ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 516, с. 87–92

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954 & 517.982

ОБ ОЦЕНКЕ БОЯРСКОГО−МЕЙЕРСА ДЛЯ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СНОСОМ. СЛУЧАЙ КРИТИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ СОБОЛЕВА

© 2024 г. Ю. А. Алхутов[1, *], А. Г. Чечкина[2, 3, **]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым

Поступило 20.02.2024 г.
После доработки 25.03.2024 г.
Принято к публикации 25.03.2024 г.

Установлена повышенная суммируемость градиента решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона с младшими членами в ограниченной липшицевой области. Также приведено доказательство однозначной разрешимости этой задачи.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, младшие коэффициенты, задача Дирихле, оценка Мейерса, существование и единственность решения

DOI: 10.31857/S2686954324020149, **EDN:** XHSNOU

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена оценкам решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона с младшими членами вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u := \Delta u + b \cdot \nabla u = \operatorname{div} f, \\ f = (f_1, \ldots f_n), \\ f_j \in L_2(D), \\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D). \end{aligned} \qquad (1)$$

Область $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$, предполагается ограниченной и липшицевой, а $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ означает соболевское пространство функций, определяемое как пополнение финитных бесконечно дифференцируемых в области D функций по норме

$$\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)} = \left(\int_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Данное выражение является нормой в силу хорошо известного неравенства Фридрихса.

Нас интересует вопрос о повышенной суммируемости градиента решений задачи (1) в предположении, что функции из правой части уравнения суммируемы со степенью, большей двух. Приведем известные результаты в этом направлении для эллиптических уравнений второго порядка, не содержащих младших членов. В работе [1] рассмотрен случай линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами в плоской ограниченной области и доказана повышенная суммируемость градиента решения. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [2].

В настоящей работе, по видимому впервые, рассмотрено уравнение со сносом. Относительно младших коэффициентов уравнения (1) предполагается выполнение следующих условий:

[1] Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

[2] Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[3] Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук Уфа, Россия

*E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

**E-mail: chechkina@gmail.com

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p = n, \text{если } n > 2, \quad j = 1,\dots n, \tag{2}$$

либо

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p > 2, \text{если } n = 2, \quad j = 1,2. \tag{3}$$

Под решением задачи (1) понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u)\varphi dx = \int\limits_D (f \cdot \nabla \varphi) dx \tag{4}$$

для всех пробных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Для полноты изложения приводится и доказательство существования и единственности решения задачи Дирихле при выполнении условий (2) и (3).

Сформулируем основные утверждения.

Теорема 1. *Если* $n > 2$*, выполнено условие* (2) *и* $f \in (L_{2+\delta_0}(D))^n$*, где* $\delta_0 > 0$*, то существуют положительные постоянные* $\delta(n,\delta_0) < \delta_0$ *и* C *такие, что для решения задачи Дирихле для уравнения* (1) *справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \le C \int\limits_D |f|^{2+\delta} dx, \tag{5}$$

где C зависит только от δ_0, размерности пространства n, области D и $\| b \|_{L_n(D)}$.

Теорема 2. *Если* $n = 2$*, выполнено условие* (3)*,* $f \in (L_{2+\delta_0}(D))^2$*, где* $\delta_0 > 0$*, то существуют положительные постоянные* $\delta(p,\delta_0) < \delta_0$ *и* C *такие, что для решения задачи Дирихле для уравнения* (*1*) *справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leqslant C \int\limits_D |f|^{2+\delta} dx, \tag{6}$$

где C зависит только от δ_0 а также от области D и $\|b\|_{L_p(D)}$.

Замечание 1. *Теорема остаётся в силе, если вместо оператора Лапласа рассмотреть линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка вида*

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u).$$

Здесь $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, то есть $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\alpha|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \alpha^{-1}|\xi|^2 \textit{ для почти всех } x \in D \textit{ и для всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

При этом константа C в (5) или в (6) будет дополнительно зависеть от постоянных эллиптичности матрицы A.

