ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 516, с. 98–102

УДК 517.957,517.984

МУЛЬТИ-ВИХРИ И ОЦЕНКИ СНИЗУ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

А. Г. Костянко[1, 4, *], А. А. Ильин[3, 4, **], Д. Стоун[2, *], С. В. Зелик[1, 2, 3, 4, ****]**

Представлено академиком РАН Б. Н. Четверушкиным

Поступило 23.02.2024 г.
После доработки 26.03.2024 г.
Принято к публикации 26.03.2024 г.

Представлен новый метод получения оценок снизу размерности аттракторов для уравнений Навье–Стокса, который не использует течения Колмогорова. При помощи этого метода получены точные оценки размерности для случая уравнений на плоскости с экмановским трением. Подобные оценки были известны ранее только для случая периодических граничных условий. Кроме того, получены аналогичные оценки снизу для классической системы Навье–Стокса в двумерной ограниченной области с условиями Дирихле.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, аттракторы, размерность, неустойчивые вихри

DOI: 10.31857/S2686954324020163, **EDN:** XHPUVQ

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе рассматривается двумерная система уравнений Навье–Стокса

$$\begin{gathered}\partial_t u + (u,\nabla)u + \nabla p + \mu u = \nu\Delta u + g,\\ \operatorname{div} u = 0,\ u\,|_{t=0} = u_0,\end{gathered} \tag{1}$$

где u и p — неизвестные поля скоростей и давления соответственно, $\nu > 0$ — кинематическая вязкость, $\mu \geq 0$ — коэффициент, характеризующий экмановское трение (которое играет важную роль в моделях геофизической гидродинамики), g — заданное поле внешних сил. Мы будем рассматривать три случая. Случай 1: задача (1) в ограниченной области Ω с гладкой границей. Фазовое пространство $\mathcal{H}$ в этом случае совпадает с подпространством $L^2(\Omega)$, состоящим из бездивергентных векторных полей, нормальная компонента которых на границе равна нулю. Случай 2: периодические граничные условия. Здесь $\mathcal{H}$ — подпространство $L^2((-\pi,\pi)^2)$, состоящее из бездивергентных векторных полей с нулевым средним. В этом случае для диссипативности задачи также требуется, чтобы внешние силы обладали нулевым средним. Случай 3: задача (1) на всей плоскости $\Omega = \mathbb{R}^2$. В этом случае $\mathcal{H}$ совпадает с подпространством $L^2(\mathbb{R}^2)$, состоящим из бездивергентных векторных полей, а для диссипативности задачи нужно предположить, что $\mu > 0$.

Известно, что, во всех трёх случаях, задача (1) с условием $g \in L^2(\Omega)$ корректно поставлена в фазовом пространстве $\mathcal{H}$, порождает в нём диссипативную полугруппу, которая обладает в нём глобальным аттрактором $\mathcal{A}$ конечной фрактальной размерности, см. [1, 2, 3, 4] и цитированную там литературу.

Напомним также, что конечномерность динамики, порождаемой системой (1) на аттракторе (то есть возможность её эффективного описания при помощи конечного числа параметров) является одним из ключевых предсказаний теории

[1] *Zhejiang Normal University, Department of Mathematics, Zhejiang, China*
[2] *University of Surrey, Department of Mathematics, Guildford, UK*
[3] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*
[4] *НИУ ВШЭ, Нижний Новгород, Россия*
[*] *E-mail: a.kostianko@imperial.ac.uk*
[**] *E-mail: ilyin@keldysh.ru*
[***] *E-mail: d.stonc@surrey.ac.uk*
[****] *E-mail: s.zelik@surrey.ac.uk*

турбулентности А. Н. Колмогорова, а фрактальная размерность аттрактора часто интерпретируется как математически строгое определение для числа степеней свободы редуцированной конечномерной динамики. Это объясняет важность получения разумных оценок этой размерности сверху и снизу, а также постоянный интерес научного сообщества к данной проблеме на протяжении последних 50-ти лет, см. [1, 2, 5] и цитируемую там литературу.

Наиболее изучен случай уравнений (1) на торе $\Omega = (-\pi,\pi)^2$, в котором получены логарифмически точные двусторонние оценки размерности аттрактора, которые согласуются с предсказаниями теории Колмогорова. А именно, в случае $\mu = 0$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}\dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \le CG^{2/3}\ln(1+G)^{1/3},\\ \dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \ge cG^{2/3},\end{gathered} \tag{2}$$

где $G := \dfrac{|\Omega| \|g\|_{L^2}}{\nu^2}$ — так называемое число Грасгофа, а C и c — некоторые абсолютные константы. Как обычно, оценка сверху верна для всех возможных выборов $\nu > 0$ и $g \in \mathcal{H}$, а соответствующая оценка снизу справедлива только для некоторых специально построенных внешних сил g, см. [6]. В случае ненулевого экмановского трения, безразмерным аналогом числа Грасгофа является величина $G_1 := \dfrac{\|\operatorname{curl} g\|^2_{L^2}}{\mu^3\nu}$, а соответствующие оценки размерности приобретают следующий вид:

$$\dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \le C_1 G_1,\ \dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \ge c_1 G_1, \tag{3}$$

где C_1 и c_1 — некоторые новые абсолютные константы, см. [3].

