ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 517, с. 74–78

МАТЕМАТИКА

УДК 515.124+512.562+515.126.4+515.126.83

НУЛИ КОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СОВПАДЕНИЯ

© 2024 г. Т. Н. Фоменко[1,*]

Представлено академиком РАН С.В. Матвеевым
Поступило 14.05.2024 г.
После доработки 28.05.2024 г.
Принято к публикации 06.06.2024 г.

Введено понятие конической функции с операторными коэффициентами на коническом метрическом пространстве. Доказана теорема о существовании нулей таких функций. На этой основе получена теорема о неподвижных точках многозначного отображения в себя конического метрического пространства, обобщающая недавнюю теорему Е.С. Жуковского и Е.А. Панасенко о неподвижной точке многозначного сжимающего отображения конического метрического пространства с операторным коэффициентом сжатия. Получены теоремы о совпадениях двух многозначных отображений конических метрических пространств, обобщающие более ранние результаты автора о совпадениях многозначных отображений метрических пространств.

Ключевые слова: коническая метрика, коническая функция, многозначное отображение, неподвижная точка, точка совпадения

DOI: 10.31857/S2686954324030125, **EDN:** YAUNWS

Данное краткое сообщение посвящено существованию неподвижных точек и точек совпадения многозначных отображений конических метрических пространств. В 2009–2013 автором было введено понятие (α,β)-поискового функционала и доказано несколько вариантов теорем о поиске нулей таких функционалов в метрическом пространстве. В качестве следствий были получены теоремы о неподвижных точках и совпадениях однозначных и многозначных отображений метрических пространств, обобщающие ряд известных результатов разных авторов (см., например, [1, 2]).

Пусть X непустое множество, $(S,\|\cdot\|)$ банахово пространство. Пусть $K \subset S$ – положительный выпуклый замкнутый острый конус, то есть замкнутое выпуклое подмножество, удовлетворяющее условиям:

1) $0 \in K$;

2) $\forall a \in K, a \neq 0 \Rightarrow \forall \mu > 0, \mu a \in K, -\mu a \notin K$;

3) $\forall a,b \in K \Rightarrow \forall t \in [0;1], ta + (1-t)b \in K$.

Наличие конуса K в S задает частичный порядок $\le_K$ на S. А именно, для любых $a,b \in S$ $(a \le_K b) \Leftrightarrow (b - a \in K)$. Итак, задано частично упорядоченное множество $(S,\le_K)$.

Определение 1. *Конической метрикой на X, ассоциированной с конусом K, называется отображение $d_K : X \times X \to K$, удовлетворяющее аксиомам обычной метрики, то есть для любых $x,y \in X$ выполнены следующие условия:*

1. $d_K(x,y) \ge_K 0; (d_K(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;
2. $d_K(x,y) = d_K(y,x)$;
3. для любого $z \in X$ верно, что $d_K(x,y) \le_K d_K(x,z) + d_K(z,y)$.

Пусть на множестве $X \neq \varnothing$ задана коническая метрика d_K, как описано выше. Пространство (X,d_K) с конической метрикой d_K называется *коническим метрическим пространством*.

В некоторых предыдущих работах автором использовались конические метрические пространства, но для характеризации отображений обычно применялись числовые коэффициенты, как в обычных метрических пространствах.

В 1964 году А.И. Перовым было доказано обобщение принципа сжимающих отображений [3] в пространствах с метрикой, принимающей значения в конусе $\mathbb{R}^n_+$, см. также [4]. В качестве

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

[*] *E-mail: tnfomenko@gmail.com*

коэффициента сжатия использовался положительный линейный оператор в $\mathbb{R}^n$ со спектральным радиусом меньше единицы. В 2016 в работе Е.С. Жуковского [5] для характеризации некоторых векторно-значных отображений произведения метрических пространств применены операторные (матричные) коэффициенты. В 2018 году эта естественная и полезная идея была использована в совместной работе Е.С. Жуковского и Е.А. Панасенко [6] для характеристики сжимающих отображений в коническом метрическом пространстве.

В данном кратком сообщении идея операторных коэффициентов используется для развития метода (α,β)-поисковых функционалов в коническом метрическом пространстве и его применений в теории неподвижных точек и совпадений.

