ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, том 516, с. 5–8

МАТЕМАТИКА

УДК 517.955

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ КОЛМОГОРОВА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2024 г. Член-корр. РАН В. И. Богачев[1, 2, 3, *], С. В. Шапошников[1, 2, **]

Поступило 23.01.2024 г.
После доработки 09.02.2024 г.
Принято к публикации 09.02.2024 г.

Получены широкие условия для восстановления коэффициентов оператора Колмогорова по решению задачи Коши для соответствующего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Ключевые слова: оператор Колмогорова, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, мартингальная задача

DOI: 10.31857/S2686954324020018, **EDN:** XJFWEY

Оператором Колмогорова с зависящими от времени коэффициентами на $\mathbb{R}^d$ называют эллиптический дифференциальный оператор второго порядка вида

$$L\varphi(x,t) = \sum_{i,j\le d} a^{ij}(x,t)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi(x) + \sum_{i\le d} b^i(x,t)\partial_{x_i}\varphi(x),$$

где для фиксированного отрезка $[\tau,T]$ на $\mathbb{R}^d\times[\tau,T]$ заданы отображение $b=(b^i)$ со значениями в $\mathbb{R}^d$ и отображение $A=(a^{ij})$ со значениями в пространстве неотрицательно определенных симметричных $d\times d$-матриц, причем функции b^i и a^{ij} измеримы по Борелю. Для такого оператора ставится задача Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t\mu_t = \sum_{i,j\le d}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\left(a^{ij}\mu_t\right) - \sum_{i\le d}\partial_{x_i}\left(b^i\mu_t\right) \qquad (1)$$

с начальным условием $\mu_\tau=\nu$, где ν – борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$. Вероятностным решением указанной задачи Коши называется семейство $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$ борелевских вероятностных мер на $\mathbb{R}^d$, для которых функция $t\mapsto\mu_t(E)$ измерима по Борелю для всякого борелевского множества E в $\mathbb{R}^d$, конечны интегралы

$$\int_0^T\int_K \left|a^{ij}(x,s)\right| + \left|b^i(x,s)\right|\mu_s(dx)ds$$

для компактов $K\subset\mathbb{R}^d$ и для каждой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполнено тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\nu = \int_\tau^t\int_{\mathbb{R}^d} L\varphi d\mu_s\, ds.$$

Требуемое при этом условие локальной интегрируемости коэффициентов относительно решения автоматически выполнено в случае локально ограниченных коэффициентов. Решением называют также меру $\mu=\mu_t(dx)dt$, которая определяется равенством

$$\int_{\mathbb{R}^d\times[\tau,T]} f\,d\mu = \int_\tau^T\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mu_t(dx)dt.$$

Указанное условие на коэффициенты есть локальная интегрируемость относительно μ.

Пусть $y\in\mathbb{R}^d$ и $(\mu_t^y)_{t\in[\tau,T]}$ – семейство борелевских вероятностных мер на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющее уравнению (1) с начальным условием $\mu_\tau=\delta_y$ – мерой Дирака в точке y. В работе Колмогорова [1] было показано, что в случае достаточно регулярных коэффициентов они могут быть вычислены по таким решениям посредством формул

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^d}(x_i-y_i)\mu_{\tau+h}^y(dx) = b^i(y,\tau), \qquad (2)$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}^d}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\mu_{\tau+h}^y(dx) = a^{ij}(y,\tau). \qquad (3)$$

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия*
[3] *Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия*
**E-mail: vibogach@mail.ru*
***E-mail: starticle@mail.ru*

Естественно возникает вопрос о возможности восстановления коэффициентов по решениям в общем случае. В недавней работе [2] показано, что если коэффициенты непрерывны, удовлетворяют оценкам

$$\left|a^{ij}(x,t)\right| \le C\left(1+|x|^2\right),$$
$$\left|b^{i}(x,t)\right| \le C\left(1+|x|\right),$$

с некоторой постоянной C (при этих оценках интегралы от $|x|^2$ по мерам μ_t ограничены на отрезках), то указанные А.Н. Колмогоровым равенства справедливы.

Если коэффициенты a^{ij}, b^i не имеют непрерывных версий, то эти равенства нуждаются в уточнении, так как поточечно они могут не выполняться просто из-за того, что изменение коэффициентов на множестве нулевой $\mu_t dt$-меры не меняет уравнение. Кроме того, интересно получить аналоги этих равенств в случае, когда начальное условие не является дельта-мерой. Ниже в теореме 2 представлен результат такого рода. Он дает широкие достаточные условия восстановления коэффициентов по решению, покрывающие случай непрерывных коэффициентов и дираковских начальных распределений, а также случай разрывных коэффициентов и начального распределения, заданного плотностью с некоторыми свойствами. Доказательства будут опубликованы в подробной статье.

