

СОВМЕСТНАЯ ЛОГИКА ЗАДАЧ И ВЫСКАЗЫВАНИЙ

© 2024 г. С. А. Мелихов^{1, *}

Представлено академиком РАН А.Л. Семёновым

Поступило 21.07.2023 г.

После доработки 09.02.2024 г.

Принято к публикации 25.03.2024 г.

В комментарии 1985г. к своему собранию сочинений А. Н. Колмогоров сообщил, что его статья *К толкованию интуиционистской логики* 1932 г. “писалась в надежде на то, что логика решения задач [т.е. интуиционистская логика] сделается со временем постоянным разделом курса логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами”. Ниже построена подобная формальная система, а также её предикатная версия QНС, являющаяся консервативным расширением как интуиционистского предикатного исчисления QН, так и классического предикатного исчисления QС. Аксиоматика логики QНС является результатом одновременной формализации двух известных альтернативных толкований интуиционистской логики: 1) задачной интерпретации Колмогорова (с известными уточнениями Гейтинга и Крайзеля) и 2) доказательной интерпретации Орлова и Гейтинга, прояснённой и расширенной Гёделем.

Ключевые слова: интуиционистская логика, ВНК-интерпретация, формальная металогика

DOI: 10.31857/S2686954324020077, **EDN:** XIUPWR

Настоящая заметка — краткое сообщение о препринтах автора [1], [2], имеющее своей целью более доступное изложение их основных идей и результатов.

1. ЧТО ТАКОЕ ЛОГИКА (ФОРМАЛЬНО)?

С точки зрения современных учебников системе вывода логики первого порядка полагается состоять из схем аксиом и правил вывода, где те, и другие используют метапеременные (а не переменные языка) и могут включать в себя условия, выраженные словами, такие как “при условии, что x не свободна в P ” или “при условии, что t свободен для x в $P(x)$ ”. В старых учебниках Гильберта–Аккермана, Гильберта–Бернайса и П.С. Новикова система вывода содержала только отдельные аксиомы (т.е. формулы, а не схемы), но правила вывода всё равно использовали метапеременные и включали в себя вербальные условия.

Мы будем использовать третий тип формализма, в котором вся система вывода является

объектом некоторого формального языка (называемого языком металогики). Этот формализм — упрощённая версия формальной металогики Полсона [3], используемой в Isabelle (известной программе для работы с доказательствами). При таком подходе принципы и правила не содержат ни метапеременных, ни вербальных условий, так что они оказываются вполне формальными синтаксическими объектами, и поэтому имеет смысл говорить об их семантике. Метапеременные и вербальные условия не исчезают полностью: они присутствуют в метаправилах вывода, которые одинаковы для всех логик первого порядка.

Коротко опишем нашу версию этого формализма (ср. [1], [4]). Пусть дан язык $\mathcal{L}$ логики первого порядка, включая понятие *формулы* языка $\mathcal{L}$. Нам нужно, чтобы $\mathcal{L}$ содержал предикатные переменные (как в учебниках А. Чёрча, Гильберта–Аккермана, Гильберта–Бернайса и П.С. Новикова), а не только предикатные константы, как в некоторых современных учебниках (которые, тем не менее, как правило используют пропозициональные переменные в своих изложениях пропозициональной логики). Естественное место для предикатных констант тогда — не в языке $\mathcal{L}$, а в языке теории над этой логикой.

¹ Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*E-mail: melikhov@mi-ras.ru

Метаформулы строятся индуктивно из формул с помощью *метаконъюнкции* $\&$, *мета-импликации* $\Rightarrow$ и *метакванторов* всеобщности по любому индивидуальным и предикатным переменным языка $\mathcal{L}$. Метаквантификацию по всем индивидуальным переменным, встречающимся свободно в заданной метаформуле $\mathcal{F}$, будем записывать сокращённо в виде $(1)\mathcal{F}$; а по всем предикатным переменным (любой валентности), встречающимся свободно в $\mathcal{F}$ — в виде $(2)\mathcal{F}$.

Правило $F_1, \dots, F_m / G$, где $F_1, \dots, F_m$ и G — формулы, является сокращённой записью метаформулы $(2)((1)F_1 \& \dots \& (1)F_m \Rightarrow (1)G)$. *Принцип* $\cdot G$, где G — формула, является сокращённой записью метаформулы $(2)(1)G$. Таким образом, правила без посылок можно отождествить с принципами.

Система вывода $\mathcal{D}$ — это метаконъюнкция конечного числа принципов и правил, называемых её *законами*¹ и *правилами вывода*. Другая система вывода $\mathcal{D}'$ (в том же языке) *эквивалентна* системе $\mathcal{D}$, если метаформула $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}') \& (\mathcal{D}' \Rightarrow \mathcal{D})$ выводима с помощью метаправил вывода. (Последние представляют собой правила введения и удаления для $\&$, $\Rightarrow$ и метакванторов, в стиле натурального вывода, а также правило α -конверсии. Подробности см. в [1] или [4]; примеры работы с метаправилами см. в [4].)

Логика — это класс эквивалентности систем вывода. Если L — логика, заданная системой вывода $\mathcal{D}$, обозначим через $\vdash_L \mathcal{F}$ (или просто $\vdash \mathcal{F}$, если L ясна из контекста) суждение, что метаформула $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{F}$ выводима с помощью метаправил вывода. Суждение $\vdash (F_1 \& \dots \& F_m) \Rightarrow G$ будем записывать сокращённо в виде $F_1, \dots, F_m \vdash G$. В случае, когда $F_1, \dots, F_m$ и G являются формулами, “ $F_1, \dots, F_m \vdash G$ ” имеет тот же смысл, что и в учебниках А. Чёрча, Г. Б. Эндертон, Колмогорова–Драгилина и Трулстры–ван Далена. С другой стороны, “ $F_1, \dots, F_m \vdash G$ ”, будучи определённым как в учебниках Д. Шёнфилда и Э. Мендельсона, имеет значение $(1)F_1, \dots, (1)F_m \vdash (1)G$. Последнее отношение на наборах формул определяет выводимость правил, а значит, и логику.

Будем говорить, что правила $R_1, \dots, R_n$ *влекут* правило Q , если верно суждение $R_1, \dots, R_n \vdash Q$. Например, в интуиционистской логике прин-

цип $\cdot \neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$ влечёт принцип $\cdot \alpha \vee \neg \alpha$, что легко усмотреть, используя $\vdash \neg \neg (\beta \vee \neg \beta)$. Однако $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha \not\vdash \alpha \vee \neg \alpha$, так как посылка становится выводимой при замене α на $\neg \beta$, а заключение — нет. (В рамках традиционного формализма здесь можно было бы сказать, что схема $\alpha \vee \neg \alpha$ не выводима из схемы $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$; это свидетельствует о том, что традиционное представление принципов схемами иногда приводит к недоразумениям.)

2. ЧТО ТАКОЕ ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА (НЕФОРМАЛЬНО)?

При построении новой логики для начала нужно обратиться к неформальным рассмотрениям — иначе возникает риск прийти к “неправильной” (т.е. немотивированной) логике. Наша логика QHC возникнет естественным образом из анализа семантики интуиционистской логики.

