ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 517, с. 85–91

УДК 517.968.72

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

 Н. А. Раутиан[1, 2, *]

Представлено академиком РАН В. А. Садовничим
Поступило 16.04.2024 г.
После доработки 19.05.2024 г.
Принято к публикации 28.052024 г.

Проведено исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. На основе полученных ранее результатов установлена связь между спектрами оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений и спектрами генераторов полугрупп операторов. На основе спектрального анализа генераторов полугрупп операторов и соответствующих оператор-функций получены представления решений рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, представления решений

DOI: 10.31857/S2686954324030144, **EDN:** YADJRU

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию абстрактных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Упомянутые абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в большом числе прикладных задач.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [1]—[14] и их библиографию).

В работе используется подход, связанный с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений (см., например, [1], [2], [15], [16]). Сформулированы результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Приведена формулировка соответствующей задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве.

На основе теорем о локализации и структуре спектра символов, а также на основе теорем о полноте и базисности Рисса из подпространств системы корневых векторов, отвечающих невещественной части спектра в замыкании их линейной оболочки, устанавливаются представления решений начальных задач для систем операторно-дифференциальных уравнений первого порядка в расширенном гильбертовом пространстве и для абстрактных вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, содержащих два некоммутирующих линейных оператора.

Представленные в данной работе результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [1], [2], [8]—[14]).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положитель-

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
[*] *E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru*

ный оператор $A^* = A \geq \kappa_0 I$ $(\kappa_0 > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный оператор. Пусть B — самосопряженной неотрицательный оператор, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$, такой, что $D(A) \subseteq D(B)$, удовлетворяющий неравенствам, $\|Bx\| \leq \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in D(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \int_l^t K_1(t-s)Au(s)ds - \\ -\int_l^t K_2(t-s)Bu(s)ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \\ u(t) = \varphi(t), t \in [l, 0], \quad -\infty \leq l < 0, \tag{2}$$

где $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$. Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i = 1,2$ имеют следующее представление:

$$K_i(t) = \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} d\mu_i(\tau), \quad i = 1,2. \tag{3}$$

где $d\mu_i$, $(i = 1,2)$ — положительная мера, порождаемая неубывающей, непрерывной справа функцией μ_i. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Будем предполагать, что функции μ_i, $(i = 1,2)$ представляют собой суммы абсолютно непрерывных функций и функций скачков (ступенчатых функций), сингулярная компонента отсутствует. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i = 1,2. \tag{4}$$

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right) A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right) B. \tag{5}$$

Замечание 1. *Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца* (*см.* [15], *с. 177–179*) *следует, что оператор A_0, является обратимым, операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ — допускают ограниченное замыкание в H, A_0^{-1} — ограниченный оператор.*

Превратим область определения $D(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $D(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Определение 1. *Назовем вектор-функцию $u(t)$* ***классическим*** *решением задачи* (*1*), (*2*), *если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению* (*1*) *для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальным условиям* (*2*).

3. ЗАДАЧА КОШИ В РАСШИРЕННОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Через Ω_k обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженные нормами

$$\| u \|_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} \| u(s) \|_H^2 \; d\mu_k(s) \right)^{1/2}, \quad k = 1,2,$$

соответственно. Пространства являются сепарабельными гильбертовыми (см., например, [17], стр. 148). Определим линейный оператор умножения на независимую переменную в пространстве Ω_k $(k = 1,2)$.

