

ПРОТИВОПОТОЧНЫЕ БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

© 2024 г. М. Д. Брагин^{1, *}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным

Поступило 07.12.2023 г.

После доработки 01.05.2024 г.

Принято к публикации 15.05.2024 г.

Впервые представлены противопоточные бикомпактные схемы третьего порядка аппроксимации по пространству. Получена формула для множителя перехода произвольной полностью дискретной бикомпактной схемы с интегрированием по времени методом Рунге–Кутты. Для схемы первого порядка аппроксимации по времени исследованы устойчивость, монотонность, для схемы третьего порядка – диссипативные и дисперсионные свойства. Демонстрируются преимущества новых схем относительно их централизованных аналогов.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, противопоточные схемы, высокоточные схемы, компактные схемы, бикомпактные схемы

DOI: 10.31857/S2686954324030097, **EDN:** YBALJW

1. Бикомпактные разностные схемы впервые были предложены в [1] для линейного уравнения теплопроводности и в [2] для линейного уравнения переноса. Впоследствии они получили обобщение на многомерные нестационарные уравнения Эйлера и Навье–Стокса [3–5], при решении которых они показали лучшую точность, чем современные версии популярных конечно-объемных и конечно-разностных схем типа WENO. Схемы из [1–5] имеют четвертый порядок аппроксимации по пространству; в [6] был развит метод получения бикомпактных схем произвольного порядка (шестого, восьмого и так далее).

Бикомпактные схемы отличаются от классических компактных схем [7, 8] тем, что их шаблоны включают лишь два целых узла сетки по каждому пространственному направлению, независимо от порядка аппроксимации (отсюда приставка “би-” в названии). Этого удастся добиться введением дополнительных искоемых функций, определенных либо в целых, либо во вспомогательных дробных узлах. Для отыскания этих функций выводятся соотношения, на кото-

рые можно смотреть как на дискретные аналоги производных от решаемых уравнений.

По сравнению с классическими компактными схемами, бикомпактные схемы при равном порядке аппроксимации имеют лучшее спектральное разрешение [9, 10]. Укажем их прочие достоинства: равное число граничных условий в дифференциальной и разностной постановках задачи (за счет минимальности шаблона), устойчивость при любых шагах сетки, алгоритмически простая и экономичная реализация двухточечной прогонкой (бегущим счетом). Два последних свойства вкуче с меньшим числом зависимых переменных (степеней свободы) и сеточных уравнений для данного порядка аппроксимации обеспечивают бикомпактным схемам преимущество перед схемами разрывного метода Галеркина.

Существующие бикомпактные схемы объединяет то, что все они являются централизованными (симметричными) и имеют четный порядок аппроксимации по пространству. Численная дисперсия, присущая этому типу дискретизаций, может быть проблематичной при сквозном счете решений с высокими градиентами. Хотя численную диссипацию можно привнести через дискретизацию по времени, она может оказаться недостаточной, если число Куранта по той или иной причине невелико (малый шаг по времени, малая скорость переноса).

¹ *Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*

^{*} *E-mail: michael@bragin.cc*

В настоящей работе впервые представляются и исследуются противопоточные (несимметричные) бикомпактные схемы нечетного, третьего порядка аппроксимации по пространству. Отметим, что одна из них использовалась ранее в диссертации [6] (и только там) для того, чтобы рассчитать таблицу с данными о сеточной сходимости в одном вычислительном примере. Эта схема не выписывалась и не анализировалась в [6]; симметризация шаблона не проводилась (она необходима, если скорость переноса знакопеременна). Уточним, что существование противопоточных бикомпактных схем не противоречит результату [11], так как в данной работе они на самом деле искались не в общем виде, а среди частного семейства.

2. Рассмотрим одномерный скалярный гиперболический закон сохранения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — искомая функция, $f(u)$ — гладкая потоковая функция. Предположим пока, что скорость переноса $a(u) = df/du > 0$ для всех u из области определения $f(u)$.

