

УДК 517.984, 517.518.82

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С РАВНОМЕРНОЙ НОРМОЙ

© 2024 г. Д. Д. Казимиров^{1,*}, И. А. Шейпак^{1,**},

Представлено академиком РАН Б. С. Кашиным

Поступило 21.11.2023 г.

После доработки 11.01.2024 г.

Принято к публикации 09.02.2024 г.

Для функций, принадлежащих пространству Соболева $\dot{W}_\infty^n[0;1]$, и произвольной точки $a \in (0;1)$ получены наилучшие оценки в неравенстве $|f(a)| \leq A_{n,0,\infty}(a) \cdot \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0;1]}$. Установлена связь этих оценок с наилучшими приближениями сплайнов специального вида многочленами в $L_1[0;1]$ и с ядром Пеано. Найдены точные константы вложения пространства $\dot{W}_\infty^n[0;1]$ в $L_\infty[0;1]$.

Ключевые слова: оценки производных, пространства Соболева, теоремы вложения, аппроксимация многочленами, ядро Пеано

DOI: 10.31857/S2686954324020022, EDN: XJEWNK

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим пространство Соболева $\dot{W}_p^n[0;1]$ ($1 \leq p \leq \infty$), состоящее из вещественнозначных функций f , обладающих абсолютно непрерывными производными до порядка $n-1$ включительно, таких, что $f^{(n)} \in L_p[0;1]$, и удовлетворяющих краевым условиям

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Пространство $\dot{W}_p^n[0;1]$ снабжено естественной нормой

$$\|f\| := \|f^{(n)}\|_{L_p[0;1]}.$$

Для каждого $a \in (0;1)$ и $k = \overline{0, n-1}$ поставим целью изучить величины $A_{n,k,p}(a)$, являющиеся наименьшими возможными в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \leq A_{n,k,p}(a) \|f^{(n)}\|_{L_p[0;1]}.$$

Далее нас интересует глобальный максимум функции $A_{n,k,p}$ на отрезке $[0;1]$:

$$\Lambda_{n,k,p} := \max_{a \in (0;1)} A_{n,k,p}(a),$$

при этом очевидно, что $A_{n,k,p}(0) = A_{n,k,p}(1) = 0$.

Число $\Lambda_{n,k,p}$ является точной константой вложения пространства $\dot{W}_p^n[0;1]$ в пространство $\dot{W}_\infty^k[0;1]$, $k = \overline{0, n-1}$:

$$\Lambda_{n,k,p} = \sup \left\{ \|f^{(k)}\|_{L_\infty[0;1]} : \|f^{(n)}\|_{L_p[0;1]} = 1 \right\}.$$

В работе [1] было показано, что функции $A_{n,k,2}$ обладают следующим свойством: при четных k глобальный максимум находится в середине отрезка, а при нечетных k середина отрезка является локальным минимумом. Глобальный максимум $A_{n,k,2}$ при нечетных k находится в точке локального максимума, ближайшего к середине отрезка. Также были явно вычислены константы $\Lambda_{n,k,2}$ при всех четных k , в то время как случай нечетных k оказался сложнее.

В работе [2] получено явное описание функций $A_{n,k,2}$ в терминах гипергеометрических функций типа ${}_3F_2$. В работе [4] изучались функции $A_{n,n-1,\infty}$ и было показано, что они обладают таким же свойством, что и $A_{n,k,2}$: при четных $k = n-1$ глобальный максимум находится в се-

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

* E-mail: danil.kazimirov@math.msu.ru

** E-mail: iasheip@yandex.ru

редине отрезка, а при нечетных $k = n - 1$ середина отрезка является локальным минимумом. Глобальный максимум $A_{n,n-1,\infty}$ при нечетных $k = n - 1$ находится в точке локального максимума, ближайшего к середине отрезка. Также в [4] были вычислены константы вложения $\Lambda_{n,n-1,\infty}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Укажем основные цели данной работы: 1) изучить свойства функций $A_{n,0,\infty}$, показать их связь с задачей о наилучшем полиномиальном приближении в $L_1[0;1]$, а также найти их представление через ядро Пеано; 2) получить формулы для $\Lambda_{n,0,\infty}$. Основным результатом работы содержится в следующем утверждении.

