классе степенных нелинейностей [9, 13].

Пример 2. Будем исследовать случай критического показателя $\lambda = n / (n - t)$ в условии (6). Рассмотрим неравенство

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x, u) \geq c_0 |u|^{n/(n-t)} \log^\mu \left(e + \frac{1}{|u|} \right) \quad (7)$$

$$\text{в } \mathbb{R}^n, \quad c_0 = \text{const} > 0,$$

где $n > t$ и μ — вещественное число. При этом в случае $u = 0$ мы по непрерывности продолжим правую часть (7) нулем.

В соответствии с теоремой 1, если

$$\mu \geq -1,$$

то любое решение (7) равно нулю почти всюду в \mathbb{R}^n .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В этом разделе через C и σ будем обозначать различные положительные постоянные, которые могут зависеть лишь от A , t и n . Нам потребуются следующие известные утверждения.

Теорема 2. Пусть выполнено условие (3), тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} \int_{B_r} |u| dx = 0$$

для любого решения неравенства (1).

Лемма 1. Пусть u — решение неравенства (1), тогда

$$\int_{B_{r_2} \setminus B_{r_1}} |u| dx \geq C(r_2 - r_1)^m \int_{B_{r_1}} g(|u|) dx$$

для всех вещественных чисел $0 < r_1 < r_2$ таких, что $r_2 \leq 2r_1$.

Доказательство теоремы 2 и леммы 1 приведено в [8, теорема 2.4 и лемма 3.1].

Начиная с этого момента, обозначим

$$E(r) = \int_{B_r} g(|u|) dx, \quad r > 0.$$

Лемма 2. Пусть u — решение неравенства (1), тогда

$$E(r) - E(r/2) \geq Cr^n g\left(\frac{\sigma}{r^{n-m}} E(r/2)\right) \quad (8)$$

для всех вещественных чисел $r > 0$.

Доказательство. Полагая $r_1 = r/2$ и $r_2 = r$ в лемме 1, получим

$$\frac{1}{\text{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} |u| dx \geq \frac{\sigma}{r^{n-m}} \int_{B_{r/2}} g(|u|) dx.$$

Так как g — неубывающая функция, это приводит к оценке

$$g\left(\frac{1}{\text{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} |u| dx\right) \geq g\left(\frac{\sigma}{r^{n-m}} \int_{B_{r/2}} g(|u|) dx\right).$$

Ввиду выпуклости g , имеем также

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} g(|u|) dx \geq \\ & \geq g\left(\frac{1}{\text{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} |u| dx\right). \end{aligned}$$

Таким образом, объединяя последние два неравенства, приходим к выводу что

$$\frac{1}{\text{mes} B_r \setminus B_{r/2}} \int_{B_r \setminus B_{r/2}} g(|u|) dx \geq g\left(\frac{\sigma}{r^{n-m}} \int_{B_{r/2}} g(|u|) dx\right)$$

для всех вещественных чисел $r > 0$, откуда немедленно следует (8). \square

Доказательство теоремы 1. Предположим противное, пусть u — ненулевое решение (1). По лемме 1 справедливо неравенство

$$\frac{E(r)}{r^{n-m}} \leq \frac{C}{r^n} \int_{B_{2r} \setminus B_r} |u| dx$$

для всех вещественных чисел $r > 0$, откуда в соответствии с теоремой 2 будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{E(r)}{r^{n-m}} = 0.$$

Возьмем вещественное число $r_0 > 0$ такое, что $E(r_0) > 0$. Положим также $r_i = 2^i r_0$, $i = 1, 2, \dots$. Найдутся, очевидно, последовательности целых чисел $0 < s_i < l_i \leq s_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{E(r_j)}{r_j^{n-m}} > \frac{E(r_{j+1})}{r_{j+1}^{n-m}}$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$ и

$$\frac{E(r_j)}{r_j^{n-m}} \leq \frac{E(r_{j+1})}{r_{j+1}^{n-m}}$$

для всех $j \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$.

Поскольку E — неубывающая функция, получим

$$\frac{2^{n-m} E(r_{j+1})}{r_{j+1}^{n-m}} \geq \frac{E(r_j)}{r_j^{n-m}} > \frac{E(r_{j+1})}{r_{j+1}^{n-m}} \quad (9)$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$. Согласно лемме 1, справедлива оценка

$$E(r_{j+1}) - E(r_j) \geq Cr_j^n g(\sigma r_j^{-n+m} E(r_j)),$$

из которой следует, что

$$\frac{E(r_{j+1}) - E(r_j)}{E^{n/(n-m)}(r_j)} \geq Ch(\sigma r_j^{-n+m} E(r_j)) \quad (10)$$

для всех $j = 1, 2, \dots$, где

$$h(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n/(n-m)}}.$$

Умножая (10) на неравенство

$$1 \geq \frac{r_j^{-n+m} E(r_j) - r_{j+1}^{-n+m} E(r_{j+1})}{r_j^{-n+m} E(r_j)},$$

имеем

$$\frac{E(r_{j+1}) - E(r_j)}{E^{n/(n-m)}(r_j)} \geq C \frac{h(\sigma r_j^{-n+m} E(r_j))}{r_j^{-n+m} E(r_j)} \times (r_j^{-n+m} E(r_j) - r_{j+1}^{-n+m} E(r_{j+1})) \quad (11)$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$. Ввиду (9) и монотонности функции E можно утверждать, что

$$E(r_{j+1}) \geq E(r_j) > \frac{1}{2^{n-m}} E(r_{j+1})$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$. Тем самым, имеем

$$\int_{E(r_j)}^{E(r_{j+1})} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} \geq C \frac{E(r_{j+1}) - E(r_j)}{E^{n/(n-m)}(r_j)}$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$. При этом (9) также приводит к оценке

$$\frac{h(\sigma r_j^{-n+m} E(r_j))}{r_j^{-n+m} E(r_j)} (r_j^{-n+m} E(r_j) - r_{j+1}^{-n+m} E(r_{j+1})) \geq C \int_{r_{j+1}^{-n+m} E(r_{j+1})}^{r_j^{-n+m} E(r_j)} \frac{\tilde{h}(\sigma\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$, где

$$\tilde{h}(\zeta) = \inf_{(\zeta, 2^{n-m}\zeta)} h.$$

Таким образом, принимая во внимание (11), получим

$$\int_{E(r_j)}^{E(r_{j+1})} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} \geq C \int_{r_{j+1}^{-n+m} E(r_{j+1})}^{r_j^{-n+m} E(r_j)} \frac{\tilde{h}(\sigma\zeta)}{\zeta} d\zeta$$

для всех $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$. Суммируя последнее выражение по всем $j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i, l_i)$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E(r_{s_i})}^{E(r_{l_i})} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} \geq C \sum_{i=1}^{\infty} \int_{r_{l_i}^{-n+m} E(r_{l_i})}^{r_{s_i}^{-n+m} E(r_{s_i})} \frac{\tilde{h}(\sigma\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

откуда ввиду того, что $E(r_{s_{i+1}}) \geq E(r_{l_i})$ и $r_{l_i}^{-n+m} E(r_{l_i}) \leq r_{s_{i+1}}^{-n+m} E(r_{s_{i+1}})$ для всех $i > 1$ и при этом

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r_{l_i}^{-n+m} E(r_{l_i}) = 0,$$

приходим к оценке

$$\int_{E(r_{s_1})}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} \geq C \int_0^{r_{s_1}^{-n+m} E(r_{s_1})} \frac{\tilde{h}(\sigma\zeta)}{\zeta} d\zeta. \quad (12)$$

Согласно выбору вещественного числа r_0 и монотонности функции E имеем $E(r_{s_1}) \geq E(r_0) > 0$, поэтому

$$\int_{E(r_{s_1})}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^{n/(n-m)}} = \frac{m}{n-m} E^{-m/(n-m)}(r_{s_1}) < \infty.$$

В то же время, из монотонности функции g следует, что

$$\tilde{h}(\zeta) \geq \frac{1}{2^n} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n/(n-m)}}.$$

Тем самым, (12) приводит к неравенству

$$\int_0^{r_{s_1}^{-n+m} E(r_{s_1})} \frac{g(\sigma\zeta) d\zeta}{\zeta^{1+n/(n-m)}} < \infty,$$

которое противоречит (4). Доказательство завершено. \square

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа первого автора поддержана Минобрнауки России в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по договору 075-15-2022-284 (критические показатели), и Российского научного фонда, проект 20-11-20272-П (оценки глобальных решений). Работа второго автора поддержана Российским научным фондом, проект 23-11-00056 (асимптотические свойства решений).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galaktionov V.A., Mitidieri E.L., Pohozaev S.I. Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schroedinger equations. Monographs and Research Notes in Mathematics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2014.
2. Filippucci R. Nonexistence of positive entire weak solutions of elliptic inequalities // Nonlin. Anal. 2009. V. 70. P. 2903–2916.
3. Filippucci R., Pucci P., Rigoli M. Non-existence of entire solutions of degenerate elliptic inequalities with weights // Arch. Ration. Mech. Anal. 2008. V. 188. P. 155–179. Erratum: 2008. V. 188. P. 181.
4. Ghergu M., Radulescu V. Existence and nonexistence of entire solutions to the logistic differential equation, // Abstr. and Appl. Anal. 2003. V. 17. P. 995–1003.
5. Keller J.B. On solution of $\Delta u = f(u)$ // Comm. Pure. Appl. Math. 1957. V. 10. P. 503–510.

6. Kondratiev V.A., Veron L. Asymptotic behavior of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations // Asymp. Anal. 1997. V. 14. P. 117–156.
7. Kon'kov A.A. On properties of solutions of quasilinear second-order elliptic inequalities // Nonlin. Anal. 2015. V. 123–124. P. 89–114.
8. Kon'kov A.A., Shishkov A.E. Generalization of the Keller–Osserman theorem for higher order differential inequalities // Nonlinearity 2019. V. 32. P. 3012–3022.
9. Kon'kov A.A., Shishkov A.E. On blow-up conditions for solutions of higher order differential inequalities // Appl. Anal. 2019. V. 98:9. P. 1581–1590.
10. Marcus M., Shishkov A.E. Fading absorption in non-linear elliptic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2013. V. 30. P. 315–336.
11. Naito Y., Usami H. Entire solutions of the inequality $\operatorname{div}(A(|Du|)Du) = f(u)$ // Math. Z. 1997. V. 225. P. 167–175.
12. Naito Y., Usami H. Nonexistence results of positive entire solutions for quasilinear elliptic inequalities // Canad. Math. Bull. 1997. V. 40. P. 244–253.
13. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.
14. Osserman R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ // Pacific J. Math. 1957. V. 7. P. 1641–1647.
15. Shishkov A.E., Veron L. Admissible initial growth for diffusion equations with weakly superlinear absorption // Commun. Contemp. Math. 2016. V. 18. 05, 1550089.
16. Veron L. Comportement asymptotique des solutions d'equations elliptiques semi-linéaires dans R^n // Ann. Math. Pure Appl. 1981. V. 127. P. 25–50.

ON A DINI TYPE BLOW-UP CONDITION FOR SOLUTIONS OF NONLINEAR HIGHER ORDER DIFFERENTIAL INEQUALITIES

A. A. Kon'kov^{a, b}, A. E. Shishkov^a

Presented by Academician of the RAS V. V. Kozlov

^aLomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

^bRUDN University, Moscow, Russian Federation

We obtain a Dini type blow-up condition for solutions of the differential inequality

$$\sum_{|\alpha|=m} \partial^\alpha a_\alpha(x, u) \geq g(|u|) \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

where $m, n \geq 1$ are integers and a_α and g are some functions.

Keywords: higher order differential inequalities, nonlinearity, blow-up

УДК 514.85

О ТАУТОХРОННЫХ ДВИЖЕНИЯХ

© 2024 г. А. Г. Петров¹, *

Представлено академиком РАН В. Ф. Журавлевым

Поступило 23.04.2024 г.

После доработки 20.05.2024 г.

Принято к публикации 16.07.2024 г.

Рассматривается прямолинейное движение материальной точки под действием двух сил меняющихся по степенным законам с произвольными показателями степеней. Находятся такие показатели степеней, при которых уравнение нелинейно, а период колебаний не зависит от начальных условий (таутохронное движение). Уравнения приводятся к гамильтоновой форме и методом нормальной гамильтоновой формы доказано, что существуют только два варианта таутохронного движения. Вариант 1: показатели степеней равны 1 и -3 . Вариант 2: показатели степеней равны 0 и $-1/2$. При всех других степенных законах движение материальной точки не таутохронно. Гамильтонова нормальная форма таутохронного движения является гамильтонианом линейного осциллятора. Каноническое преобразование, приводящее исходный гамильтониан к нормальной форме, выражается через элементарные функции. Гамильтонианы таутохронных движений могут использоваться для тестирования программных комплексов вычисления нормальной гамильтоновой формы.

Ключевые слова: таутохронное движение, периодическое решение, система Гамильтона, метод гамильтоновой нормальной формы

DOI: 10.31857/S2686954324040045, EDN: YZNYQS

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно Аппелю прямолинейное движение является таутохронным, если точка, начинающая движение без начальной скорости и находящаяся под действием заданных сил, затратит одно и то же время для достижения определенного конечного положения, каково бы ни было ее положение в начальный момент [1, с. 297]. Таутохронным является движение материальной точки без трения по циклоиде с горизонтальной осью, расположенной в вертикальной плоскости и обращенной вогнутостью перемещающуюся без трения по циклоиде с горизонтальной осью, расположенной в вертикальной плоскости и обращенной вогнутостью вверх. Гюйгенс осуществил циклоидальный маятник, у которого нить последовательно огибает дуги двух циклоид [1, с. 388]. Аппель [1, с. 298–299] представил исследование возможности таутохронного прямолинейного движения материальной точки под действием силы, зависящей только от координаты точки x . Приняв точку прибытия (точку

таутохронизма) за начало, он показал, что единственной силой, вызывающей прямолинейное таутохронное движение, является притяжение, пропорциональное расстоянию (линейный осциллятор).

Ландау и Лифшиц [2] в разделе “Определение потенциальной энергии по периоду колебаний” заметили, что в рассуждении Аппеля, предполагается симметрия функции потенциальной энергии $U(x)$ относительно некоторой начальной точки. Тогда начало можно принять за точку таутохронизма и по периоду потенциальная энергия определится единственным образом. В частности, для постоянного периода потенциальная энергия оказывается параболой, а таутохронным движением является притяжение, пропорциональное расстоянию. Если же потенциальная энергия не симметрична, то за начальную точку движения и точку прибытия (точку таутохронизма) следует принять две крайние точки периодического движения, в которых скорость обращается в ноль.

С помощью квадратуры [2] можно получить функциональное уравнение для определения потенциальной энергии таутохронного движения в неявной форме. В некоторых частных слу-

¹ Институт проблем механики имени А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: petrovipmech@gmail.com

чаях удается построить потенциальную энергию $U(x)$ в явном виде. Таким путем в работе [3] построены, кроме квадратичной функции, две явные функции

$$U(x) = \left(x + b - \frac{b^2}{x + b} \right)^2 \quad (1)$$

$$U(x) = \left(\frac{c}{2a} \right)^2 \left(\sqrt{1 + 4ax / c^2} - 1 \right)^2 \quad (2)$$

В работе [4] обратили внимание на то, что движение линейного двумерного осциллятора в полярных координатах при понижении порядка по Раусу даст потенциал (1). Иными словами, второе слагаемое в (1) можно трактовать как потенциал центробежных сил. Соответственно решение уравнений движения материальной точки в поле сил с потенциалом (1) являются гармоническими колебаниями линейного осциллятора с частотой, не зависящей от амплитуды.

В работе [5] приведен пример системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, решение которого обладает свойством изохронности. Система имеет вид

$$\dot{u} + 2uv = 0, \quad \dot{v} - u^2 + v^2 + 1 = 0. \quad (3)$$

Для этой системы получено общее решение

$$u = \frac{1}{d - r \cos 2t}, \quad v = \frac{r \sin 2t}{d - r \cos 2t}, \quad d = \sqrt{r^2 + 1}, \quad (4)$$

где r произвольное положительное число.

Однако эта система не описывает движение материальной точки в потенциальном поле сил.

Ниже изучаются периодические решения уравнения

$$\ddot{x} + kx^s = nx^{-r}, \quad k > 0, n > 0 \quad (5)$$

с произвольными вещественными показателями степеней sr . Доказано, что для нелинейных таутохронных колебаний существуют только два варианта степенных законов: $s = 1, r = 3$ и $s = 0, r = 1/2$.

Решение в случае 1) $s = 1, r = 3$ описывает гармонические колебания двумерного линейного осциллятора. К этому случаю относится и уравнение с потенциалом (1), для которых доказана таутохронность в [3,4].

Для случая 2) $s = 0, r = 1/2$ уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + k = nx^{-1/2}, \quad k > 0, n > 0. \quad (6)$$

Его решение построено в параметрическом виде и выражается через тригонометрические функции. Уравнение с потенциалом (2) с помощью замены $1 + 4ax / c^2 = x'$ приводится к виду с коэффициентами $k = n = 4 / c^2$, то есть является частным случаем уравнения (6).

Для доказательства используется метод гамильтоновой нормальной формы Биркгофа [6]. Нормальная гамильтонова форма находится методом инвариантной нормализации В.Ф. Журавлева [7,8].

Замечательно, что нормальная форма в обоих случаях является гамильтонианом линейного осциллятора $(1/2)(p^2 + \omega^2 q^2)$, а исходный гамильтониан приводится к нормальной форме каноническим преобразованием, который представляется не асимптотическим рядом, а точными выражениями через элементарные функции.

2. ТАУТОХРОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (5)

Сформулируем результат исследования свойства таутохронности

Теорема 1. *Прямолинейное движение, определяемое уравнением $\ddot{x} + kx^s = nx^{-r}, k > 0, n > 0$, таутохронно в случае, когда оно сводится к линейному осциллятору при $s = 0$ и $r = -1$. В нелинейном случае движение таутохронно только для двух вариантов.*

Вариант 1: $s = 1, r = 3$. Уравнение таутохронного движения имеет вид $\ddot{x} + kx = nx^{-3}$, с решением

$$x = \left(\frac{n}{k} \right)^{1/4} y,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(y_0^2 - \frac{1}{y_0^2} \right) \cos(2\tau) + y_0^2 + \frac{1}{y_0^2}}, \quad (7)$$

$$\tau = \sqrt{kt}, \quad y_0 > 1.$$

Вариант 2: $s = 0, r = 1/2$. Уравнение таутохронного движения имеет вид $\ddot{x} + k = nx^{-1/2}$, а решение представляется в параметрической форме

$$x = \left(\frac{n}{k} \right)^2 y, \quad \tau = \frac{k\sqrt{k}}{n} t$$

$$y = (1 + (\sqrt{y_0} - 1) \cos \varphi)^2, \quad (8)$$

$$\tau / \sqrt{2} = \varphi + (\sqrt{y_0} - 1) \sin \varphi$$

Замечание 1. *Вариант 1 изучен в работах [3, 4]. Хотя решение (7) уравнения $\ddot{x} + kx = nx^{-3}$ в этих работах не приводится, но его легко получить с по-*

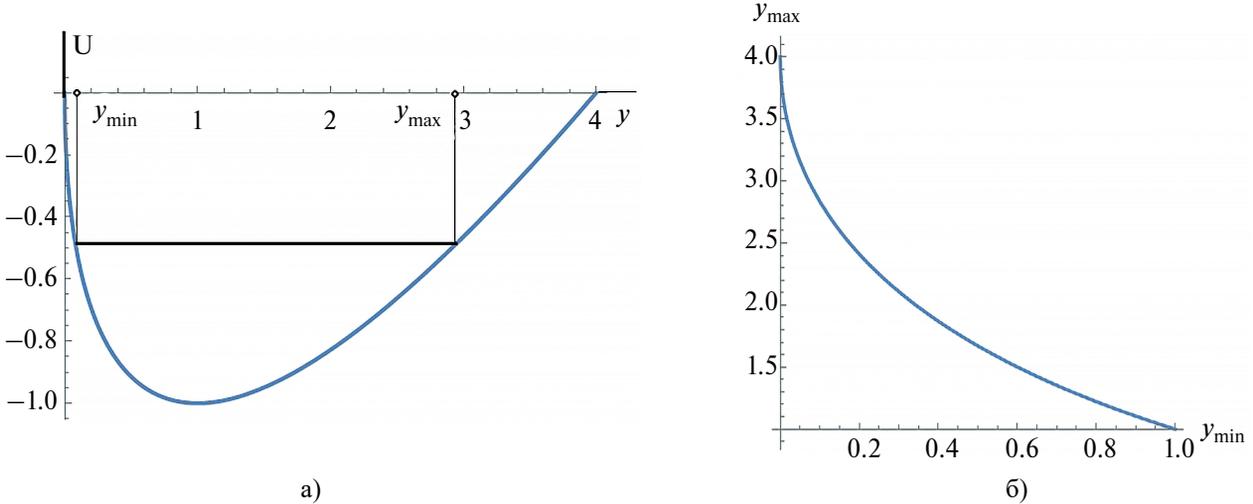


Рис. 1. Таутохронный нелинейный осциллятор; а) – потенциальная энергия $U(y)$, б) – зависимость верхней границы от нижней.

мощью наблюдения [4]. Для этого достаточно записать в декартовых координатах решение уравнений линейного двумерного осциллятора с кинетическим моментом, соответствующим силе инерции px^{-3} , и подставить эти функции в полярный радиус.

Вариант 2 сводится к интегрированию уравнения энергии $\dot{y}^2 / 2 + U(y) = E$ с потенциальной энергией $U(y) = y - 2\sqrt{y}$, изображенной на рис. 1 а). Колебательное движение $y(\tau)$ в элементарных функциях не выражается, но оно построено ниже в параметрическом виде (8). Решение описывает колебание переменной $y(\tau)$ в пределах $y_{min} \leq y(\tau) \leq y_{max}$. Зависимость верхнего значения y_{max} от нижнего y_{min} определяется формулой $y_{max} = (2 - \sqrt{y_{min}})$ и изображена на рис. 1 б).

План доказательства теоремы.

- 1) Приводим уравнение к гамильтоновой форме.
- 2) Находим нормальную гамильтонову форму 6-го приближения.
- 3) Из условия равенства нулю коэффициентов нормальной формы 4-го и 6-го приближений

находим показатели степеней s и r (необходимое условие таутохронности).

4) Находим решение уравнений при степенях, удовлетворяющих необходимому условию таутохронности. Из решения находим частоту колебаний. Если оказывается, что частота не зависит от начальных условий, то решение описывает таутохронное колебание.

Доказательство.

1) Из уравнения $kx^s = nx^{-r}$ находим положение равновесия $x = a = \left(\frac{n}{k}\right)^{1/(s+r)}$

Для исследования колебаний около точки равновесия удобно ввести замену $x = a(1 + q)$. Тогда точкой равновесия будет $q = 0$, а уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + (1 + q)^s = (1 + q)^{-r}, \quad \omega^2 = n \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1+r}{s+r}}$$

Для наших целей уравнение удобно представить в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \tau = \sqrt{k}t, \\ H &= \frac{1}{2}(p^2 + U(q)), \\ U(q) &= \frac{(1+q)^{s+1}}{s+1} + \frac{(1+q)^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{r-1}, \quad s \neq -1, \quad r \neq 1, \\ U(q) &= -\ln(1+q) + \frac{(1+q)^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{s+1}, \quad s \neq -1, \quad r = 1 \\ U(q) &= \ln(1+q) + \frac{(1+q)^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{r-1}, \quad s = -1, \quad r \neq 1. \end{aligned} \tag{9}$$

2) Согласно плану находим нормальную гамильтонову форму 6-го приближения. При $s \neq -1, r \neq 1$ в окрестности точки равновесия гамильтониан имеет следующее разложение

$$\begin{aligned}
 H &= H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6, \quad H_2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2(r+s)), \quad H_3 = -\frac{q^3}{6}(s+r+r^2-s^2) \\
 H_4 &= \frac{q^4}{24}(2(s+r) + 3(r^2-s^2) + (r^3+s^3)), \\
 H_5 &= -\frac{q^5}{120}(6(s+r) + 11(r^2-s^2) + 6(r^3+s^3) + (r^4-s^4)), \\
 H_6 &= -\frac{q^6}{720}(24(s+r) + 50(r^2-s^2) + 35(r^3+s^3) + 10(r^4-s^4) + (r^5+s^5))
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

где $H_i, i = 2, 3, \dots, 6$ однородные полиномы степени i .

Для исследования колебаний в окрестности точки равновесия используем метод гамильтоновой нормальной формы Биркгофа [6]. Нормальная форма шестого приближения для степенного разложения (10) имеет вид $\tilde{H}(Q, P) = h + K_1(s, r)h^2 + K_2(s, r)h^3$, $h = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2(r+s))$. Функция $h(Q, P)$ является интегралом уравнений движения и при $s+r > 0$ уравнения Гамильтона

$$\frac{dQ}{d\tau} = P, \quad \frac{dP}{d\tau} = -\frac{\partial h}{\partial q}(1 + 2K_1h + 3K_2h^2)$$

имеют вид уравнений колебаний линейного осциллятора, квадрат частоты которого отличается от квадрата частоты линейных колебаний на множитель $(1 + 2K_1h + 3K_2h^2)$. Если коэффициенты K_1 или K_2 не равны нулю, то частота колебаний будет зависеть от амплитуды и движение не таутохронно. Таким образом, одновременное равенство нулю коэффициентов нормальной формы является необходимым условием таутохронности движения.

Приводить гамильтониан к нормальной форме будем с помощью метода инвариантной нормализации [7, 8] (см. приложение).

Для гамильтониана (10) коэффициенты нормальной формы имеют вид

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -\frac{-1+r-s-7rs+(r^2+s^2)}{192(r+s)}, \\
 K_2 &= \frac{Q_2}{R_2}, \quad R_2 = 55296(r+s)^2, \\
 Q_2 &= 29 + 58s - 39s^2 - 68s^3 + 20s^4 + \\
 &+ 2r(-29 + 78s + 237s^2 + 2s^3) - \\
 &- 3r^2(13 + 158s + 25s^2) + 4r^3(17 + s) + 20r^4
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

На рис. 2 изображены контуры $K_1(s, r) = 0$ (желтый), $K_2(s, r) = 0$ (синий) и прямая линия $s+r=0$, являющаяся границей области периодических решений. Функции $K_1(s, r)$ и $K_2(s, r)$ одновременно обращаются в ноль в шести точках.

Три точки 1) $s=0, r=1$; 2) $s=1, r=3$; 3) $s=0, r=1/2$ изображены жирными кружочками и для них выполнено условие $s+r > 0$. Первая точка соответствует линейному осциллятору, для которого свойство таутохронности хорошо известно. Для второй и третьей точки уравнения нелинейны и свойство таутохронности требует проверки. Три точки, для которых изображены тонкими кружочками и движение, соответствующее этим точкам, аperiodично.

Теперь найдем нормальную форму шестого приближения при $s \neq -1, r = 1$. При этих показателях степеней гамильтониан (9) имеет вид

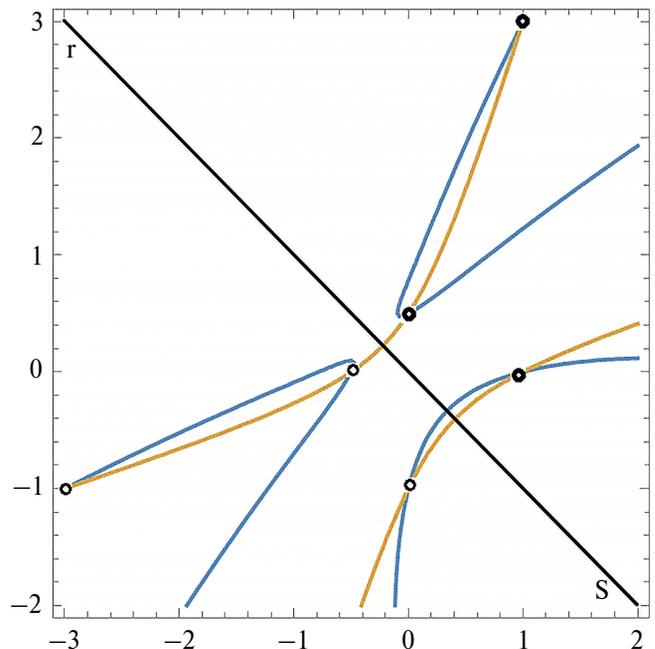


Рис. 2. Необходимое условие таутохронного движения.

$$H = p^2/2 - \ln(1+q) + \frac{(1+q)^{s+1}}{s+1} - \frac{1}{s+1}$$

В окрестности точки равновесия гамильтониан имеет следующее разложение

$$H_2 = (1/2)(p^2 + q^2(1+s)),$$

$$H_3 = (q^3/6)(-2-s+s^2),$$

$$H_4 = (q^4/24)(6+2s-3s^2+s^3),$$

$$H_5 = (q^5/120)(-24-6s+11s^2-6s^3+s^4),$$

$$H_6 = (q^6/720)(120+24s-50s^2+35s^3-10s^4+s^5)$$

Методом инвариантной нормализации находим нормальную форму шестого приближения

$$H = h + K_1 h^2 + K_2 h^3, \quad h = (1/2)(P^2 + Q^2(1+s)),$$

$$K_1 = \frac{1-4s+s^2}{24(1+s)}, \quad K_2 = \frac{5-64s+90s^2-16s^3+5s^4}{864(1+s)^2},$$

Корни $2 \pm \sqrt{3}$ уравнения $K_1 = 0$ не совпадают с корнями 0.08912 и 0.6997 уравнения $K_2 = 0$. Поэтому в случае $r = 1$ таутохронных движений нет.

Наконец найдем нормальную форму шестого приближения во втором вырожденном случае при $s = -1, r \neq 1$. При этих показателях степеней гамильтониан (9) имеет вид

$$H = p^2/2 + \ln(1+q) + \frac{(1+q)^{1-r}}{r-1} - \frac{1}{r-1}$$

Для этого гамильтониана достаточно найти нормальную форму четвертого приближения, чтобы убедиться, что у него нет таутохронных движений.

В окрестности точки равновесия гамильтониан имеет следующее разложение

$$H_2 = (1/2)(p^2 + q^2(-1+r)),$$

$$H_3 = -(q^3/6)(-2+r+r^2),$$

$$H_4 = (q^4/24)(-6+2r+3r^2+r^3)$$

Методом инвариантной нормализации находим нормальную форму четвертого приближения

$$H = h + K_1 h^2,$$

$$h = (1/2)(P^2 + Q^2(-1+r)),$$

$$K_1 = -\frac{1+4r+r^2}{24(-1+r)}$$

При $r > 1$ числитель $1+4r+r^2 > 0$ и коэффициент K_1 в ноль не обращаются. Следовательно для этого гамильтониана тоже нет таутохронных движений.

Необходимое условие теоремы 1 доказано.

3) Построим решение уравнений для вариантов 1 и 2, для которых движение может быть таутохронным. Для варианта 1 такое решение (7) уже построено (см. замечание).

С помощью замены $x = (n/k)^2 y, \tau = (k\sqrt{k}/n)t$ уравнение варианта 2 (6) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 1 = 1/\sqrt{y} \tag{12}$$

Будем искать решение с начальными условиями $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0$. Тогда интеграл энергии уравнения примет вид

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + 2(y - 2\sqrt{y}) = 2(y_0 - 2\sqrt{y_0})$$

Решение представляется квадратурой

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{(1-\sqrt{y_0})^2 - (1-\sqrt{y})^2}}$$

Заменой $1 - \sqrt{y} = \frac{z}{z_0}$ квадратура выражается через элементарные функции

$$\tau = -\sqrt{2} \int \frac{(1-z)dz}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} = \sqrt{2} \left(\arccos \frac{z}{z_0} - \sqrt{z_0^2 - z^2} \right),$$

$$z_0 = 1 - \sqrt{y_0}$$

Решение можно записать в следующей эквивалентной форме

$$\frac{z}{z_0} = \cos \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}} + \sqrt{z_0^2 - z^2} \right)$$

Решение имеет неявный вид. Чтобы получить функцию $z(\tau)$, надо разрешить уравнение относительно z . Но можно построить зависимость $z(\tau)$ в параметрической форме

$$\frac{z}{z_0} = \cos \varphi, \quad \tau = \sqrt{2}(\varphi - z_0 \sin \varphi).$$

Исходная переменная выражается через z по формуле $y = (1-z)^2$. С помощью нее получим решение уравнения (12) в параметрической форме (8).

Покажем непосредственной проверкой, что параметрическая зависимость (8) определяет функцию $y(\tau)$, которая удовлетворяет уравнению (12). Действительно, вычисляем первую производную $y(\tau)$

$$\frac{dy}{d\tau} = -2(1 + (\sqrt{y_0} - 1)\cos \varphi)(\sqrt{y_0} - 1)\sin \varphi$$

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \sqrt{2}(1 + (\sqrt{y_0} - 1)\cos \varphi)$$

$$\dot{y}(\tau) = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{d\varphi} / \frac{d\tau}{d\varphi} = -\sqrt{2}(\sqrt{y_0} - 1)\sin\varphi$$

Вычисляем вторую производную по τ

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{d\dot{y}}{d\tau} = \frac{d\dot{y}}{d\varphi} / \frac{d\tau}{d\varphi} = -\frac{(\sqrt{y_0} - 1)\cos\varphi}{1 + (\sqrt{y_0} - 1)\cos\varphi}$$

и убеждаемся в справедливости тождества

$$\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 = -\frac{(\sqrt{y_0} - 1)\cos\varphi}{1 + (\sqrt{y_0} - 1)\cos\varphi} = \frac{d^2y}{d\tau^2}$$

что и требовалось доказать.

3. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И НОРМАЛИЗУЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЛЯ ТАУТОХРОННЫХ ДВИЖЕНИЙ

Поскольку все коэффициенты нормальной формы гамильтониана для таутохронных движений тождественно равны нулю, то должно существовать каноническое преобразование, приводящее исходный гамильтониан нелинейной системы к гамильтониану линейного осциллятора.

Обычно нормализующая замена и нормальная гамильтонова форма нелинейной системы представляются в виде асимптотических рядов. Таутохронные движения представляют собой редкие случаи, когда для сильно нелинейной системы каноническая замена переменных (15) точно приводит гамильтониан (13) к его нормальной форме.

Покажем как строится нормализующая замена таутохронного движения на примере гамильтониана варианта 1. Исходный гамильтониан H и его нормальная форма \tilde{H} имеют вид

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + (1+q)^2 + (1+q)^{-2} - 2), \tag{13}$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}(P^2 + 4Q^2)$$

В переменных q, p решение с начальными данными $q(0) = y_0 - 1, p(0) = 0$ получается из (7) с помощью подстановки $q = y - 1, p = dq / d\tau$. В новых переменных Q, P ему соответствует решение

$$Q = Q_0 \cos 2t, \quad P = -2Q_0 \sin 2t \tag{14}$$

Из равенства гамильтонианов в начальный момент времени

$$(y_0 - y_0^{-1})^2 = y_0^2 + y_0^{-2} - 2 = 4Q_0^2 = P^2 + 4Q^2$$

находим $y_0^2 + y_0^{-2} = P^2 + 4Q^2 + 2, (y_0 + y_0^{-1})^2 = P^2 + 4Q^2 + 4, 2Q_0 = y_0 - 1/y_0$. Отсюда следует

$$(y_0^2 - y_0^{-2})\cos 2\tau = (y_0 + y_0^{-1})2Q = 2Q\sqrt{P^2 + 4Q^2 + 4}$$

Решение (7) запишется так

$$1 + q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2Q\sqrt{P^2 + 4Q^2 + 4} + P^2 + 4Q^2 + 2}$$

С помощью этих формул находим закон преобразования переменных

$$R(Q, P) = P^2 + 4Q^2 + 2 + 2Q\sqrt{P^2 + 4Q^2 + 4},$$

$$q(Q, P) = \sqrt{R(Q, P)/2} - 1, \tag{15}$$

$$p(Q, P) = \frac{dq}{d\tau} = P\sqrt{\frac{P^2 + 4Q^2 + 4}{2R(Q, P)}}$$

Замена переменных (15) обладает следующими свойствами:

- 1) Замена каноническая. Дифференциальная форма $PdQ - pdq$ является полным дифференциалом.
- 2) Подстановка (15) в исходный гамильтониан $H(q, p)$ преобразует его в нормальную форму $\tilde{H}(Q, P)$.
- 3) Подстановка решения (14) в замену (15) дает точное решение исходной гамильтоновой системы.