Построим полудискретную бикомпактную схему третьего порядка аппроксимации для уравнения (1), используя метод коллокации. Разобьем ось x на ячейки $\mathcal{I}_j = (x_j, x_{j+1}]$, $j \in \mathbb{Z}$; $h_j = x_{j+1} - x_j$ — пространственный шаг. В каждую ячейку добавим один вспомогательный узел $x_{j+\omega} = x_j + \omega h_j$, $\omega \in (0, 1)$. Выберем вес $\omega = 1/3$, чтобы получить расположение узлов квадратуры Рунге третьего порядка. Приближим $u(x, t)$ в $\mathcal{I}_j$ линейной функцией (полиномом первой степени) от x :

$$p_j(x, t) = 1.5h_j^{-1}[(x_{j+1} - x)u_{j+1/3}(t) + (x - x_{j+1/3})u_{j+1}(t)], \quad (2)$$

где $u_\alpha(t) = u(x_\alpha, t)$, $\alpha = j, j+1/3$. Проинтегрируем левую часть уравнения (1) по пространственной переменной от x_j до x и подставим вместо $u(x, t)$ функцию (2):

$$R_j(x, t) = \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_j}^x p_j(\xi, t) d\xi + \frac{f(p_j(x, t)) - f(u_j)}{h_j}. \quad (3)$$

Уравнения схемы получим, приравнявая невязку (3) нулю в узлах коллокации:

$$R_j(x_{j+1}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{3u_{j+1/3} + u_{j+1}}{4} \right) + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j} = 0, \quad (4)$$

$$R_j(x_{j+1/3}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{5u_{j+1/3} - u_{j+1}}{12} \right) + \frac{f_{j+1/3} - f_j}{h_j} = 0, \quad (5)$$

где $f_\alpha = f(u_\alpha)$, $\alpha = j, j+1/3$. Уравнение (4) приближает интегральное среднее уравнения (1) по $\mathcal{I}_j$ с погрешностью $O(h_j^3)$. Следовательно, по известной теореме о порядке метода коллокации (см. например [12], теорема 7.8) схема (4), (5) имеет третий порядок аппроксимации. Уравнение (4) является (полу)дискретным законом сохранения в смысле метода конечного объема. Значит, получаемая схема консервативна. Теперь симметризуем пространственный шаблон, сдвинув вспомогательные узлы в центры ячеек. В случае, если $a(u) < 0$ и необходимо сменить направление счета, симметричный шаблон оказывается намного практичнее, так как позволяет избежать перестроения сетки и переинтерполяции решения. С помощью полинома Лагранжа второй степени с погрешностью $O(h_j^3)$ получаем соотношение:

$$v_{j+1/3} = \frac{2v_j + 8v_{j+1/2} - v_{j+1}}{9}, \quad v = u, f. \quad (6)$$

Объединяя уравнения (4)–(6), получим искомую полудискретную бикомпактную схему третьего порядка аппроксимации для уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_j + 4u_{j+1/2} + u_{j+1}}{6} \right) + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{u_j + 4u_{j+1/2} - u_{j+1}}{8} \right) + \frac{f_{j+1/2} - f_j}{h_j} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае $a(u) < 0$ схема (7) меняет свой вид. Центрированные квадратура и разность в первом уравнении остаются прежними, но направленные квадратура и разность во втором уравнении переключаются так, чтобы быть ориентированными против потока:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{u_j + 4u_{j+1/2} + u_{j+1}}{6} \right) + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{u_{j+1} + 4u_{j+1/2} - u_j}{8} \right) + \frac{f_{j+1} - f_{j+1/2}}{h_j} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Случай знакопеременной скорости $a(u)$ рассмотрим далее в разделе 5.

