

О ЧИСЛАХ БОРСУКА ПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО

© 2024 г. А. М. Райгородский^{1,2,3,4,*}, А. Сагдеев^{5,1,**}

Представлено академиком А.Л. Семеновым

Получено 25.07.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принято к публикации 29.01.2024 г.

В 1993 г. Кан и Калаи построили свой знаменитый пример конечных множеств в d -мерных евклидовых пространствах, которые не могут быть разбиты на $(1.203... + o(1))^{\sqrt{d}}$ частей меньшего диаметра. Их метод работает не только в евклидовом, но также и во всех ℓ_p -пространствах. В этой короткой заметке мы покажем, что чем больше значение p , тем сильнее становится эта конструкция.

Ключевые слова: проблема Борсука, пространство Минковского, ℓ_p -норма

DOI: 10.31857/S2686954324010151, **EDN:** ZSZNVW

1. ВВЕДЕНИЕ

Для d -мерного нормированного пространства (Минковского) $\mathbb{M}^d$ его *число Борсука* $b(\mathbb{M}^d)$ определяется как наименьшее $k \in \mathbb{N}$, такое, что каждое ограниченное подмножество $\mathbb{M}^d$, состоящее хотя бы из двух точек, может быть разбито на k частей меньшего диаметра. Это определение было введено Грюнбаумом, который доказал в [8], что $b(\mathbb{M}^2) \leq 4$ и что это неравенство строгое, если “единичный диск” плоскости Минковского $\mathbb{M}^2$ не является параллелограммом. Болтянский и Гохберг [3] изучили эту проблему в больших размерностях и предположили, что неравенство $b(\mathbb{M}^d) \leq 2^d$ всегда справедливо. Наилучшей верхней оценкой на сегодняшний день является неравенство $b(\mathbb{M}^d) = O(2^d d \ln d)$, см. [17].

Ввести определение числа Борсука Грюнбаума мотивировала классическая “гипотеза” Борсука

(см. [5]) о том, что каждое ограниченное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, состоящее хотя бы из двух точек, может быть разбито на $d+1$ часть меньшего диаметра. В приведенной выше нотации эта гипотеза утверждает, что $b(\mathbb{R}^d) = d+1$, т.к. для правильного симплекса в $\mathbb{R}^d$ требуется хотя бы $d+1$ часть. Гипотеза Борсука была доказана при $d \leq 3$, см. обзоры [13, 14]. Однако в 1993 г. она была опровергнута Каном и Калаи, которым удалось построить контрпримеры при всех $d \geq 2015$, а также доказать, что $b(\mathbb{R}^d) \geq (1.203... + o(1))^{\sqrt{d}}$ при $d \rightarrow \infty$. На сегодняшний день известно, что $b(\mathbb{R}^{64}) > 65$, и что $b(\mathbb{R}^d) \geq (1.2255... + o(1))^{\sqrt{d}}$, см. [4, 9 и 15] соответственно. В то же время было показано, что $b(\mathbb{R}^d) \leq 2^{d-1} + 1$ при всех $d \in \mathbb{N}$, см. [11], и асимптотически $b(\mathbb{R}^d) \leq (1.224... + o(1))^d$, см. [18, 6]. Отметим, что последняя оценка значительно сильнее, чем того требует общая гипотеза Болтянского–Гохберга. При $d \in [4, 63]$ гипотеза Борсука остается открытой.

