

УДК 511.6

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ СО СКОЛЬ УГОДНО БОЛЬШОЙ ДЛИНОЙ ПЕРИОДА

© 2024 г. Академик РАН В. П. Платонов^{1, 2, *}, Г. В. Федоров^{1, 3, **}

Поступило 15.02.2024 г.
После доработки 25.03.2024 г.
Принято к публикации 25.03.2024 г.

В статье доказано следующее утверждение: в любом гиперэллиптическом поле L , определенном над полем алгебраических чисел K и обладающим нетривиальными единицами кольца целых элементов поля L , найдется элемент, у которого длина периода непрерывной дроби больше любого наперед заданного числа.

Ключевые слова: гиперэллиптическое поле, фундаментальные единицы, унимодулярные преобразования, длина периода

DOI: 10.31857/S2686954324020093, EDN: XISPOY

Пусть K — поле характеристики 0. Бесконечное нормирование v_∞ поля $K(x)$ определяется как $v_\infty(P/Q) = \deg Q - \deg P$, где $P, Q \in K[x]$, $P, Q \neq 0$. Пусть $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен четной степени $2g + 2$, $g \geq 0$, причем старший коэффициент многочлена $f(x)$ является квадратом в K^* — мультипликативной группе поля K . Тогда бесконечное нормирование v_∞ поля $K(x)$ имеет два различных продолжения v_∞^- , v_∞^+ на гиперэллиптическое поле $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$.

Обозначим $S_\infty = \{v_\infty^-, v_\infty^+\}$. Кольцо

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\infty &= \mathcal{O}_\infty(K) = K[x][\sqrt{f}] = \\ &= \{\omega_1 + \omega_2\sqrt{f} \mid \omega_1, \omega_2 \in K[x]\} \end{aligned}$$

называется *кольцом S_∞ -целых элементов* гиперэллиптического поля $\mathcal{L}$ (см. [1]). Группа обратимых элементов $\mathcal{O}_\infty^*$ кольца $\mathcal{O}_\infty$ называется *группой*

единиц. Единицы $u \in K^*$ называются *тривиальными единицами*. Если существуют нетривиальные единицы кольца $\mathcal{O}_\infty$, то $\mathcal{O}_\infty^* = K^* \times \langle u_1 \rangle$, где $\langle u_1 \rangle$ — бесконечная циклическая группа с образующей u_1 , которая называется *фундаментальной единицей*. Степенью единицы $u = \omega_1 + \omega_2\sqrt{f}$ называется $\deg u = \deg \omega_1$. Наличие нетривиальных единиц кольца $\mathcal{O}_\infty$ эквивалентно разрешимости функционального уравнения типа Пелля $\omega_1^2 - \omega_2^2 f = \gamma$, где при заданном многочлене f разрешимость рассматривается относительно $\omega_1, \omega_2 \in K[x]$, $\omega_2 \neq 0$, и $\gamma \in K^*$ (см. [2], [3]).

Теория числовых непрерывных дробей (цепных дробей) насчитывает многовековую историю. Одним из центральных утверждений этой теории является теорема Эйлера-Лагранжа о периодичности непрерывной дроби для любой числовой квадратичной иррациональности (см., например, [4]). 200 лет назад в классических работах Абеля и Чебышева было начато исследование функциональных непрерывных дробей. Основная идея перехода от числовых дробей к функциональным непрерывным дробям заключается в рассмотрении вместо кольца целых чисел — кольца многочленов $K[x]$, а вместо целой части действительного числа — целой части разложения функции в формальный степенной ряд из $K((1/x))$ (см. [5]). В работе [3] доказаны в функциональном случае аналоги теоремы Эйлера-Лагранжа о периодичности непрерыв-

¹ Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук, Москва, Россия

² Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

³ Научно-технологический университет “Сириус”, Краснодарский край, г.т. Сириус, Россия

* E-mail: platonov@niisi.ras.ru

** E-mail: fedorov.gv@talantiuspeh.ru

ной дроби и известной в теории диофантовых приближений теоремы Серре об эквивалентности иррациональных чисел.

Рассмотрим поле формальных степенных рядов

$$K((1/x)) = \left\{ \sum_{j=s}^{\infty} b_j \left(\frac{1}{x}\right)^j \mid b_j \in K, b_s \neq 0, s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Поле $\mathcal{L}$ вкладывается в $K((1/x))$ двумя способами, соответствующими нормированиям v_{∞}^{-} , v_{∞}^{+} (см., например, § 2 [6]). Для $\beta \in \mathcal{L}$ существует единственное $a \in K[x]$ такое, что $v_{\infty}^{-}(\beta - a) > 0$.