В непериодическом случае размерность аттрактора изучена гораздо хуже. Так, в случае всей плоскости $\Omega = \mathbb{R}^2$ и ненулевого экмановского трения, справедлива такая же оценка (3) сверху, как и для тора (см. [4]), однако, никаких разумных оценок снизу известно не было.

Также заметим, что в наиболее же физически важном случае ограниченной области с условиями Дирихле для стандартной системы Навье—Стокса (т.е. с $\mu = 0$) известна лишь оценка сверху [2]

$$\dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \le C_0 G, \tag{4}$$

которая, видимо, является слишком грубой, хотя на сегодняшний день здесь также не было известно ни одной оценки снизу.

Основная проблема с оценками снизу заключается в сложности нахождения положений равновесия системы Навье—Стокса с большим индексом неустойчивости (даже если разрешено произвольно менять правую часть). Фактически все известные оценки снизу размерности аттракторов в гидродинамике базируются на результатах фундаментальной работы [7] об оценках индекса неустойчивости течений Колмогорова и различных их обобщений. Так как аналоги течений Колмогорова в непериодическом случае не были известны, то и соответствующая техника оценок снизу также не была разработана.

В настоящей работе представлена новая универсальная схема построения таких положений равновесия, которая не использует течения Колмогорова, а базируется на сложении большого числа неустойчивых локализованных вихрей, расположенных на достаточно большом расстоянии друг от друга. В этом случае естественно ожидать (и можно доказать), что индекс неустойчивости такого мульти-вихря равен сумме индексов неустойчивости вихрей, участвовавших в его построении, что и даёт желаемое положение равновесия с большим индексом неустойчивости (если известно существование хотя бы одного неустойчивого вихря). Преимущество этого метода заключается в его нечувствительности к геометрии области и выбору граничных условий: он работает схожим образом как на торе (где воспроизводит известные результаты), так и в случае ограниченной области или всей плоскости, где позволяет получать существенно новые результаты. Отметим также его применимость к другим классам уравнений гидродинамики, включая трёхмерный случай, который будет рассмотрен в последующих работах.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *В случае ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *с гладкой границей и отсутствием экмановского трения* ($\mu = 0$) (*т.е. для классической двумерной системы Навье—Стокса*) *существует семейство* $g = g_\nu$ *гладких правых частей уравнения* (1)*, зависящее от параметра* $0 < \nu \ll 1$*, такое* *что фрактальная размерность соответствующего аттрактора допускает оценку*

$$\dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \ge c_0 G^{2/3} \quad (5)$$

для некоторой абсолютной константы c_0. Аналогично, в случае $\Omega = \mathbb{R}^2$ и наличия экмановского трения, существует двупараметрическое семейство гладких правых частей $g = g_{\nu,\mu}$, $0 < \nu,\mu \le 1$, $\nu \ll \mu$, таких что фрактальная размерность аттрактора допускает оценку

$$\dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \ge c_0' G_1 \quad (6)$$

для некоторой абсолютной константы $c_{0'}$.

Таким образом, в случае $\Omega = \mathbb{R}^2$, данный результат подтверждает точность оценки сверху аттрактора, полученную ранее в работе [4]. В случае же уравнения в ограниченной области, всё ещё имеется существенный зазор между классической оценкой сверху (4) и новой оценкой снизу (5), которая формально совпадает с известной ранее оценкой снизу для тора.

2. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Заметимпрежде всего, что оба числа G и G_1 являются безразмерными и потому не меняются при перенормировках зависимых и независимых переменных. Так как такими перенормировками можно свести общий случай без экмановского трения, к частному случаю $\nu = 1$, а случай ненулевого $\mu > 0$ к частному случаю $\mu = \nu = 1$, то достаточно построить семейства правых частей для этих двух частных случаев. При такой перенормировке изначальная область Ω переходит в $\Omega_L = L\Omega$, где $L = L(\nu,\mu)$ большой параметр, который стремится к бесконечности, когда $\mu,\nu \to 0$ (в первом случае $L = \nu^{-1/2}$, а во втором $L = \mu^{1/2} / \nu^{1/2}$, что и приводит к дополнительному условию $\nu \ll \mu$, присутствующему также в работе [3]). Таким образом задача сводится к случаю *большой* области Ω_L (со значениями параметров либо $\nu = 1$, $\mu = 0$, либо $\mu = \nu = 1$). При этом мы будем выражать размерность аттрактора, а также значения величин G или G_1 в терминах большого параметра L, что и даст нам необходимые оценки снизу.