2.1. Задачная интерпретация

Идея Колмогорова состояла в том, что объекты интуиционистской логики “суть в действительности не теоретические высказывания, а, напротив, задачи”. Далее описана немного уточнённая форма его толкования интуиционистской логики [6], включающая небольшие усовершенствования, привнесённые А. Гейтингом (1934). Более подробное обсуждение см. в [4; § 3.7, § 3.8].

Рассмотрим класс конкретных задач (например, задачи на построение циркулем и линейкой), которые могут содержать параметры, пробегающие фиксированную область D . Смысл задач, содержащих логические связки или кванторы, разъясняется следующим образом:

- решение задачи $\Gamma \wedge \Delta$ состоит из решения Γ и решения Δ ;
- решение задачи $\Gamma \vee \Delta$ состоит из явного выбора между Γ и Δ и решения выбранной задачи;
- решение задачи $\Gamma \rightarrow \Delta$ — это *сведение* Δ к Γ , т.е. общий метод решения Δ на основе любого заданного решения Γ ;
- задача $\times$ (“*абсурд*”) не имеет решений, а $\neg \Gamma$ — сокращённая запись для $\Gamma \rightarrow \times$;
- решение задачи $\exists x \Theta(x)$ — это решение $\Theta(x_0)$ для некоторого явного выбранного $x_0 \in D$;
- решение задачи $\forall x \Theta(x)$ — это общий метод решения $\Theta(x_0)$ при каждом $x_0 \in D$.

¹ Законы играют ту же роль, что и схемы аксиом, но формально не являются ни схемами аксиом, ни отдельными аксиомами.

Здесь ключевым элементом является понятие *общего метода*, которое Колмогоров разъясняет следующим образом. Если $\Gamma(\mathcal{X})$ — задача, зависящая от параметра $\mathcal{X}$ “произвольного сорта”, то “указать общий метод решения задачи $\Gamma(\mathcal{X})$ при каждом конкретном значении $\mathcal{X}$ ” следует понимать как “быть в состоянии для каждого заданного единичного значения $\mathcal{X}_0$ переменной $\mathcal{X}$ решить задачу $\Gamma(\mathcal{X}_0)$ посредством конечной последовательности заранее (до выбора этого $\mathcal{X}_0$) известных шагов”.

Как отмечается в учебнике Трулстры—ван Далена (Troelstra—van Dalen), приведённых выше шести положений недостаточно, чтобы отличить интуиционистскую логику от классической. Действительно, если $|\Gamma|$ обозначает множество решений задачи Γ , то эти положения гарантируют, что:

- $|\Gamma \wedge \Delta|$ есть произведение $|\Gamma| \times |\Delta|$;
- $|\Gamma \vee \Delta|$ есть дизъюнктное объединение $|\Gamma| \sqcup |\Delta|$;
- имеется отображение $\mathcal{F}: |\Gamma \rightarrow \Delta| \rightarrow \text{Hom}(|\Gamma|, |\Delta|)$ во множество всех отображений;
- $|\times| = \emptyset$;
- $|\exists x \Theta(x)|$ есть дизъюнктное объединение $\prod_{d \in D} |\Theta(d)|$;
- имеется отображение $\mathcal{G}: |\forall x \Theta(x)| \rightarrow \prod_{d \in D} |\Theta(d)|$ в произведение.

Если отображение $\mathcal{F}$ сделать тождественным, получится классическая логика. Действительно, $|\Gamma \vee \neg \Gamma| = |\Gamma| \sqcup \text{Hom}(|\Gamma|, \emptyset)$ всегда непусто; значит, $\Gamma \vee \neg \Gamma$ имеет решение для любой задачи Γ .

Ингредиент, которого здесь не хватает — это следующая интерпретация *метаквантора* второго порядка, которая, к сожалению, не обсуждается ни в каких учебниках, но почти в явном виде присутствует в статье Колмогорова [6]. Если $\Phi = \Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — формула, не содержащая предикатных переменных кроме уже перечисленных, то принцип $\cdot \Phi$ интерпретируется как задача “найти общий метод решения задачи $\Phi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ для любых конкретных задач $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ подходящих валентностей”.

Например, $\cdot \gamma \vee \neg \gamma$ интерпретируется как задача “найти общий метод, позволяющий для всякой конкретной задачи Γ либо решить Γ , либо прийти к противоречию исходя из предположения о том, что задано решение Γ ”. Такой

общий метод нам неизвестен, и именно поэтому *интуиционистская логика отлична от классической*.

Колмогоров также предложил интерпретацию правил, которая после некоторых уточнений (с целью отделения синтаксиса от семантики) применима к произвольным метаформулам [4].

2.2. Доказуемая интерпретация

Немного другая интерпретация интуиционистской логики была предложена И. Е. Орловым (1928) и независимо А. Гейтингом (1930, 31). Для них объектами интуиционистской логики служат не задачи, а утверждения о конструктивной *доказуемости* высказываний. Более подробное обсуждение см. в [1; § 6.2.1].

К. Гёделю удалось формализовать эту интерпретацию в его переводе пропозициональной интуиционистской логики в логику $S4$ (1933; недоработанная версия этого перевода имеется уже в статье Орлова). Позже, в наброске своей лекции 1938 года [7] Гёдель попытался аксиоматизировать также более точное понятие *доказательства* в смысле Орлова и Гейтинга; он говорит о доказательствах, “понимаемых не в какой-то конкретной системе, а в абсолютном смысле (то есть, [то, что] позволяет сделать [утверждение] очевидным)”.

В этом наброске Гёдель рассматривает тернарное отношение “ zBp, q , то есть z — вывод q из p ”. Но в действительности он также использует бинарное отношение “ aBq ”, которое, насколько можно судить, служит сокращением для aBT, q . Аксиомы Гёделя для B таковы (буквально):

- “ $zB\varphi(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ ”;
- “ $uBv \rightarrow u'B(uBv)$ ”;
- “ $zBp, q \ \& \ uBq, r \rightarrow f(z, u)Bp, r$ ”;
- “если q доказано и a — [предъявленное] доказательство, [то] пишется aBq ”.

Вместо того, чтобы пытаться прояснить смысл сказанного в исходных терминах Гёделя, рассмотрим очень похожую, но более чётко описанную логику. А именно, пусть $S4pr$ — расширение классической логики предикатов следующими дополнительными элементами языка:

- оператор $:$, сопоставляющий всяким формуле F и терму t формулу $t : F$;
- унарная функция $'$, сопоставляющая всякому терму t терм t' ;

- бинарная функция $[\cdot]$, сопоставляющая всяким двум термам s, t терм $s[t]$;
- оператор $*$, сопоставляющий всякой формуле F терм $*_F$

и следующими дополнительными законами и правилами вывода:²

- (1) $\cdot t : p \rightarrow p$
- (2) $\cdot t : p \rightarrow t' : (t : p)$
- (3) $\cdot s : (p \rightarrow q) \rightarrow (t : p \rightarrow s[t] : q)$
- (4) $\frac{p}{p} : p$

Нам понадобится

Предложение 2.1. В логике $S4pr$ выводимы следующие принципы и правила:

- (1') $\cdot \neg(t : \perp)$
- (1'') $\cdot \exists t t : p \rightarrow p$
- (1''') $\frac{t : p}{p}$
- (2') $\cdot t : p \rightarrow \tilde{t} : (\exists t t : p)$

2.3. Принцип Прокла–Крайзеля

Как мы увидим ниже, с некоторой формальной точки зрения задачная интерпретация Колмогорова–Гейтинга и доказуемостьная интерпретация Орлова–Гейтинга имеют много общего, но не сводятся друг к другу. Однако в литературе эти интерпретации традиционно отождествляют друг с другом (что нельзя назвать совсем нелогичным, поскольку в статье Гейтинга 1931 года содержатся элементы обеих). Результатом этого хронического смешения стала так называемая “ВНК–интерпретация” интуиционистской логики, изначально названная так в честь Брауэра, Гейтинга и Крайзеля, а позднее традиционно называемая точно так же уже в честь Брауэра, Гейтинга и Колмогорова.