Определение 2 (см. [16], стр. 31). *Оператор умножения на независимую переменную $\mathbb{T}_k : \Omega_k \to \Omega_k$ $(k = 1,2)$ определяется следующим образом:*

$$\mathbb{T}_k \xi(\tau) = \tau \xi(\tau), \quad \xi(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), \quad \tau > 0, \tag{6}$$

где область определения $D(\mathbb{T}_k)$ имеет следующий вид

$$D(\mathbb{T}_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\}. \tag{7}$$

Введем операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ $(k = 1,2)$, действующие, следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v \quad k = 1,2, \quad \tau > 0.$$

тогда сопряженные операторы имеют следующий вид: $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$ $(k = 1,2)$,

$$\mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau) \quad k = 1,2.$$

Действительно, для любых $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\left\langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau)\right\rangle_{\Omega_k} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_{\Omega_k} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau) =$$

$$= \left\langle v, Q_k^* \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau)\right\rangle_H = \left\langle v, \mathbb{B}_k^* \xi(\tau)\right\rangle_H .$$

Введем гильбертово пространство

$$\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\oplus_{k=1}^2 \Omega_k\right),$$

снабженное нормой

$$\left\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\right\|_{\mathbb{H}}^2 = \|v\|_H^2 +$$

$$+\|\xi_0\|_H^2 + \sum_{k=1}^2 \|\xi_k(\tau)\|_{\Omega_k}^2, \quad \tau > 0,$$

которое будем называть расширенным гильбертовым пространством.

Введем линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},$$

$$\xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \xi_k(\tau) \in D(\mathbb{T}_k), k = 1,2\}, \tag{8}$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T =$$

$$= \Big(-A_0^{1/2}\Big[\xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau)\Big], \tag{9}$$

$$A_0^{1/2} v,\ \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), k = 1,2\Big)^T .$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде следующего произведения операторных матриц:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. *Согласно теореме 1 из работы* [10], *при выполнении условий* (4), *оператор* $\mathbb{A}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$ *с плотной областью определения* $D(\mathbb{A})$, *является максимально диссипативным и, следовательно, является генератором сжимающей* C_0-*полугруппы* $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$.

Введем 4-х компонентные векторы вида

$$Z(t) = \big(v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)\big) \in D(\mathbb{A}), \tag{10}$$

$$Z_0 = \Big(\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, \xi_{01}(\tau), \xi_{02}(\tau)\Big) \in D(\mathbb{A}), \tag{11}$$

где функции $\xi_{0k}(\tau)$ $(k = 1,2)$ определены следующими формулами

$$\xi_{0k}(\tau) := \int_l^0 \frac{e^{s\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{d\varphi(s)}{ds} ds, \quad \tau > 0, \quad k = 1,2, \tag{12}$$

вектор-функция $\varphi(t)$ определена условиями (2) и $\varphi^{(1)}(t) \in C\big((l,0], H_1\big)$.

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) \tag{13}$$

$$Z(0) = Z_0 \tag{14}$$

Определение 3. *Вектор-функция* $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in D(\mathbb{A})$, $t \in [0, +\infty)$, *принимающая значения в пространстве* $\mathbb{H}$, *называется* ***классическим*** *решением задачи* (*13*), (*14*), *если она принадлежит классу* $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{H}) \cap C([0,+\infty), D(\mathbb{A}))$ *при любом* $\tau > 0$ *и удовлетворяет уравнению* (*13*) *и начальному условию* (*14*).

В работе [14] (теорема 3) доказана теорема о существовании и единственности классического решения $Z(t)$ задачи (13), (14), определенного формулой (10), где $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2), в предположениях, что данные задачи (1), (2) удовлетворяют следующим условиям: $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_1$, вектор-функция $\varphi(t)$ задана при $t \in (l,0]$, причем $\varphi(t) \in H_1$ и $\varphi'(t) \in H_1$ при $t \in (l,0]$, $\varphi(t) \in C\big((l,0], H_1\big)$, $\varphi^{(1)}(t) \in C\big((l,0], H_1\big)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi^{(1)}(0) = \varphi_1$, кроме того, $\lim_{t\to l}\big[A\varphi(t)\big] = 0$, $(-\infty \leqslant l < 0)$, а данные задачи (13), (14) удовлетворяют условиям (11), (12). Также получена оценка нормы решения задачи (13), (14) в пространстве $\mathbb{H}$ и оценка энергетической нормы решения задачи (1), (2) в пространстве H.