Теорема.

$$\Lambda_{n,0,\infty} = \frac{n+1}{\pi 2^{n-2} (2n+1)!!} \left[1, \frac{1}{2n+2}, \frac{3}{2n+2}, \dots, \frac{2n+1}{2n+2}, \frac{2n+3}{2n+2}, \frac{2n+5}{2n+2}, \dots, \frac{4n+3}{2n+2} \right]; (-1)^{n+1}.$$

$$g_{n,k}(x,a) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(2n-k-1)!} (1-a)^{n-k} x^n h_{n,k}(1-x, 1-a), & x \in [0;a], \\ \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-k-1)!} a^{n-k} (1-x)^n h_{n,k}(x,a), & x \in [a;1], \end{cases} \quad (1)$$

где

$$h_{n,k}(x,a) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-1-l} C_{2n-1-k}^{n-1-l} x^{n-1-l} a^l \sum_{m=0}^l C_{n-1+m}^m x^m.$$

Т.е.

$$f^{(k)}(a) = \int_0^1 f^{(n)}(x) g_{n,k}^{(n)}(x,a) dx.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_m$ пространство вещественных многочленов степени не выше m :

$$\mathcal{P}_m = \left\{ \sum_{j=0}^m c_j x^j, \quad x, c_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq m \right\}.$$

В работе [3, теорема 2] получен следующий результат. При $1 \leq p \leq \infty$ справедливо равенство

$$A_{n,k,p}(a) = \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|g_{n,k}^{(n)} - u\|_{L_{p'}[0;1]}, \quad (2)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Символ ${}_p F_q$ обозначает гипергеометрическую функцию типа (p, q) .

Структура работы следующая. В § 2 устанавливается связь задачи о нахождении $A_{n,k,p}$ с наилучшим приближением определенных сплайнов многочленами в $L_{p'}[0;1]$ ($1/p + 1/p' = 1$). В § 3 вводятся специальные классы функций и показывается связь задачи об их наилучшем приближении многочленами в $L_1[0;1]$ с ядром Пеано. В § 4 выводится окончательная формула для констант вложения $\Lambda_{n,0,\infty}$ в терминах гипергеометрических функций. Характер асимптотического поведения $\Lambda_{n,0,\infty}$ при $n \rightarrow \infty$ установлен в § 5.

2. СВЯЗЬ $A_{n,k,\infty}$ С L_1 -АППРОКСИМАЦИЯМИ

Рассмотрим в $\mathcal{W}_2^n[0;1]$ функционал $f \mapsto f^{(k)}(a)$. В соответствии с теоремой Рисса он задан единственной функцией $g_{n,k}(x,a)$, которая (см. [5]) имеет вид

Таким образом, описание $A_{n,k,\infty}$ сводится к наилучшему приближению многочленами сплайна $g_{n,k}^{(n)}$ в $L_1[0;1]$. Аппроксимациям в $L_1[0;1]$, в том числе и многочленами, посвящено много работ, перечислить все не представляется возможным. Упомянем лишь монографию [6]. Определим следующие функции:

$$G_{n,k,1}(x,a) := g_{n,k}^{(n)} \Big|_{[0;a]},$$

$$G_{n,k,2}(x,a) := g_{n,k}^{(n)} \Big|_{[a;1]}.$$

Эти функции суть многочлены степени не выше $n-1$, при этом

$$\begin{aligned} G_{n,k,1}(x,a) - G_{n,k,2}(x,a) &= \\ &= \frac{(-1)^{n-k-1} (x-a)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \chi_{[0;a]}. \end{aligned}$$

Здесь $\chi_{[0;a]}$ — характеристическая функция отрезка $[0;a]$.

Следовательно, вычисление $A_{n,0,\infty}(a)$ равносильно нахождению при каждом $a \in (0;1)$ для сплайна $\frac{(-1)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{[0;a]}$ наилучшего приближения в $L_1[0;1]$ многочленами степени не выше $n-1$, т.е. справедлива

Теорема 1.

$$A_{n,0,\infty}(a) = \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \left\| \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{[0;a]} - u \right\|_{L_1[0;1]}.$$

3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ И ЯДРО ПЕАНО

1) Для натуральных n рассмотрим многочлены Чебышёва второго рода

$$U_n(x) := \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta, \quad x \in [-1;1].$$

Корни многочлена $U_n(x)$, перенесенного на отрезок $[0;1]$ (т.е. многочлена $U_n(2x-1)$), имеют вид

$$a_j := a_{j,n} = \sin^2 \frac{\pi j}{2(n+1)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Для функции $f \in L_1[0;1]$ через u_f обозначим многочлен, который интерполирует f в точках $\{a_j\}_{j=1}^n$. Через M_n обозначим множество всех таких функций $f \in L_1[0;1]$, для которых $(f - u_f)(-1)^n \operatorname{sgn}(U_n(2x-1))$ не меняет знак на отрезке $[0;1]$.