Противопоточные бикомпактные схемы более высоких (пятого, седьмого и так далее) порядков аппроксимации по пространству получаются увеличением числа вспомогательных узлов, которые располагаются как узлы более точных квадратур Радо. Добавление одного дробного узла в каждую ячейку увеличивает порядок аппроксимации на два.

Для интегрирования по времени в (7), (8) можно использовать методы Рунге-Кутты (РК). Выберем два диагонально-неявных метода РК (DIRK) – базовый неявный метод Эйлера и трехстадийный L -устойчивый жестко-точный метод третьего порядка с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & & \\ \hline 1/3 & 0 & 1/3 & \\ \hline 1 & -1/12 & 3/4 & 1/3 \\ \hline & -1/12 & 3/4 & 1/3 \end{array} \quad (9)$$

Отвечающие им бикомпактные схемы обозначим аббревиатурами BiC3-BE и BiC3-DIRK3. Выбор диагонально-неявных методов обусловлен тем, что явные методы порождают неустойчивые бикомпактные схемы, а полностью неявные методы представляются неэкономичными.

3. Исследуем устойчивость базовой схемы BiC3-BE и диссипативные и дисперсионные свойства схемы BiC3-DIRK3 в случае постоянной положительной скорости переноса.

Опуская промежуточные выкладки, запишем произвольную полностью дискретную бикомпактную схему для линейного уравнения переноса в таком виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \mathbf{1}_m^T + h \mathbf{N} \mathbf{A}^T + a (\mathbf{1}_s \mathbf{v}^T + \tau \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{N}) &= \mathbf{0}, \\ u_{j+1} &= u_j + h \mathbf{b}^T \mathbf{v}, \quad \hat{u}_{j+1} = \hat{u}_j + h \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{v}}, \\ \hat{u}_j &= u_j + \tau \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{g}, \quad \hat{\mathbf{v}}^T = \mathbf{v}^T + \tau \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}^T} \bigg| \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{b}^T} \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{\mathbf{c}}}{\tilde{\mathbf{b}}^T} \bigg| \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\tilde{\mathbf{b}}^T} \quad (11)$$

это таблицы Бутчера методов РК, отвечающих аппроксимациям по пространству и времени; $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^s$, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{s \times m}$ это наклоны данных методов; $\mathbf{1}_m, \mathbf{1}_s$ это столбцы из единиц размерностей m, s ; τ это шаг по времени; величины с крышкой относятся к следующему слою t_{n+1} , без крышки – к текущему слою t_n ; индексы u

наклонов и шагов опущены ради уменьшения громоздкости записи. Всякой бикомпактной аппроксимации по пространству отвечает некоторый метод РК, так как она строится методом коллокации. Например, аппроксимации (4), (5) соответствует метод Радо IIА третьего порядка.

Рассмотрим перенос гармоники $u(x, t) = \exp[ik(x - at)]$ по схеме (10) при постоянных шагах h, τ . Численное решение будем искать в виде аналогичной гармоники:

$$\begin{aligned} u_j^n &= \exp[ik(x_j - a^* t_n)] = \lambda^n \mu^j, \\ \lambda &= \exp(-ik\varphi^*), \quad \mu = \exp(i\varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi = kh \in [-\pi, \pi]$ – безразмерное волновое число, $\varphi^* = \varphi a^* / a$ – безразмерное схемное волновое число, $\kappa = a\tau / h > 0$ – число Куранта. В силу специального вида решения

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= h^{-1} \mathbf{p} \lambda^n \mu^j, \quad \mathbf{g} = \tau^{-1} \mathbf{q} \lambda^n \mu^j, \\ \mathbf{H} &= (h\tau)^{-1} \mathbf{q} \mathbf{p}^T \lambda^n \mu^j, \end{aligned} \quad (13)$$