Далее, так как аттрактор всегда содержит неустойчивые многообразия положений равновесия, а размерность такого многообразия равна его индексу неустойчивости (то есть числу собственных значений с положительной вещественной частью генератора линеаризованной на этом положении равновесия системы), то задача линеаризуется и сводится к нахождению гладкого положения равновесия $U = U(x) \in \mathcal{H}$ уравнения (1) такого, чтобы линейная спектральная задача

$$(U,\nabla)v + (v,\nabla)U + \nabla p - \nu\Delta v = (\lambda - \mu)v, \ \operatorname{div} v = 0 \quad (7)$$

имела бы как можно больше решений, соответствующим значениям спектрального параметра с положительной вещественной частью, см., например, [1, 2]. Нетрудно показать также, что во всех рассматриваемых случаях, положительная часть спектра состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Более того, с этого момента достаточно ограничиться случаем $\nu = 1$, $\mu = 0$ и поставить дополнительное условие $\mathrm{Re}\lambda > 1$.

Ключевым для дальнейшего является существование гладкого локализованного поля скоростей $U_0(x)$, для которого спектральная задача (7) на всей плоскости $\Omega = \mathbb{R}^2$ имеет хотя бы одно нетривиальное решение $v_0(x)$ с $\nu = 1$ и $\mu = 0$ при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ с $\mathrm{Re}\lambda_0 > 0$. Такое решение было недавно построено в работах М. М. Вишика [8], см. также [9]. Более того, это поле скоростей было найдено в виде полностью локализованного радиально симметричного вихря: $U_0(x) = \nabla^{\perp}\Psi_0(|\,x\,|)$, где $\Psi_0 \in C_0^{\infty}([0,\infty))$ — соответствующая функция тока. По заданному полю скоростей U_0 мы затем строим правую часть g_0 так, чтобы поле U_0 являлось положением равновесия для системы (1) с правой частью g_0. Учитывая тот факт, что нелинейность $(U_0,\nabla)U_0$ является градиентной, мы можем фиксировать $g_0 \in \mathcal{H}$ по формуле

$$g_0 = \mu U_0 - \nu\Delta U_0.$$

Важно, что g_0 остаётся гладкой и полностью локализованной по x.

Ключевой идеей нашего метода является построение мульти-вихря U из модельного вихря U_0. Для этого мы фиксируем набор $\Xi := \{\xi_k\}_{k=1}^N$, $\xi_k \in \Omega_{L/2}$ координат центров элементарных вихрей $U_{\xi_k}(x) := U_0(x - \xi_k)$. Предполагается, что эти вихри расположены достаточно далеко друг от друга:

$$\left|\xi_i - \xi_j\right| \ge M_0, \ i \ne j,$$

где M_0 достаточно большое фиксированное число, которое не зависит от $L \gg 1$. Более того, расстояние от каждого такого вихря до границы $\partial\Omega_L$ не меньше $L/2 \gg 1$, что делает влияние границы и граничных условий несущественными. Отметим, что максимальное число N точек в такой системе пропорционально $(L/M_0)^2$. Рассмотрим мульти-вихрь

$$U(x) = U_\Xi(x) := \sum_{k=1}^N U_{\xi_k}(x), \tag{8}$$

который является положением равновесия системы (1) с правой частью

$$g(x) = g_\Xi(x) := \sum_{k=1}^N g_{\xi_k}(x),\ g_{\xi_k}(x) := g_0(x - \xi_k) \tag{9}$$

и спектральную задачу (7), соответствующую мульти-вихрю U_ξ. Пусть v_0 — собственная функция этой задачи с модельным вихрем U_0 и собственным значением λ_0, $\mathrm{Re}\lambda_0 > 1$, а $v_{\xi_k}(x) := v_0(x - \xi_k)$ её пространственные сдвиги. Тогда можно показать, что при достаточно больших L и M_0 функции

$$\sum_{k=1}^N a_k v_{\xi_k},\ a_k \in \mathbb{R} \tag{10}$$

являются собственными функциями мульти-вихря U_Ξ с точностью до малых поправок. Напомним, что, в отличие от U_0, собственная функция v_0 не является полностью локализованной (хоть и убывают при $|x| \to \infty$ как $|x|^{-3}$), потому v_{ξ_k} с разными k все таки слабо взаимодействуют друг с другом, что и приводит к появлению малых поправок. В случае ограниченной области, собственные функции v_{ξ_k} не удовлетворяют, вообще говоря, граничным условиям, что приводит к появлению малых поправок другого типа, которые также нужно контролировать.