При $n > 2$ будем пользоваться следующим представлением младших коэффициентов $b \in (L_n(D))^n$ рассматриваемого уравнения

$$\begin{gathered} b = \breve{b} + \hat{b}, \quad \breve{b} \in \left(L_\infty(D)\right)^n, \\ \hat{b} \in \left(L_n(D)\right)^n, \quad \left\|\hat{b}\right\|_{L_n(D)} \leqslant \theta \end{gathered} \tag{8}$$

с достаточно малой постоянной $\theta \in (0,1)$, которая определяется в дальнейших рассуждениях.

2. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе однозначная разрешимость задачи Дирихле в произвольной ограниченной области доказывается для уравнения вида

$$\begin{gathered} \mathcal{L}u := \operatorname{div}\big(a(x)\nabla u\big) + b(x) \cdot \nabla u = \operatorname{div} f, \\ f = (f_1, \dots f_n), \\ f_j \in L_2(D), \\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D), \end{gathered} \tag{9}$$

где $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, то есть $a_{ij} = a_{ji}$, удовлетворяющая (7), а b удовлетворяет (2) или (3). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (2) *либо* (*3*) *и* (7)*, то задача* (1) *однозначно разрешима в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *и для ее решения справедлива оценка*

$$\|\nabla u\|_{L_2(D)} \le C\|f\|_{L_2(D)} \tag{10}$$

с постоянной C, зависящей только от коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, области D и размерности пространства n.

Доказательство основано на вспомогательных утверждениях. Сначала нам потребуются оценки билинейной формы, связанной с оператором $\mathcal{L}$, имеющую вид

$$\mathcal{L}(u,v) = \int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla v dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u) v dx \tag{11}$$

и определенную на функциях $u,v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Если коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *из* (9) *удовлетворяют условиям* (2) (*или* (3)) *и* (7), *то*

$$\mathcal{L}(u,u) \geq \frac{\alpha}{2}\int\limits_D |\nabla u|^2 dx - C(\alpha,b,n)\int\limits_D u^2 dx. \tag{12}$$

Лемма 2. *Если коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *из* (9) *удовлетворяют условиям* (2) (*или* (3)) *и* (7), *то для фиксированного* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *отображение* $v \mapsto \mathcal{L}(u,v)$, *где форма* $\mathcal{L}(u,v)$ *определена в (11), является ограниченным линейным функционалом на* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *и справедлива оценка*

$$|\mathcal{L}(u,v)| \leq C(\alpha,b,n)\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)}\|v\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)}. \tag{13}$$

В следующей лемме устанавливается принцип максимума для решений однородной задачи (9). Функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ называется субрешением однородной задачи (9) в области D, если

$$\int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u)\varphi dx \leq 0$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Аналогично определяется суперрешение $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ в области D, для которого выполнено неравенство

$$\int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u)\varphi dx \geq 0$$

для всех неотрицательных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Лемма 3. *Если выполнены условия* (2) (*или* (3)) *и* (7), *функция* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *является субрешением в области* D, *то*

$$\operatorname*{ess\,sup}_D u \leq 0. \tag{14}$$

Если же $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ является суперрешением в области D, то

$$\operatorname*{ess\,inf}_D u \geq 0. \tag{15}$$

Следствие 1. *При выполнении условий* (2) *либо* (3) *и* (7) *задача Дирихле* (9) *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы 3. Исходя из сформулированных оценок лемм 1 – 3 и дословно повторяя рассуждения из [3, 8.2], приходим к утверждению теоремы. □

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство обеих теорем основано на получении обратного неравенства Гёльдера для градиента решения задачи Дирихле (1) с последующим применением обобщённой леммы Геринга.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $Q_R^{x_0}$ открытый куб с центром в точке x_0 и рёбрами длиной $2R$, где $R \leq 1$, которые параллельны координатным осям. Ниже полагается

$$\fint\limits_{Q_R^{x_0}} f\,dx = \frac{1}{\left|Q_R^{x_0}\right|}\int\limits_{Q_R^{x_0}} f\,dx,$$