Точно также можно получить нормализующую замену для нелинейной системы варианта 2.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для семейства нелинейных уравнений $\ddot{x} + kx^s = nx^{-r}$ показатели степеней $s = 1, n = -3$ и $s = 0, n = -1/2$ являются единственными, для которых решение описывает таутохронные колебания. Этот вывод демонстрирует эффективность метода инвариантной нормализации, который позволяет достаточно просто строить высокие приближения нормальной гамильтоновой формы. Обычно нормализующая замена и нормальная гамильтонова форма нелинейной системы представляются в виде рядов. Найден редкий случай, когда для сильно нелинейной системы каноническая замена переменных (15) точно приводит гамильтониан H (13) к его нормальной форме \tilde{H} .

Найденные гамильтонианы таутохронных движений нелинейных систем удобны для тестирования программ, в которых вычисляются

коэффициенты нормальных форм и находятся нормализующие преобразования. Для этого надо ввести в тестируемый программный комплекс исходные гамильтонианы варианта 1 или варианта 2 и вычислять коэффициенты нормальных форм n -го приближения. Для таутохронного гамильтониана H (например, (13)) все приближения нормальных форм выше второго должны быть нулями. Первое отличное от нуля приближение определит асимптотическую точность программного комплекса.

Другой подход определения таутохронных потенциалов демонстрируется в работе [3]. Он базируется на методе Ландау и Лифшиц [2] в разделе “Определение потенциальной энергии по периоду колебаний”. Потенциал находится в неявной форме, но в двух случаях, приведенных в [3], возможна явная форма потенциала как функции координаты. Один случай совпадает с потенциалом (1) и с потенциалом, исследованным более подробно в последующей работе [4]. Выделение таутохронных движений среди уравнений степенного вида (5) и доказательство их единственности, видимо, является оригинальным.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит В.Ф. Журавлева за обсуждение результатов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена по теме государственного задания № 124012500443-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель Р.* Теоретическая механика. Т. 1. Физ. мат. лит. М., 1960 / *Appel P.* Traité de mécanique rationnelle – Tome premier statique-dynamique du point 1902.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Физ. мат. лит. М., 1965
3. *Osupowski E.T., Olsson M.G.* Isynchronous motion in classical mechanics // *Am.J. Phys.* 1987. V. 55. P. 720–725.
4. *Chalykh O.A., Veselov A.P.* A Remark on Rational Isochronous Potentials *Journal of Nonlinear Mathematical Physics* Volume 12, Supplement 1. 2005. P. 179–183.
5. *Буданов В.М.* Об одной изохронной нелинейной системе. // *Вестн. моск. ун-та. сер.1, математика. механика.* 2013. № 6. С. 59–63. / *V.M. Budanov, On a nonlinear isochronous system. Moscow Univ. Mech. Bull.* 68, (2013).
6. *Биркгоф Д.Д.* Динамические системы. Ижевск; Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999, 408 с. / *Birkhoff D.* *Dynamical Systems.* Publisher, Edwards, 1927
7. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 304 с. / *Zhuravlev V.F.* *Fundamentals of Theoretical Mechanics.* М.: FIZMATLIT, 2008. 304 с. (in Russian)
8. *Журавлев В.Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем. // *ПММ*, 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356–365. / *Zhuravlev V. Ph.* Invariant normalization of non-autonomous Hamiltonian systems *J. Applied Mathematics and Mechanics.* 2004. V. 66. № 3. P. 356–365

ABOUT TAUTOCHRONIC MOVEMENTS

A. G. Petrov^a

Presented by Academician of the RAS V. F. Zhuravlev

^a*Ishlinsky Institute of Mechanics Problems of RAS, Moscow, Russia*

It is shown that a material point, under the influence of an attractive linear force and a repulsive force inversely proportional to the cube of the distance from the center of attraction, performs a periodic motion, the period of which does not depend on the initial data (tautochronic motion). The problem is reduced to a nonlinear autonomous second-order equation, the general solution of which is expressed in terms of elementary functions. It has also been proven that for other power laws of repulsive force, except for degrees 0, 1 and –3, the movement of a material point is not tautochronous.

Keywords: tautochronic motion, periodic solution, Hamiltonian system, Hamiltonian normal form method

УДК 519.615.5

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ БРЕНТА

© 2024 г. И. Е. Капорин¹, *

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым

Поступило 13.03.2024 г.

После доработки 20.05.2024 г.

Принято к публикации 16.07.2024 г.

Предлагается параметризация канонических разложений тензоров матричного произведения с многократно меньшим (по сравнению со стандартными уравнениями Брента) числом переменных. Последние определяются численно с использованием итерационного метода решения задачи нелинейных наименьших квадратов. Получены более быстрые по сравнению с известными алгоритмы перемножения двух 4×4 -матриц за 48 умножений и 2×4 -матрицы на 4×5 -матрицу за 32 умножения.

Ключевые слова: быстрое умножение матриц, алгоритм Штрассена, уравнения Брента

DOI: 10.31857/S2686954324040056, EDN: YZJHNB

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Трилинейные уравнения, введенные Р. Брентом [1] в связи с задачей построения быстрых алгоритмов перемножения матриц, представляют собой каноническое разложение ранга r трехмерного $n_3 n_1 \times n_1 n_2 \times n_2 n_3$ -тензора специального вида,

$$\begin{aligned} & \delta(i_2 - j_1)\delta(j_2 - k_1)\delta(k_2 - i_1) = \\ & = \sum_{l=1}^r (X_l)_{i_2, i_1} (Y_l)_{j_2, j_1} (Z_l)_{k_2, k_1} \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$1 \leq i_2, j_1 \leq n_1, \quad 1 \leq j_2, k_1 \leq n_2, \quad 1 \leq k_2, i_1 \leq n_3.$$

Здесь в качестве неизвестных фигурируют элементы матриц $X_l \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_3}$, $Y_l \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_1}$ и $Z_l \in \mathbb{C}^{n_3 \times n_2}$, где $l = 1, \dots, r$, и через $\delta(\cdot)$ обозначена дискретная дельта-функция, т.е., $\delta(0) = 1$ и $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$. Точное решение уравнений Брента непосредственно приводит, в частности, к методу умножения $n_1 \times n_2$ -матрицы на $n_2 \times n_3$ -матрицу с использованием r некоммутативных умножений или, сокращенно, к $(n_1, n_2, n_3; r)$ -алгоритму. Разбиение матриц на блоки и рекурсия позволяют

построить $O(N^\omega)$ -алгоритм перемножения двух $N \times N$ -матриц, где

$$\omega = (3 \log r) / \log(n_1 n_2 n_3). \quad (2)$$

Алгоритмы быстрого матричного умножения, возможно более эффективные, чем $(2, 2, 2; 7)$ -алгоритм Штрассена [2], могут быть найдены при помощи численного решения уравнений Брента для минимально возможных значений r . Одно из последних достижений в этом направлении представляет собой $(3, 3, 6; 40)$ -алгоритм Смирнова [3] с элементами матриц X_l, Y_l, Z_l , принимающими значения $0, 1/2, -1/2$.

Важным с практической точки зрения является применение эквивалентных преобразований полученных матриц X_l, Y_l, Z_l с целью повышения их разреженности, что позволяет понизить число операций сложения и умножения на константы. При этом показатель степени (2) остается неизменным, но может быть существенно понижен коэффициент при главном члене в оценке $O(N^\omega)$. Здесь можно отметить технологию смены базиса, описанную в [4]. Аналогично, рассматриваемые ниже схемы матричного умножения с комплексными коэффициентами могут быть более эффективны при перемножении комплекснозначных матриц по сравнению с их применением к вещественным матрицам. Более того, выявлены два комплекснозначных решения с рангом на единицу меньше, чем для известных вещественных решений, см. ниже табл. 1 и 2. С другой стороны, найденные значения компонент матриц X_l, Y_l, Z_l , как правило,

¹ Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление”
Российской академии наук, Москва, Россия

* E-mail: igorkaporin@mail.ru

заметно меньше единицы по модулю, что улучшает оценки численной устойчивости получаемых рекурсивных алгоритмов в арифметике с плавающей запятой.

Трилинейная система (1) включает $(n_1 n_2 n_3)^2$ уравнений и $(n_3 n_1 + n_1 n_2 + n_2 n_3)r$ неизвестных. Решение задачи (1) либо не существует (при слишком малых r), либо неединственно, причем изолированные решения отсутствуют (т.е. каждая ветвь решений представляет собой непрерывное многообразие). Кроме того, существуют “приближенные решения”, для которых ранг разложения обычно меньше, чем для точных решений уравнений Брента. При этом для таких “решений” стремление невязки уравнений Брента к нулю сопровождается неограниченным ростом некоторых элементов разложения (1). Способы эффективного сведения уравнений Брента к легко решаемым оптимизационным задачам в общем случае неизвестны. Здесь можно упомянуть метод попеременной квадратичной минимизации, на основе которого получен результат [3], однако там были использованы дополнительные эвристики. Суммируя результаты ряда публикаций за последние более чем 50 лет, можно утверждать, что, по крайней мере для $\min(n_1, n_2, n_3) \geq 3$, отыскание частных решений задачи (1) является исключительно трудной вычислительной проблемой.

Введение дополнительных естественных ограничений на неизвестные за счет использования симметрий, присущих левой части уравнения (1), может облегчить отыскание решений уравнений Брента, в частности, за счет сокращения размерностей задачи. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [5], где в случае $n_1 = n_2 = n_3$ к уравнениям (1) были добавлены равенства

$$Y_l = X_{\sigma(l)}, \quad Z_l = X_{\sigma^2(l)}, \quad 1 \leq l \leq r. \quad (3)$$

Здесь $\sigma(\cdot)$ представляет собой перестановку чисел $(1, 2, \dots, r)$, третья степень которой равна тождественной перестановке. Таким образом, число неизвестных сокращается в 3 раза. Фор-

мально, при этом можно опасаться потери некоторых решений. Однако вычисления показывают (см. ниже табл. 2), что зачастую удается не только получать решения, достигающие известных значений ранга r , но иногда и улучшать существующие оценки ранга. В настоящей работе предлагаются новые способы параметризации уравнений Брента, позволяющие существенно уменьшить размерность задачи. Здесь и далее для остатка от деления целого k на натуральное p используется обозначение $k \bmod p$.

Теорема 1. Пусть p и q – натуральные числа, при которых существует решение системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \delta(i_2 - j_1) \delta(j_2 - k_1) \delta(k_2 - i_1) &= \\ &= \sum_{t=1}^q (\widehat{X}_t)_{i_2, i_1} (\widehat{Y}_t)_{j_2, j_1} (\widehat{Z}_t)_{k_2, k_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$1 \leq i_2, j_1 \leq n_1, \quad 1 \leq j_2, k_1 \leq n_2, \quad 1 \leq k_2, i_1 \leq n_3, \quad (5)$$

$$(i_2 - i_1 + j_2 - j_1 + k_2 - k_1) \bmod p = 0. \quad (6)$$

Тогда решению этих уравнений отвечает $(n_1, n_2, n_3; pq)$ –алгоритм перемножения матриц, а решение соответствующих уравнений Брента (1) имеет вид

$$\begin{aligned} (X_{t+sq})_{i_2, i_1} &= (\widehat{X}_t)_{i_2, i_1} \Omega_p^{(i_1 - i_2)s}, \\ (Y_{t+sq})_{j_2, j_1} &= (\widehat{Y}_t)_{j_2, j_1} \Omega_p^{(j_1 - j_2)s}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (Z_{t+sq})_{k_2, k_1} &= (\widehat{Z}_t)_{k_2, k_1} \Omega_p^{(k_1 - k_2)s}, \\ r &= pq, \quad 0 \leq s \leq p-1, \quad 1 \leq t \leq q, \\ \Omega_p &= \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right), \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Замечание 1. Задача (4)–(6) представляет собой частичное каноническое тензорное разложение в силу наличия условия (6).

Подставляя формулы (7) в (1), получаем искомую параметризацию уравнений Брента:

$$\delta(i_2 - j_1) \delta(j_2 - k_1) \delta(k_2 - i_1) = \sum_{t=1}^q \sum_{s=0}^{p-1} (\mathbf{K}^s \widehat{X}_t \mathbf{M}^{-s})_{i_2, i_1} (\Lambda^s \widehat{Y}_t \mathbf{K}^{-s})_{j_2, j_1} (\mathbf{M}^s \widehat{Z}_t \Lambda^{-s})_{k_2, k_1}, \quad (9)$$

$$1 \leq i_2, j_1 \leq n_1, \quad 1 \leq j_2, k_1 \leq n_2, \quad 1 \leq k_2, i_1 \leq n_3, \quad (10)$$

где диагональные матрицы $\mathbf{K} \in C^{n_1 \times n_1}$, $\Lambda \in C^{n_2 \times n_2}$, $\mathbf{M} \in C^{n_3 \times n_3}$ определены как

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \text{Diag}_{1 \leq m \leq n_1} (\Omega_p^{m-1}), \\ \Lambda &= \text{Diag}_{1 \leq m \leq n_2} (\Omega_p^{m-1}), \quad \mathbf{M} = \text{Diag}_{1 \leq m \leq n_3} (\Omega_p^{m-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что при этом выполнены равенства

$$\mathbf{K}^p = I_{n_1}, \quad \Lambda^p = I_{n_2}, \quad \mathbf{M}^p = I_{n_3}, \quad (12)$$

На первый взгляд, результат теоремы 1 обладает недостаточной общностью из-за требования, чтобы ранг r был составным числом. Так, многие известные решения уравнений Брента определены для значений r , равных простому числу,

например $r = 7$ или $r = 23$ (см. [2] и [6], соответственно). Однако здесь можно применить следующее обобщение теоремы 1, связанное с требованием наличия специального шаблона разреженности для матриц $\widehat{X}_t, \widehat{Y}_t, \widehat{Z}_t$.

Теорема 2. Пусть числа d_t образуют неубывающую последовательность

$$1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_q = p,$$

и каждое из них является делителем p , возможно включая 1 и p . Тогда при присоединении условий

$$(\widehat{X}_t)_{i_2, i_1} = 0, \quad (i_2 - i_1) \bmod \frac{p}{d_t} \neq 0, \quad t = 1, \dots, q, \quad (13)$$

$$(\widehat{Y}_t)_{j_2, j_1} = 0, \quad (j_2 - j_1) \bmod \frac{p}{d_t} \neq 0, \quad t = 1, \dots, q, \quad (14)$$

$$(\widehat{Z}_t)_{k_2, k_1} = 0, \quad (k_2 - k_1) \bmod \frac{p}{d_t} \neq 0, \quad t = 1, \dots, q, \quad (15)$$

к условиям теоремы 1 ранг получаемого разложения сокращается до значения

$$r = r(p, D) = \sum_{t=1}^q d_t, \quad (16)$$

а соответствующее параметризованное разложение (9) принимает вид

$$\delta(i_2 - j_1)\delta(j_2 - k_1)\delta(k_2 - i_1) = \sum_{t=1}^q \frac{p}{d_t} \sum_{s=0}^{d_t-1} (K^s \widehat{X}_t M^{-s})_{i_2, i_1} (\Lambda^s \widehat{Y}_t K^{-s})_{j_2, j_1} (M^s \widehat{Z}_t \Lambda^{-s})_{k_2, k_1}, \quad (17)$$

$$1 \leq i_2, j_1 \leq n_1, \quad 1 \leq j_2, k_1 \leq n_2, \quad 1 \leq k_2, i_1 \leq n_3. \quad (18)$$

Замечание 2. В частном случае $n_1 = n_2 = n_3$ возникает возможность дополнительно сократить число неизвестных до трех раз, если использовать соотношения (3) с заменой l на t и r на q для преобразования суммы по t в (9).

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе докажем теоремы 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Домножим левую и правую части равенства (4) соответственно на левую и правую части тождества

$$p\delta((i_2 - j_1 + j_2 - k_1 + k_2 - i_1) \bmod p) = \sum_{s=0}^{p-1} \Omega_p^{(i_2-i_1)s+(j_2-j_1)s+(k_2-k_1)s}.$$

При этом правая часть (4) с учетом (7) и (11) принимает требуемый вид правой части (9). Если условие (6) не выполнено, то $\delta((i_2 - j_1 + j_2 - k_1 + k_2 - i_1) \bmod p) = 0$ и справедливость полученного соотношения очевидна. Если же (6) выполнено, то $\delta((i_2 - j_1 + j_2 - k_1 + k_2 - i_1) \bmod p) = 1$, так что левая часть (4) остается неизменной с точностью до множителя p . Теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 2. Ниже для упрощения формул опустим индекс t . Требуемое утверждение легко следует, если установить справедливость равенств

$$\begin{aligned} (K^s \widehat{X}_t M^{-s})_{i_2, i_1} &= (\widehat{X})_{i_2, i_1} \Omega_p^{(i_2-i_1)s} = \\ &= (\widehat{X})_{i_2, i_1} \Omega_p^{(i_2-i_1)(s \bmod d)} \end{aligned}$$

и аналогично для \widehat{Y} и \widehat{Z} . В силу (8) и (13), для этого достаточно убедиться в том, что при

$$(i_2 - i_1) \bmod \frac{p}{d} = 0$$

нацело делится на p разность

$$\begin{aligned} (i_2 - i_1)s - (i_2 - i_1)(s \bmod d) &= \\ = (i_2 - i_1)(s - s \bmod d) &= \left(\frac{p}{d}b\right)(cd) = bcp, \end{aligned}$$

где b и c — некоторые целые числа. Теорема доказана. \square

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Для небольших размеров матриц (см. табл. 1 и 2) при помощи алгоритма решения задачи наименьших квадратов с нулевой невязкой $f(x) = 0$, описанного в [7], были получены числовые значения компонент вектора x , образованного элементами матриц $\widehat{X}_t, \widehat{Y}_t$ и \widehat{Z}_t . Уравнения, определяющие невязку $f(x)$, формировались исходя из (4)–(6), при $D \neq \emptyset$ дополненных уравнениями (13)–(15). При этом от решения требовалась строгая ограниченность согласно $\|x\|_\infty < 1$ и близкая к минимуму (при использовании двойной точности) норма невязки уравнений Брента, а именно, $\|f\|_2 < 10^{-15}$. Выполнение этих требований дает основания предполагать, что известные эквивалентные преобразования решения уравнений Брента [10] позволят получить явные выражения элементов матриц X_l, Y_l и Z_l через алгебраические числа. По крайней мере, для (4,4,4;48)-алгоритма с $p = 4$, представленного в [8], таковыми являются 144 компоненты из 192.

Таблица 1. Сравнение известных верхних границ ранга r для прямоугольных матриц с оценкой $r(p, D)$, где D — множество использованных делителей p , меньших p .

n_1	n_2	n_3	r	ω	ссылка	p	q	D	$r(p, D)$	$\omega(p, D)$	$\ x\ _\infty$	$\ f\ _2$
2	2	2	7	2.807...	[2]	2	4	1	7	2.807...	0.97	1.3E-16
						3	3	1	7	2.807...	0.90	1.2E-16
2	2	3	11	2.894...	[9]	2	6	1	11	2.894...	0.81	2.6E-16
						2	2	4	14	2.855...	0.79	2.6E-16
2	2	4	14	2.855...	[9]	4	4	2	14	2.855...	0.64	1.8E-16
						2	2	5	18	2.894...	0.79	3.4E-16
2	2	5	18	2.894...	[9]	3	6	\emptyset	18	2.894...	0.79	2.0E-16
						2	2	6	21	2.873...	0.91	4.7E-16
2	2	6	21	2.873...	[9]	3	7	\emptyset	21	2.873...	0.89	4.4E-16
						6	4	3	21	2.873...	0.86	1.1E-16
						2	3	3	15	2.810...	0.83	3.4E-16
2	3	3	15	2.810...	[9]	3	5	\emptyset	15	2.810...	0.79	2.8E-16
						2	3	4	20	2.827...	0.80	5.1E-16
2	3	4	20	2.827...	[9]	4	5	\emptyset	20	2.827...	0.84	3.1E-16
						2	3	5	25	2.839...	0.90	6.8E-16
2	3	5	25	2.839...	[9]	5	5	\emptyset	25	2.839...	0.90	6.8E-16
						2	3	6	30	2.847...	0.93	5.8E-16
						3	10	\emptyset	30	2.847...	0.94	4.8E-16
2	3	6	30	2.847...	[9]	6	5	\emptyset	30	2.847...	0.77	1.9E-16
						2	4	4	26	2.820...	0.86	9.0E-16
						4	7	2	26	2.820...	0.91	2.2E-16
2	4	5	33	2.843...	[9]	4	8	\emptyset	32	2.818...	0.92	7.1E-16
						4	9	1	33	2.843...	0.79	4.9E-16
						2	4	6	39	2.839...	0.79	6.3E-16
2	4	8	52	2.850...	[9]	8	7	4	52	2.850...	0.95	1.4E-15
2	5	5	40	2.828...	[9]	5	8	\emptyset	40	2.828...	0.82	3.7E-16
2	5	6	48	2.836...	[9]	6	8	\emptyset	48	2.836...	0.79	1.1E-15
2	5	7	56	2.842...	[9]	7	8	\emptyset	56	2.842...	0.80	6.7E-16
2	6	6	57	2.836...	[9]	6	10	3	57	2.836...	0.87	4.7E-16
3	3	3	23	2.854...	[6]	2	12	1	23	2.854...	0.90	5.2E-16
						4	7	1;2	23	2.854...	0.80	3.5E-16
						2	12	\emptyset	24	2.892...	0.92	4.2E-16
						3	8	\emptyset	24	2.892...	0.92	2.5E-16
						4	6	\emptyset	24	2.892...	0.84	2.1E-16
3	3	4	29	2.818...	[3]	3	10	\emptyset	30	2.847...	0.86	8.7E-16
						4	8	2	30	2.847...	0.95	2.7E-16
3	3	5	36	2.824...	[3]	3	12	\emptyset	36	2.824...	0.89	1.9E-15
3	3	6	40	2.774...	[3]	3	14	\emptyset	42	2.810...	0.97	6.9E-16
3	4	4	38	2.818...	[3]	3	13	\emptyset	39	2.839...	0.87	9.6E-16
3	4	5	47	2.821...	[11]	4	12	\emptyset	48	2.836...	0.99	2.1E-15

Таблица 2. Сравнение известных верхних границ ранга r для квадратных матриц с $r(p, D)$, (где D — множество делителей p , меньших p) при использовании (3); выражения $q = q' + 3q''$ характеризуют перестановку $\sigma(\cdot)$, отвечающую блочно-диагональной матрице перестановок с ведущим блоком $I_{q'}$ и остальными q'' блоками в виде циклических перестановок порядка 3.

n_1	n_2	n_3	r	ω	ссылка	p	q	D	$r(p, D)$	$\omega(p, D)$	$\ x\ _\infty$	$\ f\ _2$
2	2	2	7	2.807...	[2]	2	$4 = 1 + 3 \cdot 1$	1	7	2.807...	0.81	6.6E-17
3	3	3	23	2.854...	[6]	4	$7 = 4 + 3 \cdot 1$	1;2	23	2.854...	0.79	1.6E-14
4	4	4	49	2.807...	[2]	2	$24 = 6 + 3 \cdot 6$	\emptyset	48	2.792...	0.77	1.6E-15
						4	$12 = 3 + 3 \cdot 3$	\emptyset	48	2.792...	0.75	8.1E-16

Результаты численного решения сведены в таблицы 1 и 2. В случае несовпадения рангов меньшее значение выделено жирным шрифтом. Из таблицы 1 видно улучшение до $r = 32$, достигнутое для задачи перемножения прямоугольных матриц с $n_1 = 2$, $n_2 = 4$ и $n_3 = 5$, а таблица 2 представляет два алгоритма для перемножения двух квадратных матриц 4-го порядка за 48 активных умножений. Отсутствие этих результатов в известных источниках (где рассматривались вещественные числа) позволяет предположить, что ранг тензора матричного умножения может понижаться при переходе к комплексным числам. Отметим, что в [12] утверждается существование $(4,4,4;r)$ -алгоритма с $r < 49$ над полем комплексных чисел.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные выше представления решений уравнений Брента позволяют, с одной стороны, облегчить численное решение последних за счет кратного сокращения числа уравнений и неизвестных, и, с другой стороны, не слишком сильно сузить многообразие решений, чтобы сдержать возможное завышение оценок ранга. Результат численного решения полученных трilinearных или кубических систем нелинейных уравнений считался допустимым, если не только невязка уравнений Брента была близка к пределу машинной точности, но и максимум модуля компонент решения был меньше единицы. Это позволило надежно отсеять так называемые “приближенные алгоритмы”, зависящие от малого параметра. Последние гораздо менее пригодны для вычислений в арифметике с плавающей точкой ввиду неограниченного роста величин некоторых компонент решения уравнения Брента при устремлении нормы невязки к нулю, см. [13] и цитированные там источники. Можно предполагать, что известные эквивалентные преобразования решения уравнений Брента позволят получить явные выражения коэффициентов через константы, являющиеся алгебраическими числами.

Найденные решения параметризованных уравнений Брента для большинства рассчитанных вариантов имеют ранг не больший (а иногда и меньший) по сравнению с известными результатами. В частности, получен алгоритм перемножения двух матриц 4-го порядка за 48 активных умножений, а также $(2,4,5;32)$ -алгоритм для прямоугольных матриц.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность Е.Е. Тыртышникову за полезные обсуждения данной работы, а также анонимным рецензентам за ценные замечания, улучшившие ее изложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brent R.P.* Algorithms for matrix multiplication. (Report No. STAN-CS-70-157). Stanford Univ. CA Dept. of Computer Science, 1970, 58p.
2. *Strassen V.* Gaussian elimination is not optimal // Numer. Math. 1969. V. 13. № 4. P. 354–356.
3. *Смирнов А.В.* О билинейной сложности и практических алгоритмах умножения матриц // ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. № 12. С. 1970–1984.
4. *Beniamini G. et al.*, Sparsifying the operators of fast matrix multiplication algorithms. arXiv preprint arXiv:2008.03759 (2020) <https://arxiv.org/pdf/2008.03759.pdf>
5. *Ballard G., Ikenmeyer C., Landsberg J.M., Ryder N.* The geometry of rank decompositions of matrix multiplication II: 3×3 matrices // J. of Pure and Applied Algebra. 2019. V. 223. № 8. P. 3205–3224.
6. *Laderman J.D.* A noncommutative algorithm for multiplying 3×3 matrices using 23 multiplications // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. V. 82. № 1. P. 126–128.
7. *Kaporin I.* A derivative-free nonlinear least squares solver. In: Olenev N.N., Evtushenko Y.G., Jacimovic M., Khachay M., Malkova V. (eds.) Optimization and Applications. OPTIMA 2021. Lecture Notes in Computer Science, V. 13078. P. 217–230. Springer, Cham, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-91059-4_16
8. *Kaporin I.* Verifying the correctness of the $(4,4,4;48)$ matrix multiplication scheme with complex coefficients exact up to the floating point tolerance // 2024. URL: <https://cloud.mail.ru/public/Yfij/ErDxopqBh>
9. *Hopcroft J.E., Kerr L.R.* On minimizing the number of multiplications necessary for matrix multiplication // SIAM Journal on Appl. Math. 1971. V. 20. № 1 P. 30–36.
10. *Berger G.O., Absil P.A., De Lathauwer L., Jungers R.M., Van Barel M.* Equivalent polyadic decompositions of matrix multiplication tensors // J. of Comput. and Appl. Math. 2022. V. 406. P. 113941. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113941>
11. *Fawzi A. et al.* Discovering faster matrix multiplication algorithms with reinforcement learning // Nature. 2022. V. 610. № 7930. P. 47–53.
12. *Li X., Zhang L., Ke Y.* Deflation conjecture and local dimensions of Brent equations // arXiv preprint arXiv:2310.11686. 2023 Oct 18.
13. *Ballard G., Weissenberger J., Zhang L.* Accelerating neural network training using arbitrary precision approximating matrix multiplication algorithms // 50th International Conference on Parallel Processing Workshop 2021 Aug 9. P. 1–8. <https://doi.org/10.1145/3458744.3474050>

SEMI-ANALYTICAL SOLUTION OF BRENT EQUATIONS**I. E. Kaporin^a**

Presented by Academician of the RAS E. E. Tyrtshnikov

^a*FRC CSC RAS, Moscow, Russia*

A parametrization of Brent equations is proposed which admit for a several times reduction of the number of unknowns and equations. The arising equations are solved numerically, and for the resulting fast matrix multiplication algorithms many known values of rank are reproduced and even improved, in particular, the designs (4, 4, 4; 48) and (2, 4, 5; 32) are found.

Keywords: fast matrix multiplication, Brent equations, Strassen algorithm

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ 3-КНФ ФОРМУЛ

© 2024 г. С. И. Уваров^{1, *}

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым

Поступило 22.04.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принято к публикации 16.07.2024 г.

Настоящая работа посвящена локализации случайных 3-КНФ формул, полиномиально разрешимых резолюционным алгоритмом. Показано, что случайные формулы с числом дизъюнктов, пропорциональным квадрату числа переменных, с вероятностью близкой к единице полиномиально разрешимы при коэффициенте пропорциональности, превышающем найденный порог.

Ключевые слова: 3-КНФ, дизъюнкт, резолюция, алгоритмическая сложность, задача выполнимости

DOI: 10.31857/S2686954324040067, **EDN:** YZHCIZ

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Важность известной проблемы алгоритмической сложности задач, принадлежащих классу NP, ярко представлена в публикации С. Кука [1]. Задача выполнимости формул, заданных в 3-КНФ, — одна из базовых задач в проблематике исследований алгоритмической сложности NP задач (обзоры по исследованию 3-КНФ формул представлены в [2, 3, 4, 5]).

3-КНФ формула — это конъюнкция различных 3-дизъюнктов. Каждый 3-дизъюнкт — это дизъюнкция $\ell_a \vee \ell_b \vee \ell_c$ трех литералов ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c различных логических переменных a, b, c , соответственно. Литерал — это сама переменная v или ее отрицание $\neg v$, а общее количество переменных в формуле обозначается через N . Далее дизъюнкт обозначается как множество литералов, заключенных в фигурные скобки. С учетом того, что каждая переменная может быть представлена двумя литералами, количество $\mathfrak{M}(N)$ различных 3-дизъюнктов от N переменных равно $8 \cdot \binom{N}{3}$.

В литературе при исследовании различных аспектов задачи выполнимости широко используются случайные 3-КНФ формулы. Случайная

3-КНФ формула содержит M_0 3-дизъюнктов, выбранных равномерно случайным образом из множества, содержащего $\mathfrak{M}(N)$ дизъюнктов. Отношение числа M_0 дизъюнктов в формуле к числу N входящих в них разных переменных обозначается через R .

К настоящему времени (с использованием параметра R) для случайных 3-КНФ формул выделено несколько областей в координатах N, M_0 . Если $R > 4,51$, то с ростом N доля выполнимых случайных 3-КНФ формул становится пренебрежимо малой [6, 7]. При $R < 3,52$ пренебрежимо малой становится доля невыполнимых формул [8]. При “фазовом переходе” $R \approx 4,3$ доли выполнимых и невыполнимых формул примерно равны [2, 7, 8].

Известна область локализации полиномиально разрешимых выполнимых случайных 3-КНФ формул: при $R < 1,63$ выполнимость таких формул с вероятностью $1 - o(1)$ может быть установлена алгоритмом полиномиально ограниченной сложности [2, 9, 10].

В настоящей работе аналитически выделена область локализации полиномиально разрешимых с вероятностью близкой к единице невыполнимых случайных 3-КНФ формул. Это формулы, в которых

$$M_0 \geq 0,061 \cdot N^2. \quad (1)$$

С ростом N числа переменных вероятность доказательства их невыполнимости алгоритмом полиномиальной сложности увеличивается.

¹ Институт проблем управления Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: suvarov@ipu.ru

2. ВЫВОД УСЛОВИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Известным свойством КНФ формул является возможность резолюционного вывода нового дизъюнкта (резольвенты) $\{b, c, -d, e\}$ из пары резолютов $\{a, b, c\}$ и $\{-a, c, -d, e\}$, что далее обозначается: $\{a, b, c\}, \{-a, c, -d, e\} \vdash \{b, c, -d, e\}$. Резольвента содержит (в единственном числе) все литералы обоих резолютов за исключением контрарных литералов a и $-a$.

Обозначим через $\mathfrak{R}(S, T, U)$ резолюцию, первый и второй резолюты которой содержат соответственно S и T литералов, а резольвента содержит U литералов. Если резолюты содержат Q общих литералов, а некоторая переменная представлена в резолютах контрарными литералами, то $U = S + T - Q - 2$. При условии, что $S = T = Q + 1$, получаем $U = Q = S - 1 = T - 1$. В остальных случаях $U \geq S$ и $U \geq T$. Полученный U -дизъюнкт добавляется в исходную КНФ формулу без изменения ее свойства выполнимости/ невыполнимости. В случае вывода пустого дизъюнкта $\{\}$ невыполнимость формулы оказывается доказанной. Полнота алгоритма означает, что если не доказана невыполнимость формулы, то она выполнима.

Алгоритмическая сложность резолюционного доказательства невыполнимости 3-КНФ формул имеет экспоненциальную по числу переменных оценку [11, 12]. Такая оценка связана с необходимостью вывода резольвент, число литералов в которых соизмеримо с числом переменных.

Если принудительно ограничить константой максимально допустимое значение U , алгоритм доказательства невыполнимости КНФ формулы перестает быть полным, а оценка его алгоритмической сложности становится полиномиальной по N . Неполнота алгоритма состоит в том, что если не доказана невыполнимость формулы, то это еще не означает, что формула обязательно выполнима.

Ограничение $U \leq 3$ позволяет выполнять только резолюции следующих типов:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(3, 3, 3) &: \{a, b, c\}, \{-a, b, d\} \vdash \{b, c, d\}; \\ \mathfrak{R}(3, 3, 2) &: \{a, b, c\}, \{-a, b, c\} \vdash \{b, c\}; \\ \mathfrak{R}(3, 2, 3) &: \{a, b, c\}, \{-a, d\} \vdash \{b, c, d\}; \\ \mathfrak{R}(3, 2, 2) &: \{a, b, c\}, \{-a, b\} \vdash \{b, c\}; \\ \mathfrak{R}(2, 2, 2) &: \{a, b\}, \{-a, c\} \vdash \{b, c\}; \\ \mathfrak{R}(2, 2, 1) &: \{a, b\}, \{-a, b\} \vdash \{b\}; \\ \mathfrak{R}(2, 1, 1) &: \{a, b\}, \{-a\} \vdash \{b\}; \\ \mathfrak{R}(1, 1, 0) &: \{a\}, \{-a\} \vdash \{\}. \end{aligned}$$

Аналитический вывод достаточного условия (1) полиномиальной разрешимости случайных 3-КНФ формул удобно осуществлять, оперируя резолютами единой длины. С этой целью введена модифицированная резолюция $\mathfrak{R}^*(3, 3, 2)$ вида $\{a, b, c\}, \{-a, b, c\} \vdash \mathcal{E}(b, c)$, которая порождает множество $\mathcal{E}(b, c)$, состоящее из 3-дизъюнктов $\{b, c, x\}$. Здесь x представляет все литералы логических переменных за исключением литералов переменных a, b, c . Множество $\mathcal{E}(b, c)$ содержит $2(N - 3)$ дизъюнктов.

Рассмотрим возможность доказательства невыполнимости 3-КНФ формул с использованием только двух резолюций: $\mathfrak{R}(3, 3, 3)$ и $\mathfrak{R}^*(3, 3, 2)$. Такое ограничение позволяет считать, что преобразуемая КНФ формула всегда состоит только из 3-дизъюнктов.

Если КНФ формула содержит более, чем $\mathfrak{M}(N) \cdot 7 / 8$ различных 3-дизъюнктов, то она невыполнима. Действительно, при этом найдутся 3 переменные, из литералов которых построены 8 дизъюнктов, что означает противоречивость формулы.

Рассмотрим алгоритм 1 доказательства невыполнимости 3-КНФ формул, использующий только два упомянутых типа резолюций $\mathfrak{R}(3, 3, 3)$ и $\mathfrak{R}^*(3, 3, 2)$.

Алгоритм 1

Дано: 3-КНФ формула, содержащая M_0 дизъюнктов. Множество этих дизъюнктов обозначается M_0 .

Найти: Является ли формула невыполнимой (или ее свойство неопределено)?