Главным вкладом Г. Крайзеля было, в терминах задачной интерпретации, следующее наблюдение: для того, чтобы вышеупомянутые шесть положений имели смысл, к ним нужно добавить такую оговорку: “каждое решение задачи Г должно быть снабжено доказательством того, что оно действительно является её решением”. Более подробное обсуждение см. в [4; § 3.7]. На самом деле этот же принцип подчёркивали уже древние греки, в особенности Прокл, в контек-

сте задач на построение циркулем и линейкой. (А.П. Мартин-Лёф наоборот подчёркивал, что этот принцип не выполняется в его интуиционистской теории типов.)

3. ЛОГИКА QНС

В дальнейшем интуиционистская и классическая логики предикатов будут обозначаться как QН и QС. Сейчас мы займёмся построением новой логики QНС, подходящей под описание Колмогорова [5], цитированное в аннотации.

3.1. Язык

Язык логики QНС содержит:

- логические константы:
 - классические *истину* и *ложь*, обозначаемые как $\top, \perp$, и
 - их интуиционистские аналоги *тривиальность* и *абсурд*, обозначаемые как $\checkmark, \times$;
- для каждого $n \geq 0$ счётное множество n -местных предикатных переменных двух сортов:
 - *задачные переменные*, обозначаемые полужирными греческими буквами ($\alpha, \beta, \dots$);
 - *собственно-предикатные переменные*, обозначаемые полужирными латинскими буквами ($p, q, \dots$);
- счётное множество индивидуальных переменных, записываемые машинописным шрифтом: $x, y, \dots$;
- классические и интуиционистские связки и кванторы (см. ниже);
- два новых оператора $?$ и $!$.

Обычный математический шрифт будет использоваться для метаварiableных.

Каждая формула логики QНС будет иметь один из двух сортов: она должна быть либо *с-формулой*, либо *i-формулой*. *Атомарной с-формулой* называется выражение вида $p(x_1, \dots, x_n)$, где p — n -местная собственно-предикатная переменная и $x_1, \dots, x_n$ — индивидуальные переменные. *Атомарной i-формулой* называется выражение вида $\alpha(x_1, \dots, x_n)$, где α — n -местная задачная переменная и $x_1, \dots, x_n$ — индивидуальные переменные. Произвольная *с-формула* — это либо $\top$, либо $\perp$, либо атомарная *с-формула*, либо выражение вида Φ , где Φ — *i-формула*; либо выражение,

² Близкую, но более сложную логику исследовал С. Артёмов [8].

построенное индуктивно из выражений предыдущих четырёх типов с использованием классических связок $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$ и классических кванторов $\exists, \forall$. Произвольная *i*-формула — это либо $\sqrt{}$, либо $\times$, либо атомарная *i*-формула, либо выражение вида F , где F — с-формула; либо выражение, построенное индуктивно из выражений предыдущих четырёх типов с использованием интуиционистских связок $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$ и интуиционистских кванторов $\exists, \forall$. При этом классические связки/кванторы и их интуиционистские аналоги на письме не различаются, но всегда не сложно выяснить, кто из них есть кто, поскольку сорт каждой подформулы, имеющей один из первых четырёх типов (из определений с-формулы и *i*-формулы) ясен из того, как она выглядит.

В дальнейшем мы будем обозначать *i*-формулы не допускающими различий греческими заглавными буквами, с-формулы — не допускающими различий латинскими заглавными буквами, а формулы логики QHC неизвестного сорта — заглавными буквами, которые с точки зрения являются и греческими, и латинскими (например, A, B, E).

3.2. Неформальная семантика

Замкнутые с-формулы интерпретируются высказываниями, а замкнутые *i*-формулы — задачами. Подробнее:

- n -местные собственно-предикатные переменные интерпретируются n -местными предикатами;
- n -местные задачные переменные интерпретируются задачами с n параметрами;
- классические связки и кванторы интерпретируются как обычно, с помощью таблиц истинности;
- интуиционистские связки и кванторы интерпретируются как в § 2;
- если Φ — *i*-формула, интерпретируемая задачей Γ с n параметрами, то $?\Phi$ интерпретируется n -местным предикатом “ Γ имеет решение”;
- если F — с-формула, интерпретируемая n -местным предикатом P , то $!F$ интерпретируется задачей “доказать P ” с n параметрами.

Если $F = F(\gamma_1, \dots, \gamma_m, p_1, \dots, p_n)$ — замкнутая с-формула, не содержащая предикатных переменных кроме уже перечисленных, то принцип $\cdot F$ интерпретируется высказыванием “высказы-

вание $F(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, P_1, \dots, P_n)$ выполнено для любых задач $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и предикатов $P_1, \dots, P_n$ подходящей валентности”. Суждение $\vdash \cdot F$ может быть проинтерпретировано суждением об истинности этого высказывания.

Если $\Phi = \Phi(\gamma_1, \dots, \gamma_m, p_1, \dots, p_n)$ — замкнутая *i*-формула, не содержащая предикатных переменных кроме уже перечисленных, то принцип $\cdot \Phi$ интерпретируется задачей “найти общий метод решения задачи $\Phi(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m, P_1, \dots, P_n)$ для любых задач $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и высказываний $P_1, \dots, P_n$ подходящей валентности”. Суждение $\vdash \cdot \Phi$ может быть проинтерпретировано суждением о том, что эта задача имеет решение.

Интерпретация правил и других метаформул более сложна; см. [2].

3.3. Система вывода

Некоторые законы и правила вывода логики QHC можно указать сразу:

- Все законы и правила вывода логики QC (см. [4; § 4.6]).
- Все законы и правила вывода логики QH (см. [4; § 4.6]).

Здесь формулы QC и QH отождествляются соответственно с с-формулами и *i*-формулами, не содержащими вхождений $?$ и $!$. Отметим, что, используя метаправила вывода (а именно, правила введения и удаления метакванторов второго порядка), мы можем применять классические законы и правила вывода к произвольным с-формулам, а интуиционистские законы и правила вывода — к произвольным *i*-формулам.

Обсудим теперь оставшуюся часть системы вывода.

