

УДК 511

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ДИФФУЗИЕЙ И НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2024 г. И. С. Кащенко<sup>1, \*</sup>, С. А. Кащенко<sup>1, \*\*</sup>, И. Н. Маслеников<sup>1, \*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 25.02.2024 г.

После доработки 28.03.2024 г.

Принято к публикации 14.05.2024 г.

Работа посвящена исследованию логистического уравнения с запаздыванием и диффузией с неклассическими краевыми условиями. Исследована устойчивость нетривиального состояния равновесия, численно изучены возникающие бифуркации.

*Ключевые слова:* логистическое уравнение, запаздывание, диффузия, неклассические краевые условия, устойчивость

**DOI:** 10.31857/S2686954324030172, **EDN:** XZUXPP

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Логистическое уравнение с запаздыванием и диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r[1 - u(t - T, x)]u, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

и с классическими граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad (2)$$

возникает в задачах математической экологии. Они исследовались многими авторами (см. напр., [1–6]). В (1)  $u(t, x)$  – нормированная численность (плотность) популяции,  $d > 0$  – коэффициент диффузии (или подвижность вида),  $r > 0$  – мальтузианский коэффициент,  $T > 0$  – время запаздывания, которое связано с возрастом половозрелости особей популяции.

В качестве пространства начальных условий фиксируем пространство  $C_{[-T, 0]} \cap W_2^2$ .

Одним из наиболее важных вопросов относительно модели (1), (2) является вопрос о динамике решений в окрестности единичного состояния равновесия. В связи с этим обычно рассматривают другую форму записи этой краевой задачи в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t - T, x)[1 + u], \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad (4)$$

к которой приходим в результате замены  $u \rightarrow 1 + u$ . Для (3), (4) ставится задача исследовать динамику в окрестности нулевого состояния равновесия. Известно [7, 8], что при условии  $0 < r \leq \frac{\pi}{2T}$  нулевое решение в (3), (4) асимптотически устойчиво. При переходе значения  $r$  через  $\frac{\pi}{2T}$  это состояние равновесия теряет устойчивость, и в его окрестности в результате бифуркации Андронова–Хопфа рождается устойчивое периодическое решение. При дальнейшем увеличении параметра  $r$  этот цикл становится релаксационным. Результаты о существовании и асимптотике релаксационного цикла при  $r \gg 1$  приведены в [8].

В работе [6] исследовался вопрос о построении в пространстве параметров границы области устойчивости нулевого состояния равнове-

<sup>1</sup> Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова; РНОМЦ “Центр интегрируемых систем”, Ярославль, Россия

\*E-mail: iliyask@uniyar.ac.ru

\*\*E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

\*\*\*E-mail: igor.maslеников16@yandex.ru

сия (3) в случае более общих, но классических граничных условий

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \alpha u(t, 1), \quad (5)$$

где  $\alpha$  является произвольным параметром. В плоскости  $(r, \alpha)$  была построена кривая  $\alpha = \alpha(r)$ , которая делит пространство параметров на области устойчивости и неустойчивости нулевого решения (3), (5). В работе [9] исследованы динамические свойства уравнения (3) с граничными условиями, содержащими запаздывание:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \alpha u(t - h, 1).$$

В настоящей работе уравнение (3) исследуется для двух типов неклассических граничных условий. Первый тип имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \alpha u(t, x_0), \quad 0 \leq x_0 < 1. \quad (6)$$

Эти граничные условия имеют не только физический (см., например, [10]), но и биологический смысл: миграция из ареала  $[0, 1]$  и в него через правую границу  $x = 1$  зависит от плотности популяции в некоторой промежуточной точке  $x_0 \in [0, 1]$ . Обратим внимание, что для краевой задачи (3), (6) затруднительно воспользоваться результатами о свойствах соответствующего разрешающего оператора. Поэтому рассмотрим еще один тип граничных условий, “похожий” на (6) и отличающийся от (6) только наличием запаздывания в одном граничном условии:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \alpha u(t - h, x_0), \quad (7)$$

$$0 \leq x_0 < 1, 0 < h < T.$$

Для краевой задачи (3), (7) применимы результаты общего плана о существовании и единственности решений и др. [1] Устойчивость обеих краевых задач (3), (6) и (3), (7) исследовалась численными методами. Один из важных выводов состоит в том, что при малых значениях запаздывания  $h$  динамические свойства обеих краевых задач оказываются близки. Это является дополнительным аргументом для использования (3), (6) при моделировании поставленной задачи.