1. Из резолютов множества M_0 , резолюциями $\mathfrak{R}(3, 3, 3)$ и $\mathfrak{R}^*(3, 3, 2)$, выводятся новые дизъюнкты. Из полученных новых дизъюнктов формируется множество M_1 .

Полагаем $k = 1$.

2. Новые дизъюнкты множества M_{k+1} выводятся резолюциями $\mathfrak{R}(3, 3, 3)$ и $\mathfrak{R}^*(3, 3, 2)$, причем первыми резолютами являются дизъюнкты из множества M_k , а вторыми резолютами — дизъюнкты из множества $\bigcup_{j=0}^k M_j$.

(а) Множество M_{k+1} пусто. Алгоритм не смог доказать невыполнимость формулы, изначально содержащей M_0 дизъюнктов. **ОСТАНОВ.**

(б) Множество M_{k+1} не пусто:

i. Число дизъюнктов в множестве $\bigcup_{j=0}^{k+1} M_j$ превышает число $\mathfrak{M}(N) \cdot 7 / 8$ — невыполнимость формулы доказана. **ОСТАНОВ.**

ii. Число дизъюнктов в множестве $\bigcup_{j=0}^{k+1} \mathcal{M}_j$ не превышает число $\mathfrak{M}(N) \cdot 7/8$; полагаем $k = k + 1$ и повторяем шаг 2.

Оценим ожидаемое число дополнительных 3-дизъюнктов, которые могут быть получены резолюционным правилом из множества \mathcal{M}_0 исходных 3-дизъюнктов. Число дизъюнктов в множестве \mathcal{M}_k обозначается через M_k .

Дизъюнкт $\{a, b, c\}$ резолюциями $\mathfrak{R}(3, 3, 3)$ в паре с любым из шести дизъюнктов $\{\neg a, b, x\}$, $\{\neg a, c, x\}$, $\{a, \neg b, x\}$, $\{\neg b, c, x\}$, $\{a, \neg c, x\}$, $\{b, \neg c, x\}$ порождает новый 3-дизъюнкт (резольвенту). В этом случае x является одним из $2(N - 3)$ литералов от N переменных.

Ожидаемое число 3-дизъюнктов в множестве \mathcal{M}_1 , которые порождаются резолюциями $\mathfrak{R}(3, 3, 3)$ над множеством \mathcal{M}_0 исходных дизъюнктов, оценивается как:

$$M_1 = 6 \cdot 2(N - 3) \frac{M_0 \cdot M_0}{2 \cdot \mathfrak{M}(N)}.$$

Необходимо учесть возможность применения на множестве \mathcal{M}_0 дизъюнктов резолюции $\mathfrak{R}^*(3, 3, 2)$. Резолюция осуществима, если первым резолютом является дизъюнкт $\{a, b, c\}$, а вторым — любой из трех дизъюнктов $\{\neg a, b, c\}$, $\{a, \neg b, c\}$, $\{a, b, \neg c\}$. Резольвентой, соответственно, будут 2-дизъюнкты из $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$. С учетом того, что вместо одного 2-дизъюнкта добавляются $2(N - 3)$ 3-дизъюнктов, ожидаемое число добавленных резолюциями $\mathfrak{R}^*(3, 3, 2)$ 3-дизъюнктов оценивается как

$$M_1'' = 3 \cdot 2(N - 3) \frac{M_0 \cdot M_0}{2 \cdot \mathfrak{M}(N)}.$$

Суммарно по резолюциям $\mathfrak{R}(3, 3, 3)$ и $\mathfrak{R}^*(3, 3, 2)$ получается

$$\widehat{M}_1 = M_1' + M_1'' = 9(N - 3) \frac{M_0 \cdot M_0}{\mathfrak{M}(N)}. \quad (2)$$

Учитывая, что порождаемые дизъюнкты могут совпадать с уже имеющимися (при условии, что $\widehat{M}_{k+1} + \sum_{j=0}^k M_j \leq \mathfrak{M}(N)$), при $k \geq 0$ число дизъюнктов в множестве \mathcal{M}_{k+1} оценивается как

$$M_{k+1} \geq \widehat{M}_{k+1} \cdot \left(1 - \frac{\widehat{M}_{k+1} + \sum_{j=0}^k M_j}{\mathfrak{M}(N)} \right). \quad (3)$$

На k -ом шаге ($k \geq 1$) осуществляется попытка построения новых 3-дизъюнктов на основе ре-

золюций дизъюнктов из множества \mathcal{M}_k с дизъюнктами как из множества $\bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{M}_j$, так и из множества \mathcal{M}_k . Полученная рекуррентная формула записывается в виде

$$\widehat{M}_{k+1} = \frac{18(N - 3) \cdot M_k}{\mathfrak{M}(N)} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} M_j + \frac{M_k}{2} \right). \quad (4)$$

Далее рассматривается упрощенная система рекуррентных соотношений, $k \geq 1$:

$$M_1 = \frac{9(N - 3) \cdot M_0}{\mathfrak{M}(N)} \cdot M_0, \quad (5)$$

$$M_{k+1} = \frac{18(N - 3) \cdot M_k}{\mathfrak{M}(N)} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} M_j + \frac{M_k}{2} \right).$$

Для соотношений (5) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Для любого $k \geq 1$ при $M_{k+1} \geq M_k$ справедливо, что $M_{k+2} \geq M_{k+1}$.

Условие равенства значений M_1 и M_2 является достаточным условием того, что последовательность M_1, M_2, \dots, M_j , $j > 2$, является убывающей и, следовательно, в рекуррентном процессе может быть получено необходимое число 3-дизъюнктов, обеспечивающее доказательство невыполнимости формулы.

Если $M_1 = M_2$, и M_1 и M_2 заданы формулами (5) то

$$9(N - 3) \frac{M_0 \cdot M_0}{\mathfrak{M}(N)} = \frac{18(N - 3) \cdot M_1}{\mathfrak{M}(N)} \cdot \left(M_0 + \frac{M_1}{2} \right).$$

При упрощении данного выражения получается $M_0 \cdot M_0 = 2M_0 \cdot M_1 + M_1 \cdot M_1$. Далее после подстановки выражения (5) для M_1 следует

$$M_0 \cdot M_0 = 2M_0 \cdot \frac{9(N - 3) \cdot M_0}{\mathfrak{M}(N)} \cdot M_0 + \left(\frac{9(N - 3) \cdot M_0}{\mathfrak{M}(N)} \cdot M_0 \right)^2.$$

Дальнейшее упрощение и обозначение через A величины $9(N - 3) \cdot M_0 / \mathfrak{M}(N)$ приводит к квадратному уравнению $1 = 2A + A^2$ с положительным корнем $A = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$. При этом

$$M_0 = \frac{(\sqrt{2} - 1) \cdot \mathfrak{M}(N)}{9(N - 3)}.$$

В представлении M_0 в виде $r \cdot N^2$ получается

$$r = \frac{8(\sqrt{2} - 1)}{27} \cdot \frac{N(N - 1)(N - 2)}{N^2(N - 3)}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} r \approx 0,061.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ И ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ

Доказательство утверждения 1. Рассматривается разность

$$M_{k+2} - M_{k+1} = \frac{18(N-3)M_{k+1}}{\mathfrak{M}(N)} \left(\sum_{j=0}^k M_j + \frac{M_{k+1}}{2} \right) - \frac{18(N-3)M_k}{\mathfrak{M}(N)} \left(\sum_{j=0}^{k-1} M_j + \frac{M_k}{2} \right).$$

После подстановки в правую часть вместо M_{k+1} меньшей величины M_k , получится

$$M_{k+2} - M_{k+1} \geq \frac{18(N-3)M_k}{\mathfrak{M}(N)} \left(\sum_{j=0}^k M_j + \frac{M_k}{2} \right) - \frac{18(N-3)M_k}{\mathfrak{M}(N)} \left(\sum_{j=0}^{k-1} M_j + \frac{M_k}{2} \right).$$

Выполнение упрощающих преобразований приводит к $M_{k+2} - M_{k+1} \geq 18(N-3) \cdot M_k^2 / \mathfrak{M}(N) \geq 0$.

Для оценки вероятности того, что условие 1 обеспечивает доказательство (полиномиальной сложности) невыполнимости случайной 3-КНФ формулы, рассмотрим модифицированную систему рекуррентных формул (2) – (4). В этих модифицированных формулах через $\alpha(M_0)$ обозначено M_0 , а для $k \geq 1$ через $\alpha(M_k)$ и $\gamma(M_k)$ обозначено $\lfloor \beta \cdot M_k \rfloor$, $1 \geq \beta > 0$ и $\lfloor 2 \cdot M_k - 1 \rfloor$, соответственно. Формула (2) для вычисления M_1 остается неизменной, а формула (4) приобретает вид

$$M_{k+1} \geq \widehat{M}_{k+1} \cdot \left(1 - \frac{\widehat{M}_{k+1} + \sum_{j=0}^k \alpha(M_j)}{\mathfrak{M}(N)} \right). \quad (6)$$

Формула (3) для вычисления \widehat{M}_k (при $k > 1$) преобразуется в

$$\widehat{M}_{k+1} = \frac{18(N-3) \cdot \alpha(M_k)}{\mathfrak{M}(N)} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k-1} \alpha(M_j) + \frac{\alpha(M_k)}{2} \right). \quad (7)$$

Непосредственное вычисление по формулам (2), (4) и (3) демонстрирует то, что для $N \geq 64$ необходимая для доказательства невыполнимости формулы сумма дизъюнктов набирается за 7 циклов работы алгоритма 1. Вычисление по формулам (2), (6) и (7) при $\beta = 0,7$ дает 17 циклов.

$$\sum_{k=0}^{17} \alpha(M_k) > \mathfrak{M}(N) \cdot 7 / 8.$$

В свою очередь, это означает, что если в каждом цикле $k \geq 1$ работы алгоритма будет получено число $\alpha(M_k)$ новых дизъюнктов, превышающее $0,7 \cdot M_k$, невыполнимость формулы будет доказана.

Вероятность p_k того, что при ожидаемом числе дизъюнктов M_k и биномиальном распределении $\text{Bin}(\gamma(M_k), 0,5)$ число новых дизъюнктов будет меньше либо равно $\alpha(M_k)$, составляет

$$p_k = 2^{-\gamma(M_k)} \sum_{j=1}^{\alpha(M_k)} \binom{\gamma(M_k)}{j}. \quad (8)$$

Вероятность того, что процесс генерации новых дизъюнктов завершится доказательством невыполнимости 3-КНФ формулы оценивается как:

$$P = \prod_{j=1}^{17} (1 - p_j). \quad (9)$$

Вычисление по формулам (2), (6), (7), (8) и (9) дает следующую оценку вероятности того, что для случайной 3-КНФ формулы, содержащей $0,061 \cdot N^2$ дизъюнктов, алгоритмом 1 будет доказана невыполнимость: при $N = 256,1024$ и 4096 вероятность составляет $1 - 10^{-32}$, $1 - 10^{-481}$ и $1 - 10^{-7500}$, соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cook S. The Importance of the P versus NP Question // JACM. 2003. V. 50. P. 27–29.
2. Biere A., Heule M., Maaren H., Walsh T. Handbook of Satisfiability (Second Edition). IOS Press, 2021. <https://doi.org/10.3233/FAIA336>
3. Gomes C., Rautz H., Sabharwal A., Selman B. Satisfiability Solvers // Handbook of Knowledge Representation. 2008. P. 89–133.
4. Beame P., Kautz H.A., Sabharwal A. Towards Understanding and Harnessing the Potential of Clause Learning // Journal of Artificial Intelligence Research. 2004. V. 22. P. 319–351.
5. Ganesh V., Vardi M. On the Unreasonable Effectiveness of SAT Solvers // Beyond the Worst-Case Analysis of Algorithms. 2020. P. 547–566.
6. Kirkpatrick S., Selman B. Critical Behavior in the Satisfiability of Random Boolean Expressions // Science. 1994. V. 264. № 5163. P. 1297–1301.
7. Merzard M., Parisi G., Zecchina R. Analytic and Algorithmic Solution of Random Satisfiability Problems // Science. 2002. V. 297. P. 812–815.
8. Kaporis A.C., Kirousis L.M., Lias E.G. The Probabilistic Analysis of a Greedy Satisfiability Algorithm // Random Structures and Algorithms. 2006. V. 28. № 4. P. 444–480.

9. Broder A.Z., Frieze A.M., Upfal E. On the Satisfiability and Maximum Satisfiability of Random 3-CNF Formulas // In 4th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. SIAM. 1993. P. 322–330.
10. Mitzenmacher M. Tight Thresholds for the Pure Literal Rule // DEC/SRC Technical Note 1997–011. 1997.
11. Haken A. The Intractability of Resolution // Theoretical Computer Science. 1985. V. 39. P. 297–308.
12. Алехнович М.В., Разборов А.А. Нижние оценки для полиномиального исчисления в случае идеалов, отличных от биномиальных // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2003. Т. 242. С. 23–43.

SUFFICIENT CONDITION FOR POLYNOMIAL SOLVABILITY OF RANDOM 3-CNF FORMULAS

S. I. Uvarov^a

Presented by Academician of the RAS S. N. Vassilyev

^aV.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

This paper is devoted to the localisation of random 3-CNF formulas that are polynomially solvable by the resolution algorithm. It is shown that random formulas with the number of clauses proportional to the square of the number of variables, are polynomially solvable with probability close to unity when the proportionality coefficient exceeds the found threshold.

Keywords: 3-CNF, clause, resolution, complexity, satisfiability problem

УДК 531.38

ПРЕОДОЛЕНИЕ МНОГОНОГИМ РОБОТОМ ШИРОКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ

© 2024 г. Ю. Ф. Голубев^{1, *}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 16.04.2024 г.

После доработки 19.05.2024 г.

Принято к публикации 28.05.2024 г.

Найдена аналитическая оценка сверху максимальной ширины зоны, запрещенной для наступания, которую многоногий шагающий робот может преодолеть в режиме статической устойчивости. Используя математические модели шестиногого и четырехногого роботов с продольным расположением точек подвеса ног, показано, что полученная оценка является не улучшаемой. С этой целью сформированы следовые последовательности постановки ног робота, обеспечивающие достижение значения оценки. Для модели шестиногого робота найдена зависимость максимальной ширины зоны от длины корпуса.

Ключевые слова: шагающие роботы, преодоление препятствий

DOI: 10.31857/S2686954324040078, **EDN:** YZENA0

1. ВВЕДЕНИЕ

Шагающие машины опираются на подстилающую поверхность, оставляя дискретные следы [1–3]. Они во многих случаях имеют возможность проходить над препятствием, не наступая на него. Ниже рассматривается вопрос о преодолении n -ногим шагающим аппаратом экстремально широкого и протяженного препятствия. С этой целью робот может применять методы основанные на анализе способности робота дотянуться до точек опоры на противоположной стороне препятствия [3], и если это возможно, то пройти над препятствием, не обязательно соблюдая при этом регулярность походки. Прыжки и бег [4] в данной работе не рассматриваются.

Указанная проблема представляет интерес как с математической, так и с прикладной точек зрения. Математические трудности связаны с тем, что ширина препятствия, которое робот может преодолеть, зависит как от расположения точек опоры, так и от последовательности переноса и постановки ног, а вариантов таких последовательностей даже для случая $n = 6$ чрезвычайно много [3]. С прикладной точки зрения важно понимать, какая конструктивная схема и

параметры робота должны быть, чтобы его применение было наиболее эффективным при движении по неподготовленной местности.

В литературных источниках чаще всего встречается анализ путевой проходимости либо для уже построенных шагающих машин с конкретными техническими решениями, либо анализ, основанный на необходимых условиях статической устойчивости [5]. В предлагаемой работе применяются достаточные условия продольной статической устойчивости, а для простоты исследования выбрана упрощенная кинематическая схема шагающего аппарата, учитывающая основные особенности принципа передвижения с помощью ног. Оказалось, что даже такая простая схема позволяет сделать выводы относительно целесообразной конструкции робота. Результаты компьютерного моделирования подтверждают полученные аналитические оценки [6].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем иметь в виду изолированные препятствия, которые можно заключить в область между двумя вертикальными плоскостями, перпендикулярными направлению движения корпуса таким образом, что вне этой области в достаточно большой её окрестности отсутствуют точки, запрещённые для наступания. На опорной поверхности указанные плоскости выделяют

¹ *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

^{*} *E-mail: golubev@keldysh.ru*

полосу, называемую зоной препятствия, внутри которой нельзя помещать следовые точки. Ширина d зоны зависит от соотношения размеров препятствия и несущих свойств опорной поверхности.

Пусть робот имеет $n \geq 4$ ног [3] и корпус в качестве твердого тела. Точки подвеса идентичных весомых ног расположены по боковым сторонам прямоугольной несущей рамы, жестко связанной с корпусом, симметрично относительно продольной (вдоль предполагаемого направления движения) и поперечной вертикальных строительных плоскостей корпуса, содержащих его центр масс. Тогда число ног робота $n = 2k$ — чётное. Такая конструкция удобна с точки зрения простоты её модульного наращивания секциями, содержащими дополнительную пару ног. Робот подходит к препятствию передней или задней стороной несущей рамы. Контакт стоп с опорной поверхностью предполагается точечным. При перешагивании через препятствие робот сохраняет направление движения корпуса перпендикулярным границам зоны препятствия. Возникает задача о нахождении максимально возможной ширины зоны препятствия, которое робот может преодолеть. Требуется также указать логическую последовательность постановки ног (следовое расписание) и соответствующее расположение точек опоры, позволяющие аппарату безопасно перешагнуть через такую зону.

Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ — неподвижная декартова система координат. Плоскость $O_1\xi\eta$ горизонтальна. Ось $O_1\xi$ направлена перпендикулярно зоне препятствия. Ось $O_1\zeta$ направлена вертикально вверх. Ось $O_1\eta$ дополняет систему координат $O_1\xi\eta\zeta$ до правой тройки. Начало O_1 расположим со стороны подхода робота к препятствию, так что $\xi = \xi_m$ — уравнение ближней (по отношению к роботу) границы зоны препятствия, а $\xi = \xi_M$ — уравнение её дальней границы, ξ_m и ξ_M — постоянные, причём $0 < \xi_m < \xi_M = \xi_m + d$.

Декартову право-ориентированную систему координат $Oxyz$ жестко свяжем с несущей рамой корпуса аппарата так, чтобы плоскость Oxy содержала точки подвеса всех ног, её начало O совпало с проекцией центра масс корпуса на плоскость Oxy , ось Ox была ориентирована по скорости движения корпуса параллельно боковой стороне несущей рамы, ось Oy была направлена в сторону точек подвеса ног, расположенных с левой стороны корпуса, если смотреть в направлении оси Ox .

Точкам подвеса (и, соответственно, ногам), расположенным справа (если смотреть вперёд в направлении движения) от плоскости Oxz , напишем, начиная с задних ног, последовательные нечетные номера, а ногам, расположенным слева от указанной плоскости, — последовательные четные. Пусть $x_{2j}, y_{2j}, z_{2j} = 0$ — координаты точек подвеса ног левой стороны, а $x_{2j-1}, y_{2j-1}, z_{2j-1} = 0$ — координаты точек подвеса ног правой стороны ($j = \overline{1, k}$) в системе координат $Oxyz$. Потребуем, чтобы $y_i = (-1)^i b$, $b > 0$, $i = \overline{1, n}$. Геометрически это означает, что точки подвеса ног расположены на прямых, лежащих в плоскости Oxy симметрично относительно плоскости Oxz , и равно отстоят от оси Ox на расстояние b . Кроме того, предположим, что $x_{2j-1} = x_{2j} = a[j - (k + 1) / 2]$. Величины a, b постоянны и определяют габариты рамы, так что $(k - 1)a$ — длина несущей рамы и $2b$ — её ширина. Будем считать, что корпус шагающего аппарата движется поступательно, сохраняя в любой момент времени сонаправленную взаимную ориентацию осей координат $O_1\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$.

Положения (x_i^f, y_i^f, z_i^f) стоп ног относительно корпуса определяются соотношениями

$$x_i^f = x_i + q_{xi}, \quad y_i^f = y_i + q_{yi}, \quad z_i^f = z_i + q_{zi}, \quad (1)$$

где величины q_{xi}, q_{yi}, q_{zi} определяют положение i -й стопы относительно точки подвеса и зависят от конструкции соответствующей ноги, например, как в [7].

Обозначим (ξ_0, η_0, ζ_0) абсолютные координаты точки O . Тогда абсолютные координаты стоп ног примут вид

$$\begin{aligned} \xi_i^f &= \xi_0 + x_i + q_{xi}, \\ \eta_i^f &= \eta_0 + y_i + q_{yi}, \quad \zeta_i^f = \zeta_0 + z_i + q_{zi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Потребуем, чтобы при перешагивании через зону препятствия было выполнено ограничение

$$|\eta_i^f - \eta_0| \geq c', \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где c' — постоянная. В дальнейшем предполагается, что точки опоры ног каждой из сторон принадлежат соответственно левой и правой прямолинейным следовым колеям, параллельным боковым сторонам корпуса.

Вертикальные проекции точек опоры на плоскость $O_1\xi\eta$ образуют плоский выпуклый опорный многоугольник D , как минимальное множество точек на плоскости $O_1\xi\eta$, содержащее проекции всех точек опоры робота.

Позиция робота называется статически устойчивой [3], если его центр масс, рассчитан-

ный с учетом массивности корпуса и всех ног, проектируется строго внутрь опорного многоугольника D :

$$C_{\xi\eta} \in (D \setminus \partial D), \quad (4)$$

где $C_{\xi\eta}$ — проекция центра масс аппарата на плоскость $O_1\xi\eta$, ∂D — граница множества D .

При движении по равнинной и в среднем горизонтальной местности для выполнения условия статической устойчивости необходимо, чтобы в число вершин опорного многоугольника входили опорные точки ног каждой из сторон [3].

Зону препятствия Z можно выразить формулой

$$Z = \{(\xi, \eta) : \xi_m < \xi < \xi_M\}, \quad d = \xi_M - \xi_m, \quad (5)$$

так что

$$(\xi_i^f, \eta_i^f) \notin Z. \quad (6)$$

Рассмотрим ситуацию, когда робот вплотную подошёл к ближней границе ξ_m зоны препятствия, и должен переправиться на другую сторону зоны. Это означает, что в начале переправы будет выполнено $\xi_0 + a(k-1)/2 \leq \xi_m$, а в конце переправы должно быть выполнено: $\xi_M \leq \xi_0 - a(1-k)/2$. Из множества G всех последовательностей постановки и точек размещения опорных стоп ног, а также движений корпуса требуется указать последовательность, которая позволит роботу достичь

$$\max_G(d) \quad (7)$$

при выполнении условий (3), (4) и (6).

3. ЗАПАС СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Оценим величину отклонения вдоль оси $O_1\xi$ центра масс шагающего робота от центра масс его корпуса. Координата ξ_c центра масс робота с учётом симметрии расположения точек повеса ног определяется формулой

$$\xi_c = \xi_0 + \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c, \quad (8)$$

где q_{xi}^c — координаты центров масс ног относительно их точек подвеса, m — масса одной ноги, M — масса всего аппарата.

По положению центра рамы корпуса можно надёжно судить о критичности положения центра масс аппарата, если центр масс аппарата и центр масс корпуса достаточно близки по x -координате. Близость указанных центров масс с заданной

точностью ε в критических для потери статической устойчивости случаях обеспечивается посредством надлежащей балансировки позы аппарата.

Определение 1. Позу аппарата назовём продольно ε -сбалансированной, если выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n q_{xi}^c \right| \leq \varepsilon \frac{M}{m}. \quad (9)$$

Например, для шестиногого аппарата любая поза, удовлетворяющая соотношениям

$$q_{x1} = q_{x2} = -q_{x5} = -q_{x6}, \quad q_{x3} = q_{x4} = 0 \quad (10)$$

является абсолютно продольно ε -сбалансированной для любого ε и любой массы ног. Ещё один пример абсолютно продольно ε -сбалансированной позы доставляется равенствами

$$q_{x3} = q_{x4} = -q_{x5} = -q_{x6}, \quad q_{x1} = q_{x2} = 0.$$

Другой пример выглядит так:

$$q_{x1} = q_{x2} = -q_{x3} = -q_{x4}, \quad q_{x5} = q_{x6} = 0.$$

Формула (9) представляет собой условие, при выполнении которого для оценки возможности сохранения продольной статической устойчивости можно пользоваться критерием близости центра рамы к критической границе опорного многоугольника при заданном запасе статической устойчивости ε .

Определение 2. Движение робота считается *продольно статически устойчивым с запасом ε* , если в любой момент времени выполнено условие (9) и

$$\{(\xi, \eta_0) : \xi_0 - \varepsilon \leq \xi \leq \xi_0 + \varepsilon\} \in \mathcal{D}, \quad (11)$$

где ξ — некоторая точка на оси $O\xi$. Геометрически это означает, что проекция центра корпуса робота на плоскость $O_1\xi\eta$ должна быть погружена внутрь опорного многоугольника, а проекция центра корпуса на ось $O_1\xi$ должна отстоять от передней и задней границ опорного многоугольника не меньше, чем на ε . Ясно, что критерий будет физически осмысленным для достаточно малых ε . При использовании критерия (11) предполагается, что ξ_c -координата центра масс робота из-за движения ног может оказаться в любой точке отрезка $[\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon]$, и заранее неизвестно в какой.

4. МАКСИМАЛЬНАЯ ШИРИНА ЗОНЫ ПРЕПЯТСТВИЯ

Расстояние между последовательными точками опоры в координатах $Oxuz$, связанных с

корпусом, будем называть длиной относительного шага. Возможное положение стопы относительно точки подвеса соответствующей ноги стеснено неравенством (3) и описывается соотношениями

$$q_{xi}^2 + q_{yi}^2 + q_{zi}^2 = \rho_i^2 \leq l^2, (-1)^i q_{yi} > c = c' - b \geq 0, \quad (12)$$

где l — максимальная длина ноги. Из формул (12) и (1) следует, что проекция i -й стопы на ось Ox может быть выражена формулой

$$x_i^f = x_i + q_{xi} = x_i \pm L_{xi}, \quad L_{xi} = \sqrt{\rho_i^2 - q_{yi}^2 - q_{zi}^2}, \quad (13)$$

где выбор знака зависит от положения соответствующей точки опоры. Рассмотрим случай, когда шагающий аппарат преодолевает препятствие, двигаясь в положительном направлении оси Ox . Тогда вопрос о возможности опоры i -й стопы о какую-либо точку на грунте с абсциссой ξ связан с анализом справедливости включения

$$(\xi - \xi_0 - x_i) \in [-L_i, L_i], \quad L_i = \max_{\rho_i, q_{yi}, q_{zi}} L_{xi}. \quad (14)$$

Если включение (14) справедливо, то указанную точку можно оставить в качестве предположительно возможной точки опоры. Если же это включение не выполнено, то на такую точку опереться не получится.

В соответствии с выбором системы координат $Oxuz$ имеем $q_{zi} = \zeta_i^f - \zeta_0$. Если ζ_i^f — высота предполагаемой точки опоры, то тогда $q_{zi} < 0$ характеризует необходимый клиренс аппарата, то есть свободный просвет между корпусом и опорной поверхностью, которым шагающий аппарат может управлять в определенных пределах. Пусть опорная поверхность задана формулой $\zeta = F(\xi, \eta)$. Обозначим

$$\bar{\zeta}_0 = \max_{\xi, \eta \in E} F(\xi, \eta) + \delta$$

ζ -координату центра несущей рамы, допустимую с точки зрения безопасности движения, где постоянная δ учитывает минимально безопасную величину клиренса, E — ограниченная область плоскости $O\xi\eta$, содержащая следовые колеи, на которых планируются положения точек опоры робота. Ясно, что чем меньше эта область, тем аккуратнее будет выбран параметр $\bar{\zeta}_0$. Из формул (13) и (12) найдём

$$L(\xi_f, \eta^*) = \sqrt{l^2 - c^2 - [\bar{\zeta}_0 - F(\xi_f, \eta^*)]^2}, \quad (15)$$

$$\eta^* = \eta_0 + (-1)^i (b + c).$$

Это означает, что максимальная величина $L(\xi_f, \eta^*)$ выноса опорной стопы в направлении оси Ox зависит от координат точки предполагаемой опоры и достигается, когда нога предельно вытянута: $\rho_i = l$, предполагаемая точка опоры расположена на следовой колее, параллельной корпусу и отстоящей от него на предельно близкое допустимое расстояние c , а высота корпуса над предполагаемой точкой опоры настолько мала, насколько это соответствует допустимому пределу безопасного перемещения. Точное значение координаты ξ_f в формуле (15) для ноги с номером i можно найти из уравнения

$$\xi_f - \xi_0 - x_i = \pm L(\xi_f, \eta^*) = \pm \sqrt{l^2 - c^2 - [\bar{\zeta}_0 - F(\xi_f, \eta^*)]^2},$$

и это будут абсолютные ξ -координаты предельных точек на опорной поверхности, до которых нога может дотянуться из заданного положения корпуса. Если же наоборот задать значение ξ_f , то тогда можно легко найти значение ξ_0 , соответствующее положению корпуса, при котором в зависимости от знака перед радикалом эта точка окажется предельно достижимой либо спереди от соответствующей точки подвеса, либо позади неё.

Назовём передней границей опорного многоугольника отрезок прямой, образованный ближайшими к зоне препятствия двумя точками опоры ног, одна из которых находится с правой, а другая с левой стороны корпуса, если смотреть в направлении оси Ox . Обозначим ξ -координаты правой и левой точек опоры передней границы опорного многоугольника через ξ_r и ξ_l соответственно. Согласно принятым ограничениям на конфигурацию робота, обеспечивающим возможность выполнения шага максимальной длины для всех ног (см. формулу (15)), точка O проектируется в середину отрезка между следовыми колеями. Пусть прямая $\eta = \eta_l = \eta_0 - b - c$ — следовая колея для левых ног робота, а $\eta = \eta_r = \eta_0 + b + c$ — следовая колея для правых ног робота. Граница ξ_M достижима для передних ног, если на следовых колеях найдутся точки с координатой ξ_f , для которых выполнено неравенство

$$\xi_0 + a \frac{k-1}{2} + L(\xi_f, \eta^*) \geq \xi_M, \quad (16)$$

причём равенство достигается, когда $\xi_f = \xi_M$. Обозначим

$$L_M = \max(L(\xi_M, \eta_l), L(\xi_M, \eta_r)) \quad (17)$$

и учтём, что $\xi_M = \xi_m + d$. Равенство левой и правой частей формулы (16) для заданного зна-

чения ξ_0 обеспечивается, когда d принимает предельно большое значение $d = \bar{d}$. Следовательно

$$\xi_0 - \xi_m + a \frac{k-1}{2} + L_M = \bar{d}(\xi_0). \quad (18)$$

Справедлива следующая лемма

Лемма 1. *Максимум $\Delta = \max_{\xi_0} \bar{d}$ ширины зоны препятствия, преодолимого рассматриваемым многоногим статически устойчивым роботом, достигается, если непосредственно перед моментом постановки передних ног на линию $\xi = \xi_M$ передняя граница опорного многоугольника удовлетворяет условию*

$$(\xi_r^m, \xi_l^m) =_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \left(\xi_m - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} \right). \quad (19)$$

Доказательство. Поскольку передняя граница опорного многоугольника линейна, то для выполнения условия статической устойчивости необходимо, чтобы было

$$\xi_c < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} \leq \xi_m \rightarrow \xi_c - \xi_m < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m \leq 0.$$

Отсюда ясно, что для возможности увеличения допустимой ширины зоны препятствия (18) следует, что в конце переноса передних ног через зону препятствия точки опоры для передней границы опорного многоугольника должны удовлетворять требованию (19). \diamond

Теорема 1. *Максимальная ширина Δ зоны препятствия, преодолимого рассматриваемым роботом, ограничена неравенством*

$$\Delta \leq \frac{\xi_r^m + \xi_l^m}{2} - \xi_m - \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c + a \frac{k-1}{2} + L_M, \quad (20)$$

то есть многоногий робот описанной выше конструкции не может преодолеть зону препятствия, ширина которой на момент окончания переноса передних ног превосходит сумму половины длины корпуса робота и максимально возможного выноса стоп передних ног в направлении оси Ox за вычетом минимально достижимого расстояния от середины передней границы опорного многоугольника до ближнего края зоны препятствия и x -координаты центра масс всех ног относительно корпуса робота.

Доказательство. До начала перешагивания через зону препятствия все точки опоры имеют ξ -координаты, меньшие ξ_m . Корпус робота ориентирован так, что ось Ox направлена к границе зоны $\xi = \xi_m$ и перпендикулярна к ней. Ясно, что такое расположение корпуса позволяет наилуч-

шим образом использовать его габариты для переправы через зону, потому что $a(k-1) > b$. Из формулы (18) следует, что

$$\xi_0 - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} + \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m + a \frac{k-1}{2} + L_M = \bar{d}(\xi_0). \quad (21)$$

Но согласно формуле (8) найдём

$$\xi_0 < \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c. \quad (22)$$

Поэтому

$$\xi_0 - \frac{\xi_r + \xi_l}{2} < -\frac{m}{M} \sum_{i=1}^n q_{xi}^c.$$

Кроме того, разность $(\xi_r + \xi_l) / 2 - \xi_m$ не положительна, поскольку рассматривается этап, когда робот еще не перенёс ноги через препятствие. Вместе с тем эта разность по модулю тем меньше, чем ближе расположены передние опорные точки к зоне препятствия. \diamond

5. СЛЕДОВОЕ РАСПИСАНИЕ

Походка “след в след” [3] возникает, когда точки опоры соседних ног одной стороны для последовательных шагов совпадают. Для того, чтобы походка “след в след” могла быть реализована при движении по всей поверхности $\zeta = F(\xi, \eta)$, должно быть выполнено общее конструктивное ограничение:

$$a \leq 2 \min_{\xi, \eta \in \mathcal{E}} L(\xi, \eta). \quad (23)$$

Заметим, что в реальности, когда ноги аппарата имеют конкретные физические размеры, а планируемая точка опоры ещё занята предыдущей ногой, походку “след в след”, строго говоря, практически реализовать невозможно без пересечения соседних ног одной стороны корпуса. Если всё же необходимо применить такую походку, то планируемую точку опоры следует смещать, если это возможно, по координате η в ту или другую сторону на расстояние, не меньшее, чем толщина ноги. Из-за этого изменится максимальная длина шага. В дальнейшем для оценок максимальной допустимой ширины препятствия будем пользоваться формулой (23), считая, что указанная походка при незначительном боковом смещении планируемых точек опоры не окажет ощутимого влияния на эти оценки.

Случай, когда точка опоры последующей ноги оказывается впереди предыдущей в дальнейшем

рассматриваться не будет в связи с тем, что тогда для робота рассматриваемой конструкции при переносе последующей ноги, очевидно, возникнет опасность взаимного пересечения соседних ног, что недопустимо.

Условие (23) без нарушения общности можно ослабить:

$$a \leq a_e, \quad (24)$$

где

$$a_e = 2 \min \left(\min_{\xi, \eta_r \in E} \mathcal{L}(\xi, \eta), \min_{\xi, \eta_l \in E} \mathcal{L}(\xi, \eta) \right). \quad (25)$$

Другими словами, нас будет интересовать возможность организации движения “след в след” только при расположении точек опоры на левой и правой следовых колеях. Ясно, что условие (24), является необходимым по отношению к условию (23).

Для простоты последующего анализа обратимся к варианту, когда движение происходит по горизонтальной плоскости. В таком случае максимальные длины относительных шагов будут одинаковы для всех точек опоры и для всех ног. Обозначим L длину максимально возможного относительного полушага для этого случая. Тогда условие (25) можно переписать в виде

$$a_e = 2L. \quad (26)$$

Для того, чтобы убедиться, что приведенные в предыдущем разделе верхние оценки ширины предельно допустимой зоны препятствия являются не улучшаемыми, следует указать следовое расписание, при котором они превращаются в равенство. Прделаем это для шестиногих и четырехногих аппаратов. Процесс преодоления зоны препятствия начинается в тот момент, когда робот подошёл вплотную к зоне препятствия.

1. Рассмотрим сначала процесс преодоления препятствия шестиногим аппаратом.

Лемма 2. Пусть выполнено условие (24), и средние ноги поставлены в точки опоры передних ног на ближней границе $\xi = \xi_m$ зоны препятствия. Тогда для преодоления шестиногим аппаратом зоны препятствия максимальной ширины передние ноги следует переносить через препятствие синхронно.