где $|E|$ обозначает n-мерную меру Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Продолжим функцию u нулём вне области D. Сначала рассмотрим случай, когда $Q_{3R/2}^{x_0} \subset D$ и выберем в интегральном тождестве (4) пробную функцию $\varphi = (u-\lambda)\eta^2$, где

$$\lambda = \fint\limits_{Q_{3R/2}^{x_0}} u\ dx,$$

а срезающая функция $\eta \in C_0^\infty(Q_{3R/2}^{x_0})$ такова, что $0 \leq \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в $Q_R^{x_0}$ и $|\nabla\eta| \leqslant CR^{-1}$. Тогда (4) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_{3R/2}^{x_0}} |\nabla u|^2\eta^2 dx = \int\limits_{Q_{3R/2}^{x_0}} (b \cdot \nabla u)(u-\lambda)\eta^2 dx - 2\times \\ \times \int\limits_{Q_{3R/2}^{x_0}} \eta(u-\lambda)\nabla u \cdot \nabla\eta dx + \\ +2\int\limits_{Q_{3R/2}^{x_0}} f(u-\lambda)\eta \cdot \nabla\eta dx + \int\limits_{Q_{3R/2}^{x_0}} \eta^2 f \cdot \nabla u dx.\end{gathered} \tag{16}$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части тождества (16), имея в виду, что $n > 2$. Из представления младших коэффицентов (8) вытекает, что

$$\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx = \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} \left(\breve{b}\cdot\nabla u\right)(u-\lambda)\eta^2\,dx + \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} \left(\hat{b}\cdot\nabla u\right)(u-\lambda)\eta^2\,dx. \tag{17}$$

Для первого интеграла из правой части в (17) после несложных преобразований получаем

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (\breve{b}\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\right| \le \varepsilon\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + C(\varepsilon)\left\|\breve{b}\right\|^2_{L_\infty(D)} R^{-2}\times \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{18}$$

Второй интеграл в правой части (17) оценим с помощью неравенства Гёльдера и Соболева, в силу которого

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} \left(\hat{b}\cdot\nabla u\right)(u-\lambda)\eta^2\,dx\right| \le C(n)\theta\left(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2|\nabla\eta|^2\,dx\right). \tag{19}$$

В итоге, из оценок (18) и (19) в силу (17) с учетом выбора срезающей функции η будем иметь

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\right| \le \left(\varepsilon + C(n)\theta\right)\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \left(C(\varepsilon)\left\|\breve{b}\right\|^2_{L_\infty(D)} + C(n)\theta\right)R^{-2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{20}$$

Оценим теперь оставшиеся интегралы в правой части интегрального равенства (16). Для второго слагаемого получаем

$$\left|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} \eta(u-\lambda)\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx\right| \le \varepsilon\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dy + \frac{C(\varepsilon)}{R^2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{21}$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом:

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} f(u-\lambda)\eta\cdot\nabla\eta\,dx\right| \le \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + \frac{C}{R^2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{22}$$

Для четвертого слагаемого выводим

$$\left|\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} \eta^2 f\cdot\nabla u\,dx\right| \le \varepsilon\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + C(\varepsilon)\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx. \tag{23}$$

В результате, пользуясь (16), учитывая последние оценки (20)-(23), после соответствующего выбора ε и θ придем к неравенству

$$\int\limits_{Q^{y_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \le C(n,b)\left(\frac{1}{R^2}\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx + \int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx\right). \tag{24}$$

Далее, из неравенства Пуанкаре—Соболева

$$\left(\fint\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx\right)^{1/2} \le C(n)R\left(\fint\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\right)^{1/q},$$

$$q = \frac{2n}{n+2}$$

и из (24) найдем

$$\left(\fint_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \leq$$
$$\leq C(n,b)\left(\left(\fint_{Q_{2R}^{y_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q} + \left(\fint_{Q_{2R}^{y_0}} |f|^2 dx \right)^{1/2} \right). \quad (25)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $Q_{3R/2}^{y_0} \cap \partial D \neq \varnothing$. Выбирая в интегральном тождестве (4) пробную функцию $\varphi = u\eta^2$ с той же срезающей функцией η, получим

$$\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx = \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} b \cdot \nabla u\, u\eta^2 dx -$$
$$- 2 \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta u \nabla u \cdot \nabla \eta dx - \quad (26)$$
$$- 2 \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} fu\eta \cdot \nabla \eta dx - \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta^2 f \cdot \nabla u dx.$$