Построим при фиксированных  $d$ ,  $T$  и  $r$  в плоскости параметров  $(x_0, \alpha)$  множество  $\Omega$ , для значений параметров из которого нулевое

состояние равновесия краевых задач (3), (6) и (3), (7) устойчиво. Кроме этого для параметров из области, примыкающей к  $\Omega$  и находящейся достаточно близко от  $\Omega$ , численно будет исследована задача о бифуркациях.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Исследуем сначала устойчивость нулевого решения задачи (3), (7) с запаздыванием в краевом условии. Линеаризуем ее на нулевом состоянии равновесия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t - T, x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \alpha u(t - h, x_0).$$

Для построения характеристического уравнения используем решение Эйлера  $u(t, x) = e^{\lambda t} v(x)$ . В результате приходим к задаче

$$\lambda v = dv'' - re^{-\lambda T} v, \quad v'(0) = 0, \quad v'(1) = \alpha e^{-\lambda h} v(x_0).$$

Решения этой краевой задачи можно записать в виде

$$v(x) = c \operatorname{ch}\left(\sqrt{d^{-1}\mu}x\right),$$

где  $c$  — произвольная постоянная,  $\mu$  определяется по формуле

$$\mu = \lambda + re^{-\lambda T}, \quad (9)$$

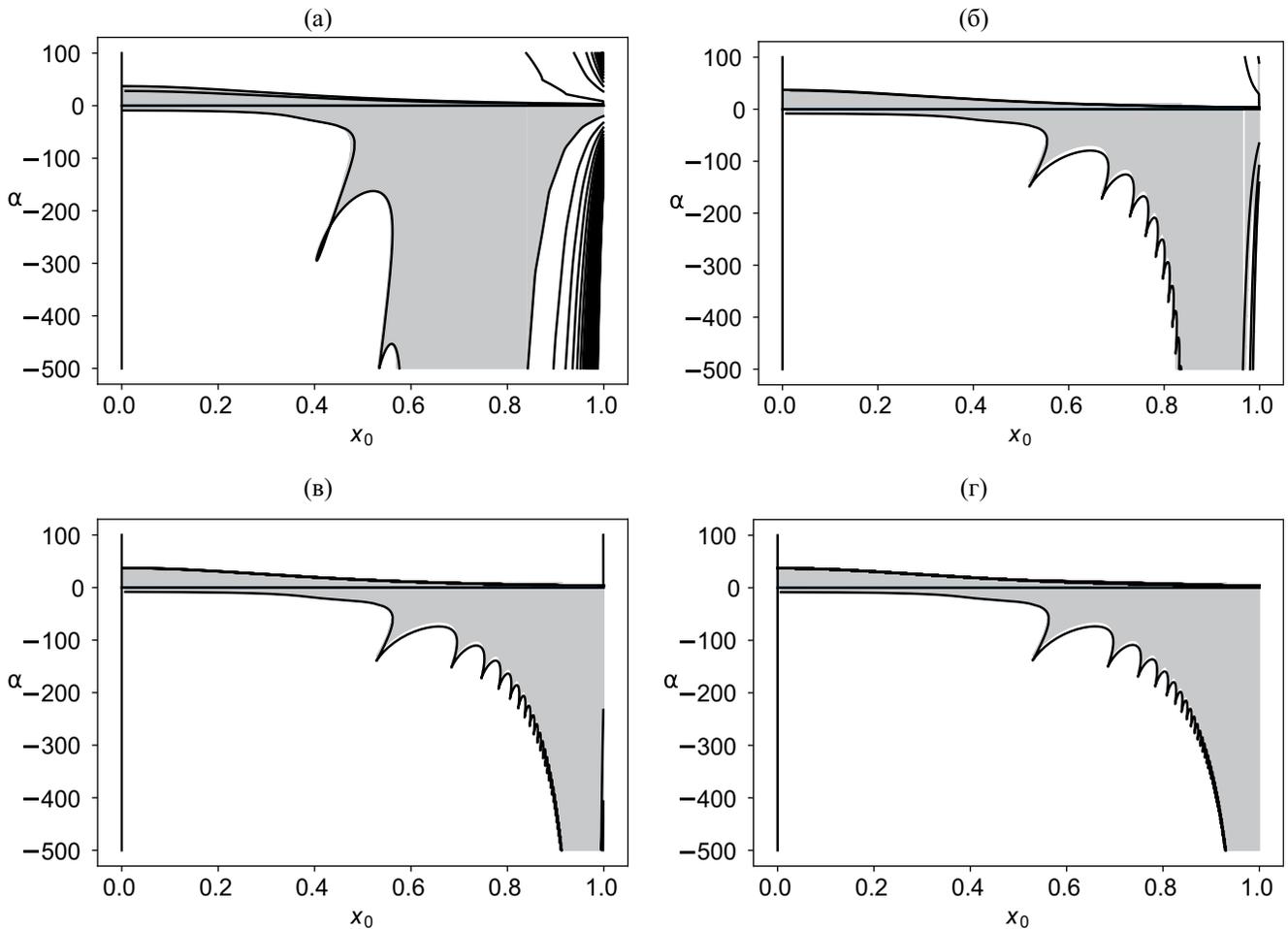
а  $\lambda$  — это корень уравнения

$$\sqrt{d^{-1}\mu} \operatorname{sh}\left(\sqrt{d^{-1}\mu}\right) = \alpha e^{-\lambda h} \operatorname{ch}\left(\sqrt{d^{-1}\mu}x_0\right). \quad (10)$$

Система (9), (10) задает характеристическое уравнение для задачи (8). Отметим, что она имеет счетное число корней на комплексной плоскости  $\lambda_n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Их расположение относительно мнимой оси определяет поведение решений линейной задачи (8) [1].

**Утверждение 1.** Пусть все значения  $\lambda_n$  имеют отрицательные вещественные части, тогда все решения (8) экспоненциально стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , а нулевое состояние (3), (7) асимптотически устойчиво.