Доказательство. В данном случае при подъеме передних ног по очереди или одновременно будет выполнено.

$$\xi_0 = \xi_m - \varepsilon, \quad \frac{\xi_r^m + \xi_l^m}{2} = \xi_m.$$

Пусть передние ноги переносятся через препятствие последовательно. Тогда оставшаяся в

опоре передняя нога может ограничивать продвижение корпуса над зоной препятствия и тем самым будет мешать дотягиванию передних ног до точек опоры на границе $\xi = \xi_M$ зоны. С другой стороны, если обе ноги, стремясь сделать максимальный шаг, будут находиться в состоянии переноса, но с некоторым запаздыванием, то та нога, которая раньше попадет на дальнюю границу зоны препятствия, и определит достигнутую при этом максимальную ширину зоны. После этого для величины достигнутой ширины зоны уже не имеет значения, в каком порядке они будут поставлены на дальнюю границу зоны препятствия. Синхронный перенос передних ног лучше, так как обеспечивает наибольшую удалённость передней границы опорного многоугольника с поставленными на дальнюю границу передними ногами от центра корпуса. \diamond

Замечание 1. При одновременном переносе передних ног через препятствие передняя граница опорного многоугольника формируется средними ногами.

Замечание 2. Перед перешагиванием через предельно широкую зону препятствия точки опоры передних ног следует ставить, если это возможно, на ближнюю границу $\xi = \xi_m$ зоны.

Представим половину длины корпуса a в виде

$$a = a_e + \sigma. \quad (27)$$

Замечание 3. Если $\sigma \geq 0$ взаимное пересечение соседних ног в точках, не совпадающих со стопами, отсутствует. При произвольном значении $\sigma \in [-a_e, 0)$ точки подвеса соседних ног могут оказаться расположенными слишком близко, из-за чего будет существовать опасность взаимного пересечения звеньев соседних ног. Допустим, что найдется число μ , такое что $0 < \mu >$ позволяет уточнить неравенство (20).

Теорема 2. Пусть $-a_e < -\mu \leq \sigma \leq 0$, $\mu > 0$. Тогда, если применяется критерий (11), максимальная ширина Δ зоны препятствия, которую шестиногий робот может преодолеть при движении по плоскости, выражается равенством

$$\Delta = a_e + \sigma - \varepsilon + L, \quad (28)$$

где ε — запас статической устойчивости.

Доказательство. Как было установлено выше, перед началом перешагивания через зону препятствия точки опоры передних ног должны располагаться на прямой $\xi = \xi_m$. Условие (24), которое при $\sigma \leq 0$, очевидно, будет выполнено, обеспечивает возможность постановки сред-

них ног в точки опоры передних, когда корпус частично продвигается за ближнюю границу $\xi = \xi_m$ зоны препятствия на расстояние, при котором будет выполнено $\xi_0 = \xi_m - \varepsilon$. После этого передние ноги следует переносить в точки опоры на дальней границе $\xi = \xi_M$. В этом случае

$$\frac{\xi_r^m + \xi_l^m}{2} = \xi_m,$$

и правая часть формулы (20) превращается в правую часть формулы (28).

Покажем теперь, что существует следовое расписание, обеспечивающее преодоление зоны препятствия ширины (28) без нарушения статической устойчивости. Пусть робот находится в стандартной позиции перед препятствием в соответствии с определением 3. Прежде, чем начать перенос передних ног, надо продвинуть корпус по направлению к линии $\xi = \xi_M$ так, чтобы появилась возможность в том же направлении перенести задние ноги. Наиболее далеко корпус можно было бы продвинуть на расстояние максимального относительного полушага передних ног. Однако при этом проекция центра масс робота на горизонтальную плоскость должна всё же находиться внутри опорного многоугольника, образованного передними и средними ногами, с заданным запасом ε статической устойчивости. Тогда передние ноги ещё могут оставаться в опоре.

Теперь задние ноги могут одновременно сделать шаг величиной

$$L_{1,2} = \{a - L - \varepsilon, \quad L > \text{невозможно.}\}$$

Лемма 3. Пусть $\sigma > 0$. Тогда для преодоления шестиногим аппаратом зоны препятствия максимальной ширины передние ноги следует переносить через препятствие синхронно.

Доказательство. Максимальная ширина зоны препятствия достигается, если расстояние от центра рамы до ближней границе зоны препятствия минимально при переносе передних ног. В том случае, когда хотя бы одна передняя нога находится в опоре, центр рамы можно подвести к ближней границе зоны на расстояние не меньшее, чем $L + \sigma$, так что $\xi_0 = \xi_m - (L + \sigma)$, если хотя бы одна передняя нога находится в опоре на ближней границе зоны препятствия. Поэтому, если корпус аппарата максимально продвинут вперёд так, чтобы сохранить точки опоры передних ног на ближней границе зоны препятствия, то порядок переноса передних ног на удалён-

ную границу зоны не имеет значения. Всё равно, если хотя бы одна передняя нога находится в опоре на линии $\xi = \xi_m$, продвинуть корпус к ближней границе зоны по сравнению с указанным значением не удастся. Вместе с тем, синхронный перенос передних ног сокращает число переносов ног.

Справедлива теорема.

Теорема 3. Если применяется критерий (11) и $\sigma > 0$, то максимальная ширина зоны препятствия выражается формулой

$$\Delta = a_e + L - \varepsilon, \quad \sigma \geq 0. \quad (29)$$

Доказательство. Преодоление зоны препятствия начинается из стандартной позиции. Корпус продвигается в направлении границы $\xi = \xi_M$ на расстояние максимального относительного полушага передних ног. Потом сначала задние ноги делают относительный шаг длиной

$$a - \sigma - L - \varepsilon = L - \varepsilon,$$

а затем средние ноги — максимальный относительный шаг в том же направлении. Стопы всех ног и центр рамы будут иметь координаты

$$\xi_1(2) = \xi_2(2) = \xi_m - 2a + L - \varepsilon,$$

$$\xi_3(2) = \xi_4(2) = \xi_m - \sigma,$$

$$\xi_5(2) = \xi_6(2) = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - a + L.$$

Покажем, что если в полученной позе поднять хотя бы одну переднюю ногу, то робот не сможет изменить переднюю границу опорного многоугольника, образованную средними ногами. Действительно, в этой позиции смещение корпуса ни назад, ни вперед невозможно из-за того, что средние ноги, будучи в опоре, максимально вынесены вперёд, а передние ноги максимально вынесены назад. Продвижение корпуса вперёд возможно лишь, если сразу поднять обе передние ноги. В этом случае середина диагонали опорного многоугольника при обеих поднятых передних ногах будет иметь координату $\xi_d = \xi_m - \sigma - (a + L + \varepsilon) / 2$. Кроме того $\xi_0 = \xi_m - a + L$. Поэтому

$$\xi_0 - \xi_d = \frac{L + \sigma + \varepsilon}{2} > 0.$$

С другой стороны, если перенести по очереди задние ноги на максимально возможный полушаг вперёд, то середина диагонали сместится вперёд и станет равной.

$$\xi_{d'} = \xi_m - (a + \varepsilon) / 2 - \sigma \Rightarrow \xi_0 - \xi_{d'} = \frac{\sigma + \varepsilon}{2} > 0.$$

То есть получается, что при поднятых передних ногах перенос средних ног без потери статической устойчивости невозможен, даже если любым образом менять положение точек опоры задних ног, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \xi_3(2) &= \xi_4(2) = \xi_m - \sigma = \\ &=_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} = \frac{\xi_r^m + \xi_l^m}{2}. \end{aligned}$$

Тогда формула (20) дает

$$\Delta \leq a_e + \mathcal{L} - \varepsilon.$$

Но формула (20) была получена в предположении, что передние ноги робота, будучи предельно выпрямленными, ставятся на границу $\xi = \xi_M$. Допустим, что они уже там стоят. При этом центр несущей рамы проектируется внутрь опорного многоугольника, образованного задними и средними ногами и не доходит до передней границы этого многоугольника на заданный запас устойчивости ε :

$$\begin{aligned} \xi_1(3) &= \xi_2(3) = \xi_m - 2a + \mathcal{L} - \varepsilon, \\ \xi_3(3) &= \xi_4(3) = \xi_m - \sigma, \\ \xi_5(3) &= \xi_6(3) = \xi_M, \quad \xi_0 = \xi_m - \sigma - \varepsilon. \end{aligned}$$

Полученная позиция является ε -сбалансированной и центр рамы находится над опорным многоугольником образованным средними и задними ногами. Поэтому задние ноги одновременно поднять невозможно. Невозможно также и сдвинуть корпус ни вперёд, ни назад. Теперь необходимо выполнить несколько подготовительных действий, которые зависят от величины σ .

а) Пусть $\sigma \geq \mathcal{L}$. Тогда робот должен перенести средние ноги на один полушаг \mathcal{L} назад, переместить задние ноги в точки опоры с координатами $\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a - \sigma - \varepsilon$, затем поставить стопы средних ног в точки опоры $\xi_3 = \xi_4 = \xi_m - \sigma + \mathcal{L}$, после чего переместить корпус так, чтобы центр масс робота проектировался в точку, не доходящую до новых точек опоры средних ног на расстояние, равное запасу статической устойчивости ε , а потом перенести передние ноги на один относительный полушаг \mathcal{L} в направлении от дальней границы зоны $\xi = \xi_M$. В итоге получится позиция, аналогичная той, что была получена на третьем шаге, но сдвинутая на один относительный полушаг \mathcal{L} в сторону препятствия:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 = \xi_m - \sigma' - a - \mathcal{L} - \varepsilon, \\ \xi_3 &= \xi_4 = \xi_m - \sigma', \\ \xi_0 &= \xi_m - \sigma' - \varepsilon, \quad \xi_5 = \xi_6 = \xi_M + \mathcal{L}, \end{aligned}$$

где $\sigma' = \sigma - \mathcal{L}$.

б) Если окажется, что снова $\sigma' \geq \mathcal{L}$, то роботу придётся повторять процедуру а) до тех пор, пока в результате не окажется, что $\sigma' < \mathcal{L}$.

в) Пусть $\sigma' < \mathcal{L}$. Тогда роботу достаточно выполнить аналогичную волну переносов ног, переводящую его в позицию, при которой стопы средних ног находятся на ближней границе препятствия:

$$\begin{aligned} \xi_1(p) &= \xi_2(p) = \xi_m - a, \\ \xi_3(p) &= \xi_4(p) = \xi_m, \\ \xi_5(p) &= \xi_6(p) = \xi_M + \sigma, \\ \xi_0(p) &= \xi_m - \varepsilon, \end{aligned}$$

где p — число шагов, необходимых для получения этой позиции.

Далее робот должен продвинуть корпус вперёд на расстояние $\mathcal{L} + \varepsilon$, оставив средние ноги в опоре на линии $\xi = \xi_m$. Затем следует перенести стопы задних ног, чтобы получить позицию

$$\begin{aligned} \xi_1(p+1) &= \xi_2(p+1) = \xi_m - \sigma, \\ \xi_3(p+1) &= \xi_4(p+1) = \xi_m, \\ \xi_5(p+1) &= \xi_6(p+1) = \xi_M + \sigma, \\ \xi_0(p+1) &= \xi_m + \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{30}$$

Теперь стопы средних ног можно переместить на дальнюю границу зоны препятствия с одновременным перемещением корпуса на расстояние $\mathcal{L} - \varepsilon$ и получить конфигурацию:

$$\begin{aligned} \xi_1(p+2) &= \xi_2(p+2) = \xi_m - \sigma, \\ \xi_3(p+2) &= \xi_4(p+2) = \xi_M, \\ \xi_5(p+2) &= \xi_6(p+2) = \xi_M + \sigma, \\ \xi_0(p+2) &= \xi_M - \mathcal{L}, \end{aligned}$$

симметричную позиции (30) относительно срединной линии зоны препятствия.

Следовательно, выполнив в обратном порядке действия, симметричные относительно срединной линии зоны препятствия, получим позицию:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_2 = \xi_M, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_M + a, \\ \xi_0 &= \xi_M + a + \varepsilon, \quad \xi_5 = \xi_6 = 2a, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему. \diamond

Следствие 1. Если длина корпуса позволяет выполнить движение “след в след” ($-\mu \leq \sigma \leq 0$), то предельно допустимая ширина зоны препятствия линейно возрастает при увеличении длины корпуса. Если движение “след в след” невыполнимо ($\sigma > 0$), то предельно допустимая ширина зоны препят-

ствия не зависит от длины корпуса и принимает максимальное значение

$$\max_a \Delta = 3L - \varepsilon. \quad (31)$$

Другими словами, при движении по ровной горизонтальной плоскости максимальная ширина преодолимой шагающим аппаратом зоны препятствия на запас ε статической устойчивости меньше утроенной максимальной длины относительного полушага или полтора полного относительного шага, и это не зависит от величины параметра $\sigma > 0$ (Рис. 1). Для преодоления зон, запрещённых для наступания, оптимальной является длина рамы корпуса, соответствующая $a \geq a_e = 2L$.

Доказательство. Если движение ША происходит по ровной горизонтальной плоскости ($F(\xi, \eta) \equiv 0$), то тогда $\mathcal{L}(\xi, \eta) \equiv L$. Теперь достаточно сопоставить формулы (26), (28) и (29). \diamond

II. Рассмотрим процесс преодоления зоны препятствия четырёхногим аппаратом, движущимся по горизонтальной плоскости. Для четырёхногого аппарата неравенство (20) принимает вид

$$\Delta < \max_{\xi_r \leq \xi_m, \xi_l \leq \xi_m} \frac{\xi_r + \xi_l}{2} - \xi_m - \varepsilon + \frac{a}{2} + L. \quad (32)$$

По-прежнему обозначим $a_e = 2L$, $a = a_e + \sigma$. Справедлива следующая теорема при возможности движения “след в след”

Теорема 4. Пусть применяется критерий (11) и

$$-a_e < -\mu \leq \sigma \leq -2\varepsilon, \quad \mu > 0, \quad a \geq 4\varepsilon, \quad L \geq 3\varepsilon.$$

Тогда максимальная ширина Δ зоны препятствия, которую четырёхногий робот может преодолеть при движении по плоскости, выражается равенством

$$\Delta = \frac{a_e + \sigma}{2} - \varepsilon + L, \quad (33)$$

Доказательство. Движение начнём со стандартной позиции перед препятствием, а именно:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_m - a, \quad \xi_3 = \xi_4 = \xi_m, \quad \xi_0 = \xi_m - \frac{a}{2}.$$

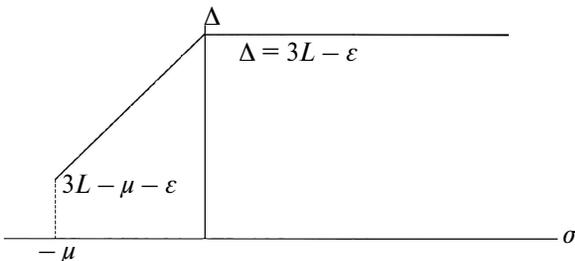


Рис. 1. Ширина преодолимой зоны препятствия для шестиногого аппарата.

Из этой позиции продвинем корпус по направлению к дальней границе препятствия так, чтобы центр корпуса не доходил до ближней границы зоны препятствия на расстояние ε :

$$\xi_1(1) = \xi_2(1) = \xi_m - a, \\ \xi_3(1) = \xi_4(1) = \xi_m, \quad \xi_0(1) = \xi_m - \varepsilon.$$

Затем перенесём по очереди сначала левую заднюю, а затем правую заднюю ноги в новые точки опоры:

$$\xi_1(2) = \xi_m, \quad \xi_2(2) = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon, \\ \xi_3(2) = \xi_4(2) = \xi_m, \quad \xi_0(2) = \xi_m - \varepsilon.$$

Полученная поза неплохо сбалансирована, поскольку смещения центров масс первой и четвертой ног почти компенсируют друг друга. Первую ногу можно поместить на ближнюю границу зоны, потому что $L > a/2 + \varepsilon$. Следовательно, передняя граница опорного многоугольника не изменилась, а задняя граница образуется первой и второй ногами, и её середина имеет координату $(\xi_1(2) + \xi_2(2)) / 2 = \xi_m - a/4 - \varepsilon$. Полученная координата из-за требования статической устойчивости должна быть меньше координаты центра корпуса по крайней мере на ε . Это будет выполнено при $a > 4\varepsilon$. Теперь можно начать перенос передних ног на дальнюю границу препятствия. Сначала переносим правую переднюю ногу:

$$\xi_1(3) = \xi_m, \quad \xi_2(3) = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon, \\ \xi_3(3) = \xi_m + \frac{a}{2} + L - \varepsilon = \xi_M, \\ \xi_4(3) = \xi_m, \quad \xi_0(3) = \xi_m - \varepsilon.$$

Далее можем перенести левую переднюю ногу, поскольку при ее переносе передняя граница опорного многоугольника будет образована третьей и второй ногами. Середина этой границы имеет координату $[\xi_2(3) + \xi_3(3)] / 2 = \xi_m + L/2 - 3\varepsilon/2$, и эта координата должна быть больше, чем на ε , координаты центра корпуса. Поэтому должно быть $L > 3\varepsilon$. В итоге получится позиция

$$\xi_1(4) = \xi_m, \quad \xi_2(4) = \xi_m - \frac{a}{2} - 2\varepsilon, \\ \xi_3(4) = \xi_M = \xi_m + \frac{a}{2} + L - \varepsilon, \\ \xi_4(4) = \xi_M, \quad \xi_0 = \xi_m - \varepsilon.$$

В этой позиции центр масс системы смещён немного вперёд по сравнению с его положением в предыдущей позиции из-за выноса вперёд

передних ног. Поэтому ограничение на задний запас устойчивости ослабевает. Теперь надо поставить вторую ногу на переднюю границу препятствия. Во время её переноса задняя граница опорного многоугольника будет образована четвёртой и первой ногами, а её середина будет иметь координату

$$\frac{\xi_4(4) + \xi_1(4)}{2} = \xi_m + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \mathcal{L} - \varepsilon \right).$$

Для того, чтобы во время переноса второй ноги обеспечивалась статическая устойчивость, корпус следует продвинуть вперед на величину

$$\frac{1}{2} \left(a / 2 + \mathcal{L} + 3\varepsilon \right) < \mathcal{L} + \varepsilon.$$

Такое продвижение корпуса вперед вполне возможно, так как максимальная длина полного шага в данном случае равна $a / 2 + L + 2\varepsilon \leq 2L + \varepsilon$. Выполнив указанное продвижение корпуса и последующий перенос второй ноги на ближнюю границу зоны препятствия, получим позицию:

$$\begin{aligned} \xi_1(5) = \xi_2(5) = \xi_m, \quad \xi_3(5) = \xi_4(5) = \xi_M, \\ \xi_0(5) = \xi_m + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \mathcal{L} + \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Теперь достаточно сдвинуть корпус назад на величину (-2ε) , чтобы получить симметричную позицию относительно средней линии зоны препятствия. После этого осталось выполнить все действия симметрично в обратном порядке для того, чтобы робот перебрался на другую сторону препятствия. \diamond

Замечание 4. В режиме статической устойчивости четырехногий аппарат не способен двигаться походкой “галоп”, успешно применённой для генерирования следовой последовательности шестиногого аппарата. Однако восьминогий аппарат уже обладает достаточным числом ног для возможности применения указанной походки.

Замечание 5. Сравнение проходимости четырехногих и шестиногих роботов удобно проводить, задав одинаковыми длины L их максимальных относительных полушагов и приняв $\sigma = 0$. В этом случае длина корпуса четырехногого робота составляет $a = 2L$, и без потери статической устойчивости он может преодолеть расщелину шириной $\Delta = 2L - \varepsilon$, то есть приблизительно равной длине корпуса. С другой стороны длина корпуса шестиногого робота составляет $2a = 4L$, и без потери статической устойчивости он может преодолеть расщелину шириной $\Delta = 3L - \varepsilon$, то есть приблизительно равную $3/4$ корпуса, но зато

корпус у него оказывается вдвое длиннее, чем у четырехногого. Таким образом при одинаковой длине шага шестиногий робот может преодолеть препятствие большей ширины, чем четырехногий, но длина корпуса четырехногого робота при этом используется более эффективно.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдена верхняя не улучшаемая оценка ширины области, запрещённой для наступания, которую n -ногий робот может перешагнуть в режиме статической устойчивости. Полученная оценка выражает аналитическую зависимость предельной ширины препятствия от длины корпуса, требуемого запаса статической устойчивости и максимальной длины шага. Для шестиногого и четырехногого роботов построены следовые последовательности, доказывающие достижимость значений полученных оценок. Установлено, что предельная ширина препятствия, как функция от длины корпуса, имеет насыщение сверху, связанное с возможностью или невозможностью реализации движения “след в след”. По итогам исследования можно сделать следующие выводы

1. Оптимальное расстояние a между точками подвеса ног должно быть не меньше длины полного максимального шага. Увеличение параметра a по сравнению с указанным минимальным при сохранении числа ног не способствует увеличению ширины преодолимой зоны препятствия. Ширина преодолимой зоны препятствия может быть увеличена, если длину корпуса делать больше того значения, которое соответствует указанному минимальному значению параметра a , но вместе с увеличением числа ног.

2. Установлено, что при значительной массе ног использование роботом позиций, ε -сбалансированных по расположению ног относительно корпуса, позволяет уменьшить значение ε требуемого запаса статической устойчивости, за счёт чего увеличить ширину преодолимого препятствия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чебышев П.Л.* Научное наследие, вып. 2. Теория механизмов. М.: Изд. АН СССР, 1945.
2. *Ларкина В.А.* Шагающие роботы для спасательных операций. Обзор и анализ существующих моделей // Кибернетика и программирование. 2021. № 1. С. 35–73.
<https://doi.org/10.25136/2644-5522.2021.1.35862>
 URL: https://nbpublish.com/library_read_article.php?id=35862

3. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф.* Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984. 312 с.
4. Эволюция роботов Boston Dynamics.
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=t3hPckJCx9s>
(дата обращения: 15.03.2022).
5. *Павловский В.Е.* О разработках шагающих машин // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 101. 32 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013>
6. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Преодоление шагающим роботом препятствий, характерных для равнины // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 21. 35 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2024-21>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-21>
7. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Экстремальные локомоторные возможности инсектоморфных роботов. — М: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018. — 212 с. ISBN 978-5-98354-040-8.
<https://doi.org/10.20948/mono-2018-golubev>

GETTING OVER WIDE OBSTACLES BY THE MULTI-LEGGED ROBOT

Yu. F. Golubev^a

Presented by Academician of the RAS B. N. Chetverushkin

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia*

An upper estimate of the maximum width of the forbidden zone for foot fulcrums, which a walking robot with many legs can overcome in static stability mode, is presented. Using the mathematical models of six-legged and four-legged robots, it is shown that the obtained estimate can't be improved. For this purpose, the sequences of the robot's foot placement have been formed, ensuring the achievement of the estimation meaning. The dependence of the maximum width of the zone on the length of the body was found for the six-legged robot model.

Keywords: walking robots, overcoming obstacles

УДК 517.54

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. М. В. Шамолин¹, *

Представлено академиком РАН В. В. Козловым

Поступило 18.06.2024 г.

После доработки 11.07.2024 г.

Принято к публикации 17.07.2024 г.

Представлены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к четырехмерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость

DOI: 10.31857/S2686954324040089, EDN: YYZYAZ

1. ВВЕДЕНИЕ

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [1, 2, 3], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с гладкой (или постоянной) плотностью. Сложнее (в смысле гладкости инвариантов) дело обстоит для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Для таких систем коэффициенты искомого инварианта должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4, 5, 6]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m - 1$ независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится

соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил уже рассматривались в работах автора [5, 7]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем. При этом в этих работах упор делался на нахождение достаточного количества именно первых интегралов. Но, как известно, иногда полного набора первых интегралов для систем может и не быть, зато достаточное количество инвариантных форм может быть обеспечено.

Для систем классической механики понятия “консервативность”, “силовое поле”, “диссипация” и др. вполне естественны. Поскольку в данной работе изучаются динамические системы на касательном расслоении к гладкому многообразию (пространству положений), уточним данные понятия для таких систем.

Анализ “в целом” начинается с исследования приведенных уравнений геодезических, левые части которых при правильной параметризации представляют собой записи координат ускорения движения материальной частицы, а правые части приравнены к нулю. Соответственно, величины, которые ставятся в дальнейшем в правую часть, можно рассматривать как некоторые

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

обобщенные силы. Такой подход традиционен для классической механики, а теперь он естественно распространяется на более общий случай касательного расслоения к гладкому многообразию. Последнее позволяет, в некотором смысле, конструировать “силовые поля”. Так, например, введя в систему коэффициенты, линейные по одной из координат касательного пространства (по одной из квазискоростей системы), получим силовое поле с диссипацией разного знака.

И хотя словосочетание “диссипация разного знака” несколько противоречиво, тем не менее, будем его употреблять. Учитывая при этом, что в математической физике диссипация “со знаком “плюс” — это рассеяние полной энергии в обычном смысле, а диссипация “со знаком “минус” — это своеобразная “подкачка” энергии (при этом в механике силы, обеспечивающие рассеяние энергии называются диссипативными, а силы, обеспечивающие подкачку энергии называются разгоняющими).

Консервативность для систем на касательных расслоениях можно понимать в традиционном смысле, но мы добавим к этому следующее. Будем говорить, что система консервативна, если она обладает полным набором гладких первых интегралов, что говорит о том, что она не обладает притягивающими или отталкивающими предельными множествами. Если же она последними обладает, то будем говорить, что система обладает диссипацией какого-то знака.

Как следствие этого — обладание системы хотя бы одним первым интегралом (если они вообще есть) с существенно особыми точками.

В данной работе силовое поле разделяется на так называемые внутреннее и внешнее. Внутреннее поле характерно тем, что оно не меняет консервативности системы. А внешнее может вносить в систему диссипацию разного знака. Заметим также, что вид внутренних силовых полей заимствован из классической динамики твердого тела (см. также [5]).

В работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем девятого порядка, в которых может быть выделена система с четырьмя степенями свободы на своем восьмимерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией переменного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

2. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ СИММЕТРИИ

Пусть $v, \alpha, \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), z = (z_1, \dots, z_4)$ — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α, β следующим образом:

$$\begin{aligned} (\dot{v}, \dot{z}_4, \dots, \dot{z}_1, v\dot{\alpha}, v\dot{\beta}_1, v\dot{\beta}_2, v\dot{\beta}_3)^T &= A(\alpha, \beta)P, \\ P^T &= (v^2, vz_4, \dots, vz_1, z_4^2, z_4z_3, z_4z_2, z_4z_1, z_3^2, z_3z_2, z_3z_1, z_2^2, z_2z_1, z_1^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где $A(\alpha, \beta)$ — матрица размером 9×15 . Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = vdt, d/dq = \langle' \rangle, v \neq 0$), а также новые

фазовые переменные $Z_k, z_k = Z_k v, k = 1, \dots, 4, Z = (Z_1, \dots, Z_4)$, систему (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = A_v(\alpha, \beta)Q, \\ Q^T &= (1, Z_4, \dots, Z_1, Z_4^2, Z_4Z_3, Z_4Z_2, Z_4Z_1, Z_3^2, Z_3Z_2, Z_3Z_1, Z_2^2, Z_2Z_1, Z_1^2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$(Z_4', \dots, Z_1', \alpha', \beta_1', \beta_2', \beta_3')^T = \hat{A}(\alpha, \beta)Q - (Z_4\Psi(\alpha, Z), \dots, Z_1\Psi(\alpha, Z), 0, 0, 0, 0)^T, \quad (3)$$

где $A_v(\alpha, \beta)$ — первая строка матрицы $A(\alpha, \beta)$, а $\hat{A}(\alpha, \beta)$ — матрица $A(\alpha, \beta)$ без первой строки, т.е.

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} A_v(\alpha, \beta) \\ \hat{A}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать восемь оставшихся уравнений в качестве системы

(3) на восьмимерном фазовом многообразии $N^8\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

3. СИСТЕМЫ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Будем рассматривать следующую (из класса (2),(3)) систему девятого порядка

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha)f_4(\alpha), \tilde{\Delta}(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= f_4(\alpha)Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\delta(\alpha), \\ Z_4' &= -f_4(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha)\right]Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_4\Psi(\alpha, Z) = \zeta_4(Z; \alpha, \beta), \\ Z_3' &= -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)\right]Z_3Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)}g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z) = \zeta_3(Z; \alpha, \beta), \\ Z_2' &= -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)\right]Z_2Z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)\right]Z_2Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)}h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z) = \zeta_2(Z; \alpha, \beta), \\ Z_1' &= -f_4(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)\right]Z_1Z_4 - f_1(\alpha)\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1)\right]Z_1Z_3 - \\ &\quad - f_2(\alpha)g_1(\alpha)\left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2)\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z) = \zeta_1(Z; \alpha, \beta), \\ \beta_1' &= Z_3f_1(\alpha), \beta_2' = Z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \beta_3' = Z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \end{aligned} \quad (5)$$

$DQ(\pi) = d \ln |Q(\pi)| / d\pi$, $b \geq 0$, $\Delta(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, ..., $f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$, $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, $i, j, k = \alpha, \beta$, — некоторые гладкие функции, и будем смотреть на нее как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (4) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (5) в качестве независимой системы (с четырьмя степенями свободы) на восьмимерном многообразии $N^8\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta\}$

(касательном расслоении гладкого четырехмерного многообразия $M^4\{\alpha, \beta\}$, см. также [7, 8]).

Рассмотрим структуру системы (5). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий с 13 ненулевыми коэффициентами связности на касательном расслоении $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^4\{\alpha, \beta\}$ (в частности, на расслоении (четырёхмерной) поверхности вращения, пространства Лобачевского и т.д.; здесь всевозможные $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ — символы Кристоффеля):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 &= 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Действительно, выбрав новые координаты z_1, \dots, z_4 в касательном пространстве в виде

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= z_4f_4(\alpha), \dot{\beta}_1 = z_3f_1(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 &= z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \\ \dot{\beta}_3 &= z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \end{aligned} \quad (7)$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (5)):

$$Z_{k'} = \zeta_k(Z; \alpha, \beta), k = 1, \dots, 4, \quad (8)$$

при этом уравнения (6) почти всюду эквивалентны совокупности (7), (8), которая, прежде всего, присутствует в системе (5) (при этом вместо (7) лучше выбрать равенства $\alpha' = Z_4f_4(\alpha)$, $\beta_1' = Z_3f_1(\alpha)$, $\beta_2' = Z_2f_2(\alpha)g_1(\beta_1)$, $\beta_3' = Z_1f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2)$).

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (6). (а) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай —

метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного (пятимерного) твердого тела (см. также [9, 10, 11]). (b) Системы на касательном расслоении более общей четырехмерной поверхности вращения. (c) Системы на касательном расслоении пространства Лобачевского в модели Клейна.

Далее, в системе (4), (5) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но они не нарушают консервативности, поскольку система (4), (5) обладает полным набором (шестью) гладких первых интегралов.

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении четырехмерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ функций при $n=4$, т.е. 40 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ из (7)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся “лишь” 13 ($n(n-1)+1$ функций при $n=4$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (6). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их будет 7 ($n(n-1)/2+1$ функций при $n=4$). Таким образом, мы имеем 20 функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(4)$ на имеющиеся $A(4)=20$ функций ($A(n)=3n(n-1)/2+2$ функций при $n=4$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. В данной работе будем накладывать $B(4)=16$ условий на имеющиеся $A(4)=20$ функций.

Число $B(4)$ складывается из трех слагаемых: $B(4)=B_1(4)+B_2(4)+B_3(4)$. Число $B_1(4)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$, а именно,

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &\equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) =: f(\alpha), \\ g_1(\beta_1) &\equiv g_2(\beta_1) =: g(\beta_1), \end{aligned} \quad (9)$$

т.е. $B_1(4)=3$ (в общем случае $B_1(n)=(n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(4)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha_2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha_3}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \\ \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_3(\beta_2), \end{aligned} \quad (10)$$

т.е. $B_2(4)=6$ (в общем случае $B_2(n)=n(n-1)/2$). Число $B_3(4)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} f_4^2(\alpha) &\left[2\Gamma_{\alpha_1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) &\left[2\Gamma_{\alpha_2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) &\left[2\Gamma_{\alpha_3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha) \right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) &\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] + f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_1^2(\alpha) &\left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1) \right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ f_2^2(\alpha) &g_1^2(\beta_1) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2) \right] + f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0, \\ \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) &+ Df_4(\alpha) \equiv 0, \end{aligned} \quad (11)$$

т.е. $B_3(4)=7$ (в общем случае $B_3(n)=n(n-1)/2+1$). Условия (11) опираются на (9), (10), благодаря чему количество аргументов в некоторых функциях уменьшается.

Видно, что в общем случае $B(n)=B_1(n)+B_2(n)+B_3(n)=(n-1)^2+n(n-1)/2+1$, при этом $A(n)-B(n)=n$, что говорит об увеличении количества “произвольных” функций по сравнению с

условиями, накладываемыми на них, ровно на n (n — размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(4) - B(4) = 4$.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (4), (5) достаточно знать шесть независимых тензорных инвариантов: или шесть первых интегралов, или шесть независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством шесть. При этом, конечно, инварианты (в частности, для случая отсутствия внешнего поля сил) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [5, 6, 7]). И то, что полный набор состоит из шести, а не из восьми, тензорных инвариантов (помимо тривиального — векторного поля самой системы [23]), показано ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (6), переписанных в виде $\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, i = 1, \dots, 4$, является гладкая функция $\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^4 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k$, но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым “выпрямив” квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 1 (справедливой и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (10)–(12) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Теорема 1. *Если выполнены условия (9)–(11), то система (4), (5), рассмотренная на произведении $\mathbf{R}_+^1\{v\} \times TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, обладает полным набором, состоящим из шести гладких первых интегралов вида*

$$\begin{aligned} \Phi_0(v; Z_4; \alpha) &= v^2(1 + 2bZ_4\Delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}; \\ \Phi_1(v; Z_4, \dots, Z_1) &= v^2(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) = \\ &= C_1^2 = \text{const}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) &= v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\Delta(\alpha) = \\ &= C_2 = \text{const}, \\ \Delta(\alpha) &= A_1 f(\alpha) \exp\left\{2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db\right\}, \\ A_1 &= \text{const}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1) &= v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\Delta(\alpha)\Psi_1(\beta_1) = \\ &= C_3 = \text{const}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp\left\{2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db\right\};$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(v; Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= v^2 Z_1 \Delta(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = \\ &= C_4 = \text{const}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp\left\{2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db\right\};$$

$$\begin{aligned} \Phi_5(\beta_2, \beta_3) &= \beta_3 - \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = \\ &= C_5 = \text{const}. \end{aligned} \quad (16)$$

Более того, после некоторого ее приведения — замен независимой переменной $d / dt = f_4(\alpha) d / d\tau$ и фазовых

$$\begin{aligned} w_4 = Z_4, w_3^* &= \ln |w_3|, w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \\ w_s^* &= \ln \left| w_s + \sqrt{1 + w_s^2} \right|, s = 1, 2, \\ w_2 &= \frac{Z_2}{Z_1}, w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

— фазовый поток системы (4), (5) сохраняет фазовый объем с плотностью $\rho(v) = v^3$ на произведении $\mathbf{R}_+^1\{v\} \times TM^4\{w_4, w_3^*, w_3, w_2^*, w_2, w_1^*, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма $v^3 dv \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_3 \wedge dw_2^* \wedge dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3$.