4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА $\mathbb{A}$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1) с однородными начальными условиями (2) $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, $\varphi(t) = 0$, $t \in [l,0]$, $-\infty \le l < 0$, получаем следующее уравнение

$$L(\lambda)\hat{u}(\lambda) = 0.$$

Здесь вектор-функция $\hat{u}(\lambda)$ — преобразование Лапласа решения задачи (1), (2), а оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и имеет следующий вид

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \widehat{K}_1(\lambda)A - \widehat{K}_2(\lambda)B, \qquad (15)$$

где $\widehat{K}_i(\lambda)$ $(i = 1,2)$ — преобразования Лапласа ядер $K_i(t)$ $(i = 1,2)$, соответственно, имеющие представления

$$\widehat{K}_i(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad i = 1,2, \qquad (16)$$

I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{H}_0 = H \oplus \left(\oplus_{k=1}^2 \Omega_k\right)$ и оператор $\mathbb{T} : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0$, $\mathbb{T} = diag(0, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2)$. Обозначим $\sigma(\mathbb{A})$, $\sigma(\mathbb{T})$, $\sigma(L)$ — спектры операторов $\mathbb{A}$, $\mathbb{T}$ и оператор-функции $L(\lambda)$, соответственно.

Согласно теореме 4 из работы [10] и теоремам 5 и 6 из работы [11], если выполнено условие (4), то спектр оператор-функции $L(\lambda)$ и спектр оператора $\mathbb{A}$ лежит в открытой левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < 0\}$, при этом $\sigma(\mathbb{A}) \setminus \sigma(-\mathbb{T}) \subseteq \sigma(L)$, невещественный спектр оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с невещественным спектром оператора $\mathbb{A}$, симметричен относительно вещественной оси, состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности, не имеющих конечных точек накопления.

Уточним локализацию вещественной части спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости в случае, когда носитель меры $d\mu_k(\tau)$, $(k = 1,2)$ принадлежит полуоси $[d_1, +\infty)$, $0 < d_1 < +\infty$. Введем следующие обозначения: $\omega^2 = ((A + B)f, f), f \in D(A), \|f\| = 1$, $\tau(f) = (Af, f) / ((A + B)f, f)$, $0 \le \inf \tau \le \tau \le \sup \tau \le$ ≤ 1. В указанных обозначениях форму $(L(\lambda)f, f)$, где $f \in D(A)$, $\|f\| = 1$, можно переписать в следующем виде $(L(\lambda)f, f) = \lambda^2 + \omega^2 - \tau\widehat{K}_1(\lambda) -$ $- (1 - \tau)\widehat{K}_2(\lambda)$, $\tau \in [0,1]$. После деления уравнения $(L(\lambda)f, f) = 0$ на ω^2 получаем следующее уравнение:

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 = \tau\widehat{K}_1(\lambda) + (1 - \tau)\widehat{K}_2(\lambda), \quad \tau \in [0,1]. \qquad (17)$$

Определим расположение вещественных корней уравнения (17). Рассмотрим уравнение

$$\tau\widehat{K}_1(x) + (1 - \tau)\widehat{K}_2(x) = 1, \quad \tau \in [0,1]. \qquad (18)$$

В работе [11] (теорема 7) установлено, что, если выполнены условия (4) и носитель меры $d\mu_k(\tau)$, $(k = 1,2)$ принадлежит полуоси $[d_1, +\infty)$, $0 < d_1 < +\infty$, тогда вещественный корень $x_1(\tau)$ уравнения (17), принадлежащий интервалу $(-d_1, 0)$, удовлетворяет неравенству $x_1(\tau) < x_0(\tau) < \tilde{x}_0 < 0$, где $\tilde{x}_0 := \max\{x_0(\tau'), x_0(\tau'')\}$, $x_0(\tau)$ — вещественный корень уравнения (18), принадлежащий интервалу $(-d_1, 0)$, $\tau' := \left\|(A + B)^{1/2} A^{-1/2}\right\|^{-2}$, $\tau'' := \left\|A^{1/2}(A + B)^{-1/2}\right\|^2$. Если, кроме того, носитель меры $d\mu_k(\tau)$, $k = 1,2$ принадлежит отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 + \infty$, то уравнения (17) и (18) не имеют корней на полуинтервале $(-\infty, -d_2]$.