**Утверждение 2.** Пусть существует такое значение  $\lambda_n$ , вещественная часть которого положительна. Тогда краевая задача (8) имеет экспоненциально растущее при  $t \rightarrow +\infty$  решение, а нулевое состояние (3), (7) неустойчиво.



**Рис. 1.** Изображения кривых (11). Серым цветом выделена область устойчивости нулевого решения (3), (7). Значения параметров:  $T = 1, r = 1, d = 10^{-1}$  и а)  $h = 10^{-1}$ , б)  $h = 10^{-2}$ , в)  $h = 10^{-3}$ , г)  $h = 0$ .

Для того, чтобы определить параметры, при которых будут выполняться условия утверждения 1 или утверждения 2, рассмотрим промежуточную ситуацию. Пусть у системы (9), (10) существует чисто мнимый корень  $\lambda$  и не существует корней с положительной вещественной частью.

Положим  $\lambda = i\omega$ , тогда из (9)

$$\mu = \mu(\omega) = i\omega + re^{-i\omega T}.$$

Здесь сразу отметим, что  $\mu(0) = r$ . При  $rT < 1$  и  $\omega \neq 0$  значение  $\mu(\omega)$  имеет ненулевую мнимую часть. В случае  $rT > 1$  появляются ненулевые значения  $\omega$ , при которых  $\mu(\omega)$  вещественно. Если  $1 < rT < \pi/2$ , то такое значение  $\omega = \omega_+ \in (0, \frac{\pi}{2T})$  единственно и  $\mu(\omega_+) = r \cos(\omega_+ T) > 0$ .

Подставляя  $\mu = \mu(\omega)$  в (10), получим соотношение на параметры  $\alpha$  и  $x_0$ :

$$\sqrt{d^{-1}\mu} \operatorname{sh}(\sqrt{d^{-1}\mu}) = \alpha e^{-i\omega h} \operatorname{ch}(\sqrt{d^{-1}\mu} x_0). \quad (11)$$

Отметим, что это уравнение в зависимости от  $\omega$  может иметь несколько корней вида  $(\alpha(\omega, h), x_0(\omega, h))$ . На рис. 1 приведены кривые  $(\alpha(\omega, h), x_0(\omega, h))$ , полученные из уравнения (11) при  $h = 10^{-1}$  (рис. 1а),  $h = 10^{-2}$  (рис. 1б),  $h = 10^{-3}$  (рис. 1в) и  $h = 0$  (рис. 1г). Обратим внимание, что последний случай относится к крайним условиям (6). Как видно, рисунки при уменьшении значения параметра  $h$  приближаются к рисунку в случае  $h = 0$ .

Полученные кривые делят плоскость  $(\alpha, x_0)$  ( $x_0 \in [0, 1]$ ) на области, в которых количество корней (9) с положительной вещественной частью одинаково. На рис. 1 серым цветом выделена область  $\Omega$ , которая содержит отрезок  $\alpha = 0$ . При  $rT < \pi/2$  нулевое решение (3), (6) с параметрами из  $\Omega$  устойчиво.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЗАДАЧЕ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Исследование устойчивости нулевого состояния задачи (3), (6) производится по той же схеме. Сначала линеаризуем задачу на нулевом состоянии равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru(t - T, x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= \alpha u(t, x_0). \end{aligned} \tag{12}$$

Формальное характеристическое уравнение совпадает с (9), (10) при  $h = 0$ :

$$\mu = \lambda + re^{-\lambda T}, \quad \sqrt{d^{-1}\mu} \operatorname{sh}(\sqrt{d^{-1}\mu}) = \alpha \operatorname{ch}(\sqrt{d^{-1}\mu}x_0). \tag{13}$$

Для построения области устойчивости, как и выше, положим  $\lambda = i\omega$ . Тогда из (13) получаем  $\mu = \mu(\omega) = i\omega + re^{-i\omega T}$  и соотношение на параметры  $\alpha$  и  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{d^{-1}(i\omega + re^{-i\omega T})} \operatorname{sh}\left(\sqrt{d^{-1}(i\omega + re^{-i\omega T})}\right) &= \\ &= \alpha \operatorname{ch}\left(\sqrt{d^{-1}(i\omega + re^{-i\omega T})}x_0\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что это уравнение, как и (11), в зависимости от  $\omega$  может иметь несколько решений.

Разберем отдельно случай, когда значение  $\mu$  вещественное. Тогда при каждом  $x_0$  найдется единственное  $\alpha(x_0)$ , удовлетворяющее (14). В частности, если  $\omega = 0$ , то  $\mu(0) = r$ , а из уравнения (14) получаем, что

$$\alpha = \alpha_+(x_0) = \frac{\sqrt{d^{-1}r} \operatorname{sh}\left(\sqrt{d^{-1}r}\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{d^{-1}r}x_0\right)}.$$