2) Через F_n (соответственно F_n^+) будем обозначать множество функций $f \in L_1[0;1]$, представимых в виде

$$f(x) = u(x) + \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} dg(s),$$

где g — функция ограниченной вариации (соответственно неубывающая), $u \in \mathcal{P}_{n-1}$.

Известно ([7, (2.10)]), что $F_n^+ \subset M_n$.

Лемма 1. Сплайн $\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_{[0;a]} \in F_n^+$.

Доказательство. В качестве u возьмем тождественно нулевой многочлен, и положим $g(s) = \chi_{(t,1]}(s)$, $t \in [0;1]$. $\square$

3) В теории приближений при оценках погрешности приближения используют ядро Пеано. В [7] при изучении наилучших L_1 -аппроксимаций

алгебраическими многочленами исследованы свойства ядра V_n на отрезке $[-1;1]$, где

$$V_n(t) := \frac{1}{(n-1)!} \int_{-1}^t (t-x)^{n-1} (-1)^n \operatorname{sgn} U_n(x) dx.$$

Основные свойства этой функции следующие ([7, теорема 1])

1. $V_n(t)$ — четная функция.
2. $V_n(t)$ положительна на $(-1;1)$ и строго возрастает на $[-1;0]$.

Также в [7, теорема 4] получено интегральное представление

$$V_n(t) = \frac{2\sqrt{2}(n+1)}{\pi n!} \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1/2} \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)^n}{1-(t+ix\sqrt{1-t^2})^{2(n+1)}} dx.$$

Для функции $f \in L_1[-1;1]$ обозначим

$$E_{n-1}(f) := \min_{u \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - u\|_{L_1[-1;1]}.$$

В [7] для различных классов функций в $L_1[-1;1]$ с помощью V_n получены оценки для E_{n-1} . В частности ([7, теорема 2]), показано, что для $f \in M_n \cap F_n$ справедливо равенство

$$E_{n-1}(f) = \left| \int_{-1}^1 V_n(s) dg(s) \right|.$$

Из леммы 1 и теоремы 1, с учетом замены переменных $t = 2a-1$, $a \in [0;1]$, получаем следующий результат.

Теорема 2.

$$A_{n,0,\infty}(a) = \frac{V_n(2a-1)}{2^n}, \quad a \in [0;1].$$

Из свойств функции $V_n(t)$ получаем

Теорема 3.

$$\Lambda_{n,0,\infty} = A_{n,0,\infty}(1/2) = \frac{V_n(0)}{2^n} = \\ = \frac{n+1}{\pi n! 2^{2(n-1)}} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}} dx.$$

4. ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ

Интеграл в теореме 3 существует для любого $n \in \mathbb{N}$, однако авторам не удалось найти в спра-

вочниках его значение в общем виде при всех n . Для натуральных p, q, r в предположении, что $l := \frac{r}{p}$ есть натуральное число, рассмотрим более общий интеграл

$$I(p, q, r, z) := \int_0^1 \frac{(1-x^p)^q}{1+zx^r} dx, \quad |z| < 1.$$

Теорема 4. Пусть $p, q, r, l = \frac{r}{p}$ — натуральные числа. Справедливо представление через гипергеометрическую функцию типа $(l+1, l)$:

$$I(p, q, r, z) = \frac{1}{p} B(1/p, q+1) \cdot {}_{l+1}F_l \left[\begin{matrix} 1, b, b + \frac{1}{l} \dots b + \frac{l-1}{l} \\ c, c + \frac{1}{l}, \dots, c + \frac{l-1}{l} \end{matrix}; -z \right],$$

где $b = \frac{1}{pl}$, $c = \frac{1+pq+p}{pl}$.

$$\frac{c_{j+1}}{c_j} = \frac{\left(\frac{1}{pl} + j\right) \left(\frac{1}{pl} + \frac{1}{l} + j\right) \dots \left(\frac{1}{pl} + \frac{l-1}{l} + j\right) (1+j)}{\left(\frac{1+pq+p}{pl} + j\right) \left(\frac{1+pq+2p}{pl} + j\right) \dots \left(\frac{1+pq+lp}{pl} + j\right) (1+j)},$$