Заметим также, что система равенств (11) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (12). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

4. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ ЧЕРЕЗ УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Модифицируем систему (4), (5) при наличии двух ключевых параметров $b \geq 0, b_1 \neq 0$, вводя

внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)f_4(\alpha)$ в уравнение на Z'_4 системы (18), (19) и даже положив при этом $b_1 = 0$, полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b > 0$, $b_1 \neq 0$. При этом (как и выше) сделаем вспомогательную замену независимого переменного

t на τ по формуле $d/dt = f_4(\alpha)d/d\tau$ и будем по-прежнему штрихом обозначать производную по τ . Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^4\{Z_4, \dots, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi(\alpha, Z), \Psi(\alpha, Z) = \\ &= -b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= Z_4 + b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2)\Delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \bar{f}(\alpha) = \frac{\mu - \Delta^2(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \\ Z'_4 &= F(\alpha) - \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_4(\alpha) \right] Z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) Z_3^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_4 \Psi(\alpha, Z), \\ Z'_3 &= - \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] Z_3 Z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) Z_2^2 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_3 \Psi(\alpha, Z), \\ Z'_2 &= - \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha) \right] Z_2 Z_4 - \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] Z_2 Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)f_4(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) Z_1^2 - Z_2 \Psi(\alpha, Z), \\ Z'_1 &= - \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha) \right] Z_1 Z_4 - \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + Dg_2(\beta_1) \right] Z_1 Z_3 - \\ &\quad - \frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1(\alpha) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + Dh(\beta_2) \right] Z_1 Z_2 - Z_1 \Psi(\alpha, Z), \\ \beta'_1 &= Z_3 \frac{f_1(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \beta'_2 = Z_2 \frac{f_2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1(\beta_1), \beta'_3 = Z_1 \frac{f_3(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2(\beta_1) h(\beta_2), \end{aligned} \quad (19)$$

здесь $\mu > 0$ — параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Силовое поле в уравнениях на v' , Z' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α' , а во второй строке — коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b \geq 0$, $b_1 \neq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + \dots + Z_4^2) \\ b_1F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta(\alpha) & \bar{f}(\alpha) \\ -\tilde{\Delta}(\alpha) & \Delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным μ , и являющееся унимодулярным преоб-

зованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\Delta(\alpha) = \cos \alpha$ или $\Delta(\alpha) = \sin \alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α . Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [5, 6, 7]).

5. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ ДЕВЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдем теперь к интегрированию системы девятого порядка (18), (19) при выполнении свойств (9)–(11), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы седьмого порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (18), (19) достаточно знать шесть независимых тензорных инвариантов: или

шесть первых интегралов, или шесть независимых дифференциальных форм, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством шесть. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (9)–(11) на 20 функций: на 7 функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$. В частности, следствием наложения 16 соотношений является следующее свойство: $\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) =: \Gamma_4(\alpha)$.

Тогда после замены фазовых переменных (17) система (18), (19) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} v' &= v\Psi_0(\alpha, w), \Psi_0(\alpha, w) = \\ &= -b(w_3^2 + w_4^2)\tilde{\Delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\Delta(\alpha), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\Delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\bar{f}(\alpha), \\ w_4' &= F(\alpha) - \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3^2 - w_4\Psi_0(\alpha, w), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} w_3' &= \Gamma_4(\alpha)\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}w_3w_4 - w_3\Psi_0(\alpha, w), \\ w_2' &= \pm w_3\sqrt{\frac{1+w_2^2}{1+w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)[2\Gamma_3(\beta_2) + Dh(\beta_2)], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_2' &= \pm \frac{w_2w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1), \\ w_1' &= \pm w_3\sqrt{1+w_1^2}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \beta_1' &= \pm \frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \\ \beta_3' &= \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}}\frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}g(\beta_1)h(\beta_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (20)–(24) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (21), по одному — для систем (22), (23) (после соответствующих замен независимых переменных в них) и два дополнительных тензорных инварианта, “привязывающих” уравнения (20) и (24) (т.е. всего шесть).

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)}\Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (25)$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ — равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\Delta}(\alpha)\Delta(\alpha). \quad (26)$$

Условие (25) назовем “геометрическим”, а условие (26) — “энергетическим”. Условие (26) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функций $f(\alpha), f_4(\alpha)$, входящих в кинематические соотношения. Условие (26) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции $\Delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом сама функция $\Delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию (см. также [12, 13, 14]).

Теорема 2. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются условия (25) и (26). Тогда система (20)–(24) обладает полным набором — шестью (одним гладким и пятью, вообще говоря, имеющими существенно особые точки) независимыми первыми интегралами. Кроме того, она также обладает шестью инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.

Действительно, благодаря однородным переменным $u_1, u_2, w_3 = u_1\Delta(\alpha), w_4 = u_2\Delta(\alpha)$, из системы (21) можно получить следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} &= \frac{\lambda - \kappa u_1^2 - u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} &= \frac{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1\lambda(\mu - \Delta^2)}, \end{aligned} \quad (27)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 - u_2^2 - \kappa u_1^2}{(\kappa - 1)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \quad (28)$$

Уравнение (28) имеет вид уравнения Абеля [15, 16, 17]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_1 \lambda \mu u_2 - \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (29)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\begin{aligned} \Theta_1(w_4, w_3; \alpha) &= G_1 \left(\frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{w_4^2 + w_3^2 + b_1 \lambda \mu w_4 \Delta(\alpha) - \lambda \Delta^2(\alpha)}{w_3 \Delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (30)$$

Используем для подсчета дивергенции векторного поля $W(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta)$, $w_3^* = \ln |w_3|$, $w_s^* = \ln |w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|$, $s = 1, 2$, системы (20)–(24) с диссипацией функцию $\rho(v) = v^3$ (полученную для системы (4), (5)). Тогда составная система уравнений характеристик для уравнения

$$\text{div}[\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta)W(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta)] = 0 \quad (31)$$

будет состоять из системы (20)–(24) (правая часть которой умножена на функцию $\rho(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1 \lambda \mu \tilde{\Delta}(\alpha) \rho. \quad (32)$$

Системе (20)–(24), (32) уравнений характеристик можно сопоставить следующие соотношения: два из (27) и

$$\Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = \frac{-\rho[b_1 \lambda \mu]}{u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\Delta^2 + b_1 \lambda (\mu - \Delta^2)}. \quad (33)$$

В общем случае искомые первые интегралы выписываются громоздко (в частности, если $\kappa = -1$, то используется равенство (29)). При участии уравнений (27) получается дополнительный первый интеграл системы (21), имеющий следующий структурный вид:

$$\begin{aligned} \Theta_2(w_4, w_3; \alpha) &= G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= C_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (34)$$

При этом (при $\kappa = -1$) первый интеграл (34) найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\Delta}{du_2} = \frac{(b_1 \lambda \mu + u_2)\Delta + \{b[U^2(C_1, u_2) + u_2^2] - b_1 \lambda\} \Delta^3}{u(u_2) + U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 + 4u(u_2)} \right\},$$

$$u(u_2) = \lambda - b_1 \lambda \mu u_2 - u_2^2.$$

Выражение первого интеграла (34) через конечную комбинацию элементарных функций главным образом зависит от явного вида функции $\Delta(\alpha)$.

Кроме того, у системы (20)–(24) существует гладкий первый интеграл, который, например, при $b = -b_1$ примет вид

$$\begin{aligned} \Theta_0(v; w_4, w_3; \alpha) &= v^2(1 + 2bw_4\Delta(\alpha) - \\ &- b^2\mu(w_3^2 + w_4^2)) = C_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (35)$$

Первые интегралы для независимых (после замены в них независимого переменного) подсистем (22), (23) будут иметь вид

$$\Theta_3(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\Psi_2(\beta_2)} = C_3 = \text{const}, \quad (36)$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\Psi_1(\beta_1)} = C_4 = \text{const},$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (14), (15). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (24), находится по аналогии с (16):

$$\begin{aligned} \Theta_5(\beta_2, \beta_3) &= \beta_3 \mp \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - 1}} db = \\ &= C_5 = \text{const}. \end{aligned} \quad (37)$$

Уравнение (33), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \exp \left\{ b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} &= C_\rho = \\ &= \text{const}, U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) + C_1 U(C_1, u_2). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$R(v; w_4; \alpha) dv \wedge d\alpha \wedge dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

$$R(v; w_4; \alpha) = v^3 \exp \left\{ -b_1 \lambda \mu \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\}, u_2 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения (31) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = R(v; w_4; \alpha) \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5],$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5]$ — произвольная гладкая функция шести аргументов, при этом $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_5$ — шесть независимых первых интегралов (35), (30), (34), (36), (37) соответственно.

В частности, за шесть функционально независимых решений линейного уравнения (31) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\begin{aligned} \rho_0(v; w_4, w_3; \alpha) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_0(v; w_4, w_3; \alpha), \\ \rho_1(v; w_4, w_3; \alpha) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_1(w_4, w_3; \alpha), \\ \rho_2(v; w_4, w_3; \alpha) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_2(w_4, w_3; \alpha), \\ \rho_3(v; w_4, w_2; \alpha, \beta_2) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_3(w_2; \beta_2), \\ \rho_4(v; w_4, w_1; \alpha, \beta_1) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_4(w_1; \beta_1), \\ \rho_5(v; w_4; \alpha, \beta_2, \beta_3) &= R(v; w_4; \alpha) \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3). \end{aligned}$$

6. СТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Система (20)–(24) является динамической системой с переменной диссипацией [12, 13, 14]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную, эквивалентную (4), (5). Последняя, в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (12), (13) в координатах w . Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (20)–(24) при условии (26) обладает первым интегралом вида

$$\begin{aligned} \Theta|_{B=0}(B; v; w_4, w_3; \alpha) &= \\ &= v^2(w_3^2 + w_4^2 - \lambda\Delta^2(\alpha)) = \text{const}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\Theta(B; v; w_4, w_3; \alpha) = v^2(w_3^2 + w_4^2 + B\lambda\mu w_4\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha))$ — семейство функций, зависящих от параметра $B \geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (38), (13) (в координатах w) также является первым интегралом системы (20)–(24) при равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\begin{aligned} \Theta|_{B=b_1}(B; v; w_4, w_3; \alpha) &= \\ &= v^2(w_3^2 + w_4^2 + b_1\lambda\mu w_4\Delta(\alpha) - \lambda\Delta^2(\alpha)) = \text{const} \end{aligned} \quad (39)$$

и (13) (в координатах w) по отдельности не является первым интегралом системы (20)–(24). Однако

отношение функций (39), (13) (в координатах w) является первым интегралом (30) системы (20)–(24) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [4, 13, 14].

Выделим теперь существенные случаи для функций $f(\alpha)$, $f_4(\alpha)$, определяющих метрику на четырехмерной сфере, и функции $\Delta(\alpha)$:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + v \sin^2 \alpha}}, \\ v \in \mathbf{R}, f_4(\alpha) &\equiv -1, \Delta(\alpha) = \sin \alpha, \end{aligned} \quad (40)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{1 + v \sin^2 \alpha}}, v \in \mathbf{R}, f_4(\alpha) \equiv -1, \quad (41)$$

а также следующий случай, имеющий самостоятельный интерес:

$$f(\alpha) = \frac{v_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + v_2}}, v_1, v_2 \in \mathbf{R}, f_4(\alpha) = v_1 \alpha. \quad (42)$$

Случай (40) формирует класс систем (18), (19) при $\mu = 1$, соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил. В частности, при $\Delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере. В случае (40), если $\Delta(\alpha) = F(\alpha) / \cos \alpha$, то система описывает движение пятимерного твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [12]. В частности, если $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \Delta(\alpha) = \sin \alpha$, то система эквивалентна обобщенному сферическому маятнику, находящемуся в неконсервативном поле сил (“помещенному в поток набегающей среды”), и обладает полным набором первых интегралов с существенно особыми точками, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Случай (41) формирует класс систем (18), (19), соответствующих движению точки по четырехмерной сфере с метрикой, индуцированной евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства.

Случай (42) формирует класс систем (18), (19), соответствующих движению точки в четырехмерном пространстве Лобачевского в модели Клейна.

В двух последних случаях функция $\Delta(\alpha)$ пробегает некоторое функциональное множество.

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируе-

мости достаточно многообразное. В данной работе предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем девятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Если в случае консервативных систем инварианты определяются гладкими функциями своих фазовых переменных, то при внесении в систему достаточно общего диссипативного силового поля обязаны появиться инварианты, гладкость которых разрушается из-за наличия в системе существенно особых точек. Такие точки в случае, когда они притягивающие, характеризуют рассеяние энергии возле себя, а если они отталкивающие — характеризуют подкачку энергии. Результат дополнительно интересен тем, что все это происходит в разных частях фазового пространства, но для одной и той же динамической системы.

Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде (см. также [18, 19, 20]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Gauthier–Villars, Paris. 1912.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 416–419.
6. *Шамолин М.В.* Инварианты однородных динамических систем пятого порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 514. № 1. С. 98–106.
7. *Шамолин М.В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 1. С. 86–92.
8. *Шамолин М.В.* Инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем с тремя степенями свободы // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 3. С. 322–345.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
12. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 4. С. 3–229.
13. *Шамолин М.В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2009. Т. 425. № 3. С. 338–342.
14. *Шамолин М.В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Доклады РАН. 2011. Т. 440. № 2. С. 187–190.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
16. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F. (2017).* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315117638>
17. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
18. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
19. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.
20. *Шамолин М.В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14. № 3. С. 3–237.

NEW CASES OF INTEGRABLE NINTH-ORDER CONSERVATIVE AND DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS

M. V. Shamolin^a

Presented by Academician of the RAS V. V. Kozlov

^aLomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

New cases of integrable dynamical systems of the ninth order homogeneous in terms of variables are presented, in which a system on a tangent bundle to a four-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of a different sign. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: invariant of dynamical system, essentially singular points of invariant, system with dissipation, integrability

УДК 517.982.22

МНОЖЕСТВО БАНАХОВЫХ ПРЕДЕЛОВ И ЕГО ДИСКРЕТНОЕ И НЕПРЕРЫВНОЕ ПОДМНОЖЕСТВА

© 2024 г. Н. Н. Авдеев^{1, *}, Р. Е. Зволинский^{1, **},
Е. М. Семенов^{1, ***}, А. С. Усачев^{1, 2, ****}

Представлено академиком РАН С. В. Кисляковым
Поступило 05.07.2023 г.
После доработки 20.07.2024 г.
Принято к публикации 24.07.2024 г.

Приводятся критерии принадлежности банахова предела дискретной и непрерывной частям множества банаховых пределов. Найдены диаметр и радиус этих частей.

Ключевые слова: банаховы пределы, инвариантные банаховы пределы, диаметр и радиус множества

DOI: 10.31857/S2686954324040092, EDN: YYXBPO

§ 1. Через ℓ_∞ обозначается множество ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

и обычной полуупорядоченностью, где \mathbb{N} – множество натуральных чисел. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

1. $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $x \geq 0$.
2. $BTx = Bx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T – оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.
3. $B\Pi = 1$, где $\Pi = (1, 1, \dots)$.

Из определения вытекает, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq Bx \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

для всех $x \in \ell_\infty$ и, следовательно,

$$Bx = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

для любой сходящейся последовательности, а также $\|B\|_{\ell_\infty^*} = 1$ для любого $B \in \mathfrak{B}$, где через \mathfrak{B}

мы обозначаем множество банаховых пределов. Тогда \mathfrak{B} есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^* . Г. Лоренц доказал [1], что для заданных $x \in \ell_\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ равенство $Bx = \lambda$ выполняется для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = \lambda$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. В этом случае говорят, что последовательность x почти сходится к $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Например, любая периодическая числовая последовательность почти сходится к среднему по периоду. Последовательность $x_n = \cos nt$ сходится к 1 для $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ и почти сходится к 0 для остальных $t \in \mathbb{R}^1$. Множество последовательностей, почти сходящихся к числу $\lambda \in \mathbb{R}^1$, обозначается через $a_{c\lambda}$. Известно, что a_{c0} есть замкнутое недополняемое подпространство ℓ_∞ . Л. Сачестон уточнил теорему Г. Лоренца, показав, что

$$q(x) \leq Bx \leq p(x)$$

для любых $x \in \ell_\infty$, $B \in \mathfrak{B}$, где

$$q(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \quad p(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Эта двусторонняя оценка точна [2]. Существование банаховых пределов было доказано с помощью теоремы Хана–Банаха С. Мазуром [3] и приведено в книге С. Банаха [4]. Пусть H – ограниченный линейный оператор в ℓ_∞ .

¹ Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

² Центральный Южный Университет, Чанша, Хунань, КНР

* E-mail: nickkolok@mail.ru

** E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com

*** E-mail: nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru

**** E-mail: dr.alex.usachev@gmail.com

Банахов предел B называется инвариантным относительно H , если $Bx = BHx$ для всех $x \in \ell_\infty$. В работе У. Эберлейна [5] было доказано существование банаховых пределов, инвариантных относительно регулярных преобразований Хаусдорфа. Подход У. Эберлейна был развит в [6], где было показано, что для любого H , удовлетворяющего следующим условиям:

1. $H \geq 0$ и $H\Pi = \Pi$,
2. $Hc_0 \subset c_0$,
3. $\limsup_{j \rightarrow \infty} (A(I - T)x)_j \geq 0$ для всех $x \in \ell_\infty$,

$$A \in R(H) = \text{conv} \{H^k, k \in \mathbb{N}\},$$

существует $B \in \mathfrak{B}$, инвариантный относительно H . Множество таких банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}(H)$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{B}(H)$ есть замкнутое выпуклое подмножество \mathfrak{B} . Условиям 1–3 удовлетворяют оператор Чезаро

$$(Cx)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, n \in \mathbb{N}$$

и операторы растяжения

$$(\sigma_n x) = \left(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_n, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_n, \dots \right), n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому множества $\mathfrak{B}(C)$ и $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ непусты для любого $n \in \mathbb{N}$. В работе [7] было доказано, что $\mathfrak{B}(C) \subset \bigcap_{n=2}^\infty \mathfrak{B}(\sigma_n)$.

Ниже мы будем использовать терминологию и результаты теории полупорядоченных пространств. По теореме Какутани–Боненблуста–Накано [8, с. 192] ℓ_∞^* изометрично пространству $L_1(\Omega)$ для некоторого множества Ω с мерой μ . Обозначим через Ω_d и Ω_c дискретную и непрерывную части Ω . Тогда

$$\ell_\infty^* \approx L_1(\Omega) = L_1(\Omega_d) \oplus L_1(\Omega_c) \text{ и } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_d \oplus \mathfrak{B}_c,$$

где \mathfrak{B}_d и \mathfrak{B}_c – замкнутые и непрерывные подмножества \mathfrak{B} , соответствующие дискретной и непрерывной мерам на Ω . Любому $B \in \mathfrak{B}$ соответствуют такие $B_1 \in \mathfrak{B}_d$ и $B_2 \in \mathfrak{B}_c$ и $\lambda \in [0, 1]$, что

$$B = (1 - \lambda)B_1 + \lambda B_2.$$

По теореме Крейна–Мильмана

$$\mathfrak{B} = \overline{\text{conv ext}\mathfrak{B}},$$

где $\text{ext}\mathfrak{B}$ – множество экстремальных точек \mathfrak{B} и замыкание выпуклой оболочки берется в слабой* топологии. Как показал Ч. Чоу [9], множество $\text{ext}\mathfrak{B}$ имеет мощность 2^c , где c – кон-

тинuum. Для любых $B_1, B_2 \in \text{ext}\mathfrak{B}$ выполнено $\|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2$. Основные свойства множества \mathfrak{B} изложены в обзоре [10].

§ 2. Каждому $B \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие определенную на $[0, 1]$ функцию

$$t \mapsto \gamma(B, t) = B \left(\bigcup_{n=1}^\infty [2^n, 2^{n+t}] \right),$$

где $\bigcup_{n=1}^\infty [2^n, 2^{n+t}]$ – последовательность

$$x_k = \begin{cases} 1, & 2^n \leq k \leq 2^{n+t} \\ 0, & 2^{n+t} < k < 2^{n+1}, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

т. е. мы отождествляем последовательность и ее характеристическую функцию.

Эти функции были введены в работе [11], где были использованы для исследования банаховых пределов. Очевидно, функция $\gamma(B, t)$ монотонно возрастает на $[0, 1]$, $\gamma(B, 0) = 0$, $\gamma(B, 1) = 1$. Обозначим через Γ множество возрастающих на $[0, 1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Для любой $f \in \Gamma$ существует такой $B \in \mathfrak{B}$, что $\gamma(B, t) = f(t)$ для всех $t \in [0, 1]$ [11]. Хорошо известно, что множество точек разрыва любой функции $f \in \Gamma$ конечно или счетно и функция f дифференцируема почти везде.

Теорема 1. Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Для того, чтобы $B \in \mathfrak{B}_c$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\gamma(B, t)$ была непрерывной.

Теорема 2. Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Для того, чтобы $B \in \mathfrak{B}_d$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\gamma(B, t)$ принадлежала замкнутой (в топологии норм) выпуклой оболочке функций $\varphi_s(t)$, где

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < s \\ 1, & s \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s \\ 1, & s < t \leq 1 \end{cases}$$

и $0 < s \leq 1$ в первом случае и $0 \leq s < 1$ во втором.

Принадлежность $B \in \mathfrak{B}$ множеству $\text{ext}\mathfrak{B}$ в терминах функции $\gamma(\cdot, t)$ описать невозможно. Действительно, если $B_1 \in \text{ext}\mathfrak{B}$, то существует такой $B_2 \in \text{ext}\mathfrak{B}$, $B_2 \neq B_1$, что $\gamma(B_1, t) = \gamma(B_2, t)$ [11]. Тогда

$$\gamma(B_1, t) = \gamma(B_2, t) = \gamma \left(\frac{B_1 + B_2}{2}, t \right)$$

для всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, $B_1 \in \text{ext}\mathfrak{B}$ и $\frac{B_1 + B_2}{2} \notin \text{ext}\mathfrak{B}$ имеют одинаковую функцию $\gamma(\cdot, t)$.

Теорема 3. Если $B \in \mathfrak{B}_d$, то $\gamma'(B, t) = 0$ почти везде.

Обратное к теореме 3 утверждение не имеет места, так как справедлива

Теорема 4. *Существует такой $B \in \mathfrak{B}_c$, что $\gamma(B, t)$ совпадает с функцией Кантора.*

§ 3. Известно [12], что диаметр $d(\mathfrak{B}, \ell_\infty^*)$ и радиус $r(\mathfrak{B}, \ell_\infty^*)$ множества \mathfrak{B} в ℓ_∞^* равны 2, т. е.

$$\sup_{B_1, B_2 \in \mathfrak{B}} \|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2,$$

$$\inf_{B_1 \in \mathfrak{B}} \sup_{B_2 \in \mathfrak{B}} \|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2.$$

Мы усилим эти результаты. Любая счетная последовательность различных экстремальных точек B_1, B_2, \dots порождает подпространство, изометричное ℓ_1 [13], т. е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k B_k \right\|_{\ell_\infty^*} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|. \quad (1)$$

Из (1) вытекает, что

$$d(\mathfrak{B}_d, \ell_\infty^*) = r(\mathfrak{B}_d, \ell_\infty^*) = 2. \quad (2)$$

Действительно, если $B \in \mathfrak{B}_d$, то $B \in \overline{\text{conv ext} \mathfrak{B}}$, где замыкание берется в нормированной топологии ℓ_∞^* . Отсюда

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k$$

для некоторых $B_k \in \text{ext} \mathfrak{B}$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$. Так как $\text{ext} \mathfrak{B}$ имеет мощность 2^c , то существует $B_0 \in \text{ext} \mathfrak{B}$, отличный от B_k , $k = 1, 2, \dots$ Тогда в силу (1) имеем $\|B - B_0\|_{\ell_\infty^*} = 2$. Этим установлено (2).

Теорема 5. *Радиус и диаметр множества $\mathfrak{B}(C)$ в ℓ_∞^* равны 2.*

Так как $\mathfrak{B}(C) \subset \mathfrak{B}_c$ в силу [14, теорема 3] и [7, теорема 5], то из теоремы 5 вытекает

Следствие 1. *Радиус и диаметр множества \mathfrak{B}_c в ℓ_∞^* равны 2.*

Для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ справедливо очевидное неравенство $\|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} \leq 2$. Поэтому теорема 5, следствие 1 и (2) говорят о том, что радиус и диаметр \mathfrak{B}_d , \mathfrak{B}_c и $\mathfrak{B}(C)$ в ℓ_∞^* принимают максимально возможное значение.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят рецензентов за ценные замечания.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования первого, второго и четвертого авторов выполнены за счет гранта Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект № 22-7-2-27-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorentz G.G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta mathematica. 1948. V. 80. № 1. P. 167–190.
2. *Sucheston L.* Banach limits // The American Mathematical Monthly. 1967. V. 74. № 3. P. 308–311.
3. *Mazur S.* O metodach sumowalnosci // Ann. Soc. Polon. Math.(Suppl.). 1929. P. 102–107.
4. *Банах С.* Теория линейных операций // РХД, М.–Ижевск, 2001. 272 с.
5. *Eberlein W.F.* Banach–Hausdorff limits // Proceedings of the American Mathematical Society. 1950. V. 1. № 5. P. 662–665.
6. *Semenov E.M., Sukochev F.A.* Invariant Banach limits and applications // Journal of Functional Analysis. 2010. V. 259. № 6. P. 1517–1541.
7. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Dilation invariant Banach limits // Indagationes Mathematicae. 2020. V. 31. № 5. P. 885–892.
8. *Aliprantis C.D., Burkinshaw O.* Positive operators // Academic Press. 1985. 376 p.
9. *Chou C.* On the size of the set of left invariant means on a semigroup // Proceedings of the American Mathematical Society. 1969. V. 23. № 1. P. 199–205.
10. *Семенов Е.М., Сукочев Ф.А., Усачев А.С.* Геометрия банаховых пределов и их приложения // Успехи математических наук. 2020. Т. 75. № 4. С. 153–194.
11. *Семенов Е.М., Сукочев Ф.А., Усачев А.С.* Основные классы инвариантных банаховых пределов // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83. № 1. С. 140–167.
12. *Семенов Е.М., Сукочев Ф.А., Усачев А.С.* Структурные свойства множества банаховых пределов // Докл. РАН. 2011. Т. 441. № 2. С. 177–178.
13. *Semenov E., Sukochev F.* Extreme points of the set of Banach limits // Positivity. 2013. Vol. 17. № 1. P. 163–170.
14. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Invariant Banach limits and applications to noncommutative geometry // Pacific Math. J. 2020. V. 306. № 1. P. 357–373.

THE SET OF BANACH LIMITS AND ITS DISCRETE AND CONTINUOUS SUBSETS

N. N. Avdeev^a, R. E. Zvolinskii^a, E. M. Semenov^a, A. S. Usachev^{a, b}

Presented by Academician of the RAS S. V. Kislyakov

^a*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

^b*Central South University, Changsha, Hunan, People's Republic of China*

The note states criteria for a Banach limit to belong to discrete or to continuous part of the set of Banach limits. Diameters and radii of these parts are found, too.

Keywords: Banach limits, invariant Banach limits, diameter and radius of the set

УДК 519.63, 532.3

О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ВНУТРИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ И В ОБЛАСТЯХ ИХ ВЛИЯНИЯ

© 2024 г. В. В. Остапенко^{1, *}, Е. И. Полунина^{1, **}, Н. А. Хандеева^{1, ***}

Представлено академиком РАН Е. Е. Тыртышниковым

Получено 27.03.2024 г.

После доработки 23.07.2024 г.

Принято к публикации 23.07.2024 г.

Проведен сравнительный анализ точности численных схем TVD (Total Variation Diminishing) второго порядка, RBM (Rusanov-Burstein-Mirin) третьего порядка и A-WENO (Alternative Weighted Essentially Non-Oscillatory) пятого порядка по пространству и третьего порядка по времени при расчете специальной задачи Коши для уравнений мелкой воды с разрывными начальными данными, точное решение которой содержит центрированную волну разрежения и не содержит ударную волну. Показано, что внутри центрированной волны разрежения и в области ее влияния решения всех трех схем с различными порядками сходятся к разным инвариантам точного решения, что приводит к снижению точности этих схем при вычислении вектора базисных переменных рассматриваемой задачи Коши. Для теоретического обоснования данных численных результатов применяется P-форма первого дифференциального приближения разностных схем.

Ключевые слова: численные схемы повышенной точности, уравнения мелкой воды, центрированные волны разрежения

DOI: 10.31857/S2686954324040109, EDN: YYRMQN

1. ВВЕДЕНИЕ

В [1] был предложен метод построения комбинированных численных схем сквозного счёта, которые, в отличие от NFC (Nonlinear Flux Correction) схем [2–7] и гибридных схем [8–10], не только монотонно локализуют фронты ударных волн, но также сохраняют повышенную точность в областях их влияния. Используя методику, разработанную в [1], различные комбинированные схемы были построены в [11, 12], где они применялись для расчета задач Коши для системы уравнений мелкой воды с гладкими периодическими начальными данными, когда ударные волны возникают в результате градиентных катастроф внутри расчетной области. Численное моделирование таких задач было об-

условлено тем, чтобы на первом этапе построения теории комбинированных схем избежать проблем, связанных с сохранением повышенной точности этих схем при аппроксимации разрывных начальных и граничных условий. Поэтому на следующих этапах развития этой теории необходимо исследовать точность разностных схем сквозного счёта при численном расчете обобщенных решений задач Коши и начально-краевых задач с разрывными начальными и граничными условиями.

Первый шаг в этом направлении сделан в [13], где был проведен сравнительный анализ точности монотонной схемы UpWind первого порядка [14] и двух NFC-схем: TVD второго порядка [15] и WENO5 третьего порядка по времени [16] при расчете для нелинейного уравнения переноса задачи Коши с кусочно-линейными разрывными периодическими начальными данными. Было показано, что в случае устойчивых начальных разрывов, из которых формируется последовательность ударных волн, порядок сходимости всех трех схем между ударными волнами совпадает с их точностью на гладких решении-

¹ Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

* E-mail: ostigil@mail.ru

** E-mail: ekpolunina2014@gmail.com

*** E-mail: nzyuzina1992@gmail.com

ях. В случае неустойчивых начальных разрывов, при распаде которых формируется последовательность центрированных волн разрежения, все три рассмотренные схемы имеют первый порядок сходимости внутри этих волн разрежения, независимо от их точности на гладких решениях.

В настоящей работе проведен сравнительный анализ точности численных схем TVD [15], RBM [17, 18] и A-WENO [19] при расчете специальной задачи Коши для уравнений мелкой воды с разрывными начальными данными, точное решение которой содержит центрированную волну разрежения, но не содержит ударную волну. Показано, что внутри центрированной волны разрежения и в области ее влияния решения всех трех схем с различными порядками сходятся к разным инвариантам точного решения. В частности, в волне разрежения численные решения с первым порядком сходятся к инварианту, который распространяется в этой волне вдоль характеристик, выходящих из ее центра, и приблизительно со вторым порядком сходятся к другому инварианту, который переносится в центрированную волну вдоль пересекающих ее характеристик. Это приводит к соответствующему снижению точности тестируемых схем при вычислении вектора базисных переменных рассматриваемой задачи Коши. С использованием P-формы первого дифференциального приближения разностных схем [20] дается теоретическое обоснование данных численных результатов.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Векторная форма записи системы уравнений мелкой воды имеет вид [3]:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/H + gH^2/2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь x и t – пространственная и временная переменные, измеряемые в метрах (m) и секундах (s), $H(x, t)$ и $q(x, t)$ – глубина и расход жидкости, имеющие размерности m и m^2/s , g – ускорение свободного падения (в расчетах $g = 10 \text{ m/s}^2$). Рассмотрим для системы (1), (2), задачу Коши с начальными данными

$$H(x, 0) = \begin{cases} H_1, & x \leq 0, \\ \varphi(x), & x > 0, \end{cases} \quad q(x, 0) = \begin{cases} q_1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$H_1 = 5 \text{ m}, \quad \varphi(x) = \left(2 - \frac{1}{\pi} \arctan(x + 1) \right) m, \quad (4)$$

$$q_1 = 2\sqrt{g}(\sqrt{\varphi(0)} - \sqrt{H_1})H_1 \approx -28.88 \text{ m/s}^2. \quad (5)$$

Далее для задачи Коши (1)–(5) будем использовать аббревиатуру SCP (Special Cauchy Problem). Будем также применять следующие обозначения: $v = q/H$ – горизонтальная скорость жидкости, $c = \sqrt{gH}$ – скорость распространения малых возмущений в мелкой воде, $\lambda_1 = v - c$ и $\lambda_2 = v + c$ – собственные значения матрицы Якоби $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_u(\mathbf{u})$ системы (1), представляющие собой скорости характеристик, вдоль которых распространяются инварианты $w_1 = v - 2c$ и $w_2 = v + 2c$ системы (1).

Из формул (4) и (5) следует, что на разрыве начальных данных (3) инвариант w_2 системы (1) является постоянным, т.е.

$$w_2(0) = w_2(0 + 0) = 2\sqrt{g\varphi(0)} \approx 8.37 \text{ m/s}. \quad (6)$$

Это означает, что точное решение задачи SCP представляет собой автомодельную центрированную волну разрежения индекса $i = 1$ распространяющуюся в отрицательном направлении оси x по постоянному фоновому течению (H_1, q_1) . Справа к центрированной волне примыкает волна повышения уровня жидкости, формируемая начальной глубиной $\varphi(x)$.

В результате точное решение задачи SCP на ограниченном временном интервале $[0, T]$ (на котором эволюция волны повышения еще не приводит к возникновению ударной волны) содержит четыре качественно различных области гладкости (рис. 1), разделенных слабыми разрывами, расположенными на характеристиках системы (1). Это область R центрированной волны разрежения, расположенная между прямолинейными характеристиками L_1^- и L_1^+ первого семейства, выходящими из точек $x = 0$ и $x = 0 + 0$ на оси x , область U постоянного течения (H_1, q_1) , находящаяся левее характеристики L_1^- , область V влияния центрированной волны, расположенная между характеристиками L_1^+ и L_2 , где L_2 – характеристика второго семейства, выходящая из точки $x = 0 + 0$ на оси x , и область W повышения уровня жидкости, находящаяся правее характеристики L_2 . При этом инвариант w_2 точного решения имеет постоянное значение (6) в областях U , R и V .

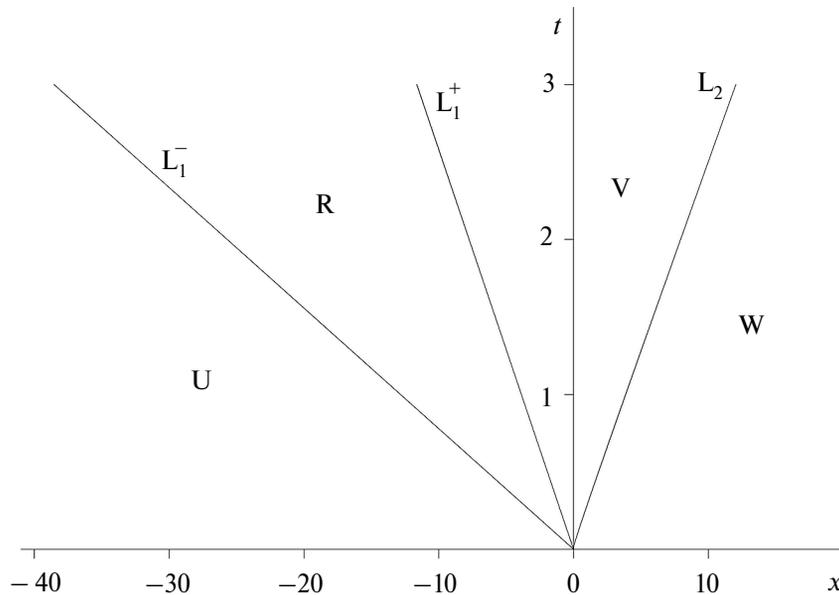


Рис. 1. Различные области гладкости точного решения задачи SCP.

3. РАССМАТРИВАЕМЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

Для численного решения задачи Коши (1)–(3) будем применять явные двухслойные по времени консервативные схемы

$$\frac{\mathbf{v}_j^{n+1} - \mathbf{v}_j^n}{\tau} + \frac{\bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^n - \bar{\mathbf{f}}_{j-1/2}^n}{h} = 0, \quad (7)$$

в которых численные потоки $\bar{\mathbf{f}}_{j\pm 1/2}^n$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_{j+1/2}^n &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_{j-l+1}^n, \mathbf{v}_{j-l+2}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+l}^n, \theta), \\ \bar{\mathbf{f}}_{j-1/2}^n &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{v}_{j-l}^n, \mathbf{v}_{j-l+1}^n, \dots, \mathbf{v}_{j+l-1}^n, \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\theta = \tau / h$ и функция $\bar{\mathbf{f}}$ согласована с дифференциальным потоком \mathbf{f} системы (1) в смысле выполнения тождества

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}, \theta) = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Функции $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}_j(x_j, t_n)$, входящие в разностную схему (7), (8), вычисляются в узлах равномерной прямоугольной сетки

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, M_1 \leq j \leq M_2; t_n = n\tau, 0 \leq n \leq N\}, \quad (9)$$

где h – шаг сетки по пространству, а τ – шаг сетки по времени, удовлетворяющий условию устойчивости Куранта

$$\tau = \frac{zh}{\max_{i=1,2} \max_{j,n} |\lambda_i(\mathbf{v}_h(x_j, t_n))|}, \quad (10)$$

в котором $z \in (0,1)$ – коэффициент запаса. Целые числа M_1 и M_2 , определяющие пространственный размер сетки (9), удовлетворяют неравенствам $M_1 \ll -1$ и $M_2 \gg 1$, а целое число N , определяющее количество временных слоев в сетке (9), задает момент времени $T = N\tau$, до которого проводится численный расчет.