где векторы $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^s$ не зависят от j, n . Подстановка (12), (13) в (10) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(\mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{1}_m)^T + \kappa(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{q} + \mathbf{1}_s) \mathbf{p}^T &= \mathbf{0}, \\ \mu &= 1 + \mathbf{b}^T \mathbf{p}, \quad \lambda = 1 + \tilde{\mathbf{b}}^T \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что первое уравнение в (14) удовлетворится, если положить

$$\mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{1}_m = \eta^{-1} \mathbf{p}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{q} + \mathbf{1}_s = -(\kappa \eta)^{-1} \mathbf{q}, \quad (15)$$

где η – число. Выражая из (15) векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ и подставляя их в выражения для μ, λ в (14), получаем окончательно

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} = \mu &= 1 + \eta \mathbf{b}^T (\mathbf{E}_m - \eta \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}_m = R(\eta), \\ \lambda &= 1 - \kappa \eta \tilde{\mathbf{b}}^T (\mathbf{E}_s + \kappa \eta \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{1}_s = \tilde{R}(-\kappa \eta), \end{aligned} \quad (16)$$

где $R(z), \tilde{R}(z)$ – функции устойчивости методов РК с таблицами (11). В пределе при $\kappa \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$, полудискретная схема) величина η стремится к $i\varphi^*$. Иных решений для векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, кроме подстановки (15), не существует, так как корни уравнения $R(\eta) = e^{i\varphi}$ дают все m возможных значений $\lambda = \tilde{R}(-\kappa \eta)$. Корректным является только корень, равный нулю при $\varphi = 0$.

Для схем BiC3-BE, BiC3-DIRK3

$$e^{i\varphi} = \mu_{\text{BiC3}} = \frac{2\eta + 6}{\eta^2 - 4\eta + 6} - \text{Паде-(1,2)},$$

$$\lambda_{\text{BE}} = \frac{1}{1 + \kappa\eta}, \quad \lambda_{\text{DIRK3}} = \frac{9 + 6\kappa\eta - 3.5\kappa^2\eta^2}{(1 + \kappa\eta)(3 + \kappa\eta)^2}.$$

Можно показать, что для схемы BiC3-BE модуль множителя перехода $\rho = |\lambda| \leq 1$ при любых φ, κ . Это означает, что не существует такой гармоники, которая бы неограниченно росла по амплитуде от слоя к слою, независимо от числа Куранта. Следовательно, все бикомпактные схемы третьего порядка аппроксимации по простран-

ству с интегрированием по времени DIRK-методами устойчивы при любых шагах h, τ .

На рис. 1 для схемы BiC3-DIRK3 и ее централизованного аналога BiC4-DIRK3 (четвертого порядка аппроксимации по пространству) изображены графики ρ и отношения схемной фазовой скорости к точной $\text{Re}(a^*/a)$ как функций от $\varphi, \kappa \geq 0$ (для отрицательных значений аргументов графики достраиваются симметрично относительно осей $O\varphi, O\kappa$). Видно, что погрешности фазовой скорости для этих двух схем отличаются незначительно, в пределах 5%. При $\kappa < 0.5$ схема BiC3-DIRK3 дает даже более точную фазовую скорость. Из графиков ρ ясно, что схема BiC3-