Применяя методы теории возмущения для мульти-солитонных структур, разработанные в [10], к данной спектральной задаче, мы доказали, что почти собственные функции (10), порождают как минимум N точных собственных функций, отвечающим собственным значениям λ_k, которые близки к λ_0, если параметры M_0 и L достаточно велики. В свою очередь, это означает, что индекс неустойчивости рассматриваемого мульти-вихря не меньше N, что приводит к искомой оценке

$$\dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \ge N \sim (L/M_0)^2 = cL^2. \tag{11}$$

Строгое доказательство существования упомянутых выше точных собственных функций для мульти-вихря весьма нетривиально и достаточно сложно технически, поэтому будет изложено в другой статье. Основная трудность этого доказательства связана с тем, что в отличие от общего случая, разобранного в [10], в нашем случае имеется дополнительная и весьма сильная нелокальная связь между функциями v_{ξ_k} с разными k, обусловленная наличием давления, которая не позволяет автоматически использовать результаты [10] и требует существенных дополнительных усилий.

После получения оценки (11) уже несложно завершить доказательство основной теоремы. Действительно, так как правая часть g_0 полностью локализованная функция, то для перенормированной задачи в области Ω_L:

$$\|g_\Xi\|_{L^2} \sim \|\mathrm{curl} g_\Xi\|_{L^2} \sim L,\ |\Omega_L| \sim L^2, G \sim L^3, G_1 \sim L^2, \tag{12}$$

что вместе с (11) даёт

$$\dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \sim G^{2/3} \text{или} \dim_f(\mathcal{A},\mathcal{H}) \sim G_1$$

и завершает доказательство теоремы.

Отметим в заключение, что ни радиальная симметричность модельного решения U_0, ни его полная локализация в пространстве не являются существенными для предложенного метода. Для его применимости необходимо найти лишь одно экспоненциально неустойчивое положение равновесия, достаточно быстро убывающее при $|x| \to \infty$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект № 23-71-30008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабин А.В., Вишик М.И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
2. *Temam R.* Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997.
3. *Ilyin A.A., Miranville A., Titi E.S.* Small viscosity sharp estimates for the global attractor of the 2-D damped/driven Navier–Stokes equations // Commun. Math. Sci. 2004. V. 2. P. 403–426.
4. *Ilyin A.A., Patni K., Zelik S.V.* Upper bounds for the attractor dimension of damped Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^2$ // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2016 V. 36. N 4. P. 2085–2102.
5. *Zelik S.V.* Attractors. Then and Now // Успехи математических наук. 2023. V. 78. N 4. P. 53–198.

6. *Liu V.X.* A sharp lower bound for the Hausdorff dimension of the global attractors of the 2D Navier–Stokes equations // Comm. Math. Phys. 1993. V. 158. P. 327–339.
7. *Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // Прикладная мат. мех. 1961. Т. 25. С. 1140–1143.
8. *Vishik M.M.* Instability and non-uniqueness in the Cauchy problem for the Euler equations of an ideal incompressible fluid. Part I arXiv:1805.09426 and Part 2 arXiv:1805.09440, 2018.
9. *Albritton D., Brué E., Colombo M.* Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier–Stokes equations // Ann. Math. (2) 2022. V. 196. N 1. P. 415–455.
10. *Mielke A., Zelik S.V.* Multi-Pulse Evolution and Space-Time Chaos in Dissipative Systems // Mem. Amer. Math. Soc. 2009. V. 198. N 925. 97 p.

MULTI-VORTICES AND LOWER BOUNDS FOR THE ATTRACTOR DIMENSION OF 2D NAVIER-STOKES EQUATIONS

A. Kostianko[a, d, *], **A. Ilyin**[c, d, **], **D. Stone**[b, ***], **S. Zelik**[a, b, c, d, ****]

[a] *Zhejiang Normal University, Department of Mathematics, Zhejiang, China*

[b] *University of Surrey, Department of Mathematics, Guildford, UK*

[c] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[d] *HSE University, Nizhny Novgorod, Russia*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A new method for obtaining lower bounds for the dimension of attractors for the Navier–Stokes equations, which does not use Kolmogorov flows, is presented. Using this method, exact estimates of the dimension are obtained for the case of equations on a plane with Ekman damping. Similar estimates were previously known only for the case of periodic boundary conditions. In addition, similar lower bounds are obtained for the classical Navier–Stokes system in a two-dimensional bounded domain with Dirichlet boundary conditions.

Keywords: Navier–Stokes equation, attractors, dimension, unstable vortices