Поскольку разрыв начальных данных (3) расположен в узле $x_0 = 0$ сетки (9), то начальные значения численного решения будем задавать по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^0 &= \mathbf{v}_h(x_j, 0) = \\ &= \begin{cases} \mathbf{u}(x_j, 0), & x_j \neq 0, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{u}(x_j - 0, 0) + \mathbf{u}(x_j + 0, 0)), & x_j = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку при $x \leq 0$ начальные данные (3) являются постоянными, а при $x > 0$ начальный расход $q(x, 0) = 0$ и начальная глубина удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1.5 \text{ м},$$

то выбирая границы расчетной области (9) таким образом, что

$$X_1 = hM_1 \ll x_1^-(T), \quad X_2 = hM_2 \gg x_2(T), \quad (12)$$

где $x = x_1^-(t)$ и $x = x_2(t)$ – уравнения характеристик L_1^- и L_2 , граничные значения численного решения можно задавать путем точной аппрок-

симации начальных условий (3) по следующим формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j^n &= \mathbf{v}_h(x_j, t_n) = \mathbf{u}(x_j, 0), \\ j &= \overline{M_1, M_1 + l - 1}, j = \overline{M_2 - l + 1, M_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом начальных и граничных условий (11) и (13) решение схемы (7) однозначно вычисляется в сеточной области (9).

В качестве конкретных численных схем (7) мы будем использовать схемы TVD, RBM и A-WENO, детальное описание которых приводится в работах [15], [17, 18] и [19], соответственно.

4. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Для приближенной оценки порядков локальной сходимости численного решения $\mathbf{v}_h(x_j, t_n)$, построенного на равномерной сетке (9), зафиксируем на этой сетке некоторый узел (x_j, t_n) , где $n \geq 1$, и введем для него новое обозначение (x_*, t_*) , где $x_* = jh$ и $t_* = n\tau > 0$. Предположим, что на последовательности сгущающихся сеток

$$\begin{aligned} S_i &= \left\{ (x_j^i, t_n^i) : x_j^i = jh_i, 2^{i-1}M_1 \leq j \leq 2^{i-1}M_2, n^i = \right. \\ &= \left. n\tau_i, 0 \leq n \leq 2^{i-1}N \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $h_i = h / 2^{i-1}$, $\tau_i = \tau / 2^{i-1}$, получаемых путем сжатия базисной сетки (9), численное решение $\mathbf{v}_{h_i}(x_j^i, t_n^i)$ в точке (x_*, t_*) сходится к точному решению $\mathbf{u}(x, t)$ с порядком r . Это означает, что в точке (x_*, t_*) с точностью $o(h_i^r)$ выполнено условие

$$\mathbf{v}_{h_i} - \mathbf{u} = \mathbf{A}h_i^r, \quad (15)$$

где \mathbf{A} – векторная величина, не зависящая от h_i и такая, что $|\mathbf{A}| > 0$. Из условия (15) следуют [21] формулы Рунге для приближенного определения порядка сходимости

$$r = \log_2 \frac{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|}{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|} = \log_{1/2} \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|} \quad (16)$$

и вектора ошибок

$$\delta \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h - \mathbf{u} = (\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}) \left(1 - \frac{|\mathbf{v}_{h_2} - \mathbf{v}_{h_3}|}{|\mathbf{v}_{h_1} - \mathbf{v}_{h_2}|} \right)^{-1} \quad (17)$$

численного решения \mathbf{v}_h на базисной сетке (9).

Рассмотрим некоторую гладкую скалярную функцию $w(\mathbf{u})$ векторного решения \mathbf{u} , точность вычисления которой мы хотим определить. Предположим, что на последовательности сгущающихся сеток (14) численная функция

$w_{h_i} = w(\mathbf{v}_{h_i})$ сходится в точке (x_*, t_*) с порядком ρ к функции $w = w(\mathbf{u})$. Это означает, что в точке (x_*, t_*) с точностью $o(h_i^\rho)$ выполнено условие

$$w_{h_i} - w = Bh_i^\rho, \quad (18)$$

где B – скалярная величина, независящая от h_i и такая, что $B \neq 0$. Если вычисляемое решение \mathbf{u} является гладким, то порядки сходимости r и ρ совпадают ($r = \rho$) для любой гладкой функции $w(\mathbf{u})$. В то же время, если точное решение \mathbf{u} содержит центрированные волны разрежения и ударные волны, то внутри центрированных волн разрежения, а также в областях влияния ударных и центрированных волн для некоторых функций $w(\mathbf{u})$, в частности для инвариантов точного решения, порядки сходимости r и ρ могут различаться ($r \neq \rho$). С учетом этого, из (18), также как из (15), следуют [22] приближенные формулы для определения порядка сходимости

$$\rho = \log_2 \frac{|w_{h_1} - w_{h_2}|}{|w_{h_2} - w_{h_3}|} = \log_{1/2} \frac{|w_{h_2} - w_{h_3}|}{|w_{h_1} - w_{h_2}|} \quad (19)$$

и ошибки

$$\delta w_h = w_h - w = (w_{h_1} - w_{h_2}) \left(1 - \frac{|w_{h_2} - w_{h_3}|}{|w_{h_1} - w_{h_2}|} \right)^{-1}$$

численного решения $w_h = w(\mathbf{v}_h)$.

Если порядки локальной сходимости $r = r_h(x_j, T)$ и $\rho = \rho_h(x_j, T)$, определяемые по формулами (16) и (19), сильно осциллируют, то на приводимых ниже рисунках мы будем показывать осредненные и ограниченные сверху значения этих порядков

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_h(x_j, T) = \begin{cases} \hat{r}(x_j, T), & \hat{r}(x_j, T) \leq R, \\ R, & \hat{r}(x_j, T) > R, \end{cases} \\ \bar{\rho} &= \bar{\rho}_h(x_j, T) = \begin{cases} \hat{\rho}(x_j, T), & \hat{\rho}(x_j, T) \leq R, \\ R, & \hat{\rho}(x_j, T) > R, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

посчитанные на достаточно мелкой базисной сетке (9), где $R > 3$ и

$$\hat{r}_h(x_j, T) = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k r_h(x_{j+i}, T),$$

$$\hat{\rho}_h(x_j, T) = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k \rho_h(x_{j+i}, T)$$

для всех индексов j , удовлетворяющих неравенствам $M_1 + k \leq j \leq M_2 - k$, в которых k – за-

данное натурально число. На рисунках мы будем приводить относительные погрешности численных решений, определяемые по формулам

$$\Delta v = \Delta v_h(x_j, T) = \lg \frac{|\delta v_h(x_j, T)|}{|v_h(x_j, T)|},$$

$$\Delta w_h = \Delta w_h(x_j, T) = \lg \frac{|\delta w_h(x_j, T)|}{|w_h(x_j, T)|}. \quad (21)$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На рис. 2–4 в момент времени $T = 3\text{ s}$ приведены результаты расчетов задачи SCP по схемам TVD, RBM и A-WENO на равномерной сетке (9) с шагами $h = 0.1\text{ m}$ и $\tau = 0.005\text{ s}$, что гарантирует выполнение условия устойчивости (10). Численная сетка (9) задана в пространственной области $[X_1, X_2]$, удовлетворяющей условиям (12), где $X_1 = -150\text{ m}$ и $X_2 = 150\text{ m}$. На рис. 2 показано сравнение точного и численных значений глубин жидкости, где точное решение моделируется расчетом по схеме A-WENO на достаточно мелкой сетке (9). На рис. 3 приведены порядки сходимости (20), где $R = 3.5$ и $k = 10$, а на рис. 4 показаны относительные дисбалансы (21), получаемые при вычислении точного решения \mathbf{u} , а также его инвариантов w_1 и w_2 . Результаты расчетов на рис. 2–4 приведены для каждого 18-го пространственного узла $j = 18i$ сетки (9). Из рис. 2 следует, что на такой сетке все схемы с достаточно высокой точностью локализируют слабые

разрывы на границах центрированной волны разрежения.

Поскольку рассматриваемые схемы точно воспроизводят постоянное течение (H_1, q_1) в области U , находящейся на рис. 1 левее характеристики L_1^- , то в этой области ошибки (21) численных решений равны нулю, а порядки сходимости (20) не определены. Кроме того, в некоторых ε -окрестностях $(L_1^-)_\varepsilon$, $(L_1^+)_\varepsilon$ и $(L_2)_\varepsilon$ слабых разрывов точного решения, расположенных на характеристиках L_1^- , L_1^+ и L_2 , порядки сходимости также не определены и поэтому их формальные значения, получаемые по формулам (20), дают в этих окрестностях характерные осцилляции. С учетом этого области U и $(L_1^-)_\varepsilon$ на рис. 3 и 4 не приводятся. Далее мы будем использовать следующие обозначения

$$R_\varepsilon = R \setminus ((L_1^-)_\varepsilon \cup (L_1^+)_\varepsilon),$$

$$V_\varepsilon = V \setminus ((L_1^+)_\varepsilon \cup (L_2)_\varepsilon),$$

$$W_\varepsilon = W \setminus (L_2)_\varepsilon$$

для тех частей областей R , V и W , которые не пересекаются с ε -окрестностями характеристик L_1^- , L_1^+ и L_2 .

Из рис. 3 следует, что в области W_ε для каждой из рассматриваемых схем порядки сходимости численного решения к векторному решению \mathbf{u} и его инвариантам w_1 , w_2 совпадают ($\bar{r} = \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2$); при этом схема TVD имеет второй порядок, а схемы RBM и A-WENO третий порядок сходимости, что согласуется с их порядками

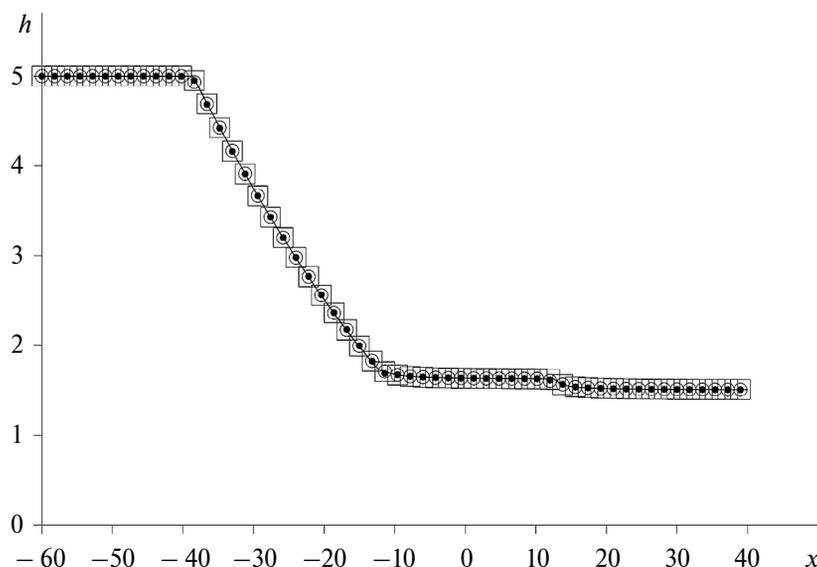


Рис. 2. Сравнение точного (сплошная линия) и численных значений глубин жидкости, получаемых в момент времени $T = 3$ при расчете задачи SCP по схемам TVD (кружки), RBM (точки) и A-WENO (квадратики).

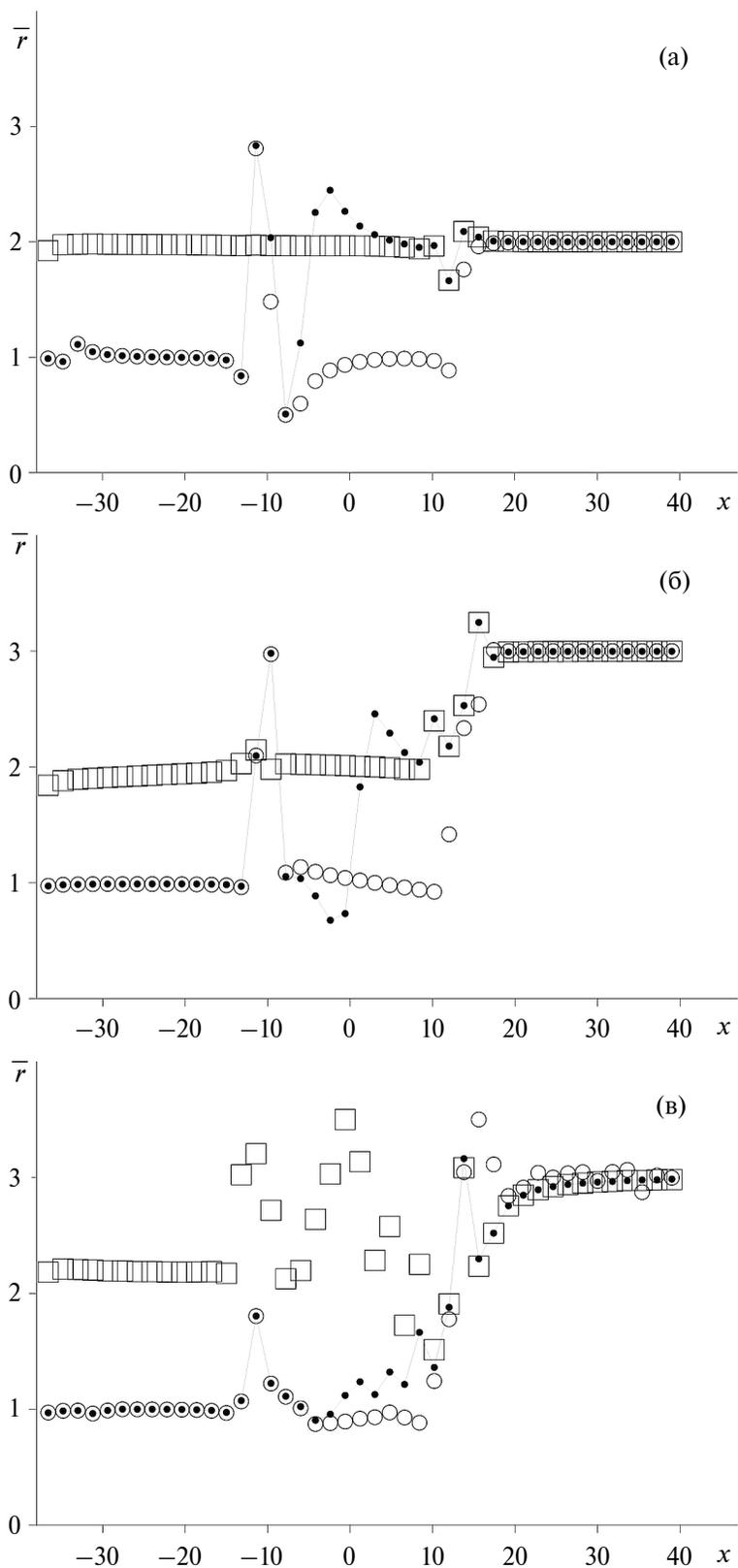


Рис. 3. Порядки сходимости численных решений к векторному решению задачи SCP (точки), а также к его инвариантам w_1 (кружки) и w_2 (квадратики), получаемые по схемам TVD (а), RBM (б) и A-WENO (в).

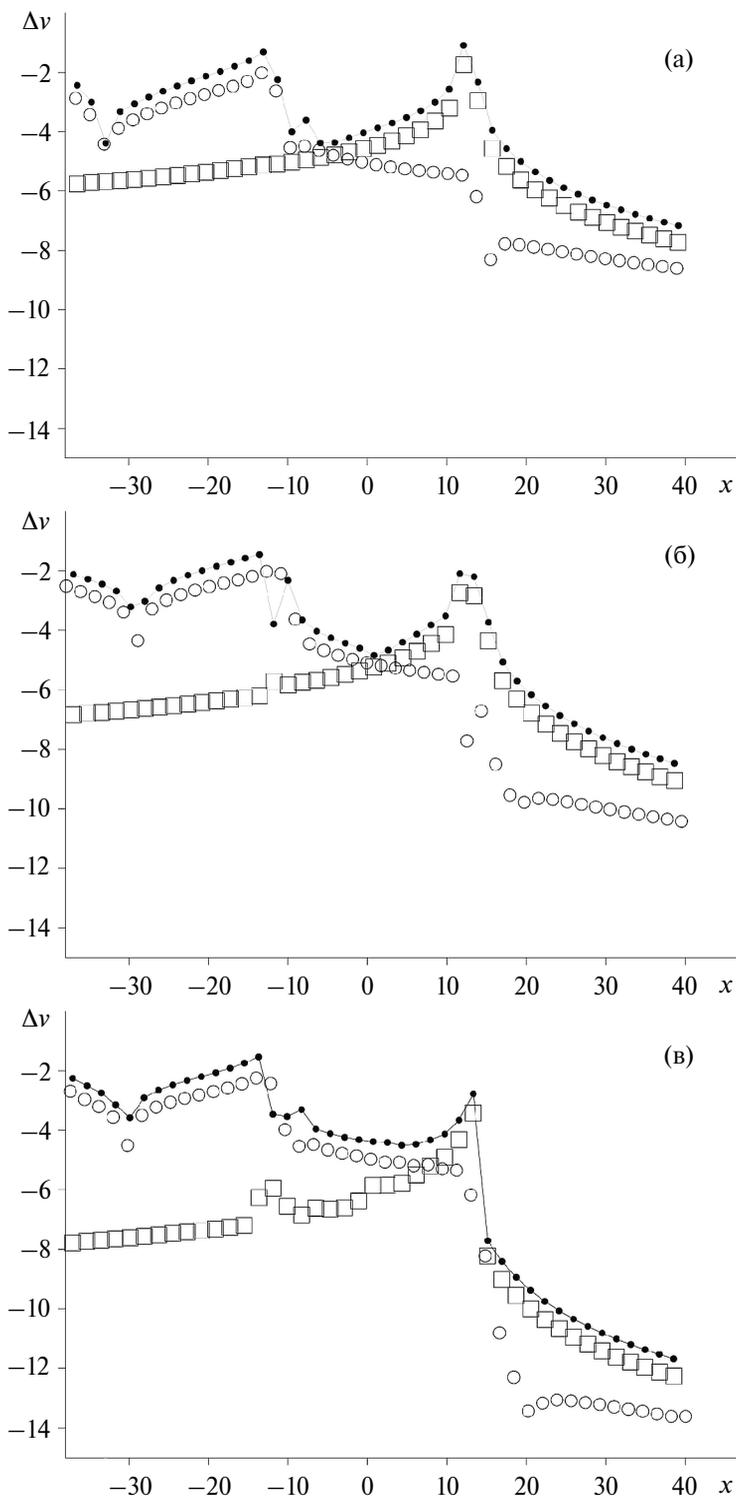


Рис. 4. Относительные дисбалансы, получаемые при вычислении векторного решения задачи SCP (точки), а также его инвариантов w_1 (кружки) и w_2 (квадратики) по схемам TVD (а), RBM (б) и A-WENO (в).

аппроксимации на гладких решениях. Несмотря на это (рис. 4), во всех схемах инвариант w_1 вычисляется в области W_ε с существенно более высокой точностью, чем инвариант w_2 . Из рис. 4

также следует, что в области W_ε точность схемы TVD второго порядка существенно ниже, чем схем RBM и A-WENO третьего порядка. При этом точность схемы A-WENO в области W_ε су-

шественно выше, чем схемы RBM, поскольку по пространству схема A-WENO имеет пятый, а схема RBM третий порядок аппроксимации.

Из рис. 3 следует, что в области R_ε все схемы с первым порядком сходятся к векторному решению \mathbf{u} и его инварианту w_1 , и приблизительно со вторым порядком к инварианту w_2 , т.е. $\bar{r} = \bar{\rho}_1 = 1$ и $\bar{\rho}_2 \approx 2$. В результате (рис. 4) в области R_ε все схемы имеют приблизительно одинаковую точность при вычислении векторного решения \mathbf{u} и его инварианта w_1 , которая существенно ниже, точности вычисления инварианта w_2 , т.е.

$$\Delta v_h \approx \Delta(w_1)_h \gg \Delta(w_2)_h.$$

В области V_ε все схемы имеют (рис. 3) приблизительно первый порядок сходимости ($\bar{\rho}_1 \approx 1$) к инварианту w_1 , а схемы TVD и RBM сохраняют второй порядок сходимости ($\bar{\rho}_2 = 2$) к инварианту w_2 ; в схеме A-WENO порядки сходимости $\bar{\rho}_2$, получаемые по второй формуле (20), сильно осциллируют, что означает отсутствие регулярной сходимости к инварианту w_2 . При этом во всех схемах порядки сходимости \bar{r} к векторному решению \mathbf{u} в левой части области V_ε ближе к значениям $\bar{\rho}_1$, а в правой части этой области к значениям $\bar{\rho}_2$. Связано это с тем (рис. 4), что в области V_ε ошибки вычисления инварианта w_1 возрастают, а инварианта w_2 убывают.

6. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для теоретического обоснования полученных в предыдущем разделе численных результатов, воспользуемся P-формой первого дифференциального приближения схемы (7), которая представляет собой [20] систему дифференциальных уравнений

$$(\mathbf{v}_h)_t + \mathbf{f}(\mathbf{v}_h)_x = h^k \Psi[\mathbf{v}_h], \quad (22)$$

где k – порядок аппроксимации схемы (7), $\Psi[\mathbf{v}_h]$ – дифференциальный оператор, зависящий от функции $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_h(x, t)$ и ее частных производных по x до $(k+1)$ -ой включительно. Система (22) получается из схемы (7) следующим образом [42]: функции $\mathbf{v}_{j+l}^{n+s} = \mathbf{v}_h(x_j + lh, t_n + s\tau)$, заданные в узлах сетки (9), заменяются на функции $\mathbf{v}_h(x + lh, t + s\tau)$, зависящие от непрерывно меняющихся аргументов x и t ; эти функции разлагаются в ряды Маклорена по h и τ , где $\tau = \theta h$, после чего с учетом дифференциальных следствий системы (22) производные по t порядка выше первого выражаются через производные по x .

Система (22) позволяет моделировать поведение численных решений схемы (7) в различных областях гладкости аппроксимируемого точного решения.

Предположим, что решение \mathbf{v}_h системы (22) в некоторой области Ω с порядком $r \leq k$ сходится к решению \mathbf{u} задачи SCP, т.е. в этой области с точностью $o(h^r)$ выполнено равенство

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{u} + h^r \mathbf{v}_r, \quad (23)$$

где $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r(x, t)$ – функция, задающая главный член ошибки (из рис. 3 следует, что $r = k$ при $\Omega = W_\varepsilon$ и $r = 1$ при $\Omega = R_\varepsilon$). Выясним с какой скоростью в области Ω инварианты

$$(w_1)_h = F_1(\mathbf{v}_h), \quad (w_2)_h = F_2(\mathbf{v}_h)$$

решения \mathbf{v}_h сходятся к инвариантам

$$w_1 = F_1(\mathbf{u}) = v - 2c, \quad w_2 = F_2(\mathbf{u}) = v + 2c$$

решения \mathbf{u} .

Зафиксируем индекс $i = 1, 2$ и в приводимых далее формулах для краткости будем его опускать. С учетом этого инварианты w и w_h удовлетворяют характеристическим уравнениям

$$\left. \frac{dw}{dt} \right|_{\lambda(\mathbf{u})} = w_t + \lambda(\mathbf{u})w_x = 0 \quad (24)$$

и

$$\left. \frac{dw_h}{dt} \right|_{\lambda(\mathbf{v}_h)} = (w_h)_t + \lambda(\mathbf{v}_h)(w_h)_x = h^k \Phi[\mathbf{v}_h], \quad (25)$$

где $\Phi[\mathbf{v}_h] = \mathbf{I}(\mathbf{v}_h)\Psi[\mathbf{v}_h]$ и \mathbf{I} – левый собственный вектор, отвечающий собственному значению λ . Подставляя в формулу $w_h = F(\mathbf{v}_h)$ разложение (23), с учетом равенства $w = F(\mathbf{u})$ с точностью $o(h^r)$ получаем

$$w_h = w + h^r \omega_r, \quad (26)$$

где $\omega_r = F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{v}_r$. Подставляя в уравнение (25) разложения (23) и (26), с учетом формул

$$\lambda(\mathbf{u} + h^r \mathbf{v}_r) = \lambda(\mathbf{u}) + h^r \lambda_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{v}_r + o(h^r),$$

$$\Phi[\mathbf{u} + h^r \mathbf{v}_r, h] = \Phi[\mathbf{u}] + O(h^r)$$

и уравнения (24), с точностью $o(h^r)$ получаем характеристическое уравнение

$$\left. \frac{d\omega_r}{dt} \right|_{\lambda(\mathbf{u})} = (\omega_r)_t + \lambda(\mathbf{u})(\omega_r)_x = \Psi_r(\mathbf{V}), \quad (27)$$

в котором

$$\Psi_r(\mathbf{V}) = \Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}_r, w) = \delta_{kr} \Phi[\mathbf{u}] - (\lambda_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{v}_r)_x, \quad (28)$$

где $\mathbf{V} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_r, w)$ – вспомогательная вектор-функция, δ_{kr} – символ Кронекера.

Зафиксируем некоторую точку $(x^*, t^*) \in \Omega$ и рассмотрим характеристику

$$L_\lambda^* = \{(x, t) : x = x_\lambda(t), t_b \leq t \leq t^*\}, \quad (29)$$

распространяющуюся со скоростью $(x_\lambda)_t = \lambda(\mathbf{u})$ и приходящую в точку (x^*, t^*) из точки $(x_b, t_b) \in \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ – граница области Ω . Из рис. 1 следует, что в интересующих нас случаях, когда $\Omega = W_\varepsilon$ или $\Omega = R_\varepsilon$, выполнено условие $L_\lambda^* \subseteq \Omega$. Интегрируя с учетом этого уравнение (27) вдоль характеристики (29), получаем

$$\omega_r(x^*, t^*) = \omega_r(x_b, t_b) + \int_{t_b}^{t^*} \Psi_r(\mathbf{V}(x_\lambda(t), t)) dt. \quad (30)$$

Предположим сначала, что $\Omega = W_\varepsilon$, в силу чего $r = k$ и в формуле (28) коэффициент $\delta_{kr} = \delta_{kk} = 1$. В этом случае (рис. 1) характеристика (29) выходит из положительной части оси x , т.е. $t_b = 0$ и $x_b > 0$, где начальные данные (3) являются гладкими. Поскольку численная аппроксимация (11) начальных данных (3) в области их гладкости является точной, т.е. $\mathbf{v}_h(x, 0) = \mathbf{u}(x, 0)$, то из равенств

$$w_h(x, 0) = F(\mathbf{v}_h(x, 0)) = F(\mathbf{u}(x, 0)) = w(x, 0)$$

с учетом разложения (26) получаем $\omega_k(x_b, 0) = 0$. В результате, формула (30) принимает вид

$$\omega_k(x^*, t^*) = \int_0^{t^*} \Psi_k(\mathbf{V}(x_\lambda(t), t)) dt.$$

Так как $\omega_k(x^*, t^*) \neq 0$ для всех точек $(x^*, t^*) \in W_\varepsilon$ при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, то с учетом (26) в области W_ε численные решения каждой схемы (рис. 3) сходятся к инвариантам w_1 и w_2 с одинаковым порядком $r = k$. При этом (рис. 4) точность вычисления инварианта w_1 существенно выше, поскольку он переносится в точку (x^*, t^*) из области $x > x^*$, где модули производных точного решения меньше, чем на интервале $[0, x^*]$, откуда переносится инвариант w_2 .

Предположим теперь, что $\Omega = R_\varepsilon$, в силу чего $r = 1$ и в формуле (28) коэффициент $\delta_{k1} = 0$. Для инварианта w_1 , который в точку $(x^*, t^*) \in R_\varepsilon$ переносится вдоль характеристики, выходящей из начала координат, из формулы (30), где $r = 1$, следует, что $\omega_1(x^*, t^*) \neq 0$, в силу чего численные решения сходятся к инварианту w_1 с первым порядком. Поскольку в области R_ε инвариант $w_2 = const$, то для него функция $\Psi_1(\mathbf{V}) = 0$ и формула (30) имеет вид

$$\omega_1(x^*, t^*) = \omega_1(x_b, t_b),$$

где точка (x_b, t_b) лежит на левой границе области R_ε . Если на этой границе для инварианта w_2 вы-

полнено условие (26), где $r \approx 2$, то в области R_ε для этого инварианта $\omega_1(x^*, t^*) = 0$ и численные решения будут сходиться к нему приблизительно со вторым порядком (рис. 3).

В области V_ε сходимость (23) является неравномерной (рис. 3), так как ее порядок r не является постоянным. Поэтому для обоснования в этой области полученных порядков сходимости численных решений к инвариантам w_1 и w_2 необходимо разработать специальную методику, что предполагается сделать в дальнейшем.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный сравнительный анализ точности численных схем TVD, RBM и A-WENO при расчете специальной задачи Коши для уравнений мелкой воды показал, что внутри центрированной волны разрежения и в области ее влияния решения всех трех схем с различными порядками сходятся к разным инвариантам точного решения. В частности, в волне разрежения численные решения с первым порядком сходятся к инварианту, который распространяется в этой волне вдоль характеристик, выходящих из ее центра, и приблизительно со вторым порядком сходятся к другому инварианту, который переносится в центрированную волну вдоль пересекающих ее характеристик. Это приводит к соответствующему снижению точности тестируемых схем при вычислении вектора базисных переменных рассматриваемой задачи Коши. С использованием P-формы первого дифференциального приближения численных схем дано теоретическое обоснование данных численных результатов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Разделы 4–7 работы выполнены при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-11-00060.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // Докл. АН. 2018. Т. 478. № 5. 517–522. <https://doi.org/10.1134/S1064562418010246>
2. Cockburn B. An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems, advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. 150–268. <https://doi.org/10.1007/BFb0096353>
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения

- гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
4. *LeVeque R.J.* Finite-volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511791253>
 5. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
 6. *Hesthaven J.S.* Numerical methods for conservation laws. // Computational Science and Engineering 18. SIAM, 2018.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611975109>
 7. *Shu C.-W.* Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes // Acta Numer. 2020. V. 29. 701–762.
<https://doi.org/10.1017/S0962492920000057>
 8. *Gelb A., Tadmor E.* Adaptive edge detectors for piecewise smooth data based on the minmod limiter // J. Sci. Comput. 2006. V. 28. 279–306.
<https://doi.org/10.1007/s10915-006-9088-6>
 9. *Guermond J.L., Pasquetti R., Popov B.* Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. 4248–4267.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.11.043>
 10. *Dewar J., Kurganov A., Leopold M.* Pressure-based adaption indicator for compressible Euler equations // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2015. V. 31. № 6. 1844–1874.
<https://doi.org/10.1002/num.21970>
 11. *Брагин М.Д., Ковыркина О.А., Ладонкина М.Е., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф., Хандеева Н.А.* Комбинированные численные схемы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. 1763–1803.
<https://doi.org/10.1134/S0965542522100025>
 12. *Chu S., Kovyrykina O.A., Kurganov A., Ostapenko V.V.* Experimental convergence rate study for three shock-capturing schemes and development of highly accurate combined schemes // Numer. Meth. Part. Diff. Eq. 2023. V. 39. № 6. 4317–4346.
<https://doi.org/10.1002/num.23053>
 13. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О точности разностных схем при расчете центрированных волн разрежения // Матем. моделир. 2023. Т. 35. № 7. 83–96.
<https://doi.org/10.1134/S2070048223070104>
 14. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. 1959. Т. 47. № 3. 271–306.
 15. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. № 3. 357–393.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
 16. *Jiang G.S., Shu C.-W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. № 1. 202–228.
<https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0130>
 17. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счёта разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. 1303–1305.
 18. *Burstein S.Z., Mirin A.A.* Third order difference methods for hyperbolic equations // J. Comput. Phys. 1970. V. 5. № 3. 547–571.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(70\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(70)90080-X)
 19. *Wang B.S., Don W.S., Garg N.K. and Kurganov N.K.* Fifth-order A-WENO finite-difference schemes based on a new adaptive diffusion central numerical flux // SIAM J. Sci. Comput. 2020. V. 42. A3932–A3956.
<https://doi.org/10.1137/20M1327926>
 20. *Шокин Ю.И., Яненко Н.Н.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1985.
 21. *Ковыркина О.А., Курганов А.А., Остапенко В.В.* Сравнительный анализ точности трех различных схем при расчете ударных волн // Матем. моделир. 2022. Т. 34. № 10. 43–64.
<https://doi.org/10.1134/S2070048223030092>
 22. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О точности схем типа MUSCL при расчете разрывных решений // Матем. моделир. 2021. Т. 33. № 1. 105–121.
<https://doi.org/10.1134/S2070048221050136>

ON THE ACCURACY OF CALCULATING INVARIANTS IN CENTERED RAREFACTION WAVES AND IN THEIR INFLUENCE AREA

V. V. Ostapenko^a, E. I. Polunina^a, N. A. Khandeeva^a

^aLavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

We perform a comparative analysis of the accuracy of second-order TVD (Total Variation Diminishing), third-order RBM (Rusanov-Burstein-Mirin), and fifth-order in space and third-order in time A-WENO (Alternative Weighted Essentially Non-Oscillatory) difference schemes for solving a special Cauchy problem for shallow water equations with discontinuous initial data. The exact solution of this problem contains a centered rarefaction wave and does not contain a shock wave. It is shown that in the centered rarefaction wave and its influence area, the solutions of these three schemes with different orders converge to different invariants of the exact solution. This leads to a decrease in the accuracy of these schemes when calculating the vector of base variables of the considered Cauchy problem. The P-form of the first differential approximation of the difference schemes is used for the theoretical justification of these numerical results.

Keywords: high order difference schemes, shallow water equations, centered rarefaction waves

УДК 517.518.11, 515.122.252

КОМПАКТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ МЕР И ПСЕВДОКОМПАКТНОСТЬ

© 2024 г. Член-корр. РАН В. И. Богачев^{1, 2, 3, 4, *}

Поступило 27.03.2024 г.
После доработки 01.08.2024 г.
Принято к публикации 01.08.2024 г.

Доказана псевдокомпактность тихоновского пространства X и пространства $\mathcal{P}(X)$ радоновских вероятностных мер на нем со слабой топологией при условии, что компактификация Стоуна–Чеха пространства $\mathcal{P}(X)$ гомеоморфна пространству $\mathcal{P}(\beta X)$ радоновских вероятностных мер на компактификации Стоуна–Чеха пространства X .

Ключевые слова: компактификации Стоуна–Чеха, пространство радоновских вероятностных мер, слабая топология, псевдокомпактность

DOI: 10.31857/S2686954324040111, **EDN:** YYKZZN

Пусть X — тихоновское (т. е. вполне регулярное) пространство, βX — его стоун-чеховская компактификация и $\mathcal{P}(X)$ — пространство радоновских вероятностных мер на X , наделенное слабой топологией. В недавней работе [1] был рассмотрен вопрос о совпадении пространства $\mathcal{P}(\beta X)$ радоновских вероятностных мер на βX со стоун-чеховской компактификацией $\beta\mathcal{P}(X)$ пространства $\mathcal{P}(X)$. Это совпадение понимается в следующем смысле: продолжение по непрерывности естественного вложения $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\beta X)$ на компактификацию взаимно однозначно. В цитированной работе доказан следующий результат.