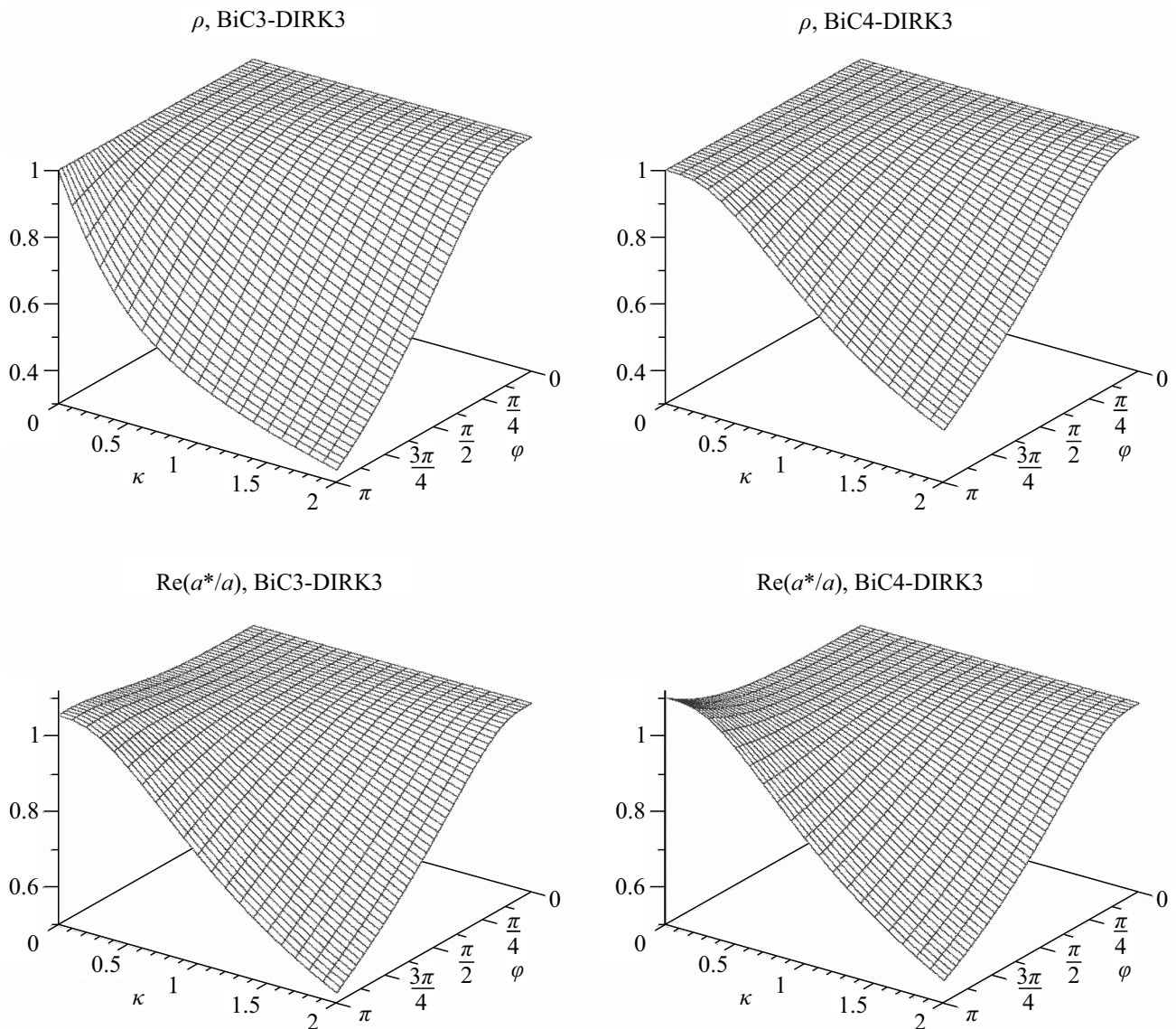


Рис. 1. Модуль множителя перехода (сверху) и отношение схемной фазовой скорости к точной (снизу) для схем BiC3-DIRK3, BiC4-DIRK3.

DIRK3 подавляет коротковолновые гармоники намного сильнее схемы BiC4-DIRK3. Как мы увидим далее в разделе 5, это свойство обеспечивает лучшее качество счета разрывных решений.