Пусть $\beta \in \mathcal{L}$. Положим $\beta_0 = \beta$, $a_0 = [\beta_0]_{\infty}^{-}$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ положим $\beta_j = (\beta_{j-1} - a_{j-1})^{-1}$ и $a_j = [\beta_j]_{\infty}^{-}$ до тех пор, пока $a_j \neq \beta_j$. В результате получится разложение β в функциональную непрерывную дробь (конечную или бесконечную), построенную в множестве формальных степенных рядов $K((1/x))$ с помощью нормирования v_{∞}^{-} :

$$\beta = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}. \quad (1)$$

Элементы a_j называются *неполными частными*, β_j — *полными частными* непрерывной дроби.

Непрерывная дробь (1) называется *квазипериодической*, если для некоторых $\tau \in \mathbb{N}_0$ и $\mu \in \mathbb{N}$ справедливо $\beta_{\tau+\mu} = c\beta_{\tau}$ для некоторой постоянной $c \in K^*$. Если число μ минимальное среди возможных, то оно называется *длиной квазипериода*, а c — *константой квазипериода*. Если существуют $\tau \in \mathbb{N}_0$ и $\mu \in \mathbb{N}$, для которых $\beta_{\tau+\mu} = \beta_{\tau}$, то непрерывная дробь (1) называется *периодической*, а минимальное такое μ называется *длиной периода*. Таким образом, квазипериодическая непрерывная дробь элемента β может быть записана следующим образом

$$\beta = [a_0; a_1, \dots, a_{\tau}, \overline{a_{\tau+1}, \dots, a_{\tau+\mu}}^c]. \quad (2)$$

Обозначим J — якобиево многообразие гиперэллиптической кривой C , определяемой уравнением $y^2 = f(x)$. Для совершенного поля K существует естественное вложение группы классов дивизоров степени ноль $\Delta^{\circ}(\mathcal{L})$ поля $\mathcal{L}$ в $J(K)$, которое в рассматриваемом нами случае

является изоморфизмом (см., например, [7]). Тесная связь проблемы периодичности функциональных непрерывных дробей, проблемы поиска и построения фундаментальных единиц и S -единиц и проблемы кручения в якобианах гиперэллиптических кривых была отмечена в работах [2], [7].

В статье [8] получен удивительный результат о том, что последовательность $\{\deg a_j\}$ степеней неполных частных непрерывной дроби функциональной квадратичной иррациональности $\beta \in \mathcal{L}$ всегда периодическая. Доказательство опирается на неконструктивную теорему Скулема-Малера-Леха о нулях линейной рекуррентной последовательности. Это обстоятельство не позволяет сделать вывод о возможных оценках на длину периода $\kappa(\beta)$ в последовательности $\{\deg a_j\}$.

Пусть $\beta \in \mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ является корнем уравнения

$$\Lambda_2 X^2 + 2\Lambda_1 X + \Lambda_0 = 0, \quad (3)$$

где $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \in K[x]$ в совокупности взаимно простые многочлены, $\Lambda_0 \neq 0$, $\Lambda_2 \neq 0$. Обозначим $d = \Lambda_1^2 - \Lambda_0\Lambda_2$ — сокращенный дискриминант уравнения (3). Поскольку $\beta \in \mathcal{L}$, то $d = \omega^2 f$ для некоторого $\omega \in K[x]$. По Предложению 4 [9] для квазипериодичности непрерывной дроби элемента β необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая нетривиальная единица $U = \Omega_1 + \Omega_2\sqrt{f} \in \mathcal{O}_{\infty}$, что $\omega \mid \Omega_2$. В статье [9] (Теорема 1) найдена оценка на длину квазипериода $\mu(\beta)$ элемента β (при условии, что длина квазипериода конечна), и, в частности, получена верхняя оценка:

$$\mu(\beta) \leq \deg \Omega_2 + \max \left\{ \frac{\deg \Lambda_1}{2}, \frac{1}{2}(\deg \Lambda_0 + \deg \Lambda_2) \right\}. \quad (4)$$