Будем предполагать, что норма в S монотонна по отношению к частичному порядку $\leq_K$, то есть $(a \leq_K b) \Rightarrow (\| a \| \leq \| b \|)$. Отметим, что в таком случае конус K также называют *нормальным* с коэффициентом нормальности, равным 1. Кроме этого, будем предполагать, что конус K является воспроизводящим, то есть $S = K - K$. Иначе говоря, любой элемент $a \in S$ представим в виде разности элементов конуса K.

В множестве $L(S) := \{L : S \to S\}$ всех ограниченных линейных операторов в пространстве S рассмотрим подмножество L_+ линейных операторов, оставляющих конус K инвариантным, то есть $L_+ := \{P \in L(S) \mid P(K) \subseteq K\}$. Поскольку конус K воспроизводящий, с монотонной нормой, то несложно проверить, что множество L_+ также представляет собой положительный выпуклый замкнутый острый конус в $L(S)$ (см. также [6]). Этот конус L_+ определяет частичный порядок $\leq$ на пространстве $L(S)$. А именно, будем говорить, что для $F, G, \in L(S)$ верно: $F \leq G$, если $G - F \in L_+$.

Теперь введем в рассмотрение понятие конической функции с операторными коэффициентами. Многозначные отображения будем обозначать двойными стрелками $\rightrightarrows$.

Определение 2. *Многозначное отображение $\varphi : X \rightrightarrows K$ будем называть конической функцией (с операторными коэффициентами A, B) или (A, B)-конической функцией, если выполнены следующие условия:*

1) заданы ограниченные линейные операторы $A, B \in L_+$, такие, что оператор A обратим, $A^{-1} \in L_+$, и композиция $A^{-1}B : K \to K$ имеет спектральный радиус $\lambda = \lambda(A^{-1}B) < 1$;

2) для любого $x \in X$ и любого $c \in \varphi(x) \subset K$ существует такой элемент $x' \in X$, что $d_K(x, x') \leq_K A^{-1}(c)$, и существует такое значение $c' \in \varphi(x')$, что $c' \leq_K A^{-1}B(c)$.

График (A, B)-конической функции φ будем обозначать $Graph(\varphi) = \{(x, c) \mid x \in X, c \in \varphi(x)\} \subseteq X \times S$. Фундаментальность и сходимость последовательностей в $X \times S$ (и в частности, в графике $Graph(\varphi)$ будем рассматривать в по-компонентной метрике $D = d_K \times \nu$, где $\nu(a, b) := \| a - b \|$.

Определение 3. *График $Graph(\varphi)$ (A, B)-конической функции φ называется $\{0\}$-полным, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subset Graph(\varphi)$, где $c_n \to 0$ при $n \to \infty$, сходится к элементу этого графика. График $Graph(\varphi)$ называется $\{0\}$-замкнутым, если любой его предельный элемент вида $(\xi, 0)$ содержится в нем.*

Теорема 1. *Пусть на полном коническом метрическом пространстве (X, d_K) задана многозначная (A, B)-коническая функция $\varphi : X \rightrightarrows K$ с операторными коэффициентами $A, B : K \to K$. Пусть график $Graph(\varphi)$ функции φ является $\{0\}$-замкнутым. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любого значения $c_0 \in \varphi(x_0)$ существует такая точка $x_* = x_*(x_0, c_0) \in X$, что $0 \in \varphi(x_*)$ и для конического расстояния $d_K(x_0, x_*)$ верна следующая оценка:*

$$d_K(x_0, x_*) \leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(c_0).$$

Доказательство. Из свойств многозначной (A, B)-конической функции φ следует, что начиная с произвольной начальной точки $x_0 \in X$ и любого значения $c_0 \in \varphi(x_0)$, можно построить последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subset Graph(\varphi)$ со следующими свойствами:

$$d_K(x_{n-1}, x_n) \leq_K A^{-1}(c_{n-1}), c_n \leq_K A^{-1}B(c_{n-1}). \quad (1)$$