Отметим, что диапазон φ не нужно расширять до $[-2\pi; 2\pi]$ из-за наличия дополнительных зависимых переменных, приписанных к дробным узлам. Например, в базовой схеме BiC3-BE их можно полностью исключить и записать эту схему как трехслойную:

$$\frac{1}{3} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{2}{3} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + \frac{h}{6a} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n-1}}{\tau^2} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0.$$

4. Проанализируем схему BiC3-BE на монотонность в случае постоянных a, h, τ по методу из [2]. Рассмотрим элементарную монотонно невозрастающую ступенчатую функцию:

$$u_\alpha^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha \leq 0, \\ \theta & \text{при } \alpha = 1/2, \\ 0 & \text{при } \alpha \geq 1, \end{cases}$$

где параметр $\theta \in [0, 1]$. Можно доказать, что сеточная функция u_α^1 является монотонно невозрастающей при $\kappa \geq 1/3$, $\theta \leq 3/4$. Однако, этого результата недостаточно, чтобы утверждать об условной монотонности схемы BiC3-BE. Напротив, с последующими переходами со слоя на слой монотонность теряется: начиная с некоторого

$n = n_0$, сеточная функция u_α^n имеет максимум $M_n = \max_\alpha u_\alpha^n > 1$, правее которого она, впрочем, монотонно убывает к нулю (если $\kappa \geq 1/3$). Графики на рис. 2 иллюстрируют эволюцию разности $\varepsilon_n = (M_n - 1)$ при разных значениях κ и θ . Эта разность убывает со скоростью геометрической прогрессии и быстро становится сравнимой с погрешностями округления. Это происходит тем быстрее, чем больше κ . Величина θ влияет на n_0 и ε_{n_0} , но почти не меняет асимптотики ε_n при $n \gg 1$.

Бикомпактная схема BiC4-BE четвертого порядка аппроксимации по пространству ведет себя аналогично: хотя при $\kappa \geq 1/4$, $\theta \leq 3/4$ сеточная функция u_α^1 оказывается монотонно невозрастающей, на некотором слое возникает нарушение монотонности (несколько меньшее по амплитуде, чем у BiC3-BE), которое меняется так же в зависимости от n, κ, θ .

Таким образом, бикомпактные схемы с порядком аппроксимации по пространству выше второго и дискретизацией по времени неявным методом Эйлера, строго говоря, монотонными не являются. Тем не менее, нарушение монотонности невелико и быстро стремится к нулю с течением времени.

5. В случае, если скорость $a(u)$ является знакопеременной, мы применяем метод глобального потокового расщепления Лакса–Фридрихса–Русанова. Определим расщепленные потоковые функции $f^\pm(u) = 0.5f(u) \pm Cu$. Параметр $C > 0$ задается так, чтобы $a^+(u) > 0$,