что соответствует гипергеометрической функции

$${}_{l+1}F_l \left[\begin{matrix} 1, b, b + \frac{1}{l} \dots b + \frac{l-1}{l} \\ c, c + \frac{1}{l}, \dots, c + \frac{l-1}{l} \end{matrix}; -z \right],$$

где $b = \frac{1}{pl}$, $c = \frac{1+pq+p}{pl}$. Учитывая, что

$c_0 = \frac{1}{p} B(1/p, q+1)$, получаем

$$I(p, q, r, z) = \frac{1}{p} B(1/p, q+1) \cdot {}_{l+1}F_l \left[\begin{matrix} 1, b, b + \frac{1}{l} \dots b + \frac{l-1}{l} \\ c, c + \frac{1}{l}, \dots, c + \frac{l-1}{l} \end{matrix}; -z \right].$$

Замечание 1. При условии натуральности чисел $p, q, r, s, l = \frac{r}{p}$ аналогичным способом можно вычислить более общий интеграл

Доказательство. Используя разложение

$$\frac{1}{1+zx^r} = \sum_{j=0}^{\infty} (-z)^j x^{rj}$$

и замену переменных $t := x^p$, получим

$$\begin{aligned} I(p, q, r, z) &:= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{\infty} (-z)^j B\left(lj + \frac{1}{p}, q+1\right) = \\ &= \frac{\Gamma(q+1)}{p} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j! \Gamma(lj + 1/p)}{\Gamma(lj + 1/p + q + 1)} \frac{(-z)^j}{j!}. \end{aligned}$$

В сумме найдем отношение коэффициентов при последовательных степенях $(-z)$:

$$\frac{c_{j+1}}{c_j} = \frac{\Gamma(lj + 1/p + l) \Gamma(lj + 1/p + q + 1)}{\Gamma(lj + 1/p + q + l + 1) \Gamma(lj + 1/p)}.$$

Последнюю дробь можно записать в виде

$$I(p, q, r, s, z) := \int_0^1 (1-x^p)^q (1+zx^r)^{-s} dx.$$

Он равен

$$\begin{aligned} I(p, q, r, s, z) &= \\ &= \frac{1}{p} B(1/p, q+1) \cdot {}_{l+1}F_l \left[\begin{matrix} s, b, b + \frac{1}{l} \dots b + \frac{l-1}{l} \\ c, c + \frac{1}{l}, \dots, c + \frac{l-1}{l} \end{matrix}; -z \right], \end{aligned}$$

где $b = \frac{1}{pl}$, $c = \frac{1+pq+p}{pl}$.

Для интеграла в представлении V_n имеем $p = 2$, $q = n$, $r = 2n + 2$, откуда $l = n + 1$.

Замечание 2. Теорема 4 доказана в предположении $|z| < 1$. Однако параметры получившегося гипергеометрического ряда обладают свойством

$$\sum_{j=0}^n \left(c + \frac{j}{n+1} - b - \frac{j}{n+1} \right) = n+1 > 0.$$

Поэтому по [8, теорема 2.1.2] ряд сходится абсолютно и для всех $|z| = 1$.

Итого,

$$\Lambda_{n,0,\infty} = \frac{n+1}{\pi n!} \frac{1}{2^{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{2} B(1/2, n+1) \cdot$$

$${}_{n+2}F_{n+1} \left[\begin{matrix} 1, b, b + \frac{1}{n+1} \dots b + \frac{n}{n+1} \\ c, c + \frac{1}{n+1}, \dots, c + \frac{n}{n+1} \end{matrix}; (-1)^{n+1} \right],$$

где $b = \frac{1}{2n+2}$, $c = \frac{2n+3}{2n+2}$.