Перейдем теперь к описанию локализации невещественной части спектра оператор-функции $L(\lambda)$ и оператора $\mathbb{A}$.

В работе [13] (теорема 3, теорема 4) установлено, что если выполнено условие (4) и носитель меры $d\mu_k(\tau)$, $(k = 1,2)$ принадлежит отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 < +\infty$, то невещественная часть спектра оператора $\mathbb{A}$ принадлежит множеству

$$\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant Re\lambda \leqslant \alpha_2\}, \qquad (19)$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\sup_{\|f\|=1}\left[\frac{K_1(0)(Af, f) + K_2(0)(Bf, f)}{((A + B)f, f)}\right], \quad f \in D(A), \qquad (20)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\inf_{\|f\|=1}\left[\int_{d_1}^{d_2} \frac{(Af, f)d\mu_1(\tau)}{((A + B)f, f) + \tau^2} + \int_{d_1}^{d_2} \frac{(Bf, f)d\mu_2(\tau)}{((A + B)f, f) + \tau^2}\right], \quad f \in D(A), \qquad (21)$$

и существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ оператор функция $\left(\lambda\mathbb{A}^{-1} - \mathbb{I}\right)^{-1}$ ограничена в области $\Gamma_\varepsilon = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \big| \, |\lambda| \geqslant \varepsilon^{-1}, |\arg\lambda \pm \pi/2| \geqslant \varepsilon\right\}$.

Перейдем к описанию подпространств расширенного гильбертова пространства $\mathbb{H}$, отвечающих вещественной и невещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$, в случае, когда носители мер $d\mu_k(\tau)$, $k=1,2$ принадлежит отрезку $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2<+\infty$. В этом случае, согласно Теореме 4 из работы [10] и приведенным выше рассуждениям, множество $\bigcup_{k=1}^{2}\sigma(-\mathbb{T}_k)=\bigcup_{k=1}^{2}\operatorname{supp}(-d\mu_k)$ принадлежат спектру оператора $\mathbb{A}$. Кроме того, согласно Теореме 7 из работы [11], вещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ принадлежит интервалу $(-d_2,\tilde{x}_0)$, где точка $\tilde{x}_0$ принадлежит интервалу $(-d_1,0)$. Следовательно, вещественная часть спектра оператора $\mathbb{A}$ принадлежит множеству $[-d_2,\tilde{x}_0)$. Кроме того, из отсутствия конечных точек накопления невещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$ следует существование такого числа $\delta>0$, что внутри контура $\Gamma=\{\lambda=x+iy\in\mathbb{C}\mid x\in[-d_2-\delta,\tilde{x}_0+\delta],y=\pm\delta\}$ нет невещественных точек спектра оператора $\mathbb{A}$.

Обозначим $\mathbb{Q}_1$ проектор Рисса (см. [18], Гл. 1, § 2.)

$$\mathbb{Q}_1:=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}\right)^{-1}d\lambda. \tag{22}$$

Положим $\mathbb{Q}_2:=\mathbb{I}-\mathbb{Q}_1$. Рассмотрим следующие подпространства $\mathbb{H}_i:=\mathbb{Q}_i\mathbb{H}$, $i=1,2$. Подпространство $\mathbb{H}_1$, отвечает вещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$. Обозначим $\mathbb{A}_k:=\mathbb{Q}_k\mathbb{A}\mathbb{Q}_k$, $k=1,2$, — сужение оператора $\mathbb{A}$ на подпространство $\mathbb{H}_k$, которое является диссипативным оператором.