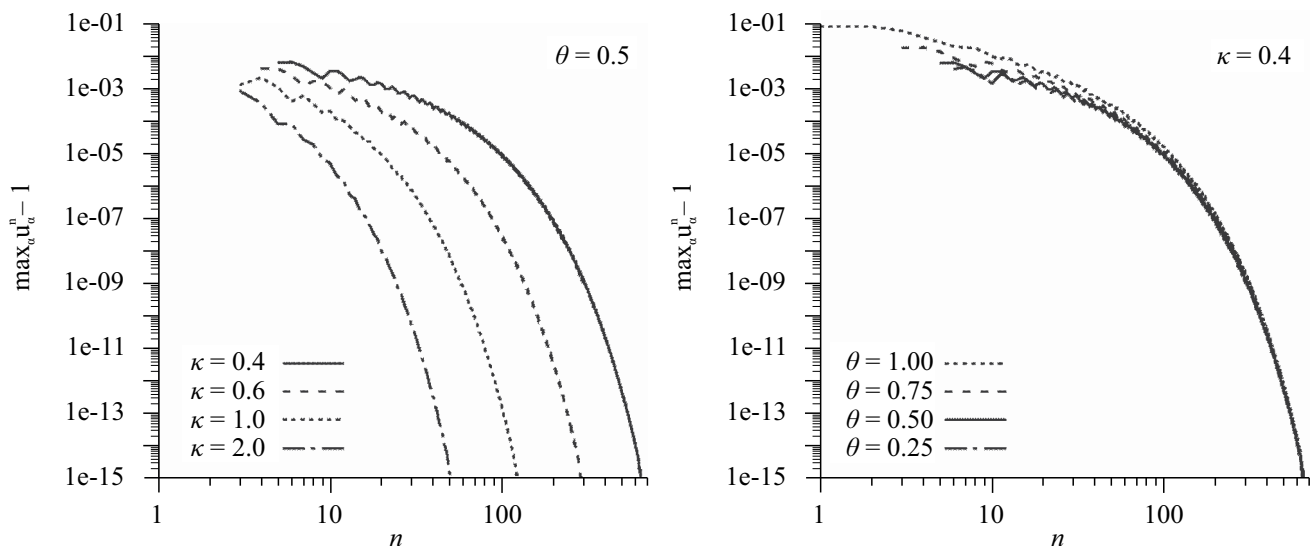


Рис. 2. Эволюция амплитуды немонотонности в схеме BiC3-BE.

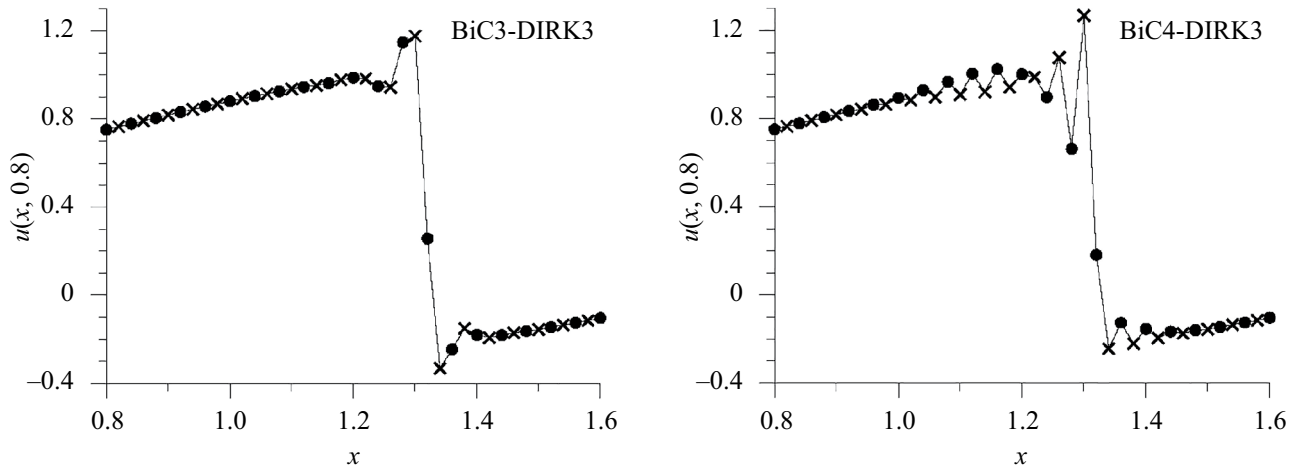


Рис. 3. Поведение схем BiC3-DIRK3, BiC4-DIRK3 в окрестности сильного разрыва решения уравнения Хопфа. Кругами отмечены значения в целых узлах, крестиками — в полуцелых.

$a^-(u) < 0$ ($a^\pm(u) = df^\pm / du$) на некотором множестве значений u (возможных, например, на определенном временном интервале). Переход со слоя t_n на слой t_{n+1} осуществляется в два этапа. На первом этапе выбранным методом РК на полный шаг по времени интегрируются уравнения (7) с заменой $f(u)$ на $f^+(u)$, в качестве (промежуточного) начального условия используется решение на слое t_n . На втором этапе аналогичным образом интегрируются уравнения (8) с заменой $f(u)$ на $f^-(u)$, но в качестве начального условия используется решение, вычисленное на первом этапе. Как результат, мы получаем искомое решение на слое t_{n+1} . Значение C обновляется перед каждым переходом со слоя на слой по формуле $C = (0.5 + \delta) \max_\alpha |a(u_\alpha^n)|$, где $\delta > 0$ — постоянный коэффициент запаса.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Хопфа ($f(u) = u^2/2$, $a(u) = u$) с периодическими начальными данными $u(x, 0) = 0.4 + 0.6 \sin(\pi x)$. Рассчитаем ее по схеме BiC3-DIRK3 при $N = 2/h = 50, 100, 200, 400, 800, 1600$, $\tau = h$, $\delta = 0.2$. Числа Куранта $a^+ \tau / h \in [0.6, 1.2]$, $a^- \tau / h \in [-0.8, -0.2]$.