Используя свойства бета-функции, получаем окончательную формулу для констант вложения

$$\Lambda_{n,0,\infty} = \frac{n+1}{\pi 2^{n-2} (2n+1)!!}$$

$${}_{n+2}F_{n+1} \left[\begin{matrix} 1, \frac{1}{2n+2}, \frac{3}{2n+2} \dots \frac{2n+1}{2n+2} \\ \frac{2n+3}{2n+2}, \frac{2n+5}{2n+2}, \dots, \frac{4n+3}{2n+2} \end{matrix}; (-1)^{n+1} \right].$$

Приведем несколько начальных значений величин $\Lambda_{n,0,\infty}$:

$$\Lambda_{1,0,\infty} = 1/2, \quad \Lambda_{2,0,\infty} = 1/16,$$

$$\Lambda_{3,0,\infty} = (2 - \sqrt{2})/96, \quad \Lambda_{4,0,\infty} = (8 - 3\sqrt{5})/3072.$$

5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

$\Lambda_{n,0,\infty}$ ПРИ $n \rightarrow \infty$

Теорема 5. Справедлива следующая асимптотическая формула

$$\int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (3)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. 1) Введем обозначения

$$f_n(x) := \frac{(1-x^2)^n}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}},$$

$$g_n(x) := (1-x^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим функцию

$$h_n(x) := |f_n(x) - g_n(x)| = \frac{(1-x^2)^n x^{2n+2}}{1+(-1)^n x^{2(n+1)}}.$$

Для четных n на отрезке $[0;1]$ справедлива оценка

$$h_n(x) \leq (1-x^2)^n x^{2n} \leq \frac{1}{2^{2n}}.$$

Для нечетных n на отрезке $[0;1]$ справедлива оценка

$$h_n(x) = \frac{(1-x)^{n-1} (1+x)^n x^{2n+2}}{(1+x+\dots+x^n)(1+x^{n+1})} \leq$$

$$\leq 2(1-x^2)^{n-1} x^{2n-2} \leq \frac{1}{2^{2n-3}}.$$

2) Справедливо следующее представление

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, n+1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} n!}{(2n+1) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)},$$

где B , Γ – бета- и гамма- функции Эйлера, откуда получаем асимптотическое поведение

$$\int_0^1 g_n(x) dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из равномерной экспоненциальной близости функций f_n и g_n на отрезке $[0;1]$ при $n \rightarrow \infty$ следует утверждение теоремы. $\square$

Из теорем 3 и 5 немедленно получаем

Следствие 1. Для констант вложения $\Lambda_{n,0,\infty}$ справедлива асимптотика

$$\Lambda_{n,0,\infty} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi} n! 2^{2n-1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Результаты получены при поддержке РФФ грант № 20-11-20261.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. О точных оценках производных четного порядка в пространствах Соболева // Функциональный анализ. 2021. Т. 55. № 1. С. 43–55.
2. Гарманова Т.А. Оценки производных в пространствах Соболева в терминах гипергеометрических функций // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 500–507.
3. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Связь наилучших L_p приближений сплайнов многочленами с оценками значений промежуточных производных в пространствах Соболева // Математические заметки, (принята к печати).

4. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Точные оценки производных высокого порядка в пространствах Соболева // Вестник МГУ. Серия 1: Математика. Механика (принята к печати).
5. Гарманова Т.А., Шейпак И.А. Явный вид экстремалей в задаче о константах вложения в пространствах Соболева // Труды Московского математического общества. 2019. Т. 80. № 2. С. 221–246.
6. Pinkus A. On L_1 -Approximation // Cambridge University Press. 2008. 252 p.
7. Fiedler H., Jurkat W.B. Best L_1 -Approximation by Polynomials // Journal Of Approximation Theory, 1983. N 31. P. 269–292.
8. Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж. Специальные функции // Перевод с англ. под ред. Ю.А. Неретина. М.: МЦНМО, 2013. 652 с.

EXACT ESTIMATES OF FUNCTIONS IN SOBOLEV SPACES WITH UNIFORM NORM

D. D. Kazimirov^{a,*}, I. A. Sheypak^{a,**}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics,
Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B. S. Kashin

For functions from the Sobolev space $\mathring{W}_\infty^n[0;1]$ and an arbitrary point $a \in (0;1)$, the best estimates are obtained in the inequality $|f(a)| \leq A_{n,0,\infty}(a) \cdot \|f^{(n)}\|_{L_\infty[0;1]}$. The connection of these estimates with the best approximations of splines of a special kind by polynomials in $L_1[0;1]$ and with the Peano kernel is established. Exact constants of embedding the space $\mathring{W}_\infty^n[0;1]$ in $L_\infty[0;1]$ are found.

Keywords: estimates of derivatives, Sobolev spaces, embedding theorems, approximation by polynomials, Peano kernel