Высказывание “ Γ имеет решение”, обозначаемое как $?\Gamma$, может быть перефразировано в терминах § 2 как “ $\lceil \Gamma \rceil \neq \emptyset$ ”. Тогда из шести положений задачной интерпретации (см. § 2) следует, что для любых задач Γ, Δ и любой задачи Θ с параметром должны быть истинны следующие высказывания:

- $?(\Gamma \wedge \Delta) \leftrightarrow ? \Gamma \wedge ? \Delta$
- $?(\Gamma \vee \Delta) \leftrightarrow ? \Gamma \vee ? \Delta$
- $?(\Gamma \rightarrow \Delta) \rightarrow (? \Gamma \rightarrow ? \Delta)$
- $\neg ? \times$
- $? \exists x \Theta(x) \leftrightarrow \exists x ? \Theta(x)$
- $? \forall x \Theta(x) \rightarrow \forall x ? \Theta(x)$

Эти высказывания соответствуют следующим принципам в языке логики QHC:

- (1a) $\cdot ?(\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow ?\gamma \wedge ?\delta$
- (1b) $\cdot ?(\gamma \vee \delta) \leftrightarrow ?\gamma \vee ?\delta$
- (1c) $\cdot ?(\gamma \rightarrow \delta) \rightarrow (? \gamma \rightarrow ? \delta)$
- (1d) $\neg ? \times$
- (1e) $\cdot ?\exists x \theta(x) \leftrightarrow \exists x ? \theta(x)$
- (1f) $\cdot ?\forall x \theta(x) \rightarrow \forall x ? \theta(x)$

Это наша первая группа законов логики QHC (некоторые из них впоследствии окажутся избыточными).

Неформально, (1d) утверждает, что $\times$ — не просто самая сложная задача (что гарантируется принципом “Ex falso quodlibet”, $\cdot \times \rightarrow \gamma$), а задача, вообще не имеющая решения. Этот лишь один пример того, как задачная интерпретация не до конца формализуется логикой QH, но более полно формализуется логикой QHC.

Из принципа Прокла–Крайзеля следует, что всякое решение задачи Γ даёт доказательство существования решения задачи Γ . Этот более слабый принцип выразим в языке логики QHC, и мы добавляем его в систему вывода:

$$(1g) \cdot \gamma \rightarrow !? \gamma.$$

Заключительная часть системы вывода возникает из доказуемости интерпретации. Принципы и правила (1'), (1''), (1'''), (2'), (3) и (4) из § 2, выводимые в S4_{pr}, имеют следующие прямые аналоги в языке логики QHC:

- (2a) $\cdot \neg ! \perp$
- (2b) $\cdot ?!p \rightarrow p$
- (2c) $\frac{!p}{p}$
- (2d) $\cdot !p \rightarrow !?p$
- (2e) $\cdot !(p \rightarrow q) \rightarrow (!p \rightarrow !q)$
- (2f) $\frac{p}{!p}$

Закон (2d) сразу становится избыточным, так как следует из (1g). Но взаимодействие между первой и второй частями системы вывода этим далеко не ограничивается. В частности, можно показать, что законы (1a), (1b), (1d), (1e) и (1f) также избыточны.

Предложение 3.1. Система вывода (0a)–(2f) эквивалентна следующей: [start=0]

- (0) Все законы и правила вывода QC и QH

- (1) $\frac{p}{!p}$
- (2) $\frac{\alpha}{? \alpha}$
- (3) $\cdot ?!p \rightarrow p$
- (4) $\cdot \alpha \rightarrow !? \alpha$
- (5) $\cdot !(p \rightarrow q) \rightarrow (!p \rightarrow !q)$
- (6) $\cdot ?(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (? \alpha \rightarrow ? \beta)$
- (7) $\neg ! \perp$

3.4. Основные свойства

Предложение 3.2. Следующие принципы выводимы в QHC:

- (1) $! \perp \leftrightarrow \times$
- (2) $? \times \leftrightarrow \perp$
- (3) $\cdot !p \wedge !q \leftrightarrow !(p \wedge q)$
- (4) $\cdot !p \vee q \rightarrow (p \vee q)$
- (5) $\cdot \forall x !p(x) \leftrightarrow !\forall x p(x)$
- (6) $\cdot \exists x !p(x) \rightarrow !\exists x p(x)$
- (7) $\neg \alpha \leftrightarrow !\neg ? \alpha$
- (8) $\cdot (!? \alpha \rightarrow !? \beta) \leftrightarrow (? \alpha \rightarrow ? \beta)$

Предложение 3.3. Для любой i -формулы Φ и c -формулы F , $\vdash ? \Phi \rightarrow F$ тогда и только тогда, когда $\vdash \Phi \rightarrow !F$.

Таким образом, $?$ и $!$ образуют соответствие Галуа между ЧУМами Линденбаума классов эквивалентности i -формул и c -формул.

Предложение 3.4. Обозначим $\Box := ?!$. Тогда в QHC выводимо:

- (1) $\cdot \Box p \rightarrow p$
- (2) $\cdot \Box p \rightarrow \Box \Box p$
- (3) $\cdot \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- (4) $\frac{p}{\Box p}$

Расширение логики QC оператором $\Box := ?!$, удовлетворяющим (1)–(4) — это модальная логика QS4.

Предложение 3.5. Обозначим $\nabla := !?$. Тогда в QHC выводимо:

- (1) $\cdot \alpha \rightarrow \nabla \alpha$
- (2) $\cdot \nabla \nabla \alpha \rightarrow \nabla \alpha$
- (3) $\cdot \nabla(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\nabla \alpha \rightarrow \nabla \beta)$
- (4) $\nabla \times \rightarrow \times$

Расширение логики QH оператором ∇ , удовлетворяющим (1)–(4), будем обозначать как QH4. Эту интуиционистскую модальную логику исследовали М. Фэйртлаф и М. Уолтон [9], а также П. Акцель [10], позднее – С. Артёмов и Т. Протопопеску [11]. При удалении (4) получается логика, которую исследовал ещё Х. Карри в 1950 году [12, с. 120], а позднее также Р. Голдблатт (1979) и многие другие.

Предложение 3.6. В логике QHC выводимо:

- (1) $\cdot \nabla \alpha \rightarrow \neg\neg \alpha$
- (2) $\cdot \neg \nabla \alpha \leftrightarrow \neg \alpha$
- (3) $\cdot \neg \alpha \leftrightarrow \nabla \neg \alpha$
- (4) $\cdot \Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Box p \wedge \Box q$
- (5) $\cdot \nabla(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \nabla \alpha \wedge \nabla \beta$

4. СИНТАКСИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

4.1. $\Box$ -интерпретация

Классический доказуемый перевод логики QH в логику QS4 (см. [4]) продолжается до следующей синтаксической $\Box$ -интерпретации QHC в QS4, обозначаемой как $A \mapsto A_{\Box}$:

- перед атомарными i -формулам вставляется $\Box$;
- интуиционистские связки и кванторы становятся классическими (а также $[1] \times [1] \times [-2] \times [-4] \times$, $\sqrt{}$ превращаются в $\perp$, T), и перед ними вставляется $\Box$ (на самом деле, вставлять $\Box$ действительно необходимо только перед $\rightarrow$ и $\vee$);
- $?$ удаляется, $!$ заменяется на $\Box$.

Теорема 4.1. Если $A_1, \dots, A_n \vdash_{QHC} A$, то $(A_1)_{\Box}, \dots, (A_n)_{\Box} \vdash_{QS4} A_{\Box}$.

Следствие 4.2. Логика QHC является консервативным расширением логики QS4, а следовательно, и логики QC.

Несложно переформулировать $\Box$ -интерпретацию как расширение оригинальной формы Гёделя (см. [4]) доказуемого перевода:

- $\times$, $\sqrt{}$ превращаются в $\perp$, T ;
- интуиционистские связки и кванторы становятся классическими и после них (т.е. перед формулами, которые они связывают) вставляется $\Box$ (на самом деле, вставлять $\Box$ действительно необходимо только после $\vee$, $\exists$ и $\rightarrow$);
- $?$ удаляется, $!$ заменяется на $\Box$.