В этой короткой заметке мы фокусируемся на d -мерных пространствах ℓ_p^d с ℓ_p -нормой. (Напомним, что для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ее ℓ_p -норма задается выражением $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p}$ при всех действительных $p \geq 1$ и выражением $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$ в случае $p = \infty$.) Легко видеть, что $b(\ell_\infty^d) = 2^d$ при всех $d \in \mathbb{N}$. Гипотеза Болтянского–Гохберга о том, что $b(\mathbb{M}^d) \leq 2^d$, была дока-

¹Московский физико-технический институт, Москва, Россия

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

³Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

⁴Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия

⁵Институт математики им. Альфреда Реньи, Будапешт, Венгрия

*E-mail: mraigor@yandex.ru

**E-mail: sagdeevarsenii@gmail.com

зана для всех ℓ_p^d -пространств в случае $d = 3$ Ю и Зонгом [22], а совсем недавно Ванг и Сюэ [20] справились и со случаем $d = 4$. Насколько нам известно, эта гипотеза остается открытой при каждом действительном $p \neq 2$ и каждом $d > 4$. Что касается нижних оценок чисел $b(\ell_p^d)$, мы покажем, что небольшая модификация подхода Кана и Калаи позволяет получить следующее.

Теорема 1. При всех $n, k \in \mathbb{N}$ и $p, \lambda \in \mathbb{R}$, таких, что $1 < k < n/2$, $p \geq 1$, $-1/2 \leq \lambda \leq 0$, положим

$$d = \binom{n}{2},$$

$$t_0 = \frac{(3k - n)|\lambda|^p + k|1 + \lambda|^p + (1/2 - k)|1 + 2\lambda|^p}{2|\lambda|^p + 2|1 + \lambda|^p - |1 + 2\lambda|^p}.$$

Пусть $t_1 \leq \lfloor t_0 + 1/2 \rfloor$ есть наибольшее целое число, такое, что $k - t_1$ является либо простым, либо степенью простого. Если $0 < t_1 < k/2$, то

$$b(\ell_p^d) \geq \binom{n}{k} / \binom{n}{k - t_1 - 1}.$$

Для произвольной степени простого q мы применим этот результат к $n = 4q - 1, k = 2q - 1, \lambda = -1/2$ и получим, что $b(\ell_p^d) \geq \binom{4q-1}{2q-1} / \binom{4q-1}{q-1}$ вне зависимости от значения $p \geq 1$. При больших d это приводит к оригинальной оценке Кана и Калаи $b(\ell_p^d) \geq (3^{3/4}/2 + o(1))^{\sqrt{2d}} = (1.203... + o(1))^{\sqrt{2d}}$. Упомянутый выше выбор значений вспомогательных параметров является асимптотически оптимальным для евклидовых пространств и, более общо, при всех $1 \leq p \leq 2$, так что нам кажется неожиданным, что при всех $p > 2$ параметры можно подобрать лучше. Оптимальные значения параметров и итоговые величины $c(p)$, такие, что $b(\ell_p^d) \geq (c(p) + o(1))^{\sqrt{2d}}$ при $d \rightarrow \infty$, см. в таблице 2 и на рис. 1. Чтобы убедиться, что выбор параметров как в первых трех столбцах таблицы 2 действительно приводит к результату, указанному в ее последнем столбце, достаточно применить формулу Стирлинга к биномиальным коэффициентам и заметить, что $t_1 = t_0 - o(n)$, т.к. интервалы между соседними простыми числами относительно невелики, см. [1]. Можно показать, что пределом $\lim_{p \rightarrow \infty} c(p)$ наших нижних оценок является величина $(\frac{1+\sqrt{2}}{2})^{\sqrt{2}} = 1.304...$. Это число представляет собой естественный барьер, который не может быть преодолен в рамках использованного метода.

Отметим важную тонкость касательно последнего утверждения. Как мы указывали выше, для случая $\ell_2^d = \mathbb{R}^d$ известна лучшая оценка $b(\mathbb{R}^d) \geq (1.2255... + o(1))^{\sqrt{d}}$. Она получена несколько другим методом, и нам не удалось распространить его на другие значения $p \neq 2$. Тем не менее даже наш текущий подход позволяет получить константы $c(p)$, большие 1.2255, как видно из таблицы 2.