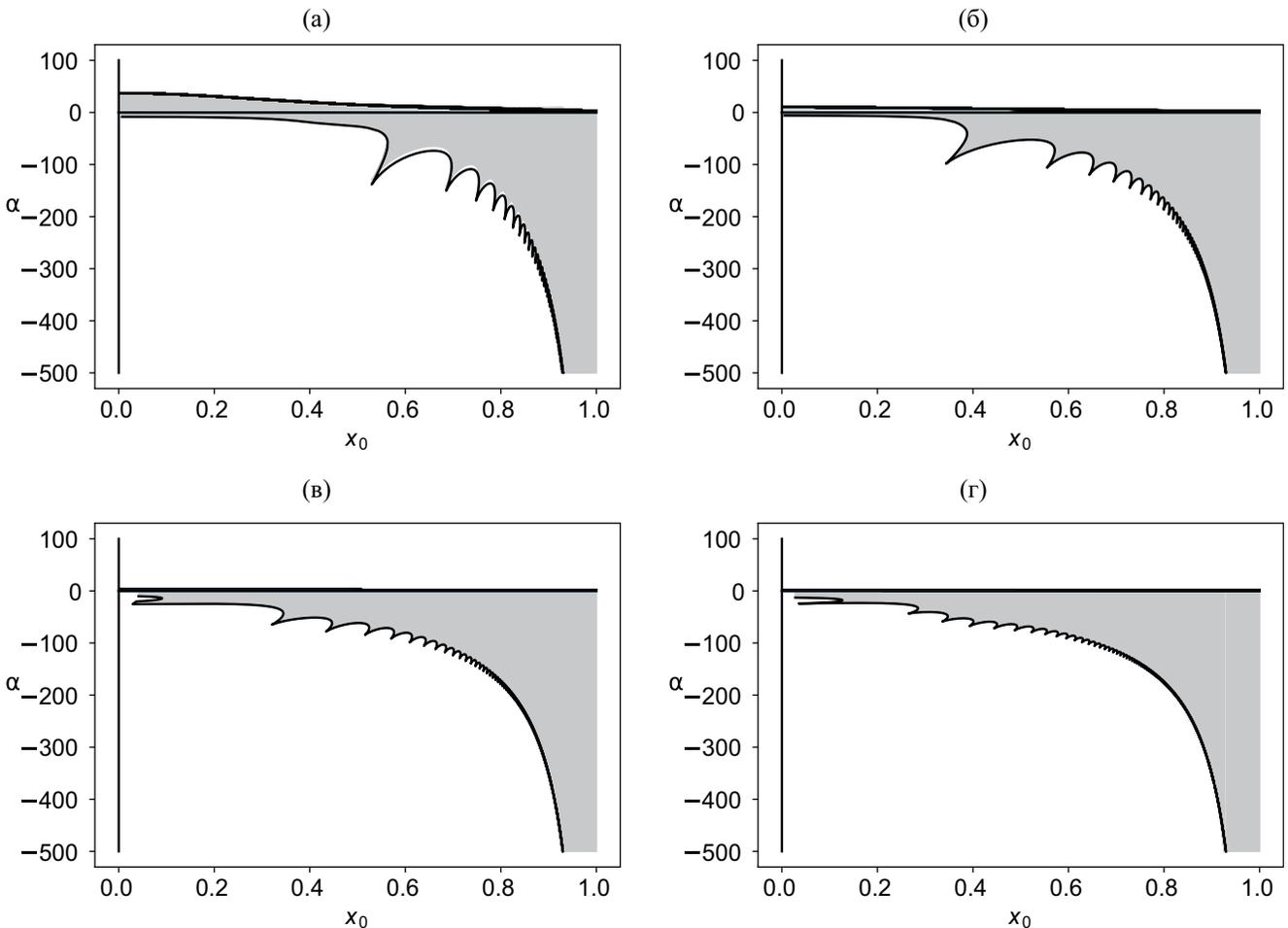


Рис. 2. Область  $\Omega$  при параметрах  $T = 1, r = 1$  и а)  $d = 0.1$ , б)  $d = 0.2$ , в)  $d = 0.5$ , г)  $d = 1$ .