4.2. $\neg\neg$ -интерпретация

$5 A \mapsto A_{\neg\neg}$: Стандартный $\neg\neg$ -перевод логики QC в логику QH (см. [4]) продолжается до следующей синтаксической $\neg\neg$ -интерпретации QHC в QH, обозначаемой как $A \mapsto A_{\neg\neg}$:

- перед атомарными s -формулами вставляется $\neg\neg$;
- классические связки и кванторы становятся интуиционистскими (а также $\perp$, T превращаются в $\times$, $\sqrt{}$) и перед ними вставляется $\neg\neg$ (на самом деле, вставлять $\neg\neg$ действительно необходимо только перед $\vee$ и $\exists$);
- $!$ удаляется, $?$ заменяется на $\neg\neg$.

Теорема 4.3. Если $A_1, \dots, A_n \vdash_{QHC} A$, то $(A_1)_{\neg\neg}, \dots, (A_n)_{\neg\neg} \vdash_{QH} A_{\neg\neg}$.

Следствие 4.4. Логика QHC является консервативным расширением логики QH.

На вопрос автора, является ли логика QHC также консервативным расширением логики QH4, недавно утвердительно ответила А. Оноприенко [13], [14].

Несложно переформулировать $\neg\neg$ -интерпретацию в виде расширения версии Куроды (см. [4]) классического $\neg\neg$ -перевода:

- если вся формула есть s -формула, то перед ней вставляется $\neg\neg$;
- $\perp$, T превращаются в $\times$, $\sqrt{}$;
- классические связки и кванторы становятся интуиционистскими, и после них (т.е. перед формулами, которые они связывают) вставляется $\neg\neg$ (на самом деле, вставлять $\neg\neg$ действительно необходимо только после $\vee$);
- $?$ удаляется, $!$ заменяется на $\neg\neg$.

4.3. ∇ -интерпретация

$\Box$ -интерпретация QHC в QS4, взятая в композиции со вложением QS4 в QHC, $\Box \mapsto$, может быть “улучшена” так, чтобы сорта формул сохранялись. А именно, если A – формула логики QHC, пусть A_{∇} – формула логики QHC, полученная из A путём вставления $\nabla :=$ перед всеми атомарными i -формулами, а также перед всеми интуиционистскими связками и кванторами. (На самом деле, из связок и кванторов вставлять ∇ действительно необходимо только перед $\vee$ и $\exists$.)

Теорема 4.5. Если $A_1, \dots, A_n \vdash A$, то $(A_1)_{\nabla}, \dots, (A_n)_{\nabla} \vdash A_{\nabla}$. Более того, если A – формула логики QH, то $\vdash A_{\nabla}$ влечёт $\vdash A$.

В частности, это даёт нетривиальное вложение QH в QHC (на самом деле, в QH4), образ которого — “не различающий разных решений” (“proof-irrelevant”) экземпляр интуиционистской логики. С другой стороны, с помощью моделей можно показать, что ни $A \vdash A_{\nabla}$, ни $A_{\nabla} \vdash A$ вообще говоря неверно для формул логики QH.

4.4. $\diamond$ -интерпретация

$\neg\neg$ -интерпретацию QHC в QH тоже можно “улучшить” так, чтобы она сохраняла сорта формул. А именно, если A — формула логики QHC, пусть $A_{\diamond}$ — формула логики QHC, полученная из A вставлением $\square\diamond$ перед всеми атомарными с-формулами, всеми классическими связками и кванторами, а также перед всеми вхождениями $?$, где $\square =$ и $\diamond = \neg\square\neg$. (На самом деле, вставлять $\square\diamond$ перед $\wedge$ необязательно, а перед $\rightarrow$ и $\forall$ достаточно вставлять только $\square$.)

Теорема 4.6 Если $A_1, \dots, A_n \vdash A$, то $(A_1)_{\diamond}, \dots, (A_n)_{\diamond} \vdash A_{\diamond}$. Более того, если A — формула логики QC, то $\vdash A_{\diamond}$ влечёт $\vdash A$.

Получающееся нетривиальное вложение QC в QHC — это вложение Фиттинга QC в QS4 [16]. С другой стороны, $A \vdash A_{\diamond}$ опровергается рассмотрением моделей.

4.5. Уточнённый $\neg\neg$ -перевод

Следующую переформулировку $\diamond$ -интерпретации при ограничении на QC можно рассматривать как уточнение оригинального $\neg\neg$ -перевода Колмогорова:

- перед каждой классической $\rightarrow$ вставляется $?$, а после неё — $!$;
- перед каждым классическими $\forall$ и $\wedge$ вставляется $?$, а после них — $\neg!\neg$;
- перед каждым классическими $\vee$ и $\exists$ вставляется $\neg?\neg$, а после них — $!$;
- каждая ∇ заменяется на $\neg\neg$;
- каждый $!$, предшествующий атомарной с-формуле, заменяется на $\neg!\neg$;
- если вся формула начинается с $?$, этот $?$ заменяется на $\neg?\neg$;
- если вся формула есть атомарная с-формула, перед ней вставляется $\diamond$.

В самом деле, в этой интерпретации все классические связки и кванторы выражаются через интуиционистские, а также через $?$, $!$ и класси-

ческое $\neg$. Например, $\exists x p(x)$ интерпретируется как $\neg?\neg\exists x!p(x)$, т.е. “невозможно вывести противоречие из построения некоторого x вместе с доказательством $p(x)$ ”. С точки зрения математической практики это звучит более осмысленно, чем оригинальный колмогоровский перевод, $\neg\neg\exists x p(x)$.

4.6. $\neg\neg$ -перевод нельзя улучшить

Легко видеть, что следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} QH & \xrightarrow{\nabla\text{-перевод}} & QH4 \\ \downarrow \cdot\alpha\vee\neg\alpha & & \downarrow \nabla\mapsto\neg\neg \\ QC & \xrightarrow{\neg\neg\text{-перевод}} & QH. \end{array}$$

Эта диаграмма является пушаутом. Иными словами, классический $\neg\neg$ -перевод QC в QH не может быть улучшен в следующем смысле: он не пропускается ни через какую логику, полученную добавлением к QH4 набора законов, которые в совокупности строго слабее, чем $\cdot\nabla\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$.

5. ПРИНЦИПЫ

Законы и правила вывода логики QHC возникли из наиболее ранних и хорошо известных толкований интуиционистской логики, и потому едва ли в них может быть что-то спорное (если конечно мы принимаем язык логики QHC). Но не может ли случиться так, что ещё какой-нибудь настолько же не вызывающий сомнений принцип (или правило), выразимый в языке логики QHC, не выводим в QHC, и тем самым его “не хватает” в нашей системе вывода?

5.1. Гильбертов принцип “no ignorabimus”

Принцип разрешимости для i -формул, $\cdot?(\gamma \vee \neg\gamma)$, мы будем называть *гильбертовым принципом “no ignorabimus”*, или коротко *H-принципом*. Имеющие отношение к делу тексты Д. Гильберта, в которых он настаивал на принципе “разрешимости всякой математической проблемы”, подробно обсуждаются в [2].