Определение 1. *Будем говорить, что борелевская функция f на $\mathbb{R}^d\times[\tau,T]$ аппроксимируема относительно семейства вероятностных мер $(\mu_t)_{[\tau,T]}$, если существует такая последовательность ограниченных борелевских функций f_n на $\mathbb{R}^d\times[\tau,T]$, что эти функции непрерывны по x, выполнено равенство*

$$\lim_{t\to\tau}\sup_{x\in U}\left|f_n(x,t)-f_n(x,\tau)\right|=0 \qquad (4)$$

для каждого шара U, а также выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{esssup}_{s\in[\tau,T]}\left\|f(\cdot,s)-f_n(\cdot,s)\right\|_{L^1(\mu_s)}=0. \qquad (5)$$

В силу этого определения для всякого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $m,n\ge N$ и почти всех $s\in[\tau,T]$ справедлива оценка

$$\| f_m(\cdot,s)-f_n(\cdot,s)\|_{L^1(\mu_s)}\le\varepsilon.$$

Поэтому найдется такое множество $S\subset[\tau,T]$ с дополнением меры нуль, что при всех $s\in S$ последовательность $f_n(\cdot,s)$ сходится в $L^1(\mu_s)$ к некоторому пределу $\widetilde{f}(\cdot,s)$. Нетрудно проверить, что сходимость имеет место и при $s=\tau$, так что можно считать, что $\tau\in S$ и поэтому есть функция $\widetilde{f}(\cdot,\tau)$, которая будет играть важную роль в теореме 2.

Новая функция $\widetilde{f}$ является версией исходной в том смысле, что $\widetilde{f}(x,s)=f(x,s)$ почти всюду относительно меры μ на $\mathbb{R}^d\times[\tau,T]$. Это свойство, конечно, зависит от меры μ, но если известно, что всякое вероятностное решение данного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова обладает почти всюду положительной плотностью относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^d\times[\tau,T]$, то построенная версия универсальна для всех мер с плотностями. Известны различные достаточные условия положительности плотностей всех вероятностных решений, в частности, достаточно, чтобы матрица диффузии была локально липшицева и обратима, а коэффициент сноса был локально ограничен (см. [3, гл. 8]).

Ясно, что всякая непрерывная и ограниченная функция f на $[\tau,T]\times\mathbb{R}^d$ аппроксимируема относительно $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$, причем можно считать, что $\widetilde{f}=f$.

Приведем достаточное условие аппроксимируемости функции f относительно семейства $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$, выполненное без предположения о ее непрерывности.

Теорема 1. *Предположим, что для почти всех $t\in[\tau,T]$ мера μ_t имеет плотность $\rho(\cdot,t)$ относительно меры Лебега, причем на всяком шаре U функции $\rho(\cdot,t)$ равномерно интегрируемы (например, равномерно ограничены в $L^p(U)$, где $p>1$). Пусть локально ограниченная измеримая функция f удовлетворяет следующим условиям:*

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{t\in[\tau,T]}\int_{|x|\ge R}|f(x,t)|\mu_t(dx)=0, \qquad (6)$$

для каждого шара U множество функций $x\mapsto f(x,t)$ имеет компактное замыкание в $L^1(U)$ и

$$\lim_{t\to\tau}\sup_{x\in U}\left|f(x,t)-f(x,\tau)\right|=0. \qquad (7)$$

Тогда функция f аппроксимируема относительно семейства $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$.

Пример 1. (i) Всякая ограниченная измеримая функция f, не зависящая от t, аппроксимируема относительно семейства мер $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$, непрерывного по t в слабой топологии и удовлетворяющего указанному в предложении условию на плотность ρ. Действительно, условие предкомпактности и (7) тривиально выполнены, а для проверки (6) достаточно заметить, что данное семейство мер равномерно плотно по теореме Прохорова, поскольку оно компактно в слабой топологии в силу непрерывности μ_t по t.

(ii) Всякая непрерывная функция f, не зависящая от t, аппроксимируема относительно всякого семейства мер $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$, относительно которого она равномерно интегрируема. Здесь в качестве g_n можно брать срезки $\psi_n(f)$, где $\psi_n(u)=u$ при $|u|\le n$, $\psi_n(u)=n$ при $u>n$, $\psi_n(u)=-n$ при $u<-n$. Например, это верно, если функция f непрерывна, удовлетворяет оценке $|f(x)|\le C+C|x|^k$ и меры μ_t обладают равномерно ограниченными моментами некоторого порядка $m>k$.

(iii) Более общим образом, непрерывная на $\mathbb{R}^d\times[\tau,T]$ функция f аппроксимируема относительно семейства мер $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$, если функции $f(\cdot,t)$ равномерно интегрируемы относительно мер μ_t. Например, это верно при тех же оценке $|f(x,t)|\le C+C|x|^k$ и условии равномерной ограниченности моментов меры μ_t порядка $m>k$. В частности, если $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$ — решение задачи (1), где $|a^{ij}(x,t)|\le C(1+|x|^2)$, $|b^i(x,t)|\le C(1+|x|)$ и начальное условие имеет второй момент, то непрерывная функция f с оценкой $|f(x,t)|\le C_1(1+|x|^2)$, аппроксимируема относительно $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$.

При применении к решениям задачи (1) указанное условие на плотности исключает сингулярные начальные распределения в момент τ, но известно, что оно выполнено, если матрицы $A(x,t)^{-1}$ равномерно ограничены, матрицы $A(x,t)$ равномерно липшицевы по x, а плотность $\rho(\cdot,\tau)$ локально ограничена (см. [3, §7.3]).