Цель настоящей статьи — изучить вопрос о достижимости верхней оценки (4), и, в частности, ответить на естественный вопрос: ограничена ли величина $\mu_{\mathcal{L}} = \sup_{\beta \in \mathcal{L}} \mu(\beta)$ для зафиксированного гиперэллиптического поля $\mathcal{L}$? Оказывается, что если в $\mathcal{O}_{\infty} \subset \mathcal{L}$ существуют нетривиальные единицы, то $\mu_{\mathcal{L}} = +\infty$ (см. теорему 1). Также мы докажем, что в этом случае и $\kappa_{\mathcal{L}} = +\infty$ (см. Следствие 1), где $\kappa_{\mathcal{L}} = \sup_{\beta \in \mathcal{L}} \kappa(\beta)$, что частично дает ответ на вопрос из [8] о возможных значениях длин периодов последовательности степеней не-

полных частных функциональных непрерывных дробей квадратичных иррациональностей.

Для доказательства основных результатов нам необходимы следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 1. Пусть элемент $\beta \in \mathcal{L}$ является корнем квадратного уравнения (3) с сокращенным дискриминантом d . Пусть непрерывная дробь β , построенная в поле $K((1/x))$, имеет вид $[a_0; a_1, \dots]$. Тогда найдется номер $j_0 \in \mathbb{N}_0$, начиная с которого $\deg a_j \leq (\deg d) / 2$ для всех $j \geq j_0$.

Доказательство предложения 1 опирается на представление полных частных $\beta_j = (B_j + \sqrt{d}) / A_j$, где $A_j, B_j \in K[x]$, и оценки степеней $\deg A_j, \deg B_j$ (дополнительно см. предложение 5.2 [1]).

Будем говорить, что для заданного $d \in K[x]$ уравнение

$$\Theta_1^2 - \Theta_2^2 d = \gamma \quad (5)$$

разрешимо, если найдутся соответствующие $\Theta_1, \Theta_2 \in K[x]$, $\Theta_2 \neq 0$, и $\gamma \in K^*$, превращающие (5) в тождество. Тривиальные решения $\Theta_1 \in K^*$, $\Theta_2 = 0$, $\gamma = \Theta_1^2$ мы не рассматриваем. Уравнение (5) называется функциональным уравнением типа Пелля.

Предложение 2. Пусть непрерывная дробь $\beta \in \mathcal{L}$ квазипериодическая и имеет вид (2). Пусть Θ_1 обладает минимальной степенью среди всех нетривиальных решений $(\Theta_1, \Theta_2, \gamma)$ уравнения (5), где d — сокращенный дискриминант квадратичной иррациональности β . Тогда

$$\sum_{j=\tau}^{\tau+\mu-1} \deg a_j = \deg \Theta_1.$$

Доказательство предложения 2 опирается на предложение 1 и некоторые конструкции из [6] и [10].

Предложение 3. Пусть выполнены условия предложения 2. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{2\deg \sim 1}{\deg d} \leq N \leq \deg \sim 1.$$

Доказательство предложения 3 следует из предложения 2 и оценок на степень неполных частных a_j из предложения 1.

Для натуральных n определим две последовательности многочленов $T_n, Q_n \in \mathbb{Z}[x]$:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{0 \leq j \leq n/2} \binom{n}{2j} x^j, \\ Q_n(x) &= \sum_{0 \leq j < n/2} \binom{n}{2j+1} x^j. \end{aligned} \quad (6)$$

В статье [9] была исследована мультипликативная структура многочленов T_n, Q_n над полями алгебраических чисел, а также были получены верхние оценки длин периодов и квазипериодов непрерывных дробей элементов гиперэллиптических полей, определенных над полями алгебраических чисел.

В статье [10] была сформулирована задача об описании эллиптических и гиперэллиптических полей $L = K(x)(\sqrt{f})$, в которых соответствующие элементы $\sqrt{f}$ имеют периодическое разложение в непрерывную дробь, построенную в поле $K((x))$. Свойства многочленов T_n, Q_n были использованы в статьях [6], [11], [12] при решении этой задачи, когда $\deg f = 4$ и $[K : \mathbb{Q}] \leq 2$.

Из определения (6) следует, что $\deg T_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $\deg Q_n = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. Многочлены $T_n(x)$ и $Q_n(x)$ могут быть выражены через композицию с круговыми многочленами, а также имеют связь с многочленами Чебышёва первого и второго рода и с многочленами Диксона. Напомним некоторые сведения о последовательностях многочленов T_n, Q_n , необходимые в настоящей работе (подробнее см. [9]).