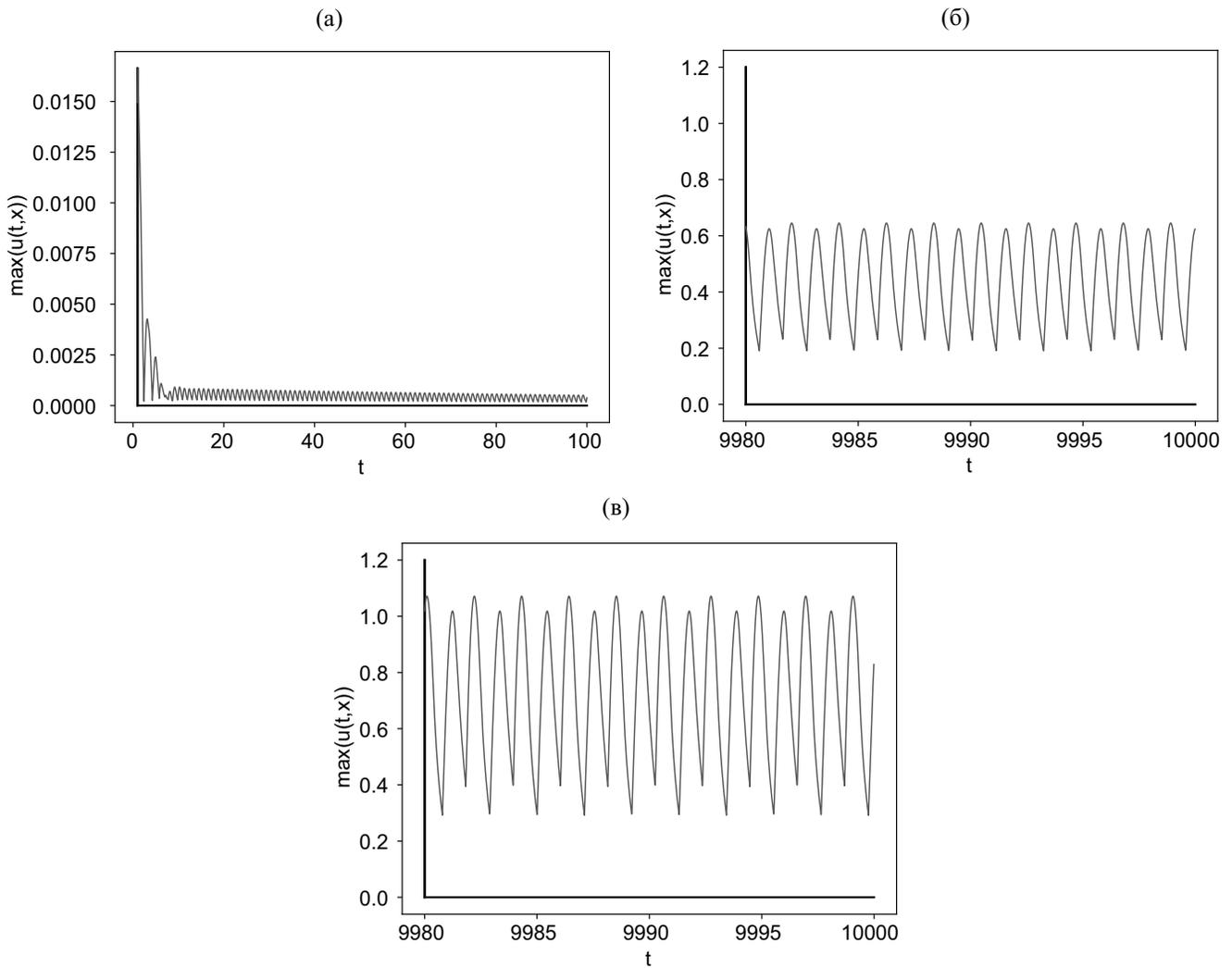


Рис. 3. Графики амплитуды решения решения (3), (6) при  $d = 0.1$ ,  $T = 1$ ,  $r = 1$ ,  $x_0 = 0.5$ , а)  $\alpha = -26,5$ , б)  $\alpha = -26,9$ , в)  $\alpha = -27$ .

Отметим, что  $\alpha_+(x_0) > 0$ . В случае  $1 < rT < \pi / 2$ , как отмечалось выше, существует еще одно значение  $\omega_+$ , при котором  $\mu(\omega_+)$  вещественное. Для  $\omega = \omega_+$  уравнение (14) имеет еще одно семейство решений

$$\alpha = \frac{\sqrt{d^{-1}r \cos(\omega_+T)} \operatorname{sh}\left(\sqrt{d^{-1}r \cos(\omega_+T)}\right)}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{d^{-1}r \cos(\omega_+T)}x_0\right)} > \alpha_+(x_0).$$

В остальных случаях, когда  $\mu \notin \mathbb{R}$ , уравнение (14) имеет только конечное количество корней с  $x_0 \in [0,1]$ .

Далее исследуем численно уравнение (14). В результате получим кривые, которые делят плоскость  $(\alpha, x_0)$  ( $x_0 \in [0,1]$ ) на области, в которых количество корней (9) с положительной веще-

ственной частью одинаково. Область  $\Omega$ , содержащая отрезок  $\alpha = 0$ , при  $rT < \pi / 2$  является областью устойчивости нулевого решения (3), (6).

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИСХОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Приведем наиболее важные результаты, полученные при численном анализе краевых задач (3), (6) и (3), (7).

На рис. 2 при  $r = 1$ ,  $T = 1$  и при различных значениях параметра  $d$  на плоскости параметров  $(x_0, \alpha)$  изображены полученные численно решения уравнения (14). Видно, что граница области  $\Omega$  состоит из двух кривых  $\alpha_{\pm}(x_0)$ . Нулевое решение (3), (6) для параметров, удовлетворяющих условиям