Предложение 5.1. Каждый из следующих принципов эквивалентен H-принципу:

- (1) $\cdot?(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$;
- (2) $\cdot?\neg\alpha \leftrightarrow \neg?\alpha$;
- (3) $\cdot\nabla\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$;

- (4) $\cdot ?(\nabla \alpha \vee \neg \nabla \alpha);$
- (5) $\cdot \neg \neg \nabla \alpha \rightarrow \nabla \alpha;$
- (6) $\cdot ?(\neg \neg \nabla \alpha \rightarrow \nabla \alpha);$
- (7) $\cdot ?(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ?(\alpha \rightarrow ?\beta);$
- (8) $\cdot (\Box p \rightarrow \Box q) \leftrightarrow \Box(\Box p \rightarrow \Box q);$
- (9) $\cdot \Box p \leftrightarrow \Diamond \Box p;$
- (10) $\cdot \Diamond p \leftrightarrow \Box \Diamond p.$

Следствие 5.2. *Логика QНС, расширенная Н-принципом, является консервативным расширением логики QS5.*

5.2. Принцип стабильности Колмогорова

Принцип $\cdot \neg \neg p \rightarrow !p$ мы будем называть “принципом стабильности Колмогорова”, или коротко *К-принципом*. Это связано с мнением, выраженным А. Н. Колмогоровым в письме А. Гейтингу, которое, как аргументируется в [1; § 6.2.2] (см. также [2; § 3.1.2]), можно истолковать как утверждение, что в рамках конструктивизма всякое предложение должно быть либо задачей, либо *стабильным высказыванием*, то есть таким высказыванием P , что задача $\neg \neg P \rightarrow !P$ имеет решение. (Как обсуждается в [1; § 4.1], стабильные высказывания тесно связаны со стабильными задачами, то есть такими задачами Γ , что задача $\neg \neg \Gamma \rightarrow \Gamma$ имеет решение.)

Предложение 5.3. *Каждый из следующих принципов и правил эквивалентен К-принципу:*

- (1) $\cdot ?(\neg \neg p \rightarrow !p);$
- (2) $\cdot ?(!p \vee \neg \neg p);$
- (3) $\cdot \Box p \leftrightarrow p;$
- (4) $\cdot !\neg p \leftrightarrow \neg !p;$
- (5) $\cdot !(p \rightarrow q) \leftrightarrow !(p \rightarrow !q);$
- (6) $\cdot \Box(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\Box p \rightarrow \Box q);$
- (7) $\cdot \Box(p \rightarrow q) \leftrightarrow \Box(\Box p \rightarrow \Box q);$
- (8) $\cdot \Box(p \vee q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Box q);$
- (9) $\cdot \exists x p(x) \leftrightarrow \neg ? \neg \exists x !p(x);$
- (10) $\cdot \forall x p(x) \leftrightarrow ? \forall x \neg !\neg p(x);$
- (11) $\frac{\Diamond p}{p};$
- (12) $\frac{\neg !p}{\neg p}.$

Сродни принципу (3) следующий “принцип конструктивности доказательств” (*РС-принцип*): $\cdot \nabla \alpha \rightarrow \alpha$.

Предложение 5.4. (а) *Каждый из следующих принципов эквивалентен К-принципу:*

- (1) $\cdot (p \rightarrow q) \leftrightarrow ?(!p \rightarrow !q);$
- (2) $\cdot p \vee q \leftrightarrow ?(!p \vee !q);$
- (3) $\cdot \exists x p(x) \leftrightarrow ? \exists x !p(x);$
- (4) $\cdot \forall x p(x) \leftrightarrow ? \forall x !p(x).$

(б) *Каждый из следующих принципов эквивалентен РС-принципу:*

- (1) $\cdot (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ?(\alpha \rightarrow ?\beta);$
- (2) $\cdot \alpha \vee \beta \leftrightarrow ?(\alpha \vee ?\beta);$
- (3) $\cdot \exists x \alpha(x) \leftrightarrow ? \exists x \alpha(x);$
- (4) $\cdot \forall x \alpha(x) \leftrightarrow ? \forall x \alpha(x).$

Теорема 5.5. (а) *Логика QНС, расширенная любым набором следствий из К-принципа, является консервативным расширением как QН, так и QS.*

(б) *Логика QНС, расширенная любым набором следствий из РС-принципа, является консервативным расширением как QН, так и QS4.*

5.3. Дальнейшие принципы

Рассмотрим следующие принципы, каждый из которых является следствием или К-принципа, или РС-принципа.

- “Принцип сводимости” (*Р-принцип*): $\cdot (\nabla \alpha \rightarrow \nabla \beta) \rightarrow \nabla (\alpha \rightarrow \beta);$
- “Принцип снятия неоднозначности” (*Д-принцип*): $\cdot \nabla (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\nabla \alpha \vee \nabla \beta);$
- $\forall_{\nabla}$ -принцип: $\cdot \nabla \forall x \alpha(x) \leftrightarrow \forall x \nabla \alpha(x);$
- $\exists_{\Box}$ -принцип: $\cdot \Box \exists x p(x) \leftrightarrow \exists x \Box p(x);$
- $\exists_{\Box}$ -принцип: $\cdot \forall x \Box p(x) \leftrightarrow \Box \forall x p(x);$
- $\exists_{\Box}$ -принцип: $\cdot \exists x \nabla \alpha(x) \leftrightarrow \nabla \exists x \alpha(x).$

Рассмотрим также “РС-правило” $\frac{\nabla \alpha}{\alpha}$, которое, как легко видеть, эквивалентно правилу $\frac{? \alpha}{\alpha}$.

Предложение 5.6. *РС-принцип эквивалентен метаконъюнкции РС-правила и Р-принципа.*

8 из 9 введенных выше принципов допускают единообразное описание:

Предложение 5.7.

(а)

1. $\cdot ?!(p \vee q) \leftrightarrow !(p \vee !q)$ эквивалентен *К-принципу*;

2. $\cdot !? \alpha \vee !? \beta \leftrightarrow !(? \alpha \vee ? \beta)$ эквивалентен D-принципу.

(b)

1. $\cdot ?!(p \rightarrow q) \leftrightarrow ?(?!p \rightarrow !q)$ эквивалентен K-принципу;

2. $\cdot (?!p \rightarrow ?!q) \leftrightarrow ?(?!p \rightarrow !q)$ эквивалентен H-принципу;

3. $\cdot !?(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow !(? \alpha \rightarrow ? \beta)$ эквивалентен R-принципу.

(c)

1. $\cdot ?!\exists x p(x) \leftrightarrow ?\exists x !p(x)$ эквивалентен $\exists_{\square}$ -принципу;

2. $\cdot \exists x !? \alpha(x) \leftrightarrow !\exists x ? \alpha(x)$ эквивалентен $\exists_{\nabla}$ -принципу.

(d)

1. $\cdot \forall x !? \alpha(x) \leftrightarrow !\forall x ? \alpha(x)$ эквивалентен $\forall_{\nabla}$ -принципу;

2. $\cdot \forall x ?! p(x) \leftrightarrow ? \forall x !p(x)$ эквивалентен $\forall_{\square}$ -принципу.