Если n нечетное, тогда $T_n(x) = x^{\deg Q_n} Q_n(1/x)$; если $q \mid n$, то $T_q(x) \mid T_n(x)$, $Q_q(x) \mid Q_n(x)$. Если n четное, тогда $T_n(x) = x^{\deg T_n} T_n(1/x)$; если $n = qs$, q — нечетное, то $T_s(x) \mid T_n(x)$, $Q_q(x) \mid Q_n(x)$; если $n = qs$, s — четное, то $T_q(x) \mid Q_n(x)$.

Положим $L(T_n)$ — наименьшее общее кратное многочленов T_s , где s пробегает все такие делители числа n , что n/s нечетное и больше 1. Тогда корректно определен многочлен $P(T_n) = T_n / L(T_n)$. Положим $\tilde{P}(T_n)(x) = x^s P(T_n)(1/x)$, где

$s = \deg P(T_n)(x)$. При нечетном n справедливо соотношение $\tilde{P}(T_n)(x) \mid Q_n$, а при четном n справедливо равенство $\tilde{P}(T_n)(x) = P(T_n)(x)$.

Предложение 4. Пусть $n = 2^t q \in \mathbb{N}$, где q нечетно. Тогда

- многочлены $P(T_n)(x), \tilde{P}(T_n)(x)$ неприводимы над $\mathbb{Q}$ и $\deg P(T_n) = \deg \tilde{P}(T_n) = 2^{t-1} \varphi(q)$;
- справедливо разложение на неприводимые над $\mathbb{Q}$ множители

$$T_n(x) = \prod_{d|q} P(T_{2^t d})(x) \quad (7)$$

$$Q_n(x) = 2^t \prod_{s|q} \tilde{P}(T_s)(x) \cdot \prod_{r|n} P(T_r)(x),$$

где последнее произведение берется по всем делителям r числа n таким, что n/r четное.

Доказательство предложения 4 следует из рассуждений в [6], [9], [12].

Перейдем к основному утверждению этой статьи.

Теорема 1. Пусть K — поле алгебраических чисел, и $\mathcal{L} = K(x)(\sqrt{f})$ — гиперэллиптическое поле такое, что в его кольце целых элементов $\mathcal{O}_\infty$ существуют нетривиальные единицы. Тогда для любого сколь угодно большого значения $N \in \mathbb{N}$ найдется такой элемент $\beta \in \mathcal{L}$, у которого длина периода непрерывной дроби конечна и больше N .

Доказательство. По условию в поле $\mathcal{L}$ существует фундаментальная единица $\Psi_1 + \Psi_2 \sqrt{f}$, где $\Psi_1, \Psi_2 \in K[x]$. Пусть многочлены $\Omega_1^{(j)}, \Omega_2^{(j)} \in K[x]$ определены так, что $(\Psi_1 + \Psi_2 \sqrt{f})^j = \Omega_1^{(j)} + \Omega_2^{(j)} \sqrt{f}$. Положим $z = \Psi_2^2(x)f(x) / \Psi_1^2(x)$, тогда

$$\Omega_1^{(j)} + \Omega_2^{(j)} \sqrt{f} = \Psi_1^j (T_j(z) + Q_j(z) \sqrt{z}), \quad (8)$$

где многочлены $T_n(x), Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $n \in \mathbb{N}$, определены в (6).

По предложению 4 [9] элемент $\beta \in \mathcal{L}$ с сокращенным дискриминантом $d = \omega^2 f$ обладает квазипериодической непрерывной дробью, тогда и только тогда, когда найдется номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $\omega \mid \Omega_2^{(n)}$. Наша задача — построить подходящую последовательность элементов $\beta = \beta^{(n)} \in \mathcal{L}$,

у которых длины квазипериодов непрерывных дробей $\beta^{(n)}$ стремятся к бесконечности при n , пробегающим некоторую последовательность натуральных чисел, стремящуюся к бесконечности. Для этого достаточно построить соответствующую последовательность сокращенных дискриминантов $d^{(n)} = (\omega^{(n)})^2 f$, где $\omega^{(n)} \mid \Omega_2^{(n)}$.

Рассмотрим последовательность нечетных чисел $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, для которой справедливо соотношение $\varphi(n_k) / n_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Существование такой последовательности и точные оценки на нижний предел функции $\varphi(n) / n$ доказаны, например, в [13]. В качестве последовательности $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ можно взять, например, $n_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ — произведение последовательных нечетных простых чисел $p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$.