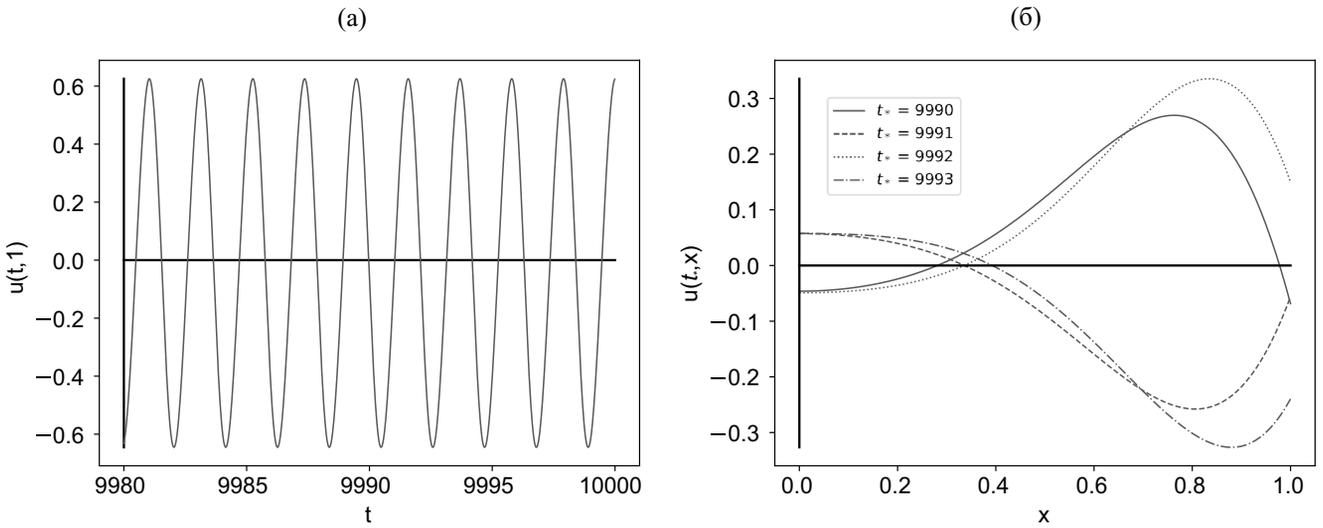


Рис. 4. Графики зависимости  $u(t,1)$  (слева) и  $u(t,x)$  (справа) решения (3), (6) при  $d = 0.1, T = 1, r = 1, x_0 = 0.55, \alpha = -26.9$ .