Для того, чтобы сформулировать теорему о базисности Рисса системы спектральных подпространств оператора $\mathbb{A}$, отвечающих невещественной части его спектра, в пространстве $\mathbb{H}_2$, напомним необходимые определения из монографий [18] и [19].

Определение 4. *Последовательность $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ненулевых подпространств $\mathcal{H}_k\subset\mathcal{H}$ называется базисом (из подпространств) пространства $\mathcal{H}$, если любой вектор $x\in\mathcal{H}$ разлагается единственным образом в ряд вида $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$, где $x_k\in\mathcal{H}_k$, $k\in\mathbb{N}$, сходящийся по норме пространства $\mathcal{H}$.*

Определение 5. *Базис из подпространств $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется эквивалентным ортогональному (базисом Рисса) в пространстве $\mathcal{H}$, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор $\mathcal{A}$ такой, что система подпространств $\{\mathcal{A}\mathcal{H}_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $\mathcal{H}$.*

Следуя [20], через $\mathfrak{R}$ обозначим множество таких неубывающих функций $\nu(r)$, определенных при достаточно больших вещественных r, что для каждой функции $\nu(r)\in\mathfrak{R}$ существует постоянная $a>1$, для которой $\nu(ar)\geq 2\nu(r)$ при достаточно больших r. Пусть $\mathfrak{I}$ — множество неубывающих функций $\nu(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\nu(r+\delta r)\leq(1+\varepsilon)\nu(r)$. Обозначим $N(t)$ — число собственных значений оператора $(A+B)^{1/2}$ (с учетом кратности), меньших t $(t>0)$.

Теорема 1 (О базисности Рисса из подпространств). *Пусть выполнены условия* (4) *носители мер $d\mu_k(\tau)$, $k=1,2$ принадлежит отрезку $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2<+\infty$ и выполнены условия*

$$N(t)\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{I},\quad t\to+\infty,\quad \varlimsup_{t\to+\infty}\left(N(t)t^{-1}\right)<\infty.$$

Тогда существует такая последовательность положительных чисел t_k:

$$\{t_k\}_{k=1}^{\infty},t_{-k}=-t_k,t_k<t_{k+1}(k\in\mathbb{Z}),$$
$$t_k\to\pm\infty(k\to\pm\infty)(t_0=0),$$

что система спектральных подпространств $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора $\mathbb{A}$, отвечающих прямоугольникам

$$\begin{aligned}\pi_k=\{\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}:\alpha_1\leq Re\lambda\leq\alpha_2,\\ t_{k-1}<Im\lambda\leq t_k\},\quad k\in\mathbb{Z},\end{aligned}\tag{23}$$

где α_1 и α_2 определяются формулами (*20*), (*21*), *является базисом эквивалентным ортогональному в подпространстве $\mathbb{H}_2$.*

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [12].

5. ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ

Представим вектор Z_0 начальных условий задачи (13), (14) в виде $Z_0=Z_{01}+Z_{02}$, где $Z_{0k}\in\mathbb{H}_k$, $k=0,1$. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2 (Представление решений). *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда суще-*

ствует такая последовательность целых чисел $\{n_k\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$, $n_k \to \pm\infty (k \to \pm\infty)$, *что решение* $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in D(\mathbb{A})$ *задачи Коши* (*13*), (*14*) *представимо в следующем виде:*

$$Z(t) = e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} \sum_{j=1}^{j_n} \sum_{s=0}^{s_{nj}} c_{njs} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{t^s}{s!} \xi_{nj0} + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \xi_{nj1} + t\xi_{nj(s-1)} + \xi_{njs} \right) e^{\lambda_n t} \right), \tag{24}$$