Теорема 5.8. (a) 9 принципов, введенных выше, а также PC-правило (обозначаемое как PC*) невыводимы в логике QНС. Более того, между ними нет никаких импликаций, помимо самоимпликаций и следующих (см. рис. 1):

(b) Следующий “принцип исключительного снятия неоднозначности” (ED-принцип)

$$\cdot \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\nabla(\alpha \vee \beta) \rightarrow \nabla \alpha \vee \nabla \beta)$$

невыводим в логике QНС. Более того, он не следует ни из одного из 9 принципов, введенных ранее, за исключением D-принципа и PC-принципа.

Автором был поставлен вопрос, следует ли ED-принцип из PC-правила. Недавно А. Оноприенко ответила на этот вопрос отрицательно [13].

5.4. Интуиционистски неприемлемые принципы

Предложение 5.9. В предположении H-принципа выполнено следующее.

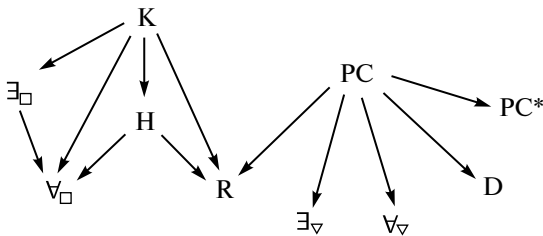


Рис. 1.

(a) PC-принцип эквивалентен PC-правилу, а также принципу $\cdot \alpha \vee \neg \alpha$;

(b) D-принцип эквивалентен принципу Янкова, $\cdot \neg \alpha \vee \neg \neg \alpha$;

(c) $\forall_{\nabla}$ -принцип эквивалентен принципу сдвига двойного отрицания,

$$\cdot \forall x \neg \neg \alpha(x) \rightarrow \neg \neg \forall x \alpha(x);$$

(d) $\exists_{\nabla}$ -принцип эквивалентен сильному принципу Маркова,

$$\cdot \neg \neg \exists x \alpha(x) \rightarrow \exists x \neg \neg \alpha(x);$$

(e) ED-принцип эквивалентен принципу $\cdot \nabla \alpha \vee \neg \nabla \alpha$.

Предложение 5.10. В предположении PC-принципа выполнено следующее.

(a) $\forall_{\square}$ -принцип влечёт принцип постоянства области,

$$\cdot \forall x(\alpha \vee \beta(x)) \rightarrow \alpha \vee \forall x \beta(x);$$

(b) $\exists_{\square}$ -принцип влечёт принцип независимости посылок,

$$\cdot (\alpha \rightarrow \exists x \beta(x)) \rightarrow \exists x(\alpha \rightarrow \beta(x)).$$

Предложение 5.11. (a) Принцип $\cdot \exists x p(x) \leftrightarrow \exists x !p(x)$

• эквивалентен метаконъюнкции $\exists_{\square}$ - и $\exists_{\nabla}$ -принципов; а также

• влечёт обобщённый принцип Маркова, $\cdot \neg \forall x \alpha(x) \rightarrow \exists x \neg \alpha(x)$.

(b) Принцип $\cdot ? \forall x \alpha(x) \leftrightarrow \forall x ? \alpha(x)$

• эквивалентен метаконъюнкции $\forall_{\square}$ - и $\forall_{\nabla}$ -принципов; а также

• влечёт параметрический принцип дистрибутивности,

$$\cdot \neg \forall y(\alpha(y) \vee \forall x \beta(x, y)) \rightarrow \neg \forall y \forall x(\alpha(y) \vee \beta(x, y)).$$

Предложение 5.12. Принцип Янкова $\cdot \neg \alpha \vee \neg \neg \alpha$ влечёт ED-принцип.

Хорошо известно, что принцип Янкова (также известный как закон де Моргана и “слабый закон исключённого третьего”), принцип сдвига двойного отрицания, сильный принцип Маркова, обобщённый принцип Маркова, принцип постоянства области и принцип независимости посылок не выводимы в QН (см. [4]). Параметрический принцип дистрибутивности — это ва-

риант известного принципа Клини, также невыводимый в QH [4].

6. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

6.1. Внутренностные модели

Рассматривая композицию $\square$ -интерпретации логики QHC с топологическими моделями логики QS4, мы получаем *внутренностные модели* логики QHC (называвшиеся “моделями Эйлера–Тарского” в ранних версиях [1] и [2]). Таким образом,

- фиксируются топологическое пространство X и множество D ;
- с-формулы с n свободными переменными интерпретируются D^n -параметрическими семействами произвольных подмножеств X , как в обычных моделях Лейбница–Эйлера–Венна;
- i-формулы с n свободными переменными интерпретируются D^n -параметрическими семействами открытых подмножеств X , как в обычных моделях Стоуна–Танга–Тарского;
- ! интерпретируется взятием внутренней, а ? в этих моделях не делает ничего.

6.2. Регуляризационные модели

Рассматривая композицию $\neg\rightarrow$ -интерпретации логики QHC с моделями Стоуна–Танга–Тарского логики QH, мы получим *регуляризационные модели* логики QHC (называвшиеся “моделями Тарского–Колмогорова” в ранних версиях [1] и [2]). Таким образом,

- фиксируются топологическое пространство X и множество D ;
- i-формулы с n свободными переменными интерпретируются D^n -параметрическими семействами открытых подмножеств X , как в обычных моделях Стоуна–Танга–Тарского;
- с-формулы с n свободными переменными интерпретируются D^n -параметрическими семействами регулярных открытых подмножеств X , используя обычную булеву алгебру регулярных открытых множеств;
- ? интерпретируется взятием внутренней замыкания, а ! в этих моделях не делает ничего.

6.3. Пучково/множественно-значные модели

Опишем теперь *пучково/множественно-значную* структуру, интерпретирующую язык логики QHC.

- Фиксируются топологическое пространство X и множество D ;
- с-формулы с n свободными переменными интерпретируются D^n -параметрическими семействами произвольных подмножеств X , как в обычных моделях Лейбница–Эйлера–Венна;
- i-формулы с n свободными переменными интерпретируются D^n -параметрическими семействами пучков множеств на X , используя обычные операции $\sqcup$, $\times$, Hom , $\prod_{d \in D}$, $\prod_{d \in D}$ на пучках; $\models \Phi$ означает, что Φ интерпретируется семейством, в котором каждый пучок имеет глобальное сечение;
- $|\!|F|\!|$ – пучок, задаваемый тождественным вложением $\text{Int} \mid F \mapsto X$;
- $|\!|?\Phi|\!|$ – множество всех таких $x \in X$, что стебель $\mid \Phi \mid_x$ пучка $\mid \Phi \mid$ непуст.

Аналогично описывается *предпучково/множественно-значная* структура. В этих структурах несколько иначе интерпретируются интуиционистские $\vee$ и $\exists$, поскольку вообще говоря $\sigma F \sqcup \sigma G \neq \sigma(F \sqcup G)$, где σF обозначает предпучок сечений пучка F .

Теорема 6.1. *Пучково/множественно-значные и предпучково/множественно-значные структуры являются моделями логики QHC.*

Результаты разделов § 4 и § 5 получены с использованием лишь трёх описанных классов моделей. Так же как и следующий результат: логика QHC неполна относительно каждого из этих 3 классов.