Приведем основной результат о восстановлении коэффициентов A и b по вероятностному решению $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$ уравнения (1) при следующем условии:

$$\frac{a^{ij}(x,t)}{|x|+1},\, b^i(x,t) \text{ интегрируемы в мере } \mu=\mu_t(dx)dt. \quad (8)$$

В формулировке используется некоторое семейство мер μ_t^y, порожденное решением задачи (1) с начальным распределением μ_τ и дающее решения задачи (1) с дираковскими начальными распределениями δ_y. Это семейство строится следующим образом. Согласно известному принципу суперпозиции (см. [6], [7], [8]), при условии (8) существует такая борелевская вероятностная мера P на пространстве непрерывных траекторий $\Omega:=C([\tau,T],\mathbb{R}^d)$ с его обычной sup-нормой, что

$$\mu_t=P\circ e_t^{-1}, \quad \text{где } e_t(\omega)=\omega(t),$$

и для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение

$$(\omega,t)\mapsto\varphi\big(\omega(t)\big)-\varphi\big(\omega(\tau)\big)-\int_\tau^t L\varphi\big(\omega(s),s\big)ds$$

является мартингалом относительно P и фильтрации $\mathcal{F}_t$, порожденной отображениями e_s, $\tau\le s\le t$. Такая мера P называется решением мартингальной задачи (см. [4], [5]). Пусть P^y — условные меры, получающиеся при дезинтегрировании меры P относительно меры μ_τ. Это означает, что мера P записывается в виде $P(d\omega)=P^y(d\omega)\mu_\tau(dy)$, т.е. для всякого борелевского множества $B\subset\Omega$ выполнено равенство

$$P(B)=\int_{\mathbb{R}^d}P^y(B)\mu_\tau(dy),$$

где каждая мера P^y сосредочена на множестве $e_\tau^{-1}(y)$ и борелевски зависит от y. Непосредственно проверяется, что для μ_τ-почти всякого y семейство мер $\mu_t^y=P^y\circ e_t^{-1}$ является решением уравнения (1) с начальным условием $\mu_\tau^y=\delta_y$.

Отметим, что решения μ_t^y не обязаны существовать при всех y. Кроме того, не предполагается единственность решения задачи Коши. В случае неединственности важно использовать именно указанные решения, порожденные решением мартингальной задачи (его единственность также не предполагается).

Теорема 2. *Предположим, что*

$$\sup_{t\in[\tau,T]}\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2\mu_t(dx)<\infty$$

и коэффициенты b^i аппроксимируемы относительно семейства $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{h\to0+}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\begin{gathered}\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^d}\left(x^i-y^i\right)\mu_{\tau+h}^y(dx)-\\ -\tilde{b}^i(y,\tau)\end{gathered}\right|\mu_\tau(dy)=0.$$

Если, более того, функции a^{ij} интегрируемы относительно меры μ и функции $x_j b^i$ аппроксимируемы относительно семейства $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$, причем при некотором $p>2$ интегралы от $|x|^p$ по мерам μ_t равномерно ограничены и $\sup_t \| b(\cdot,t)\|_{L^2(\mu_t)} < \infty$, то верно равенство

$$\lim_{h\to 0+}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}^d}\left(x^i-y^i\right)\left(x^j-y^j\right)\mu_{\tau+h}^y(dx)-\tilde{a}^{ij}(y,\tau)\right|\mu_\tau(dy)=0.$$

Таким образом, равенства (2) и (3) выполнены в смысле сходимости в $L^1(\mu_\tau)$.

Статья поддержана проектом 23-Ш05-16 в рамках Междисциплинарных научно-образовательных школ Московского университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmogoroff A.* // Math. Ann. 1931. B. 104. S. 415–458; русский пер.: Колмогоров А.Н. // Успехи матем. наук. 1938. Т. 5. С. 5–41.
2. *Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В.* // Теория вероятн. и ее примен. 2023. Т. 68. № 3. С. 420–455.
3. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
4. *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. Springer-Verlag, Berlin – New York, 1979.
5. *Rogers L.C.G., Williams D.* Diffusions, Markov processes, and martingales. V. 2. Itô calculus. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
6. *Figalli A.* // J. Funct. Anal. 2008. V. 254. N 1. P. 109–153.
7. *Trevisan D.* // Electron. J. Probab. 2016. V. 21, Paper No. 22, 41 pp.
8. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // J. Dynam. Differ. Equat. 2021. V. 33. N 2. P. 715–739.

ON RECONSTRUCTION OF KOLMOGOROV OPERATORS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

Corresponding Member of the RAS V. I. Bogachev[a, b, c, *], S. V. Shaposhnikov[a, b, **]

[a] *Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia*

[b] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

[c] *Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russia*

We obtain broad sufficient conditions for reconstructing the coefficients of a Kolmogorov operator by means of a solution to the Cauchy problem for the corresponding Fokker–Planck–Kolmogorov equation.

Keywords: Kolmogorov operator, Fokker–Planck–Kolmogorov equation, martingale problem