Теорема 1. (i) *Псевдокомпактность пространства мер $\mathcal{P}(X)$ влечет псевдокомпактность X .*

(ii) *Инъективность указанного продолжения вложения $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\beta X)$ на $\beta\mathcal{P}(X)$ влечет псевдокомпактность обоих пространств X и $\mathcal{P}(X)$.*

С другой стороны, в [1] построены примеры некомпактных пространств X , для которых указанное совпадение имеет место. К таким пространствам относятся открытый интервал

счетных ординалов $[0, \omega_1)$ и плоскость Тихонова $[0, \omega_0] \times [0, \omega_1] \setminus (\omega_0, \omega_1)$ (где ω_0 — наименьший счетный ординал, ω_1 — первый несчетный ординал), показывающая, что совпадение возможно без счетной компактности. Как указано в [1], если вместо стоун-чеховских компактификаций брать компактификации Самюэля с подходящими равномерностями, то совпадение есть всегда. Наконец, в работе [1] был поставлен также ряд вопросов, связанных с компактификациями пространств мер. В настоящей заметке дан ответ на один из этих вопросов и усилен основной результат работы [1], а именно показано, что псевдокомпактность пространств $\mathcal{P}(X)$ и X вытекает из гомеоморфности $\mathcal{P}(\beta X)$ и $\beta\mathcal{P}(X)$. В частности, пространства $\mathcal{P}(\beta\mathbb{N})$ и $\beta\mathcal{P}(\mathbb{N})$ не гомеоморфны. Однако в общем случае вопрос о равенстве в указанном смысле пространств $\mathcal{P}(\beta X)$ и $\beta\mathcal{P}(X)$ при условии их гомеоморфности остается открытым. Неизвестна и описание пространств, для которых равенство верно.

Для тихоновского пространства X через $C_b(X)$ обозначим множество всех ограниченных непрерывных функций на X , а через βX его компактификацию Стоуна–Чеха (компактное пространство, в которое X вложено гомеоморфно как всюду плотное множество с тем свойством, что всякая функция из $C_b(X)$ является сужением на X функции из $C_b(\beta X)$). Линейное пространство всех ограниченных радоновских мер на X обозначим через $\mathcal{M}(X)$. Напомним (см. [2] или [3]), что знакопеременная мера μ на борелевской σ -алгебре пространства X называется

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия

³ Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

⁴ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: vibogach@mail.ru

радоновской, если радоновы ее положительная и отрицательная части, а неотрицательная борелевская мера μ радонова, если для всякого борелевского множества B и всякого $\varepsilon > 0$ есть такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$.

Слабая топология на пространстве $\mathcal{M}(X)$ задается полунормами

$$p_f(\mu) = \left| \int_X f d\mu \right|, \quad f \in C_b(X).$$

Пространство $\mathcal{P}(X)$ вероятностных радоновских мер наделяется индуцированной слабой топологией.

Совпадение $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ в указанном смысле равносильно тому, что всякая ограниченная непрерывная функция на $\mathcal{P}(X)$ равномерно приближается функциями вида

$$\mu \mapsto F(l_{f_1}(\mu), \dots, l_{f_n}(\mu)),$$

$$l_{f_i}(\mu) = \int_X f_i d\mu, \quad f_i \in C_b(X),$$

где F — многочлен на \mathbb{R}^n (см. [1]).

Следующий результат усиливает утверждение (ii) теоремы 1 из работы [1] с более коротким обоснованием (в части, касающейся псевдокомпактности $\mathcal{P}(X)$), но заключение о самом X опирается на утверждение (i) теоремы 1).

Теорема 2. Пусть тихоновское пространство X таково, что пространства $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ гомеоморфны. Тогда $\mathcal{P}(X)$ и X псевдокомпактны.

Доказательство. В силу [1, теорема 2] достаточно проверить псевдокомпактность пространства $\mathcal{P}(X)$. Теперь применим следующий известный факт (см. [4], [5] или [6, с. 221, теорема 9.3]): если тихоновское пространство обладает локально связной компактификацией Стоуна—Чеха, то оно псевдокомпактно. Напомним, что пространство называется локально связным, если всякая точка обладает базой связных открытых окрестностей. Этот факт мы применим к пространству $\mathcal{P}(X)$, компактификация которого в рассматриваемом случае локально связна, ибо по предположению гомеоморфна выпуклому компактному $\mathcal{P}(\beta X)$ в локально выпуклом пространстве $\mathcal{M}(X)$ радоновских мер на X , наделенном слабой топологией. Разумеется, заключение теоремы остается справедливым при формально более слабом условии локальной связности компактификации пространства $\mathcal{P}(X)$, но вряд ли такое условие проще непосредственного требования псевдокомпактности $\mathcal{P}(X)$.

Следствие 1. Предположим, что тихоновское пространство X можно непрерывно отобразить

на всюду плотное множество в пространстве Y , которое не псевдокомпактно (например, в некомпактном метрическом или суслинском пространстве). Тогда пространства $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ не гомеоморфны. В частности, это верно, если X — некомпактное метрическое или суслинское пространство.

Доказательство. При этом условии пространство X не псевдокомпактно, ибо композиция неограниченной непрерывной функции на пространстве Y с данным отображением из X в Y также непрерывно и неограниченно.

Известно (см. [7] или [8, теорема 1.2.2]), что псевдокомпактное пространство является бэр-овским, т. е. пересечение всякой последовательности открытых всюду плотных множеств всюду плотно. Поэтому получаем такое заключение.

Следствие 2. Если пространства $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ гомеоморфны, то $\mathcal{P}(X)$ и X — бэр-овские пространства.

В свою очередь, это влечет бэр-овость всех степеней X^n (см. [9], случай метрических пространств был рассмотрен в [10]). Впрочем, в данном случае это вытекает также и из псевдокомпактности X (см., например, [11, теоремы 5.3.2 и 5.3.3]). Вообще говоря, из бэр-овости X не следует бэр-овость $\mathcal{P}(X)$ даже в случае метрических пространств, но интересно выяснить, достаточна ли для бэр-овости $\mathcal{P}(X)$ псевдокомпактность X . Связанные с бэр-овостью свойства пространств мер изучались в [12] и [13]. Отметим, что в [14] построен пример в ZFC (система аксиом Цермело—Франклина с аксиомой выбора) сепарабельного метрического пространства X , не являющегося польским, для которого все замкнутые подмножества в $\mathcal{P}(X)$ являются бэр-овскими пространствами.

С именем Бэра связаны еще два понятия: бэр-овская σ -алгебра, порожденная непрерывными функциями на тихоновском пространстве X , и меры на ней, называемые бэр-овскими. На пространстве бэр-овских мер также определена слабая топология. Через $\mathcal{P}_\sigma(X)$ обозначают пространство вероятностных бэр-овских мер со слабой топологией. Псевдокомпактность X равносильна компактности $\mathcal{P}_\sigma(X)$. Поэтому в случае гомеоморфности $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$ и существования радоновского продолжения всякой бэр-овской меры на X мы получаем обычную компактность X , а не только псевдокомпактность.

Из равенства $\beta\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\beta X)$ вытекает, что бэр-овская σ -алгебра пространства $\mathcal{P}(X)$ по-

рождается также линейными функционалами вида

$$\mu \mapsto \int_X f d\mu, \quad f \in C_b(X).$$

Это следует из того, что при выполнении указанного равенства всякая ограниченная непрерывная функция на $\mathcal{P}(X)$ равномерно приближается многочленами от таких функционалов (как уже отмечалось выше). Бэровская σ -алгебра всего пространства мер $\mathcal{M}(X)$ всегда порождается такими функционалами, см. [2, теорема 6.10.6], но неясно, верно ли это для $\mathcal{P}(X)$. Само множество $\mathcal{P}(X)$ оказывается бэровским в $\mathcal{M}(X)$ при довольно ограничительном условии, как показывает следующее утверждение.

Предложение 1. *Множество $\mathcal{P}(X)$ входит в бэровскую σ -алгебру пространства $\mathcal{M}(X)$ в точности тогда, когда имеется счетный набор непрерывных функций на X , разделяющих точки, т. е. X можно непрерывно и инъективно отобразить в \mathbb{R}^∞ .*

Доказательство. Предположим, что имеется счетный набор непрерывных функций на X , разделяющих точки. Тогда можно перейти к счетному набору ограниченных функций с таким свойством. К нему добавим всевозможные многочлены с рациональными коэффициента-

ми от конечного числа данных функций, а затем подстановки полученных функций в функцию $t \mapsto \min(\max(t, 0), 1)$. Это дает счетный набор $\{f_n\} \subset C_b(X)$. Покажем, что множество $\mathcal{P}(X)$ задается в $\mathcal{M}(X)$ как пересечение множеств вида $\{I_f(\mu) \geq 0\}$ и $\{I_l(\mu) = 1\}$, где $I_f(\mu)$ — интеграл по мере μ от неотрицательной функции из набора $\{f_n\}$ и $I_l(\mu) = \mu(X)$. Достаточно проверить, что совокупность указанных неравенств выделяет множество неотрицательных мер. Допустим, что нашлась знакопеременная мера μ , интегралы по которой от неотрицательных функций из $\{f_n\}$ неотрицательны. Можно считать, что $|\mu|(X) \leq 1$, где $|\mu|$ — полная вариация меры μ . Пусть K — компакт, для которого $\mu(K) = -c < 0$, причем $\mu^+(K) = 0$, где μ^+ — неотрицательная часть μ . Возьмем больший компакт S с $|\mu|(X \setminus S) < c/4$, а также открытое множество U с $K \subset U$ и $|\mu|(U \setminus K) < c/4$. Так как X вполне регулярно, найдется непрерывная функция g на X с $0 \leq g \leq 1$, $g|_K = 1$, $g|_{X \setminus U} = 0$. В силу выбора набора $\{f_n\}$ и теоремы Стоуна–Вейерштрасса в этом наборе найдется функция f_n , для которой $0 \leq f_n \leq 1$ и $\sup_S |g(x) - f_n(x)| < c/4$. Тогда с учетом оценок $|\mu|(S) \leq 1$, $|\mu|(X \setminus S) < c/4$ и $|\mu|(U \setminus K) < c/4$ получаем

$$\begin{aligned} \int_X f_n d\mu &\leq \int_S f_n d\mu + c/4 \leq \int_S g d\mu + c/2 = \mu(K) + \int_{U \setminus K} g d\mu \leq \\ &\leq \mu(K) + 3c/4 = -c/4, \end{aligned}$$

что дает противоречие.

Предположим теперь, что $\mathcal{P}(X)$ входит в бэровскую σ -алгебру пространства $\mathcal{M}(X)$. Тогда оно имеет вид

$$P = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : (F_1(\mu), F_2(\mu), \dots) \in B\},$$

где B — борелевское множество в \mathbb{R}^∞ ,

$$F_i(\mu) = \int_X f_i d\mu, \quad f_i \in C_b(X).$$

Заметим, что функции f_i разделяют точки пространства X . В самом деле, иначе есть две разные точки $a, b \in X$, для которых $f_i(a) = f_i(b)$ при всех i . Значит, $F_i(\delta_a) = F_i(\delta_a + (\delta_a - \delta_b))$ при всех i . Так как $\delta_a \in P$, то $\delta_a + (\delta_a - \delta_b) \in P$, что неверно.

Некоторые равносильные условия существования последовательности непрерывных функций, разделяющих точки, можно найти в [15] (см. также [2, теорема 8.10.39]).

В работе [1] был рассмотрен пример $X = \beta\mathbb{N} \setminus \{p\}$, где $p \in \mathbb{N}^* := \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Тогда X счетно компактно, причем $\beta X = \beta\mathbb{N}$ (см. [16, с. 239, задача 58] или [17, п. 2.14]), а если p есть P -точка,

то пространство $\mathcal{P}(X)$ также счетно компактно, как показано в [1]. Точка $p \in \mathbb{N}^*$ называется P -точкой, если пересечение всякого счетного набора ее открытых окрестностей содержит ее открытую окрестность в \mathbb{N}^* . Такие точки существуют в предположении гипотезы континуума (CH) или при ее отрицании и аксиоме Мартина (MA), но в ZFC непротиворечиво их отсутствие, см. [16, задача 55 гл. IV], [18, с. 138], [19, следствие 1.7.2], [6, с. 107], [20], [21]. Поскольку стоун-чеховская компактификация здесь одноточечна, пространство $\mathcal{P}(X)$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\mathcal{P}(X)$ и меры Дирака δ_p в точке p . Однако неясно, совпадает ли оно с $\beta\mathcal{P}(X)$.

Остается неизвестным, следует ли равенство $\beta\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\beta X)$ из псевдокомпактности X или $\mathcal{P}(X)$, а также из счетной компактности какого-либо из этих пространств. Неясно, сохраняется ли оно при умножении на компакты (напомним, что псевдокомпактность таким свойством обладает, см. [8]). В построенных в [1] примерах выполнения этого равенства для некомпактных

пространств их компактификации Стоуна–Чеха одноточечны. Интересно рассмотреть случай общего пространства X с одноточечной компактификацией Стоуна – Чеха (такое пространство автоматически псевдокомпактно, см. [8, теорема 1.3.8]). Известным частным случаем является пространство Мривки (см. [22, упражнение 3.6.1] или подробное обсуждение в [23]), для которого $M = S \cup D$, где S счетно и всюду плотно в M , все точки S изолированы, D – несчетное дискретное замкнутое множество, дизъюнктное с S . Здесь $\beta M = M \cup \{p\}$, $\mathcal{P}(M)$ состоит из вероятностных мер, сосредоточенных на счетных множествах, $\mathcal{P}(\beta M)$ совпадает с выпуклой оболочкой $\mathcal{P}(M)$ и меры Дирака в точке p из одноточечной компактификации. Другой заслуживающий внимания пример – подпространство S в тихоновском кубе $[0,1]^{[0,1]}$, состоящее из функций со счетными носителями (так называемое Σ -произведение). Это подпространство секвенциально компактно и всюду плотно, причем $\beta S = [0,1]^{[0,1]}$, см. [22, п. 2.7.13].

Открыт вопрос о возможном несовпадении мощностей $\beta\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(\beta X)$. Так как $\mathcal{P}(\beta X)$ – выпуклый компакт в локально выпуклом пространстве радоновских мер, то его мощность κ совпадает со своей счетной степенью, т. е. $\kappa = \kappa^{\omega_0}$, см. [24].

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарю К. А. Афонина за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В.И.* // Функциональный анализ и его приложения. 2024. Т. 58. № 1. С. 4–21.
2. *Bogachev V.I.* Measure theory. V. 2. Springer, New York, 2007.
3. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2018.
4. *Banaschewski B.* // Canadian J. Math. 1956. V. 8. P. 395–398.
5. *Henriksen M., Isbell J.R.* // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 574–582.
6. *Walker R.C.* The Stone-Čech compactification. Springer-Verlag, Berlin – New York, 1974.
7. *Colmez J.* // C. R. Acad. Paris. 1952. T. 234. P. 1019–1021.
8. *Angoa-Amador J., Contreras-Carreto A., Ibarra-Contreras M., Tamariz-Mascarúa A.* Basic and classic results on pseudocompact spaces. In: Pseudocompact topological spaces. A survey of classic and new results with open problems. Edited by Michael Hrušák, Ángel Tamariz-Mascarúa and Mikhail Tkachenko. Developments in Mathematics, 55, pp. 1–38, Springer, Cham, 2018.
9. *Koumoullis G.* // Adv. Math. 1996. V. 124. № 1. P. 1–24.
10. *Wójcicka M.* // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1985. V. 33. P. 305–311.
11. *Dorantes-Aldama A., Okunev O., Tamariz-Mascarúa A.* Weakly pseudocompact spaces. In: Pseudocompact topological spaces. A survey of classic and new results with open problems. Edited by Michael Hrušák, Ángel Tamariz-Mascarúa and Mikhail Tkachenko. Developments in Mathematics, 55, pp. 151–190, Springer, Cham, 2018.
12. *Brown J.B.* // Fund. Math. 1977. V. 96. P. 189–193.
13. *Brown J.B., Cox G.V.* // Fund. Math. 1984. V. 121. P. 143–148.
14. *Krupski M.* // J. Inst. Math. Jussieu. 2022. V. 21. № 3. P. 851–868.
15. *Koumoullis G., Sapounakis A.* // Mich. Math. J. 1984. V. 31. № 1. P. 31–47.
16. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Наука, М., 1974.
17. *Vaughan J.E.* Countably compact and sequentially compact spaces. In: Handbook of set-theoretic topology, pp. 569–602, North-Holland, Amsterdam, 1984.
18. *Gillman L., Jerison M.* Rings of continuous functions. Van Nostrand, Princeton – New York, 1960.
19. *van Mill J.* An introduction to $\beta\omega$. In: Handbook of set-theoretic topology, pp. 503–567, North-Holland, Amsterdam, 1984.
20. *Szymański A.* // Colloq. Math. 1977. V. 37. P. 185–192.
21. *Wimmers E.* // Israel J. Math. 1982. V. 43. № 1. P. 28–48.
22. *Энгелькинг П.* Общая топология. Мир, М., 1986.
23. *Hernández-Hernández F., Hrušák M.* Topology of Mrówka-Isbell spaces. In: Pseudocompact topological spaces. A survey of classic and new results with open problems. Edited by Michael Hrušák, Ángel Tamariz-Mascarúa and Mikhail Tkachenko. Developments in Mathematics, 55, pp. 253–289, Springer, Cham, 2018.
24. *Lipecki Z.* // Colloq. Math. 2011. V. 123. № 1. P. 133–147.

COMPACTIFICATION OF SPACES OF MEASURES AND PSEUDOCOMPACTNESS

Corresponding Member of the RAS **V. I. Bogachev**^{a, b, c, d}

^a*Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia*

^b*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

^c*Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russia*

^d*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

We prove pseudocompactness of a Tychonoff space X and the space $\mathcal{P}(X)$ of Radon probability measures on it with the weak topology under the condition that the Stone–Čech compactification of the space $\mathcal{P}(X)$ is homeomorphic to the space $\mathcal{P}(\beta X)$ of Radon probability measures on the Stone–Čech compactification of the space X .

Keywords: Stone–Čech compactification, space of Radon probability measures, weak topology, pseudocompactness

УДК 517.54

НОВАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА СЛОЖНОСТИ И ЕЁ ВОЗМОЖНОСТИ ПО ОБНАРУЖЕНИЮ СИГНАЛОВ В ШУМЕ

© 2024 г. А. А. Галаев^{1, *}, В. Г. Бабиков^{1, **}, П. В. Лысенко^{1, ***}, Л. М. Берлин^{1, ****}

Поступило 18.12.2023 г.
После доработки 13.06.2024 г.
Принято к публикации 05.07.2024 г.

Настоящая статья посвящена совершенствованию методов распознавания сигналов на основе информационных характеристик спектра. Установлена дискретная функция нормированного упорядоченного спектра для единичной оконной функции, входящей в ДПФ. Доказаны леммы об оценках энтропии, дисбаланса и статистической сложности при обработке временного ряда независимых гауссовских величин. Предложены новые понятия одномерной и двумерной спектральных сложностей. Полученные теоретические результаты верифицированы численными экспериментами, которые подтвердили эффективность новой информационной характеристики при детектировании сигнала в смеси с белым шумом при малых отношениях сигнал/помеха.

Ключевые слова: информационная энтропия, спектральная сложность, белый гауссовский шум

DOI: 10.31857/S2686954324040122, EDN: YUEJZI

1. ВВЕДЕНИЕ

Множество прикладных задач физики и техники от квантовой механики до астрономии связано с обнаружением слабых сигналов, детектируемых на фоне естественного шума. Причем требуется иметь возможность указывать наличие детерминированных сигналов как хаотического, так и регулярного происхождения [1, 2] без их реального выделения [3]. В основе методов индикации и детектирования слабых сигналов лежат выборочные и тестовые статистики [4, 5]. В свою очередь, для оценки одного наблюдения или реализации случайной величины используются такие понятия как информационная энтропия, расстояние Кульбака–Лейблера, дивергенция Йенсена–Шеннона и некоторые другие, которые затем применяются в качестве критериев различных оптимизационных задач распознавания, классификации, фильтрации и отвечают за существо и качество принимаемых на их основе решений [6, 7]. Такие оценки возможно проводить как во временной, так и част-

ной областях исходного временного ряда [8, 9]. В настоящей работе будет показано, что для дискретных спектров сигналов оказывается удобным использовать порядковые статистики [10], где в качестве расстояния между двумя распределениями берется метрика Вассерштайна [3, 11], и будет введено понятие спектральной сложности распределения по отношению к гауссовскому белому шуму.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работах [6, 12] было получено, что одним из лучших критериев для задачи распознавания слабого сигнала в белом шуме является статистическая сложность (C – complexity) на основе полной вариации меры со знаком (TV – total variation):

$$C_{TV}(p) = -\frac{1}{4\log_2 N} \left(\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \left| p_i - \frac{1}{N} \right| \right)^2, \quad (1)$$

которая связана с задачей различения двух гипотез и следует из одной разновидности леммы Неймана–Пирсона. Здесь и далее рассматриваются дискретные наборы величин $p = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$, которые по определению обладают некоторыми следующими свойствами дискретного распределения вероятностей: $\forall p_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, а N – размер ряда

¹ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

* E-mail: galaev@ipu.ru

** E-mail: babikov@ipu.ru

*** E-mail: pavellysen@ipu.ru

**** E-mail: berlin.lm@phystech.edu

дискретных наборов данных. Там же было показано, что максимальное значение C_{TV} достигается на распределении, состоящем всего из двух значений с оптимальным количеством отсчетов для каждого из этих значений.

Выражение (1) было предложено при условии равномерности энергетического спектра белого шума. В реальности при применении ДПФ (дискретного преобразования Фурье) к некоторому временному интервалу (далее временные интервалы будем называть фреймами) белого шума полученный спектр не является равномерным и, как следствие, уровень статистической сложности C_{TV} значительно отличается от нуля, но при этом этот критерий остается эффективным для задачи распознавания, что будет показано далее.

Стоит сказать, что распределение статистической сложности хорошо аппроксимируется кривой нормального распределения. С ростом N плотность распределения статистической сложности для гауссовского белого шума становятся уже, стандартное отклонение с ростом N уменьшается пропорционально $1/\sqrt{N}$, а значение математического ожидания монотонно увеличивается.

При появлении сигнала в шуме значение математического ожидания статистической сложности C_{TV} увеличивается и возможность обнаружения сигнала зависит от функции распределения C_{TV} как для шума, так и для смеси сигнал-шум. Таким образом, нам необходимо получить аналитические оценки функции распределения статистической сложности, и решить задачу исследования свойств спектральных энергетических распределений, которая формулируется следующим образом.

Задача 1. Пусть имеется реализация $\{x_1, \dots, x_{2N+2}\}$ последовательности независимых случайных величин $\{\xi_1, \dots, \xi_{2N+2}\}$ с нулевым математическим ожиданием, к которой применено дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$X_k = \sum_{n=1}^{2N+2} x_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)}, \quad (2)$$

определяющее случайную величину

$$\Xi_k = \sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)}, \quad (3)$$

где $k = 0, \dots, N$, поскольку в силу свойства симметрии ДПФ вещественного сигнала вторая половина из $N+1, \dots, 2N+1$ комплексных амплитуд спектральных отсчетов комплексно сопряжена с первой.

Требуется найти дискретную функцию нормированного упорядоченного спектрального распределения $\eta_k(N)$ как нормированное среднее для каждого k -го значения случайной величины

$$\eta_k(N) = \frac{(\mathbf{T}I)_k}{E_X}, \quad (4)$$

где $I_k = \Xi_k \Xi_k^*$ (квадрат модуля амплитуды или энергия спектрального отсчета), E_X — половина энергии сигнала, а \mathbf{T} — оператор упорядочивания ряда в порядке невозрастания, и исследовать свойства полученного распределения на различных информационные меры.

Замечание 1. Сдвиг максимального количества отсчетов временного ряда выбран для дальнейшего удобства изложения материала.

Последовательность изложения результатов статьи имеет следующий вид. Сначала на основе известных результатов о распределении случайных отсчетов энергетического спектра белого шума, доказывается лемма о его упорядоченном дискретном распределении. Затем доказывается несколько лемм о поведении информационных характеристик, таких как энтропия и дисбаланс, на этом распределении. Затем вводится понятие спектральной сложности, и проводится сравнение статистической и спектральной сложностей для индикации сигнала при малом отношении сигнал/шум.

3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Для решения Задачи 1 нам потребуется несколько математических утверждений, сформулированных и доказанных далее.

Лемма А. [8] В Задаче 1 распределения случайных величин I_k при $k = 1, \dots, N$ являются экспоненциальными, а при $k = 0$ — нормальным распределением, если случайные величины ξ_n , $n = 1, \dots, 2N+2$ — независимые одинаково распределенные гауссовские с нулевым средним и дисперсией σ_0^2 (Шустер, 1898).

Из Леммы А следует, в частности, что при использовании прямоугольной оконной функции для ограничения интервала анализа и формирования отсчетов сигнала, плотность распределения квадратов амплитуд имеет вид

$$\rho_{I_k}(y) = \frac{1}{N\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{y}{N\sigma_0^2}\right), y \geq 0. \quad (5)$$

Лемма 1. Пусть y_1, \dots, y_N — результаты наблюдений случайной величины Y , имеющей экспоненциальное распределение $F(y) = 1 - \exp(-y)$. Тогда

значения последовательности $y_{(1)}, \dots, y_{(N)}$ тех же результатов, но расположенных в порядке убывания, которые в свою очередь являются обратным вариационным рядом, где случайная величина $Y_{(k)}$ является невозрастающей k -ой порядковой статистикой, удовлетворяют следующему условию:

$$E[\exp(-Y_{(k)})] = \frac{k}{N+1},$$

$$D[\exp(-Y_{(k)})] = \frac{k(N-k+1)}{(N+1)^2(N+2)}.$$

Доказательство. Согласно [5] в выборке объема N из генеральной совокупности с функцией распределения $F(y)$, обладающей непрерывной плотностью $f(y)$, распределение G_k случайной величины $Y_{(k)}$ выражается формулой

$$dG_k = \frac{(F(Y_{(k)}))^{N-k}(1-F(Y_{(k)}))^{k-1}}{B(N-k+1, k)} dF(Y_{(k)}),$$

где $B(N-k+1, k) = \frac{(N-k)!(k-1)!}{N!}$ – Бета-функция.

Согласно условиям леммы распределение $F(y)$ – экспоненциальное, значит $dF = e^{-y} dy$. Сделаем замену $\Theta = \exp(-Y)$. Отсюда получаем следующее выражение

$$G_k \Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-k} \theta^{k-1}}{B(N-k+1, k)} d\theta = 1.$$

Далее найдем математическое ожидание случайной величины Θ :

$$E(\Theta_{(k)}) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-k} (\theta)^k}{B(N-k+1, k)} d\theta = \frac{k}{N+1}.$$

Итак, можно записать, что справедливо равенство

$$E[\exp(-Y_{(k)})] = \frac{k}{N+1}.$$

Теперь найдем математическое ожидание случайной величины Θ^2 :

$$E(\Theta_{(k)}^2) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-k} (\theta)^{k+1}}{B(N-k+1, k)} d\theta = \frac{k(k+1)}{(N+1)(N+2)}.$$

Тогда для дисперсии $D(\Theta_{(k)}) = E(\Theta_{(k)}^2) - (E(\Theta_{(k)}))^2$ справедлива формула

$$D[\exp(-Y_{(k)})] = \frac{k(N-k+1)}{(N+1)^2(N+2)},$$

вид зависимости которой для различных значений N приведен на рис. 1.

Лемма 2. Пусть справедлива Лемма 1. Тогда нормированное упорядоченное распределение спектра имеет вид

$$n_k(N) = -\frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1},$$

где $K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{k}{N+1}.$ (6)

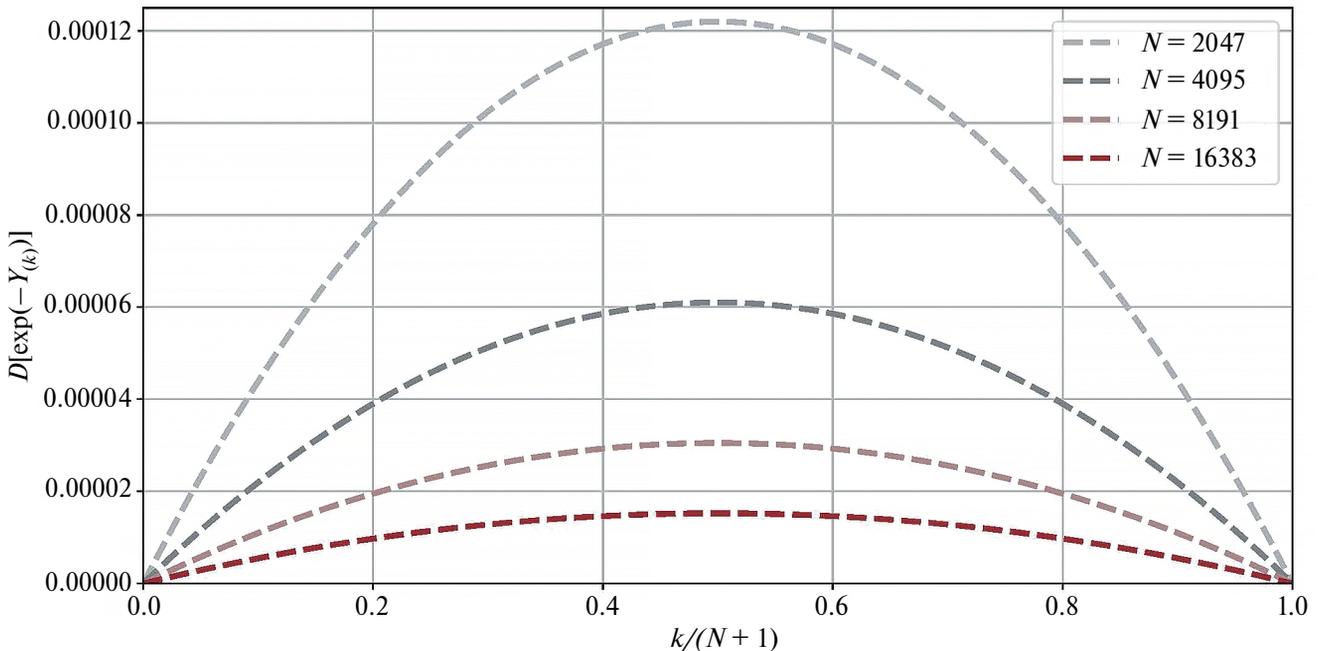


Рис. 1. Графики дисперсии случайной величины $\exp(-Y_{(k)})$ для разных значений k, N .

Доказательство. Воспользуемся формулой (5), заметив, что $2E_X = 2N\sigma_0^2$ соответствует полной энергии сигнала. Тогда

$$\rho_{n_k(N)}(y) = \exp(-y), y \geq 0.$$

Нормированный спектр плотности распределения квадратов амплитуд будет подчиняться экспоненциальному распределению, а по Лемме 1 его упорядоченная дискретная зависимость от номера отсчета в спектре будет определяться так: $\frac{k}{N+1} \sim e^{-n_k(N)}$, т.е. $n_k(N) \sim -\ln \frac{k}{N+1}$. Откуда требуется найти только нормировочный коэффициент K_N .

Нормировочный коэффициент $K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{k}{N+1}$ может быть оценен при помощи формулы Стирлинга, причем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} K_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{k}{N+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \ln \frac{N!}{(N+1)^N} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{N \ln N - N + \mathcal{O}(\ln N) - N \ln(N+1)}{N} = 1. \end{aligned}$$

Для оценки скорости сходимости в табл. 1 приведены значения K_N и его непрерывного аналога

$$\tilde{K}_N = -\frac{N+1}{N} \int_{\frac{1}{N+1}}^1 \ln x dx.$$

Как видно из табл. 1 достаточно близкой оценкой суммы $K_N = -\sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \ln \frac{k}{N+1}$ является ин-

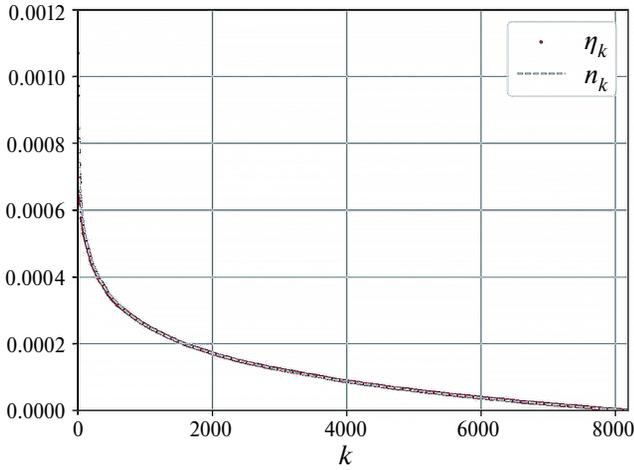
теграл $\tilde{K}_{2N} = -\frac{2N+1}{2N} \int_{\frac{1}{2N+1}}^{\frac{2N}{2N+1}} \ln x dx = -\ln 2N +$
 $+ \left(1 - \frac{1}{2N}\right)(1 + \ln(1 + 2N)) = 1 - \frac{\ln 2N}{2N} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln N}{N}\right)$
 который в свою очередь есть предел сумм Дарбу. Поэтому исходная сумма близко оценивается интегралом.

Леммы 1 и 2 определяют распределение нормированного упорядоченного спектра $n_k(N)$ и отклонения амплитуд от нее, которые быстро убывают с ростом N . Поэтому в модельном эксперименте энтропию белого шума предлагается оценивать по энергетическому спектру $e_k(N)$ ($k \in 1, \dots, N$), который предварительно нормируется, так чтобы сумма амплитуд спектра по всем частотам равнялась единице $\sum_{k=1}^N e_k(N) = 1$. Упорядочив получившийся спектр по амплитудам, получаем некоторую зависимость энергии $\tilde{e}_k(N)$ соответствующей части спектра от номера k этой части в упорядоченном массиве ($k = 1, \dots, N$), а именно

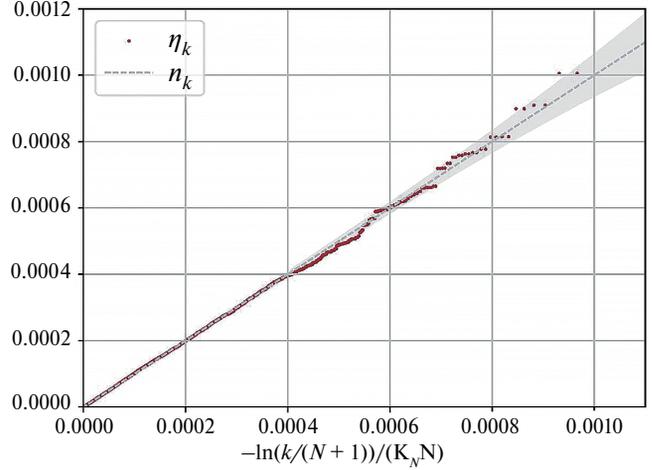
$$\tilde{e}_k(N) = \frac{(TJ)_k}{\sum_{i=1}^N J_n} = \frac{\eta_k(N)E_X}{\sum_{i=1}^N \eta_i(N)E_X} = \eta_k(N). \quad (7)$$

Таблица 1. Значения нормировочных коэффициентов K_N, \tilde{K}_N и $1 - K_N, 1 - \tilde{K}_N$ для различных значений N .

$N + 1$	$\log_2(N + 1)$	K_N	$1 - K_N$	$-\log_2(1 - K_N)$	\tilde{K}_N	$1 - \tilde{K}_N$	$-\log_2(1 - \tilde{K}_N)$
2	1	0.75204	0.24796	2.01	0.35616	0.64384	0.64
4	2	0.81492	0.18508	2.43	0.57078	0.42922	1.22
8	3	0.87165	0.12835	2.96	0.71813	0.28187	1.83
16	4	0.91622	0.08378	3.58	0.82105	0.17895	2.48
32	5	0.94782	0.05218	4.26	0.89026	0.10974	3.19
64	6	0.96863	0.03137	4.99	0.93465	0.06535	3.94
128	7	0.98164	0.01836	5.77	0.96200	0.03800	4.72
256	8	0.98948	0.01052	6.57	0.97832	0.02168	5.53
512	9	0.99406	0.00594	7.40	0.98781	0.01219	6.36
1024	10	0.99669	0.00331	8.24	0.99323	0.00677	7.21
2048	11	0.99818	0.00182	9.10	0.99628	0.00372	8.07
4096	12	0.99900	0.00100	9.97	0.99797	0.00203	8.94
8192	13	0.99946	0.00054	10.85	0.99890	0.00110	9.83
16384	14	0.99971	0.00029	11.75	0.99941	0.00059	10.72



(а) Упорядоченный спектр $\eta_k(N)$ и дискретное распределение $n_k(N)$ одной реализации фрейма длины $N + 1 = 8192$.