6.4. Модели с плотным образом

Класс моделей логики QHC, относительно которых она полна, был не так давно найден А. Оноприенко [13], [14]. После знакомства с её моделями пропозиционального фрагмента HC [13; § 4] автор описал следующий новый класс *топологических* моделей логики QHC.

- Фиксируется топологическое пространство X , множества D и S и отображение $fS \rightarrow X$ с плотным образом;
- с-формулы с n свободными переменными интерпретируются D^n -параметрическими семействами произвольных подмножеств S , как в обычных моделях Лейбница–Эйлера–Венна;
- i-формулы с n свободными переменными интерпретируются D^n -параметрическими

семействами открытых подмножеств X , как в обычных моделях Стоуна–Танга–Тарского;

- ? интерпретируется взятием прообраза относительно f ;
- ! интерпретируется сопоставлением всякому $T \subset S$ внутренности множества $X \setminus f(S \setminus T)$.

Автор спрашивал А. Оноприенко (в 2018 году), полна ли логика QHC относительно данного класса топологических моделей. Недавно она ответила на этот вопрос утвердительно в пропозициональном случае, причём уже для тех моделей, в которых f инъективно [13; § 8], [15].

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Обсуждение родственных исследований других авторов см. в [1; § 1.4].

Прокомментируем коротко значение логики QHC для элементарной математики.

1) *Алгебра*. Пучково/множественно-значные модели QHC (см. § 6) естественным образом возникают при рассмотрении действий над алгебраическими уравнениями [2; § 1.1].

2) *Геометрия*. Логическая структура первых 4 книг *Начал* Евклида достаточно хорошо описывается некоторой теорией над QHC, чисто классический фрагмент которой совпадает со слабой (конечно аксиоматизируемой) элементарной геометрией Тарского, а чисто интуиционистский фрагмент — с “интуиционистской геометрией Тарского”, построенной М. Бисоном [17].

3) *Арифметика*. В пока ещё незавершённой работе автора вводится объединённая логика высказываний, задач и решений, а также её предикатный вариант QHC_λ . Она содержит QHC, $S4_{pr}$ (см. § 2), а также типизированное λ -исчисление, отвечающее QH при соответствии Карри–Ховарда. Если исключить из QHC_λ квантификацию по решениям (и, тем самым, оператор ? логики QHC), получившийся фрагмент QHC_λ^- допускает, как ожидается, интересную арифметическую интерпретацию: задачи и их решения интерпретируются арифметическими множествами и их элементами, как в реализуемости по Клини; а задача $!P$, т.е. “доказать высказывание P ”, интерпретируется множеством гёделевых номеров всех формальных доказательств P .

БЛАГОДАРНОСТИ

Я хотел бы поблагодарить А. Бауэра, Л. Беклемишева, М. Безема, Ж. Довека, М. Джигладзе, А. Оно-

приенко, А. Л. Семёнова, Д. Шамканова, В. Шехмана и А. Шеня за ценные обсуждения и полезные комментарии и двум рецензентам ДАН за разумные замечания. Кроме того, я очень признателен А. Оноприенко за помощь в переводе текста статьи на русский язык. Настоящая заметка обязана своим появлением запросам А. Л. Семёнова и напоминаниям Л. Беклемишева и С. Кузнецова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Melikhov S.A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax. arXiv:1312.2575v5.
2. *Melikhov S.A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics. arXiv:1504.03379v5.
3. *Paulson L.C.* The foundation of a generic theorem prover // J. Automat. Reason. 1989. V. 5 P. 363–397.
4. *Melikhov S.A.* Mathematical semantics of intuitionistic logic. arXiv:1504.03380v3.
5. *Колмогоров А.Н.* К работам по интуиционистской логике. Избранные труды // Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 393; English transl., On the papers on intuitionistic logic. Selected Works of A.N. Kolmogorov // Mathematics and its Applications. 1991. V. 1. P. 451–452. Kluwer, Dordrecht: Soviet Series. V. 25.
6. *Kolmogoroff A.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Math. 1932. Z. 35. S. 58–65. Рус. пер. *Колмогоров А.Н.* К толкованию интуиционистской логики. Избранные труды // Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 142–148; English transl. *Kolmogorov A.N.* On the interpretation of intuitionistic logic. Selected works // Mathematics and its Applications. 1991. V. 1. P. 151–158. Kluwer, Dordrecht: Soviet Series. V. 25.
7. *Godt K.* Lecture at ZilseTs. Collected Works. V. III. New York: The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1995. P. 86–113.
8. *Artcmov S.N.* Explicit provability and constructive semantics // Bull. Symbolic Logic. 2001. N 7. P. 1–36.
9. *Fairtlough M. and Walton M.* Quantified lax logic. Tech. report CS-97-11, Univ. of Sheffield (1997). <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/versions?https://doi.org/10.1.1.50.69>
10. *Aczel P.* The Russell-Prawitz modality // Math. Structures Comput. Sci. 2001. N 11. P. 541–554.
11. *Artcmov S.N. and Protopopescu T.* Intuitionistic epistemic logic (early preprint version). arXiv: 1406.1582v2 (не путать с v4 и опубликованной версией).
12. *Curry H.B.* A Theory of Formal Deducibility // Notre Dame Math. Lectures. V. 6. Notre Dame, IN: Univ. of Notre Dame, 1950.

13. *Онопrienко А.А.* Семантика типа Крипке для пропозициональной логики задач и высказываний // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 5. С. 98–125; English transl., Onoprienko A.A. Kripke type semantics for a logic of problems and propositions // Sbornik Math. 2020. V. 211. P. 709–732.
14. *Онопrienко А.А.* Предикатный вариант совместной логики задач и высказываний // Матем. сб. 2022. Т. 213. № 7. С. 7, 97–120; English transl., Onoprienko A.A. The predicate version of the joint logic of problems and propositions. Sbornik Math. 2022. V. 213. P. 981–1003.
15. *Онопrienко А.А.* Топологические модели пропозициональной логики задач и высказываний // Вестник Москов. ун-ва. 2022. № 5. С. 25–30; English transl., Onoprienko A.A. Topological models of the propositional logic of problems and propositions // Moscow Univ. Math. Bull. 2022. N 77. P. 236–241.
16. *Fitting M.* An embedding of classical logic in S4 // J. Symbolic Logic. 1970. N 35. P. 529–534.
17. *Melikhov S.A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. III: Geometry. Preliminary version: §1A and §§3–4 in arXiv: 1504.03379v2.

A JOINT LOGIC OF PROBLEMS AND PROPOSITIONS

S. A. Melikhov^{a, *}

^a*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

In a 1985 commentary to his collected works, Kolmogorov informed the reader that his 1932 paper *On the interpretation of intuitionistic logic* “was written in hope that with time, the logic of solution of problems [i.e., intuitionistic logic] will become a permanent part of a [standard] course of logic. A unified logical apparatus was intended to be created, which would deal with objects of two types – propositions and problems.” We construct such a formal system as well as its predicate version, QHC, which is a conservative extension of both the intuitionistic predicate calculus QH and the classical predicate calculus QC. The axioms of QHC are obtained as a result of a simultaneous formalization of two well-known alternative explanations of intuitionistic logic: 1) Kolmogorov's problem interpretation (with familiar refinements by Heyting and Kreisel) and 2) the proof interpretation by Orlov and Heyting, as clarified and extended by Gödel.

Keywords: intuitionistic logic, BHK-interpretation, formal meta-logic