Покажем, что такая последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в (X, d_K). В самом деле, рассмотрим коническое расстояние $d_K(x_n, x_{n+m})$. Заметим, что из предположения $\lambda(A^{-1}B) < 1$ следует обратимость оператора $I - A^{-1}B : S \to S$. При этом оператор $(I - A^{-1}B)^{-1}$ равен сумме итерационного ряда $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (A^{-1}B)^i$. Этот ряд состоит из операторов $(A^{-1}B)^i \in L_+$. Так как конус L_+ замкнут, то $(I - A^{-1}B)^{-1} \in L_+$, причем для любого $N \in \mathbb{N}$ верно неравенство: $\sum_{i=0}^{N}(A^{-1}B)^i \le (I - A^{-1}B)^{-1}$. Используя неравенства (1) и свойства метрики d_K, имеем:

$$d_K(x_n, x_{n+m}) \le_K \sum_{j=0}^{m-1} d_K(x_{n+j}, x_{n+j+1}) \le$$
$$\le_K \sum_{j=0}^{m-1} A^{-1}(c_{n+j}) \le_K \sum_{j=0}^{m-1} A^{-1}(A^{-1}B)^{n+j}(c_0) =$$
$$= A^{-1}\sum_{j=0}^{m-1}(A^{-1}B)^{n+j}(c_0) =$$
$$= A^{-1}(A^{-1}B)^n \sum_{j=0}^{m-1}(A^{-1}B)^j(c_0) \le$$
$$\le_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(A^{-1}B)^n(c_0).$$

Поскольку у оператора $A^{-1}B$ спектральный радиус $\lambda = \lambda(A^{-1}B) < 1$, то $(A^{-1}B)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ в L_+. В силу монотонности нормы,

$$\|d(x_n, x_{n+m})\| \le_K \left\|A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(A^{-1}B)^n(c_0)\right\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Поэтому ясно, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Так как коническое метрическое пространство (X, d_K) предполагается полным, то существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n = x_* \in X$. В силу непрерывности конической метрики d_K (в соответствующей ей топологии), тогда

$$d_K(x_0, x_*) = \lim_{n\to\infty} d_K(x_0, x_n) \le$$
$$\le_K \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} d_K(x_j, x_{j+1}) \le_K \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} A^{-1}(c_j) \le_K$$
$$\le_K A^{-1}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}(A^{-1}B)^j(c_0) \le_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(c_0).$$

Заметим, что $c_n \le_K (A^{-1}B)^n(c_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Так как по условию теоремы график $Graph(\varphi)$ является $\{0\}$-замкнутым, то $(x_*, 0) \in Graph(\varphi)$, то есть $0 \in \varphi(x_*)$. □

Рассмотрим некоторые следствия из доказанной теоремы.

Теорема 2. *Пусть (X, d_K) полное коническое метрическое пространство, $F : X \rightrightarrows X$ многозначное отображение. Пусть отображение $\varphi : X \rightrightarrows K$, где $\varphi(x) = \{d \in K \mid \exists z \in F(x), d = d_K(x, z)\}$ является (A, B)-конической функцией для линейных ограниченных операторов $A, B \in L_+$. Пусть график $Graph(\varphi)$ функции φ является $\{0\}$-замкнутым. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любого $y_0 \in F(x_0)$ существует неподвижная точка $\xi = \xi(x_0, y_0)$ отображения F, то есть $\xi \in F(\xi)$, и верна оценка: $d_K(x_0, \xi) \le_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(d_K(x_0, y_0))$.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 1. Достаточно заметить, что множество нулей специальной (A, B)-конической функции φ, то есть таких точек $x \in X$ что $0 \in \varphi(x)$, совпадает с множеством неподвижных точек отображения F. Взяв в качестве $c_0 = d_K(x_0, y_0)$ и дословно повторяя доказательство теоремы 1, получим точку x_*, такую, что $(x_*, 0) \in Graph(\varphi)$, то есть $0 \in \varphi(x_*)$, что эквивалентно включению $x_* \in F(x_*)$. □

Определение 4. *Пусть (X, d_K) коническое метрическое пространство, $F : X \rightrightarrows X$ многозначное отображение, $Q : K \to K$ ограниченный линейный оператор со спектральным радиусом $\lambda(Q) < 1$. Отображение F называется Q-сжимающим (сжимающим с операторным коэффициентом Q), если для любых $x_1, x_2 \in X$ и любого $y_1 \in F(x_1)$ верно, что существует $y_2 \in F(x_2)$, для которого $d_K(y_1, y_2) \le Q(d_K(x_1, x_2))$.*

Следующее утверждение содержится в статье [6] и представляет конический метрический аналог известной теоремы Надлера о неподвижной точке многозначного отображения. Ниже покажем, что это утверждение следует из теоремы 2.