Все интегралы в правой части (26) оценивается точно так же как и выше вплоть до (24). В результате приходим к оценке (24), в которой $\lambda = 0$. Перепишем эту оценку в виде

$$\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C(n,b)\left(\frac{1}{R^2} \int_{Q_{2R}^{y_0}} u^2 dx + \int_{Q_{2R}^{y_0}} |f|^2 dx \right). \quad (27)$$

Далее заметим, что поскольку $Q_{3R/2}^{x_0} \cap \partial D \neq \varnothing$ и область D липшицева, то $|(\mathbb{R}^n \setminus D) \cap \overline{Q}_{2R}^{x_0}| \geq c(D)R^n$ для достаточно малого R. Поэтому по неравенству Соболева

$$\left(\fint_{Q_{2R}^{x_0}} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(n,D)R \left(\fint_{Q_{2R}^{x_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (28)$$

Откуда вновь приходим к оценке (25). Ясно, что оценка (25) выполнена и для кубов с центрами, лежащими вне области D. Таким образом, оценка (25) справедлива во всех рассматриваемых случаях.

Из (25) оценки, справедливой для всех рассматриваемых кубов $Q_R^{y_0}$, и обобщённой леммы Геринга (см. [4], [5], а также [6, гл. VII]) вытекает, что в предположении $f \in L_{2+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, имеет место оценка

$$\|\nabla u\|_{L_{2+\delta}(D)} \leq C(n,b,\delta_0,D)\left(\|\nabla u\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_{2+\delta}(D)} \right). \quad (29)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (29) с помощью оценки (10) теоремы 3. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. Схема рассуждений остается такой же, как и в доказательстве теоремы 1. Отличие состоит только в другом способе оценки первого интеграла в правой части интегральных равенств (16) и (26). □

Некоторые близкие результаты см. в [7] и [8].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Результаты работы получены в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боярский Б.В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Матем. сб. 1957. Т. 43. № 85. С. 451–503
2. *Meyers N.G.* An L^p–estimate for the gradient of solutions of second order elliptic deivergence equations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série. 1963. V. 17. N 3. P. 189–206.
3. *Гилбарг Д., Трудингер Н.С.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
4. *Gehring F.W.* The L_p–integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping // Acta Math. 1973. V. 130. P. 265–277.
5. *Giaquinta M., Modica G.* Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems // Journ. für die reine und angewandte Math. 1979. V. 311/312. P. 145–169.
6. *Skrypnik I.V.* Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems, Translations of Math. Monographs, AMS, Providence. 1994. V. 139. 1994.
7. *Chechkin G.A.* The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary // Mathematics. 2021. V. 9. N 23. Art number 3015.
8. *Чечкин Г.А., Чечкина Т.П.* Оценка Боярского–Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера // Проблемы математического анализа. 2022. Т. 119. С. 107–116.

ON THE BOYARSKY–MEYERS ESTIMATE FOR THE GRADIENT OF THE SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION WITH DRIFT. THE CASE THE CRITICAL SOBOLEV EXPONEN

Yu. A. Alkhutov[a, *], **A.G. Chechkina**[b, c, **]

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

[a] *Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia*

[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[c] *Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences Ufa, Russia*

The increased integrability of the gradient of the solution to the Increased integrability of the gradient o the solution to the homogeneous Dirichlet problem for the Poisson equation with lower terms in a bounded Lipschitz domain is established. A proof of the unique solvability of this problem is also given.

Keywords: elliptic equation, lower coefficients, Dirichlet problem, Meyers estimate, existence and uniqueness of solution