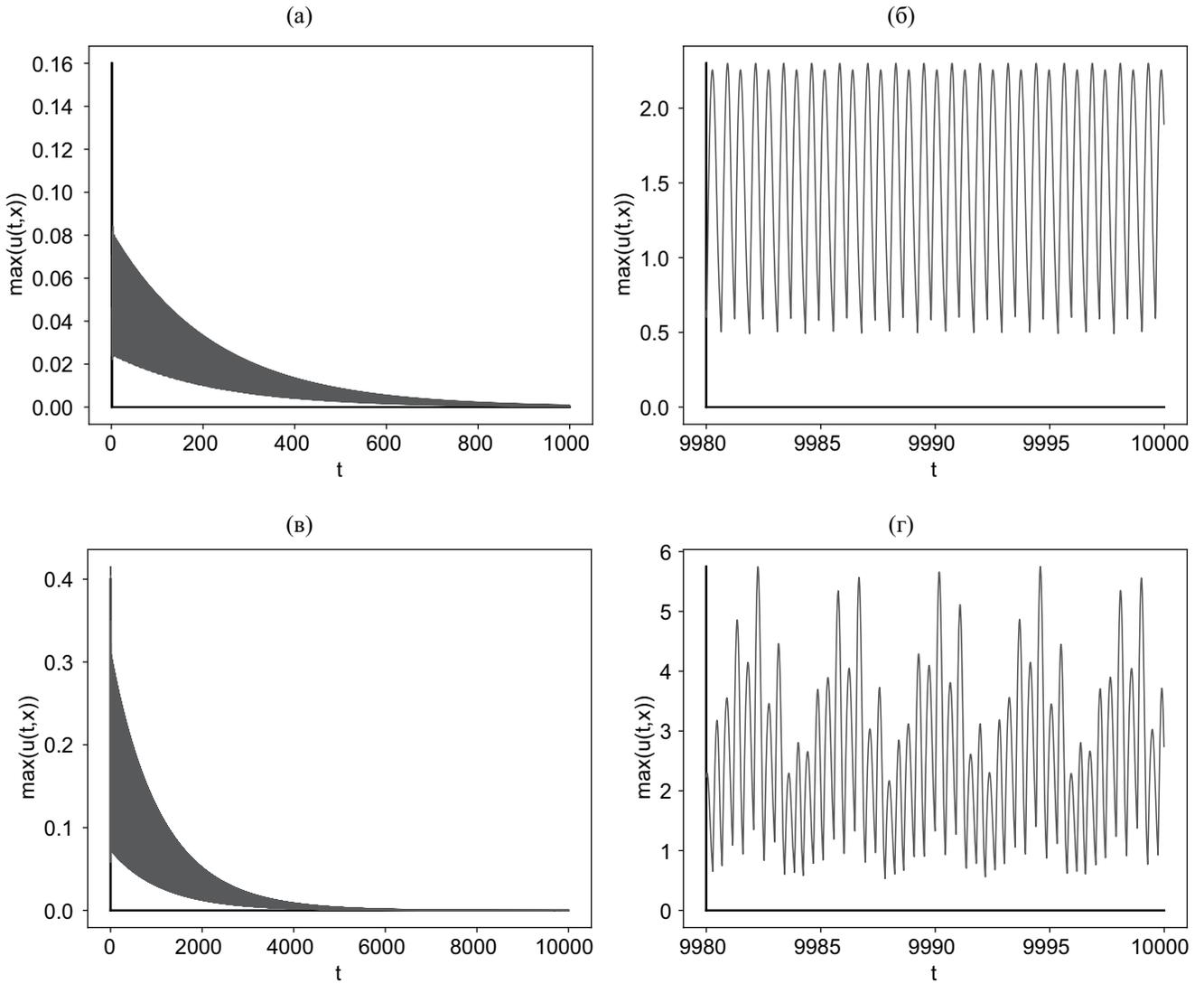


Рис. 5. Графики амплитуды решения решения (3), (6) при  $d = 0.1, T = 1, r = 1, x_0 = 0.55$ , а)  $\alpha = -38$ , б)  $\alpha = -100.5$ , в)  $\alpha = -101$ , г)  $\alpha = -118$ .

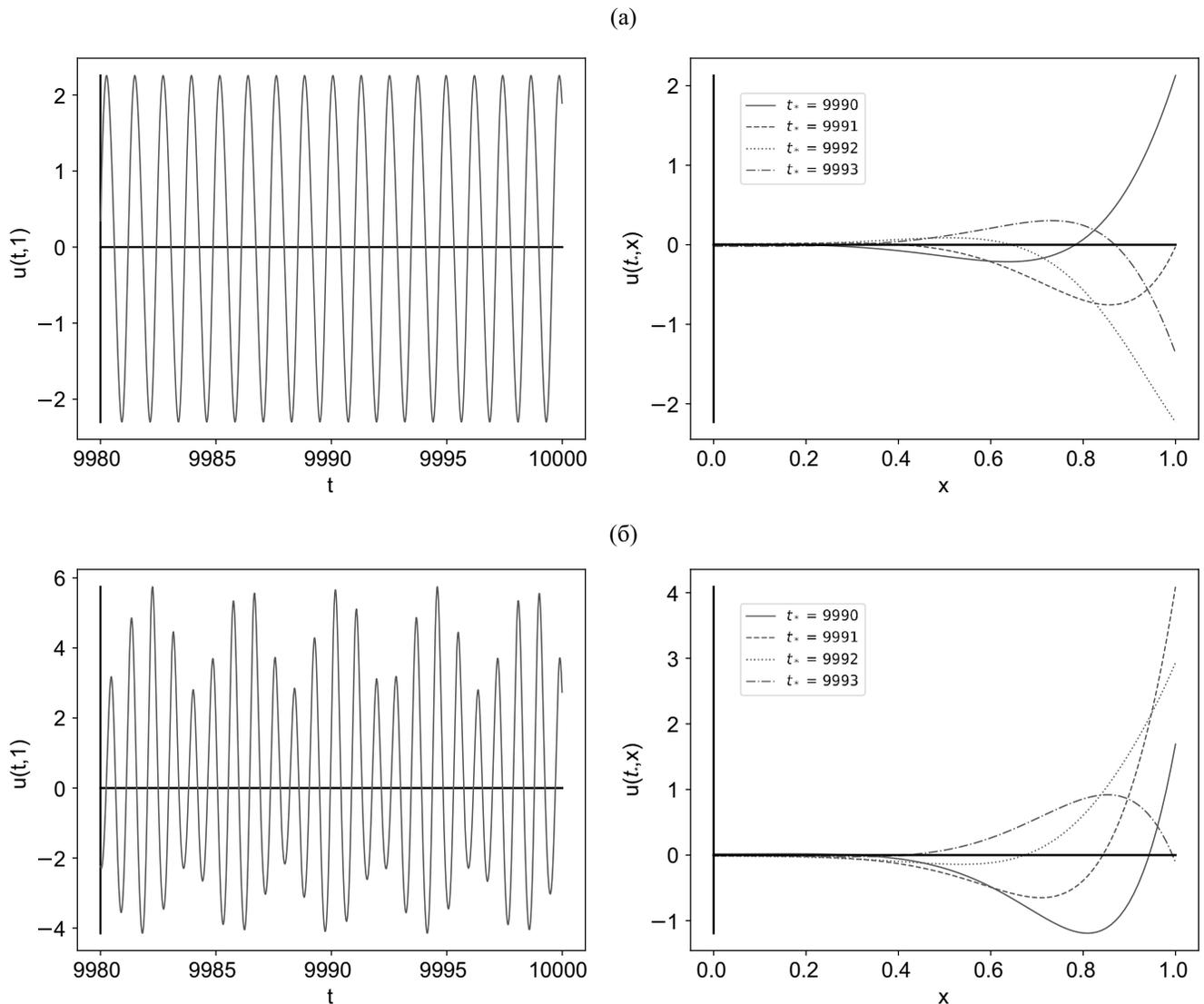


Рис. 6. Графики зависимости  $u(t,1)$  (слева) и  $u(t_*,x)$  (справа) решения (3), (6) при  $d = 0.1, T = 1, r = 1, x_0 = 0.55$ , а)  $\alpha = -100,5$ , б)  $\alpha = -118$ .

$$\alpha_-(x_0) < \alpha < \alpha_+(x_0), \tag{15}$$

является устойчивым, а при

$$\alpha < \alpha_-(x_0) \text{ или } \alpha > \alpha_+(x_0) \tag{16}$$

неустойчивым.