Теорема 3. [*6, теорема 1*] *Пусть (X, d_K) полное коническое метрическое пространство, $F : X \rightrightarrows X$ многозначное Q-сжимающее отображение с замкнутыми образами, с операторным коэффициентом сжатия $Q \in L_+$, у которого спектральный радиус $\lambda(Q) < 1$. Тогда для любого $x_0 \in X$ и любого $y_0 \in F(x_0)$ существует неподвижная точка отображения F, то есть такая точка $\xi \in X$, что $\xi \in F(\xi)$, причем верна оценка: $d_K(x_0, \xi) \le_K (I - Q)^{-1}(d_K(x_0, y_0))$.*

Фактически это частный случай теоремы 2. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 3 отображение $\varphi : X \rightrightarrows K$, где $\varphi(x) = \{c \in K \mid \exists y \in F(x), c = d_K(x, y)\}$, является многозначной (I, Q)-конической функцией (Здесь $I = id_K$ — тождественное отображение конуса K). Действительно, для любой точки x и любого $y \in F(x)$, то есть для любого значения $c = d_K(x, y) \in \varphi(x)$ существует точка $x' \in X, x' = y \in F(x)$, такая, что $d_K(x, x') = d_K(x, y) \le_K c = d_K(x, y)$, и существует такое значение $c' \in \varphi(x')$, то есть существует такой элемент $y' \in F(x') = F(y)$, что

$c' = d_K(y,y') \leq_K Q(d_K(x,x'))$. Отметим, что сжимающее отображение F является замкнутым, то есть его график замкнут. Но тогда и график функции φ замкнут, и тем более он $\{0\}$ — замкнут. Так что для отображения F выполнены все условия теоремы 2. Поэтому утверждение следует из теоремы 2.

Рассмотрим теперь задачу о существовании точек совпадения двух многозначных отображений. Пусть заданы два конических метрических пространства (X, d_K) и (Y, ρ_K), где $d_K : X \to K, \rho_K : Y \to K$ конические метрики со значениями в конусе $K \subset S$. Пространство (X, d_K) полно.

Теорема 4. *Пусть в описанных условиях заданы два многозначных отображения* $F, G : X \rightrightarrows Y$ *с ограниченными замкнутыми образами. Рассмотрим отображение* $\psi : X \rightrightarrows K$, *определенное по правилу:* $\psi(x) := \{c \in K \mid \exists y \in F(x), \exists z \in G(x), \rho_K(y,z) = c\}$. *Предположим, что отображение* ψ *является* (A,B)*-конической функцией по отношению к линейным операторам* $A, B \in L_+$. *Пусть график* $Graph(\psi)$ *является* $\{0\}$ *— замкнутым. Тогда для любой начальной точки* $x_0 \in X$ *и любой пары значений* $y_0 \in F(x_0)$, $z_0 \in G(x_0)$ *у отображений* F, G *существует точка совпадения* $\xi = \xi(x_0, y_0, z_0) \in X$, *то есть* $F(\xi) \cap G(\xi) \neq \varnothing$, *и верна оценка:* $d_K(x_0,\xi) \leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(\rho_K(y_0,z_0))$.

Доказательство. Легко видеть, что множество точек совпадения отображений F и G равно множеству нулей функционала ψ. Поэтому утверждение следует из теоремы 1. Действительно, для начальной точки $x_0 \in X$ и точек $y_0 \in F(x_0), z_0 \in G(x_0)$, возьмем $c_0 = \rho_K(y_0,z_0)$ в качестве начального значения функции φ. Рассуждая как в доказательстве теоремы 1, получим точку $\xi \in X$, такую, что $\varphi(\xi) \ni 0$. Это означает, что $F(\xi) \cap G(\xi) \neq \varnothing$, иначе говоря, $\xi \in Coin(F,G) := \{x \in X \mid F(x) \cap G(x) \neq \varnothing\}$. ☐

Следующая теорема является модификацией теоремы 4 о существовании точек совпадения двух многозначных отображений, без привлечения в явном виде понятия (A,B)-конической функции.