Пусть $n = 2n_k$, тогда, по предложению 4, имеем $P(T_n)(z)$ — неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен, $\deg P(T_n)(z) = \varphi(n_k)$, $P(T_n)(z) \mid Q_{2n}(z)$, причем $P(T_n)(z) \nmid Q_j(z)$ при $j < 2n$. Обозначим $\overline{P(T_n)}(z, v)$ — однородный многочлен, соответствующий многочлену $P(T_n)(z)$. В силу представления (8) и разложений (7) в качестве $\omega^{(k)}(x)$ можно выбрать один из неприводимых над K делителей многочлена

$$(\Psi_1(x))^{2\varphi(n)} P(T_n) \left(\frac{\Psi_2^2(x)f(x)}{\Psi_1^2(x)} \right) =$$

$$= \overline{P(T_n)}(\Psi_2^2(x)f(x), \Psi_1^2(x)) \in \mathbb{Q}[x],$$

такой, что $\omega^{(k)}(x) \mid \Omega_2^{(2n)}(x)$ и $\omega^{(k)}(x) \nmid \Omega_2^{(j)}(x)$ при $j < 2n = 4n_k$. Справедливы оценки

$$\deg \omega^{(k)}(x) \leq 2m \deg P(T_n)(z) = 2m\varphi(n_k), \quad (9)$$

где $\deg \Psi_1(x) = m$ — степень фундаментальной единицы $\Psi_1 + \Psi_2 \sqrt{f}$ кольца $\mathcal{O}_\infty$.

Пусть $\beta^{(k)} \in \mathcal{L}$ является корнем квадратного уравнения

$$\Lambda_2^{(k)} Y^2 + 2\Lambda_1^{(k)} Y + \Lambda_0^{(k)} = 0$$

с сокращенным дискриминантом

$$d^{(k)}(x) = (\Lambda_1^{(k)})^2 - \Lambda_0^{(k)} \Lambda_2^{(k)} = (\omega^{(k)}(x))^2 f(x),$$

где $\Lambda_2^{(k)}, \Lambda_1^{(k)}, \Lambda_0^{(k)} \in \mathbb{Q}[x]$ в совокупности взаимно простые многочлены. Обозначим $\Theta_1^{(2n)} = \Omega_1^{(2n)}$, $\Theta_2^{(2n)} = \Omega_2^{(2n)} / \omega^{(k)}(x)$. По предложению 3 справедливы оценки на длину квазипериода μ_k непрерывной дроби элемента $\beta^{(k)}$:

$$\frac{8n_k m}{\deg d^{(k)}} = \frac{4nm}{\deg d^{(k)}} = \frac{2\deg \Theta_1^{(2n)}}{\deg d^{(k)}} \leq \mu_k \leq \deg \Theta_1^{(2n)} = 2nm = 4n_k m. \quad (10)$$

Пусть $\deg f = 2g + 2$, тогда из (9) имеем

$$\deg d^{(k)}(x) = 2\deg \omega^{(k)}(x) + \deg f \leq 4m\varphi(n_k) + 2g + 2. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получаем

$$\mu_k \geq \frac{8n_k m}{4m\varphi(n_k) + 2g + 2},$$

причем значения m и g в рассматриваемом поле $\mathcal{L}$ определены однозначно. В силу того, что $\varphi(n_k) / n_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, имеем $\mu_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 1 доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{L}$ — гиперэллиптическое поле, определенное как в теореме 1. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ существует элемент $\beta \in \mathcal{L}$, для которого длина периода последовательности $\{\deg a_j\}$ степеней неполных частных больше N .

Доказательство. Будем использовать те же обозначения, как в доказательстве теоремы 1.

Обозначим $2t = \deg d^{(k)} = \deg(\omega^{(k)})^2 f$. Положим

$$\Lambda_1^{(k)} = \left\lfloor \sqrt{d^{(k)}} \right\rfloor_{\infty} \text{ и } \Lambda_0^{(k)} = (\Lambda_1^{(k)})^2 - d^{(k)}, \text{ тогда } \deg \Lambda_1^{(k)} = t$$

и $\Lambda_0^{(k)} < t$. Без ограничения общности считаем, что старший коэффициент многочлена $f(x)$ является полным квадратом в поле K , поэтому $\Lambda_0^{(k)}, \Lambda_1^{(k)} \in K[x]$. Рассмотрим $\alpha^{(k)} = \Lambda_1^{(k)} + \sqrt{d^{(k)}}$ — корень квадратного уравнения $Y^2 - 2\Lambda_1^{(k)}Y + \Lambda_0^{(k)} = 0$ с дискриминантом $d^{(k)}$.