Отметим, что присутствует тенденция сужения области  $\Omega$  при уменьшении параметра  $x_0$ . Отметим также, что при увеличении параметра  $d$  кривые  $\alpha_{\pm}$  сглаживаются.

На рис. 3 приведены графики изменения амплитуды решения  $\left(\max_{0 \leq x \leq 1} |u(t,x)|\right)$  при  $x_0 = 0.5$  и различных значениях  $\alpha$ , как внутри области устойчивости  $\Omega$  (рис. 3а) так и вне ее (рис. 3б и 3в). Обратим внимание, что при удалении  $\alpha$  от критических значений амплитуда

решения увеличивается. Результаты численного счета говорят о том, что происходит бифуркация Андронова–Хопфа. На рис. 4 приведены графики  $u(t,1)$  и  $u(t_*,x)$  для установившихся режимов для тех же значений параметров, что и на рис. 3б при некоторых фиксированных  $t_*$ .

На рис. 2 видно, что кривая  $\alpha_-(x_0)$  имеет сложную структуру. Это, в частности, означает, что при некотором фиксированном  $x_0$  и при уменьшении  $\alpha$  несколько раз может происходить смена устойчивости и неустойчивости нулевого решения в (3), (6). Аналогично при изменении  $x_0$  при фиксированном значении  $\alpha$  могут произойти несколько прямых и обратных бифуркаций. Этот эффект проиллюстрирован на рис. 5, где приведены графики амплитуды

установившихся режимов при  $x_0 = 0.55$  и различных значениях  $\alpha$ . Из рисунка видно, что сначала при  $\alpha = -38$  решение стремится к нулю (рис. 5а), затем при уменьшении  $\alpha$  появляются устойчивый цикл (рис. 5б), который сменяется устойчивым нулевым решением (рис. 5в), а при дальнейшем уменьшении  $\alpha$  опять появляется устойчивое периодическое решение, как на рис. 5г. Графики  $u(t, x_*)$  и  $u(t_*, x)$  при значениях параметров, соответствующим рис. 5б и 5г приведены на рис. 6. Обратим внимание, что при  $\alpha = -118$  (рис. 6б) характер колебаний стал более сложным, что объясняется удаленностью точки  $(x_0, \alpha)$  от области устойчивости.

При пересечении верхней границы области устойчивости — кривой  $\alpha = \alpha_+(x_0)$ , — задача, как показывает численный анализ, становится нелокальной.

Динамические свойства задачи (3), (7), содержащей запаздывание в граничном условии при малых значениях величины запаздывания  $h$  повторяют описанные результаты для задачи (3), (6), т. е. для случая  $h = 0$ .

## 5. ВЫВОДЫ

Исследованы области устойчивости состояний равновесия логистического уравнения с запаздыванием и диффузией (3) и двумя видами неклассических краевых условий: (7), в котором дополнительно содержится запаздывание по времени  $h$ , и (6) в котором запаздывание отсутствует ( $h = 0$ ). Показано, что при малых значениях  $h$  область устойчивости для задачи (3), (7) переходит в область устойчивости нулевого решения задачи (3), (6).

Численными методами исследовано поведение решений в окрестности границы области устойчивости. Из полученных результатов следует, что при пересечении нижней границы устойчивости происходит бифуркация Андро-

нова—Хопфа, т. е. рождается устойчивое периодическое решение.

## ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996.
2. *Cushing J. M.* Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Springer, 1977.
3. *Kuang Y.* Delay differential equations: with applications in population dynamics. Academic Press, 1993.
4. *Murray J.D.* Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. New York : Springer, 2001. V. 3.
5. *Gourley S.A., So J.W-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // Journal of Mathematical Sciences. 2004. V. 124. P. 5119–5153.
6. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией // Математические заметки. 2019. Т. 106. № 1. С. 138–143.
7. *Wright E.M.* A non-linear difference-differential equation // J. für die reine und angewandte Math. (Crelles Journal). 1955. V. 194. P. 66–87.
8. *Кащенко С.А.* Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием. М.: КРАСАНД, 2020.
9. *Кащенко С.А., Толбей А.О.* Бифуркации в логистическом уравнении с диффузией и запаздыванием в граничном условии // Матем. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 940–944.
10. *Rudyi A.S.* Theoretical fundamentals of the method for thermal diffusivity measurements from auto-oscillation parameters in a system with a thermal feedback // International J. of Thermophysics. 1993. V. 14. P. 159–172.

# STABILITY OF SOLUTIONS TO THE LOGISTIC EQUATION WITH DELAY, DIFFUSION AND NONCLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS

I. S. Kashchenko<sup>a</sup>, S. A. Kashchenko<sup>a</sup>, I. N. Maslenikov<sup>a</sup>

*aP. G. Demidov Yaroslavl State University, Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The work is devoted to the logistic equation with delay and diffusion with non-classical boundary conditions. The stability of a nontrivial equilibrium state is investigated, and the resulting bifurcations are studied numerically.

*Keywords:* logistic equation, delay, diffusion, non-classical boundary conditions, stability