Пусть, как и выше, $(X, d_K), (Y, \rho_K)$ конические метрические пространства с метриками d_K, ρ_K со значениями в конусе K банахова пространства S. Обозначим $\Delta_2 := \{(x,z) \in Y^2 \mid x = z\}$ — диагональ в Y^2. В $Y^2 = Y \times Y$ будем рассматривать покомпонентную метрику $\rho_K \times \rho_K : Y^2 \times Y^2 \to K \times K$.

Теорема 5. *Пусть* $F, G : X \rightrightarrows Y$ *— многозначные отображения с замкнутыми ограниченными образами,* $\Phi = F \times G : X \rightrightarrows Y^2$, *и* $Graph(\Phi)$ *является* Δ_2*-замкнутым, то есть если последовательность* $\{(x_n,(y_n,z_n))\} \subseteq Graph(\Phi)$ *сходится к элементу вида* $(\xi,(\zeta,\zeta))$, $(\zeta,\zeta) \in D_2$, *то* $(\xi,(\zeta,\zeta)) \in Graph(\Phi)$. *Предположим также, что хотя бы один из графиков* $Graph(F), Graph(G)$ *полон. Пусть заданы линейные операторы* $\Gamma, A, B \in L_+$, *и у оператора* $A^{-1}B$ *спектральный радиус* $\lambda = \lambda(A^{-1}B) < 1$. *Предположим, кроме того, что для каждого* $x \in X$, *и любых* $y_1 \in F(x), y_2 \in G(x)$ *существуют точки* $x' \in X$ *и* $y_1' \in F(x'), y_2' \in G(x')$, *удовлетворяющие условиям:*

1) $d_K(x,x') \leq_K A^{-1}(\rho_K(y_1,y_2))$;
2) $\rho_K(y_1,y_1') + \rho_K(y_2,y_2') \leq_K \Gamma(\rho_K(y_1,y_2))$;
3) $\rho_K(y_1',y_2') \leq_K A^{-1}B(\rho_K(y_1,y_2))$.

Тогда для любой точки $x_0 \in X$ *и любых* $y_{01} \in F(x_0), y_{02} \in G(x_0)$ *существует точка совпадения* $\xi \in X$ *отображений* F, G *и точка* $\zeta \in F(\xi) \cap G(\xi)$ *такие, что справедливы оценки:*

$$d_K(x_0,\xi) \leq_K A^{-1}(I - A^{-1}B)^{-1}(\rho_K(y_{01},y_{02})),$$

$$\rho_K(y_{01},\zeta) + \rho_K(y_{02},\zeta) \leq_K \Gamma A(I - A^{-1}B)^{-1}(\rho_K(y_{01},y_{02})).$$

Доказательство. Вследствие условий теоремы, начиная с любой точки $x_0 \in X$ и любых значений $y_{01} \in F(x), y_{02} \in G(x)$, можно построить последовательности $x_n \in X, y_{1n} \in F(x_n), y_{2n} \in G(x_n)$, удовлетворяющие условиям: *a*) $d_K(x_n,x_{n+1}) \leq$ $\leq_K A^{-1}\rho_K(y_{1n},y_{2n})$; *b*) $\rho_K(y_{1n},y_{1(n+1)}) + \rho_K(y_{2n},y_{2(n+1)}) \leq$ $\leq_K \Gamma(\rho_K(y_{1n},y_{2n}))$; *c*) $\rho_K(y_{1(n+1)},y_{2(n+1)}) \leq$ $\leq_K (A^{-1}B)(\rho_K(y_{1n},y_{2n}))$. Нетрудно видеть, что в силу условий *a*), *b*), *c*), построенные последовательности $\{x_n\},\{y_{1n}\},\{y_{2n}\}$ фундаментальны, и $\rho_K(y_{1n},y_{2n}) \to 0$.