Непрерывная дробь $\sqrt{d^{(k)}}$ периодическая и имеет вид (см., например, [3], теорема 3)

$$\left[a_0; a_1, \dots, a_{\mu-1}, a_{\mu}^c \right] = \left[a_0; a_1, \dots, c^{-1}a_1, 2ca_0^c \right],$$

где $\mu = \mu_k = \mu(\alpha^{(k)})$ — длина квазипериода, c — константа квазипериода. Значит непрерывная дробь $\alpha^{(k)}$ чисто периодическая и имеет вид $\left[2a_0, a_1, \dots, c^{-1}a_1^c \right]$. По предложению 1 имеем $\deg a_j \leq t$

для всех $j \in \mathbb{N}_0$. Более того, $\deg a_{sN} = \deg a_0 = t$ для $s \in \mathbb{N}$ и $\deg a_j < t$ при $j \in \mathbb{N}$, $N \nmid j$. Наконец, как в теореме 1 имеем $\mu_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, откуда и получается утверждение следствия 1. $\square$

Отсюда, в частности, следует, что в отличие от “ключевых” элементов вида $\sqrt{f} / x^s$, $s \in \mathbb{Z}$, рассмотренных в теореме 3 [9], в общем случае оценка на длину квазипериода (периода) непрерывной дроби квадратичной иррациональности не может зависеть только от параметров, характеризующих гиперэллиптическое поле $\mathcal{L}$ таких, как род g поля $\mathcal{L}$, степень расширения $[K : \mathbb{Q}]$ и степень фундаментальной единицы кольца $\mathcal{O}_{\infty}$ целых элементов поля $\mathcal{L}$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках Государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований проект FNEF-2024-0001.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беньш-Кривец В.В., Платонов В.П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 1. С. 15–44.
2. Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69. № 1(415). С. 3–38.
3. Schmidt W.M. On continued fractions and diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica. 2000. V. 95. N 2. P. 139–166.
4. Ленг С. Введение в теорию диофантовых приближений. Мир, 1970.
5. Lasjaunias A. A survey of diophantine approximation in fields of power series // Monatshefte für Mathematik. 2000. V. 130. P. 211–229.
6. Платонов В.П., Федоров Г.В. О проблеме классификации многочленов f с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в гиперэллиптических полях // Известия РАН. Серия математическая. 2021. Т. 85. № 5. С. 152–189.
7. Платонов В.П. Арифметика квадратичных полей и кручение в якобианах // ДАН. 2010. Т. 430. № 3. С. 318–320.

8. *Zannier U.* Hyperelliptic continued fractions and generalized Jacobians // *American Journal of Mathematics*. 2019. V. 141. N 1. P. 1–40.
9. *Федоров Г.В.* О длине периода функциональной непрерывной дроби над числовым полем // *ДАН*. 2020. Т. 495. С. 78–81.
10. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Матем. сб.* 2018. Т. 209. № 4. С. 54–94.
11. *Платонов В.П., Федоров Г.В.* О проблеме классификации периодических непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Успехи математических наук*. 2020. Т. 75. № 4. С. 211–212.
12. *Федоров Г.В.* Непрерывные дроби и проблема классификации эллиптических полей над квадратичными полями констант // *Матем. заметки*. 2023. Т. 114. № 6. С. 873–893.
13. *Hardy G.H., Wright E.M.* *An Introduction to the Theory of Numbers* (Fifth ed.). Oxford: Oxford University Press, 1979.

CONTINUED FRACTIONS IN HYPERELLIPTIC FIELDS WITH AN ARBITRARILY LARGE PERIOD LENGTH

Academician of the RAS **V. P. Platonov^{a, b, *}**, **G. V. Fedorov^{a, c, *}**

^a*Scientific Research Institute of System Development, Moscow, Russia*

^b*Steklov Institute of Mathematics, Moscow, Russia*

^c*Sirius University of Science and Technology, Sirius, Krasnodar region, Russia*

The article proves the following statement: in any hyperelliptic field L defined over the field of algebraic numbers K which having non-trivial units of the ring of integer elements of the field L , there is an element for which the period length of the continued fraction is greater any pre-given number.

Keywords: hyperelliptic field, fundamental units, unimodular transformations, period length