В табл. 1 сведены абсолютные погрешности и локальные порядки сходимости в норме L_∞ для схемы BiC3-DIRK3 в момент времени $t = 0.4$, когда точное решение еще является гладким. Приведенные данные демонстрируют, что эта схема имеет третий порядок точности.

На рис. 3 построены графики численных решений, полученных по схемам BiC3-DIRK3 и BiC4-DIRK3 при $N = 50$, в момент времени $t = 0.8$, после градиентной катастрофы и формирования периодической ударной волны.

Таблица 1. Сеточная сходимость схемы BiC3-DIRK3 в норме L_∞ на гладком решении уравнения Хопфа

N	E_∞	k_∞
50	3.08e-3	
100	4.60e-4	2.76
200	6.26e-5	2.88
400	8.58e-6	2.87
800	1.12e-6	2.94
1600	1.43e-7	2.97

Очевидно, диссипация метода (9) оказывается недостаточной, чтобы подавить дисперсию бикомпактной аппроксимации четвертого порядка. Из-за этого решение, полученное по схеме BiC4-DIRK3, осциллирует в полуцелых узлах. Данные осцилляции можно устранить, включив ограничитель наклонов, повысив δ или τ , но это приведет к ухудшению пространственного разрешения, в том числе к размазыванию фронта ударной волны. Этой проблемы нет в схеме BiC3-DIRK3 благодаря диссипации, присущей ее пространственной аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. О сходимости компактных разностных схем // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 1. С. 99–116.
2. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 6. С. 98–110.
3. Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 150–163.

4. *Bragin M.D., Rogov B.V.* Conservative limiting method for high-order bicomcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // *Applied Numerical Mathematics*. 2020. V. 151. P. 229–245.
5. *Брагин М.Д.* Бикомпактные схемы для уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой жидкости // *Докл. АН*. 2023. Т. 509. С. 17–22.
6. *Чикиткин А.В.* Бикомпактные схемы для многомерных гиперболических уравнений и их эффективная реализация: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. М.: МФТИ(ГУ), 2016. 89 с.
7. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
8. *Lele S.K.* Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // *J. Comput. Phys.* 1992. V. 103. № 1. P. 16–42.
9. *Rogov B.V.* Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicomcompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2019. V. 139. P. 136–155.
10. *Chikitkin A.V., Rogov B.V.* Family of central bicomcompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2019. V. 142. P. 151–170.
11. *Брагин М.Д., Rogov Б.В.* О единственности высоко-точной бикомпактной схемы для квазилинейных уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2014. Т. 54. № 5. С. 815–820.
12. *Хайпер Э., Нёрсстем С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Не-жесткие задачи: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 512 с.

UPWIND BICOMPACT SCHEMES FOR HYPERBOLIC CONSERVATION LAWS

M. D. Bragin^a

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, Russia*

For the first time, upwind bicomcompact schemes of third order approximation in space are presented. A formula is obtained for the transition factor of an arbitrary fully discrete bicomcompact scheme with integration in time by a Runge–Kutta method. Stability and monotonicity of the first-order in time scheme are investigated, dissipative and dispersion properties of the third-order in time scheme are analyzed. Advantages of the new schemes relative to their centered counterparts are demonstrated.

Keywords: hyperbolic equations, upwind schemes, high-order accurate schemes, compact schemes, bicomcompact