Пусть, например, график $Graph(F)$ полон. Тогда фундаментальные последовательности $\{(x_n,y_{1n})\}$, $\{(x_n,y_{2n})\}$, (последовательность $\{x_n\} \subset X$ фундаментальна по метрике d_K, а последовательности $\{y_{1n}\},\{y_{2n}\} \subset Y$ фундаментальны по метрике ρ_K), с условием, что $\rho_K(y_{1n},y_{2n}) \to 0$, сходятся к одному и тому же элементу $(\xi,\zeta) \in X \times Y_{n\to\infty}$. В самом деле, в силу полноты графика $Graph(F)$, последовательность $\{(x_n,y_{1n})\}$ сходится к некоторому элементу (ξ,ζ). Поскольку последовательности $\{y_{1n}\},\{y_{2n}\}$ фундаментальны и сближаются, то и последовательность $\{(x_n,y_{2n})\}$ также сходится к (ξ,ζ). Это означает, что последовательность $\{(x_n,(y_{1n},y_{2n})\} \subset Graph(\Phi)$ сходится к некоторому элементу $(\xi,(\zeta,\zeta))$. По условию Δ_2-замкнутости графика $Graph(\Phi)$, отсюда следует, что $(\xi,(\zeta,\zeta)) \in Graph(\Phi)$, то есть $F(\xi) \cap G(\xi) \ni \zeta$, а значит ξ точка совпадения отображений F, G. Требуемые оценки на расстояния $d_K(x_0,\xi)$ и

$\rho_K(y_{01},\zeta) + \rho_K(y_{02},\zeta)$ получаются стандартно. В случае полноты графика *Graph*(G) рассуждения вполне аналогичны. □

Отметим, что теорема 5 является коническим аналогом (с операторными коэффициентами) теоремы 3 из [1].

Автор искренне благодарит рецензентов статьи за ряд полезных замечаний и рекомендаций, позволивших улучшить изложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фоменко Т.Н.* Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии // Математические заметки. 2013. Т. 93. Вып. 1. С. 127–143. DOI: 10.4213/mzm9255 *Fomenko T.N.* Cascade Search for Preimages and Coincidences: Global and Local Versions // Mathematical Notes. 2013. V. 93. № 1. P. 172–186. Pleiades Publishing. https://doi.org/10.1134/S000143461301001X
2. *Захарян Ю.Н., Фоменко Т.Н.* Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Доклады РАН. Серия: Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. С. 13–17. DOI: 10.31857/S2686954320040220 *Fomenko T.N., Zakharyan Yu.N.* Zero Preservation for a Family of Multivalued Functionals, and Applications to the Theory of Fixed Points and Coincidences // Doklady Mathematics. 2020. V. 102. № 1. P. 272–275. https://doi.org/10.1134/S1064562420040225
3. *Перов А.И.* О задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев : Наукова думка, 1964. Вып. 2. С. 115–134.
4. *Перов А.И.* Обобщенный принцип сжимающих отображений // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2005. № 1. С. 196–207.
5. *Жуковский Е.С.* О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Математические заметки. 2016. Т. 100. Вып. 3. С. 344–362. DOI: 10.4213/mzm10675
6. *Жуковский Е.С., Панасенко Е.А.* О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Труды Института Математики и Механики Уро РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 93–105. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-93-105

ZEROS OF CONIC FUNCTIONS, FIXED POINTS AND COINCIDENCES

T. N. Fomenko[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.V. Matveev

Concept of conic function with operator coefficients is introduced. Zero existence theorem is proved for such functions. On this basis, fixed point theorem is obtained, for a multivalued self-mapping of a conic metric space, generalizing the recent fixed point theorem by E.S. Zhukovsky and E.A. Panasenko, for a contracting multivalued mapping of a conic metric space, with operator contracting coefficient. Coincidence theorems are obtained, for two multivalued mappings of conic metric spaces, which generalize the more previous author's results on coincidences of two multivalued mappings of metric spaces.

Keywords: conic metric, conic function, multivalued mapping, fixed point, coincidence point