(б) Те же распределения, горизонтальная ось в логарифмическом масштабе (показаны стандартные отклонения).

Рис. 2. Пояснение к Леммам 1 и 2.

На рис. 2 видно, что даже в одном фрейме упорядоченные амплитуды спектра лежат на аналитическом распределении вида (6).

Поскольку в (1) $C_{TV}(p) = S(p)D_{TV}(p)$, где $S(p)$ – энтропия, а $D_{TV}(p)$ – дисбаланс, то в целях детектирования наличия сигнала требуется оценить энтропию энергетического спектра белого шума и его дисбаланс. Дальнейшие аналитические оценки помогут определить качество положения этих величин на кривых, получаемых в вычислительном эксперименте.

Лемма 3. На спектральном распределении вида (6) энтропия равна

$$S(N) = \frac{\ln(NK_N)}{\ln N} + \frac{1}{NK_N \ln N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{k}{N+1} \left(\ln \left(-\ln \frac{k}{N+1} \right) \right). \quad (8)$$

Ее приближенную оценку $\tilde{S}(N)$ можно получить следующим образом:

$$\tilde{S}(N) = 1 + \frac{\gamma - 1}{\ln N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N \ln N}\right), \quad (9)$$

где γ – постоянная Эйлера-Маскерони.

При этом для стандартного отклонения энтропии справедлива оценка

$$D_{TV} = \frac{1}{4N^2} \left(-2 \lceil Ne^{-KN} \rceil + N + \frac{-2 \ln \lceil Ne^{-KN} \rceil! + 2 \lceil Ne^{-KN} \rceil \ln(N+1)}{K_N} + \frac{\ln N! - N \ln(N+1)}{K_N} \right)^2. \quad (11)$$

При больших N на распределении вида (6) его можно оценить следующим выражением

$$\tilde{D}_{TV}(N) = \frac{1}{e^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln N}{N}\right). \quad (12)$$

Таблица 2. Расчет энтропии \tilde{S} по формуле (9). Оценка энтропии S^* при помощи численного эксперимента (10 000 испытаний) для белого шума. Расчет стандартного отклонения энтропии $\Delta \tilde{S}$ по формуле (10). Оценка стандартного отклонения энтропии ΔS^* при помощи численного эксперимента (10 000 испытаний) для белого шума.

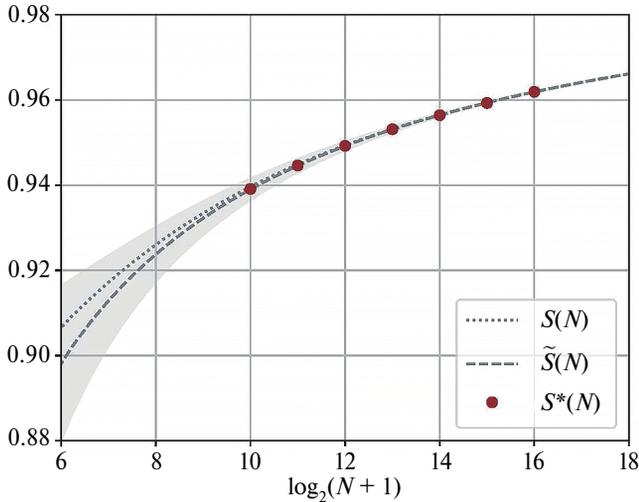
$N + 1$	\tilde{S}	S^*	$\Delta \tilde{S}$	ΔS^*
1024	0.9390	0.9390	0.00250	0.00247
2048	0.9446	0.9446	0.00159	0.00157
4096	0.9492	0.9492	0.00102	0.00101
8192	0.9531	0.9531	0.00066	0.00066
16384	0.9564	0.9564	0.00043	0.00043

$$\Delta \tilde{S} = \frac{\ln 2N}{2\sqrt{N} \ln^2 N} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln N}{N^{\frac{5}{2}}}\right). \quad (10)$$

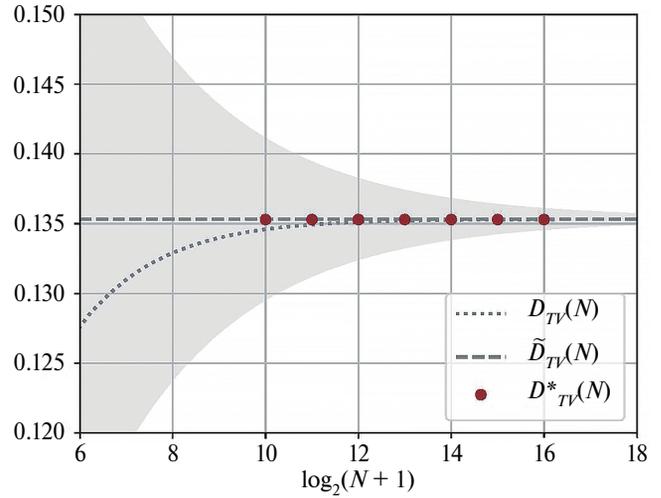
Доказательство Леммы носит технический характер.

Лемма 4. На распределении (6) дисбаланс

$$D_{TV} = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^N p_k - \frac{1}{N} \right)^2 \text{ принимает вид}$$



(а) Энтропия S



(б) Дисбаланс D_{TV}

Рис. 3. Зависимость математических ожиданий и стандартных отклонений энтропии и критерия разности от $\log_2 N$ (иллюстрация Леммы 3 и Леммы 4).

Таблица 3. Расчет \tilde{D}_{TV} по формуле (12). Оценка D_{TV}^* при помощи численного эксперимента (10 000 испытаний) для белого шума. Расчет стандартного отклонения энтропии $\Delta \tilde{D}_{TV}$ по формуле (13). Оценка стандартного отклонения энтропии ΔD_{TV}^* при помощи численного эксперимента (10 000) для белого шума.

$N+1$	\tilde{D}_{TV}	D_{TV}^*	$\Delta \tilde{D}_{TV}$	ΔD_{TV}^*
1024	0.1353	0.1354	0.0057	0.0057
2048	0.1353	0.1353	0.0041	0.0040
4096	0.1353	0.1354	0.0029	0.0028
8192	0.1353	0.1353	0.0020	0.0020
16384	0.1353	0.1353	0.0014	0.0014

Стандартное отклонение для дисбаланса определяется как

$$\Delta \tilde{D}_{TV} = \frac{1}{2e\sqrt{N}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln N}{N^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (13)$$

Заметим, что $\lim_{N \rightarrow \infty} D_{TV}(N) = e^{-2}$. На рис. 3б показан этот уровень ~ 0.13534 .

Опираясь на распределение (6) введем новые понятия спектрального дисбаланса и спектральной сложности.

Определение 1. Спектральным дисбалансом относительно спектрального распределения (6) назовем

$$D_S(p) = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^N \left| p_k + \frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1} \right| \right)^2, \quad (14)$$

а спектральной сложностью величину

$$C_S(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^N \left| p_k + \frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1} \right| \right)^2. \quad (15)$$

В случае единственности смены знака выражения под модулем в выражении (15), т.е. при

$$p_k + \frac{1}{NK_N} \ln \frac{k}{N+1} < 0, k \in 1, \dots, Z, \quad (16)$$

$$p_k + \frac{1}{NK_N} \ln \frac{k}{N+1} \geq 0, k \in Z+1, \dots, N,$$

формулу (14) для вычисления спектрального дисбаланса можно привести к виду

$$D_S(p) = \frac{1}{4} \left(-\sum_{k=1}^Z \left(p_k + \frac{\ln \frac{k}{N+1}}{NK_N} \right) + \sum_{k=Z+1}^N \left(p_k + \frac{\ln \frac{k}{N+1}}{NK_N} \right) \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\left(-\sum_{k=1}^Z p_k + \sum_{k=Z+1}^N p_k \right) + \frac{1}{NK_N} \left(\ln \frac{N!}{Z!(N+1)^{N-Z}} - \ln \frac{Z!}{(N+1)^Z} \right) \right)^2, \quad (17)$$

что аналогично выражению (45) из [6], которое является точной аналитической формулой при определении максимума C_{TV} .

Для больших N формулу (17) можно упростить до вида

$$\begin{aligned} \tilde{D}_S(p) = & \frac{1}{4} \left(\left(-\sum_{k=1}^Z p_k + \sum_{k=Z+1}^N p_k \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{NK_N} \left(-N - 1 + 2Z \ln \left(\frac{e(N+1)}{Z} \right) \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Определение 2. Спектральным дисбалансом двумерного распределения $p = \{p_{ki} = p_k^2 p_i, k = 1, \dots, N, i = 1, \dots, M\}$ двух независимых случайных величин относительно двумерного спектрального распределения размерности $N \times M$, порожденного распределениями вида (6), назовем

$$\begin{aligned} D_{S^2}(p) = & \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M |p_k^2 p_i - \right. \\ & \left. - \frac{1}{NMK_N K_M} \ln \frac{k}{N+1} \ln \frac{i}{M+1} \right)^2, \end{aligned} \quad (19)$$

а спектральной сложностью величину

$$C_{S^2}(p) = S(p) D_{S^2}(p). \quad (20)$$

Например, двумерная спектральная сложность может быть вычислена по двум последовательным фреймам или двум независимым каналам приема сигнала.

4. СРАВНЕНИЕ

ИНФОРМАЦИОННЫХ МЕР C_{TV} И C_S

В данном разделе приводится статистическое сравнение предложенной авторами информационной характеристики C_S (15) со стандартной статистической сложностью C_{TV} (1) как критериев в задаче обнаружения полезного детерминированного сигнала s_n , которая традиционно сводится к задаче различения двух гипотез о принятой последовательности данных

$$\begin{cases} \Gamma_0 : x_n = w_n, \\ \Gamma_1 : x_n = s_n + w_n, n = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (21)$$

Гипотеза Γ_0 связана с принятием решения о приеме только шума, а гипотеза Γ_1 – о приеме смеси полезного сигнала и шума, где последовательность $\{x_n\}, n = 1, \dots, N$ – временной ряд из принятых данных, $\{s_n\}$ – полезный сигнал, $\{w_n\}$ – аддитивный белый гауссовский шум, N – длина временного ряда данных (фрейма).

Для проверки качества обнаружения полезного детерминированного сигнала была набрана статистика на $Q = 10000$ численно сгенериро-

ванных фреймах $\{x_n\}$ сигнально-шумовой смеси длины $N + 1 = 16384$. Во всех реализациях сигнал $\{s_n\}$ оставался одним и тем же, а именно фиксированным по количеству и амплитудам набором синусоид со случайными фазами. Аддитивный белый гауссовский шум $\{w_n\}$ был получен генератором гауссовских последовательностей с одними и тем же параметрами $\mu = 0$ и σ (в рамках одного набора Q фреймов).

Для каждой полученной последовательности $\{x_n\}$ вычисляются коэффициенты БПФ X_k (2) (количество коэффициентов в спектральном разложении также равно N), по которым затем считается нормированный упорядоченный дискретный набор величин p_k , построение которого подробно описано в [6, 12]. Далее на основании p_k вычисляются значения C_{TV} и C_S для шума и смеси шума с сигналом, отвечающим двум гипотезам из выражений (21).

Основной количественной характеристикой “зашумленности” сигнала является отношение сигнал/шум – SNR (Signal-To-Noise Ratio), которое описывается формулой

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{E_{signal}}{E_{noise}} \right), \quad (22)$$

где E_{signal} , E_{noise} – полные энергии сигнала и шума соответственно, рассчитанные как сумма мощностей спектрального разложения последовательностей $\{s_n\}$ и $\{w_n\}$.

На рис. 4 показаны результаты набранной статистики для среднего значения $SNR = -15$ dB. Как видно, качество разделения шума и смеси сигнала с шумом возрастает при использовании новой функции, так как носители распределений C_S в этом случае практически не пересекаются, в отличие от распределений C_{TV} . Количественно данный эффект отражен на графиках ROC [17] (рабочая характеристика приемника) на рис. 5. Метрика $AUC_{ROC} \in [0,1]$ (площадь под ROC-кривой) позволяет оценить вероятность, с которой классификатор сможет разделить классы. Чем она выше, тем эффективнее критерий бинарной классификации. Из графика на рис. 5 следует, что значение AUC_{ROC} при том же значении SNR для спектральной сложности C_S выше, чем у классической статистической сложности C_{TV} (0.99 против 0.94).

Для получения более полной картины сравнения информационных характеристик требуется провести описанную выше процедуру сбора и анализа статистики для разных значений SNR . Только тогда можно быть уверенным в эффективности новой функции. На рис. 6 приведены зависимости AUC для двух рассматриваемых

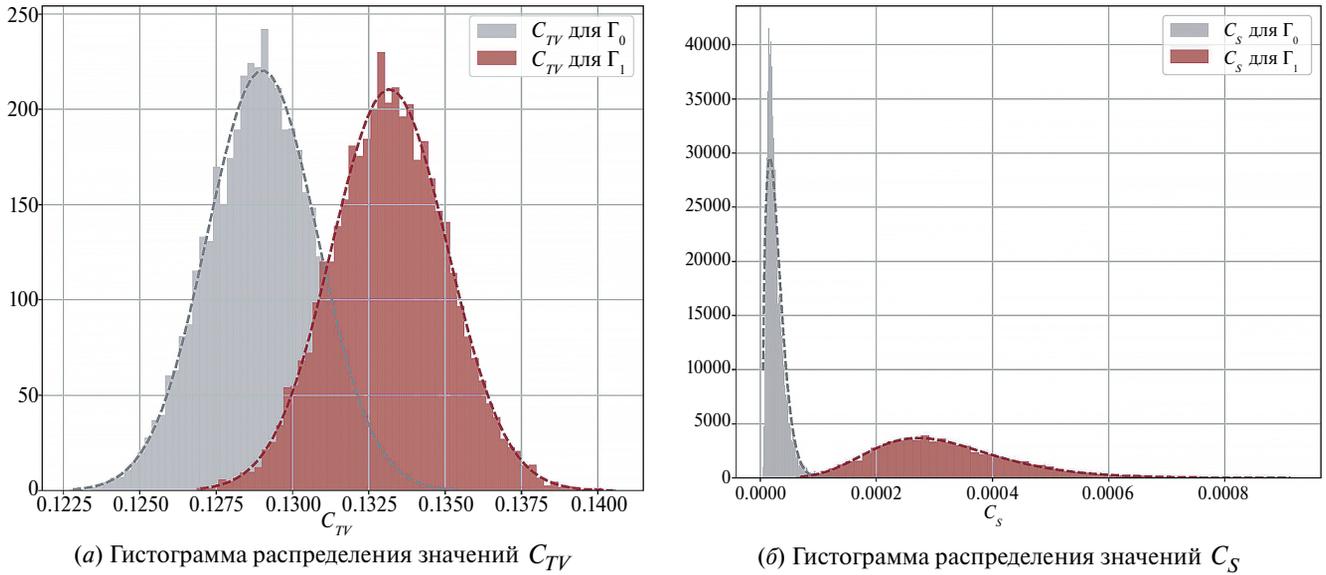


Рис. 4. Гистограммы информационных характеристик для среднего значения $SNR = -15$ dB, полученные для $Q = 10000$ реализаций сигнално-шумовой смеси.

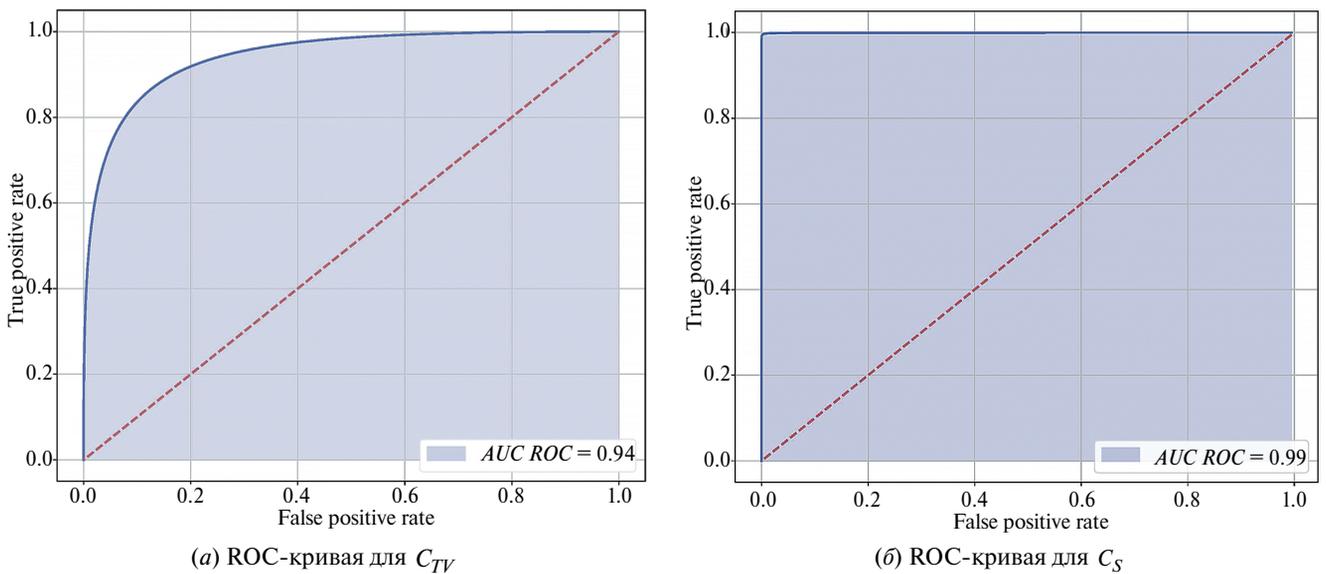


Рис. 5. ROC-кривые информационных характеристик для среднего значения $SNR = -15$ dB, полученные для $Q = 10000$ реализаций сигнално-шумовой смеси.

информационных характеристик в зависимости от величины SNR . Видно, что для значений SNR от -15 dB до -20 dB C_S демонстрирует устойчивое преимущество над C_{TV} . Значение в -20 dB является граничным для данного эксперимента, поскольку ни один из рассмотренных критериев уже не позволяет сколь-нибудь эффективно разделить классы (значения $AUC ROC$ меньше ≈ 0.65). Что подтверждает эффективность и обоснованность применения спектральной сложности C_S для индикации появления сигнала в шумовой смеси.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, можно сделать вывод об эффективности как статистической сложности, так и новой меры, названной авторами спектральной сложностью (15), в задачах обнаружения (предобнаружения) детерминированных сигналов в гауссовском шуме в одном фрейме, что является основой для решения последующих задач классификации и распознавания. Полученные теоретические утверждения позволяют точно оценивать значения информационных характеристик без полного расчета по реальным распре-

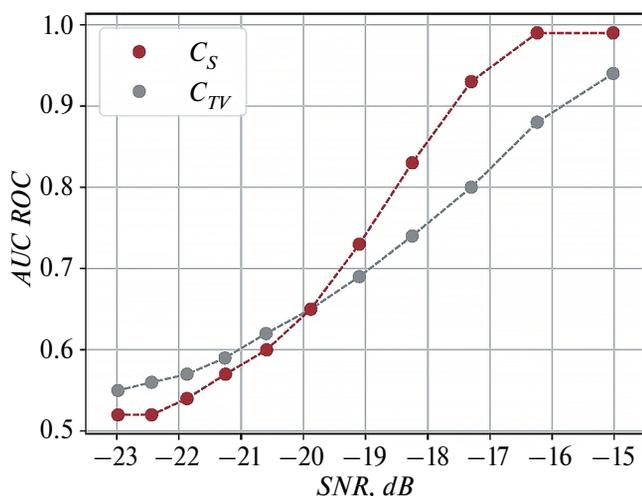


Рис. 6. Зависимость $AUC ROC$ от SNR .

делениям, что является важным для прикладных задач детектирования.

Введенная двумерная спектральная сложность относительно белого шума (20) является перспективной в теоретическом и прикладном аспектах исследования в рассматриваемых задачах, что будет предметом дальнейших научных разработок.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00134) в ИПУ РАН им. В. А. Трапезникова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Amigo J.M.* Ordinal methods: Concepts, applications, new developments, and challenges In memory of Karsten Keller (19612022) / J. M. Amigo, O. A. Rosso // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2023. Vol. 33, no. 8. P. 080401. <https://pubs.aip.org/cha/article/33/8/080401/2905538/Ordinal-methods-Concepts-applications-new>.
2. Distinguishing Noise from Chaos / O.A. Rosso, H.A. Larrondo, M. T. Martin et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Oct. V. 99. P. 154102. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.99.154102>.
3. *Perkey S.* Using Fourier Coefficients and Wasserstein Distances to Estimate Entropy in Time Series / S. Perkey, A. Carvalho, A. Krone-Martins // 2023 IEEE 19th International Conference on e-Science (e-Science). Limassol, Cyprus: IEEE, 2023. P. 1–2. <https://ieeexplore.ieee.org/document/10254949/>.
4. *Statistical Distributions* / C. Forbes, M. Evans, N. Hastings, B. Peacock. 1 edition. Wiley, 2010. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780470627242>.
5. *Klenke A.* Probability Theory: A Comprehensive Course / A. Klenke. Universitext. London: Springer London, 2014. <https://link.springer.com/10.1007/978-1-4471-5361-0>.
6. *Галаяев А.А.* Статистическая сложность как критерий задачи обнаружения полезного сигнала / А.А. Галаяев, П.В. Лысенко, Л.М. Берлин // *Автоматика и телемеханика*. 2023. С. 121–145.
7. *Distances in Probability Space and the Statistical Complexity Setup* / A. M. Kowalski, M. T. Mart'ın, A. Plastino et al. // *Entropy*. 2011. V. 13. №. 6. P. 1055–1075. <http://www.mdpi.com/1099-4300/13/6/1055>.
8. *Richards M.A.* The Discrete-Time Fourier Transform and Discrete Fourier Transform of Windowed Stationary White Noise / M.A. Richards // *Technical Memorandum*. 2013. P. 1–24.
9. *Kay S.M.* Fundamentals Of Statistical Processing, Volume 2: Detection Theory / S.M. Kay. Prentice-Hall signal processing series. Pearson Education, 2009. <https://books.google.ru/books?id=wwmnY9xyt9MC>.
10. *Орлов И.Я.* Оценка потерь обнаружения сигналов приемником с адаптивным порогом на основе метода порядковых статистик / И.Я. Орлов, Е.С. Фитасов // *Известия вузов. Радиофизика*. 2018. Т. 61. № 7. С. 596–604
11. *Cazelles E.* The Wasserstein-Fourier Distance for Stationary Time Series / E. Cazelles, A. Robert, F. Tobar // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2021. V. 69. P. 709–721. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9303405/>.
12. *Berlin L.M.* Comparison of Information Criteria for Detection of Useful Signals in Noisy Environments / L.M. Berlin, A.A. Galyaev, P.V. Lysenko // *Sensors*. 2023. V. 23. № 4. <https://www.mdpi.com/1424-8220/23/4/2133>.

A NEW SPECTRAL MEASURE OF COMPLEXITY AND ITS CAPABILITIES FOR DETECTING SIGNALS IN NOISE

Corresponding Member of the RAS A. A. Galyaev^a, V. G. Babikov^a, P. V. Lysenko^a, L. M. Berlin^a

^aInstitute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation

This article is devoted to the improvement of signal recognition methods based on the information characteristics of the spectrum. A discrete function of the normalized ordered spectrum is established for a single window function included in the DFT. Lemmas on estimates of entropy, imbalance and statistical complexity in processing a time series of independent Gaussian quantities are proved. New concepts of one-dimensional and two-dimensional spectral complexities are proposed. The theoretical results obtained were verified by numerical experiments, which confirmed the effectiveness of the new information characteristic when detecting a signal mixed with white noise at low signal-to-noise ratios.

Keywords: information entropy, spectral complexity, additive white Gaussian noise

УДК 517.54

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ “НОВАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА СЛОЖНОСТИ И ЕЁ ВОЗМОЖНОСТИ ПО ОБНАРУЖЕНИЮ СИГНАЛОВ В ШУМЕ”

© 2024 г. А. А. Галяев^{1, *}, В. Г. Бабилов^{1, **}, П. В. Лысенко^{1, ***}, Л. М. Берлин^{1, ****}

Поступило 05.08.2024 г.
После доработки 05.08.2024 г.
Принято к публикации 06.08.2024 г.

Заметке-дополнение к статье “Новая спектральная мера сложности и ее возможности по обнаружению сигналов в шуме”.

Ключевые слова: информационная энтропия, спектральная сложность, белый гауссовский шум

DOI: 10.31857/S2686954324040133, **EDN:** YUVQQQ

В данной заметке-дополнении к статье [1] не только устанавливается дополнительная связь между Леммами 1 и 2 оригинальной работы, но и приводится новый результат, задающий формулу для точного вычисления $\mathbb{E}[\eta_k(N)]$.

Итак, для решения Задачи 1 в общем случае требуется уметь находить

$$\mathbb{E}[\eta_k(N)] = \mathbb{E}\left[\frac{(TI)_k}{E_X}\right]. \quad (1)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма Д1.

Пусть z_1, \dots, z_N — результаты наблюдений случайной величины Z , имеющей экспоненциальное распределение $F(z) = 1 - \exp(-z)$. Рассмотрим значения последовательности $z_{(1)}, \dots, z_{(N)}$ тех же результатов, но расположенных в порядке возрастания, где случайная величина $Z_{(k)}$ является неубывающей k -ой порядковой статистикой.

Тогда

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}}\right] = \frac{\int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}{\int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}. \quad (2)$$

Лемма проверяется непосредственно записью математического ожидания для порядковой статистики.

Отличие формулы (2) от известных заключается в вычислении среднего величины $\frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i}$ по совместному распределению порядковых статистик $Z_{(1)}, \dots, Z_{(N)}$. Затруднение вызывает вычисление интеграла в числителе (2). Однако, преодолеть это препятствие помогает следующее утверждение.

Утверждение Д1.

Искомое математическое ожидание равно

¹ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия

* E-mail: galaev@ipu.ru

** E-mail: babikov@ipu.ru

*** E-mail: pavellysen@ipu.ru

**** E-mail: berlin.lm@phystech.edu

$$\frac{\int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \frac{z_k}{\sum_{i=1}^N z_i} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}{\int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N} = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{i} \right), \tag{3}$$

что в точности до множителя $\frac{1}{N}$ совпадает со значением другого математического ожидания

$$\frac{\int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} z_k \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N}{\int_0^\infty \int_0^{z_N} \dots \int_0^{z_3} \int_0^{z_2} \exp\left(-\sum_{i=1}^N z_i\right) dz_1 dz_2 \dots dz_{N-1} dz_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{N-k} \frac{1}{i}. \tag{4}$$

Формула (4) является известным результатом для нахождения математического ожидания порядковых статистик [2]. Результат утверждения получен с использование символьного пакета вычислений Maple.

Остается заметить, что в работе

$$\mathbb{E} \left[\frac{Y_{(N-k+1)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right],$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{n}_k(N) &= \mathbb{E} \left[\frac{Y_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{Z_{(N-k+1)}}{\sum_{i=1}^N Z_{(i)}} \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Используя формулу (5), получаем, что

$$\sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left[\frac{Y_{(k)}}{\sum_{i=1}^N Y_{(i)}} \right] = N \cdot \frac{1}{N} = 1.$$

Это означает, что условие нормировки выполнено.

Далее, изначально в работе Лемма 1 была выбрана в качестве базовой для перехода в Лемме 2 и к основной формуле работы (6) вида

$$\begin{aligned} n_k(N) &= -\frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1}, \\ \text{где } K_N &= -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{k}{N+1}, \end{aligned} \tag{6}$$

поскольку, как указано в Лемме 1, $\mathbb{E}(\exp(-Y_{(k)})) = \frac{k}{N+1}$, а соответствующая дисперсия, быстро стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что в окрестности порядковой статистики $Y_{(k)}$ (под окрестностью понимается область, равная нескольким стандартным отклонениям), соответствующее математическое ожидание – это линейная функция, зависящая от номера отсчета, в то время как исходное распределение близко к ядерному. Поэтому имеем $\mathbb{E} \exp(Y_{(k)}) \approx \exp(\mathbb{E} Y_{(k)})$, исключение составляют наименьшие значения $Y_{(k)}$.

Теперь сравним дискретные распределения: точное, задаваемое формулой (5), и приближенное, определяемое по формуле (6).

При больших значения N и k выражение (5), которое является разностью гармонических рядов, можно приближать различными способами. Выберем следующую оценку

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \approx -\ln \frac{k}{N+1},$$

которая определена и имеет смысл при всех N и $k \in [1, \dots, N]$, а также входит в формулу (6).

Проиллюстрируем на рис. 1, 2 графики зависимостей распределений (5) и (6) от номера отсчета.

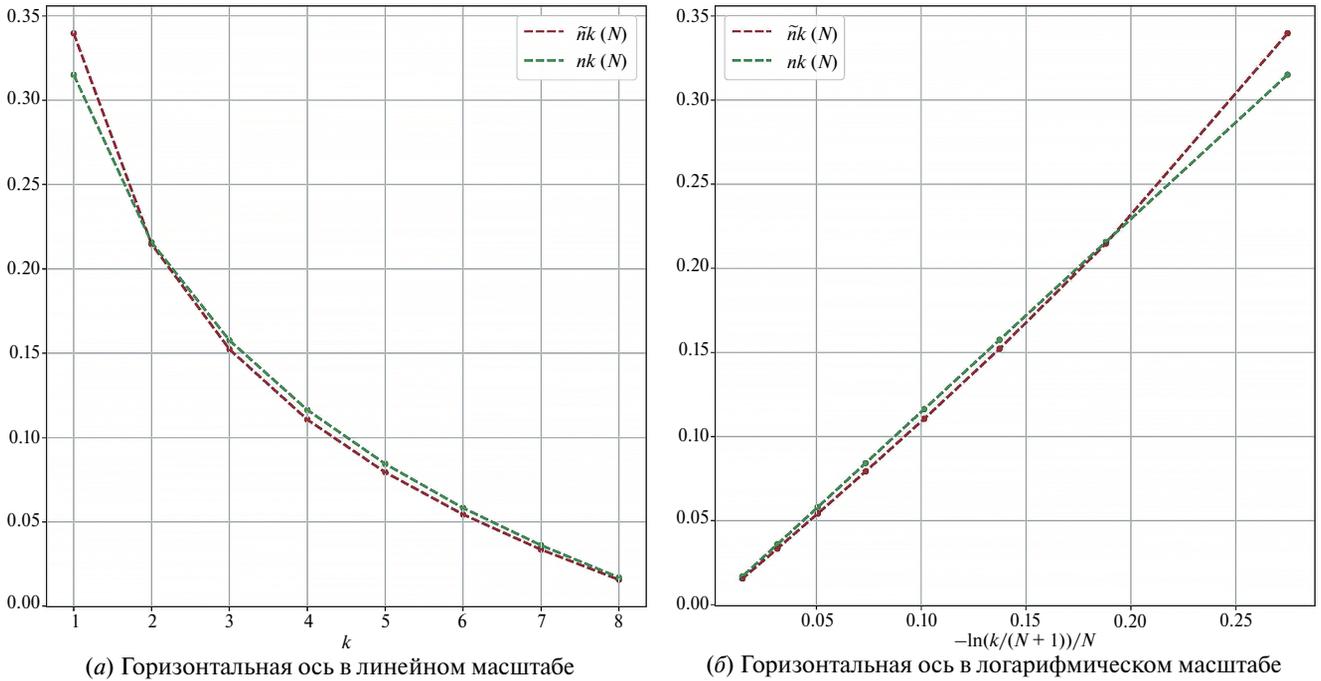


Рис. 1. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 8$.

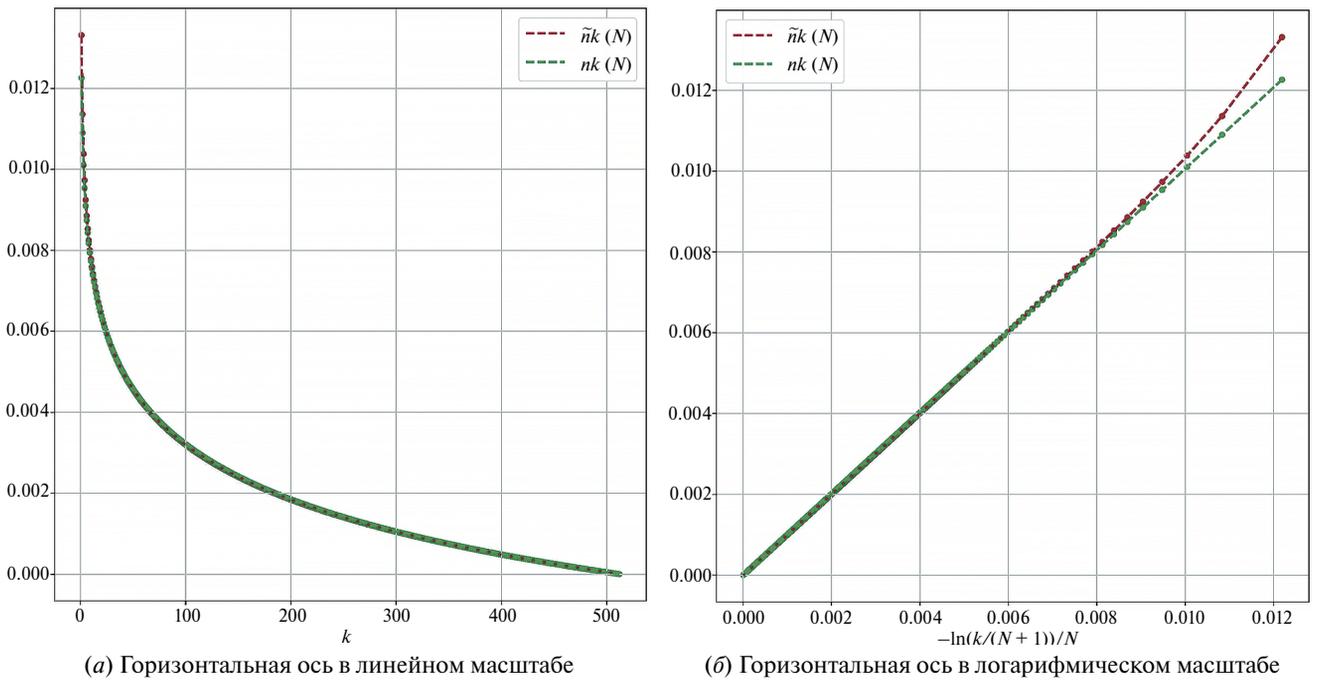


Рис. 2. Дискретные распределения $\tilde{n}_k(N)$ и $n_k(N)$ для ряда размера $N = 512$.

Рис. 1 и 2 иллюстрируют, что точные значения математического ожидания (5) для малого количества точек (членов спектрального ряда) незначительно отличаются от распределения (6), предложенного в оригинальной работе, для остальных отсчетов они практически совпадают. С ростом N доля точек отклоняющихся от оценки быстро падает.

Таким образом, дополнительно обосновывается введение спектрального нормированного упорядоченного распределения, предложенного в Лемме 2, посредством которого определяется понятие спектральной сложности. Теперь спектральную сложность также можно задавать на основе распределения (5) по формуле

$$C_{SS}(p) = -\frac{1}{4\log_2 N} \left(\sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^N |p_k - \tilde{n}_k(N)| \right)^2. \quad (7)$$

В результате получен очень чувствительный, превышающий известные, метод обнаружения сигнала в белом шуме по наблюдениям в одном прямоугольном окне, основанный на вычислении спектральной сложности двух видов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галяев А.А., Бабиков В.Г., Лысенко П.В., Берлин, Л.М.* Новая спектральная мера сложности и её возможности по обнаружению сигналов в шуме // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2024. Т. 518. № 4.
2. David Whitmer, Lecture 11: Probability, Order Statistics and Sampling, February 10, 2017, 15-750: Graduate Algorithms, Spring 2017, Carnegie Mellon University, School of Computer Science.

ADDITION TO THE ARTICLE “A NEW SPECTRAL MEASURE OF COMPLEXITY AND ITS CAPABILITIES FOR DETECTING SIGNALS IN NOISE”

Corresponding Member of the RAS **A. A. Galyaev^a, V. G. Babikov^a, P. V. Lysenko^a, L. M. Berlin^a**

^a*Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation*

Note-addition to the article “A new spectral measure of complexity and its capabilities for detecting signals in noise”.

Keywords: information entropy, spectral complexity, additive white Gaussian noise