где λ_n $\left(\lambda_{-n} = \overline{\lambda}_n\right)$ — *собственные значения оператора* $\mathbb{A}_2$, *которые, при* $n \in [n_k, n_{k+1})$, *принадлежат прямоугольнику* π_k, *определенному формулой* (*23*), j_n — *число собственных векторов, отвечающих собственному значению* λ_n, $\left(\xi_{nj0}, \xi_{nj1}, \ldots, \xi_{njs}\right)$ — *цепочки собственных и присоединенных векторов* $\xi_{njs} \in \mathbb{H}_2$ *оператора* $\mathbb{A}_2$, *соответствующих собственному значению* λ_n, s_{nj} — *максимальная длина производной цепочки, отвечающей вектору* ξ_{nj0}, $\sum_{j=1}^{j_n} s_{nj} = p_n$ — *алгебраическая кратность собственного значения* λ_n, *вектор-функция* $e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01}$ *для любого сколь угодно малого* $\delta > 0$ *удовлетворяет следующему неравенству* $\left\| e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01} \right\|_{\mathbb{H}_1} \le C(\delta) \left\| Z_{01} \right\|_{\mathbb{H}_1} e^{(\tilde{x}_0 + \delta)t}$, *с константой* $C(\delta)$, *не зависящей от вектора* Z_{01}. *Ряд в представлении* (*24*) *сходится безусловно* (*т.е. не зависит от порядка суммирования по* k) *при каждом* $t \ge 0$. *Кроме того вектор-функция* $u(t) = \int_0^t v(s)ds + \varphi_0$ *является решением задачи* (*1*), (*2*).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluids // Operator Theory: Advances and Applications (Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland). 2003. V. 146. 444 p.
2. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with memory. Theory and applications. New-York – Dordrecht – Heidelberg – London: Springer, 2012. 576 p.
3. *Георгиевский Д.В.* Модели теории вязкоупругости. М.: ЛЕНАНД, 2023. 144 с.
4. *Локшин А.А., Суворова Ю.В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 152 с.
5. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
6. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
7. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
8. *Skubachevskii A.L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications // Russian Mathematical Surveys. 2016. V. 71. № 5. P. 801–906.
9. *Shamaev A.S., Shumilova V.V.* Spectrum of one-dimensional natural vibrations of layered medium consisting of elastic material and viscous incompressible fluid // Moscow University Mathematics Bulletin. 2020. V. 75. № 4. P. 172–176.
10. *Rautian N.A.* On the Properties of Semigroups Generated by Volterra Integro-Differential Equations with Kernels Representable by Stieltjes Integrals // Differential Equations. 2021. V. 57. № 9. P. 1231–1248.
11. *Rautian N.A.* Studying Volterra Integro-Differential Equations by Methods of the Theory of Operator Semigroups // Differential Equations. 2021. V. 57. № 12. P. 1665–1684.
12. *Rautian N.A., Vlasov V.V.* Spectral Analysis of the Generators for Semigroups Associated with Volterra Integro-Differential Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 3. P. 926–935.
13. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Application of Semigroup Theory to the Study of Volterra Integro-Differential Equations // Differential Equations. 2022. V. 58. № 4. P. 571–575.
14. *Vlasov V.V., Rautian N.A.* Well-Posed Solvability of Volterra Integro-Differential Equations in Hilbert Spaces// Differential Equations. 2022. V. 58. № 10. P. 1410–1426.
15. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967. 464 с.
16. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York: Springer-Verlag, 2000. 586 p.
17. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физ.-мат. лит., 1961.
18. *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиница, 1986.
19. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
20. *Радзиевский Г.В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле // Математический сборник.– 1980. Т. 112. № 3. С. 396–420.

REPRESENTATIONS OF THE SOLUTIONS FOR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HILBERT SPACES

N. A. Rautian[a, b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii

Volterra integro-differential equations with operator coefficients in Hilbert spaces were studied. The relationship has been established between the spectra of operator functions that are the symbols of the specified integro-differential equations and the spectra of generators of semigroups. Representations of solutions for considered integro-differential equations are obtained on the basis of spectral analysis of generators of operator semigroups and corresponding operator-functions.

Keywords: Volterra integro-differential equations, linear differential equations in Hilbert spaces, representations of the solutions