Обсудим также и контрпримеры к гипотезе Борсука в малых размерностях. При $p = 2$ небольшие модификации подхода Кана и Калаи позволяют опровергнуть эту гипотезу при $d \geq 560$, см. [16, 21], в то время как контрпримеры в меньших размерностях удается построить с помощью иной техники. При $p \neq 2$ нам удалось показать следующее.

Следствие 1. При всех $p \geq 2.81$ справедливо неравенство $b(\ell_p^{406}) \geq 422$.

Доказательство. Применим теорему 1 к $n = 29, k = 9, \lambda = -1/3$. Заметим, что $t_0 = 9/2 - 15/(2^{p+1} + 2)$, что не меньше, чем $7/2$ при всех $p \geq 2.81$, и значит, $t_1 = 4$. Теперь теорема 1 влечет, что при $d = \binom{29}{2} = 406$ мы имеем $b(\ell_p^d) \geq \binom{29}{9} / \binom{29}{4} > 421$, что и требовалось показать. $\square$

Мы не утверждаем, что этот результат является оптимальным, т.к. неравенство, используемое нами в последнем шаге доказательства теоремы 1 может быть усилено. Заинтересованный читатель может попытаться применить разнообразные его усиления по аналогии с [2] и [12, Раздел 4]. Это не приведет к лучшему результату в

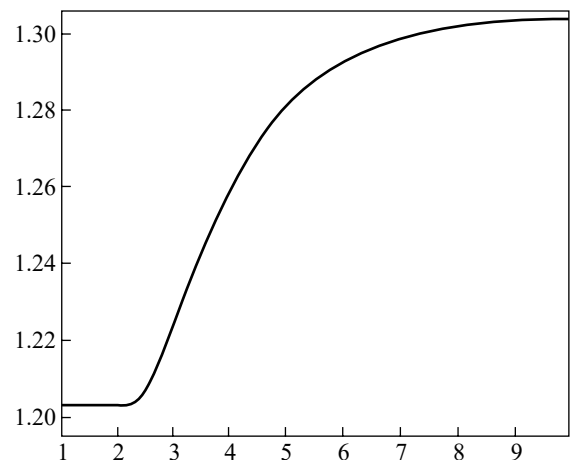


Рис. 1. График функции $c(p)$ от $1 \leq p \leq 10$.

Таблица 1. Количество пар (i, j) с предписанными значениями $x_{i,j}$ и $y_{i,j}$.

	$x_{i,j} = 0$	$x_{i,j} = \lambda$	$x_{i,j} = 1 + 2\lambda$
$y_{i,j} = 0$	$\binom{n-2k+t}{2}$	$(n-2k+t)(k-t)$	$\binom{k-t}{2}$
$y_{i,j} = \lambda$	$(n-2k+t)(k-t)$	$(k-t)^2 + t(n-2k+t)$	$t(k-t)$
$y_{i,j} = 1 + 2\lambda$	$\binom{k-t}{2}$	$t(k-t)$	$\binom{t}{2}$

асимптотике, но для малых размерностей выигрыш вполне может оказаться значительным.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим за V множество всех $\binom{n}{k}$ точек $\{0,1\}^n$ с ровно k единичными координатами. Мы сопоставим каждому $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V$ точку $\mathbf{x}^* = (x_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \in \ell_p^d$, где $x_{i,j} = x_i x_j + \lambda x_i + \lambda x_j$. Отметим, что $\mathbf{x}^*$ имеет в точности $\binom{n-k}{2}$, $k(n-k)$ и $\binom{k}{2}$ координат, равных 0, λ и $1 + 2\lambda$ соответственно. А значит, для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ каждая из $d = \binom{n}{2}$ пар (i, j) попадает в одну из $3^2 = 9$ групп в зависимости от значений $x_{i,j}$ и $y_{i,j}$. Более того, если обозначить количество общих единиц $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ за t , то нетрудно выразить размеры каждой из этих групп, см. таблицу 1.

Теперь простым вычислением нетрудно убедиться в том, что

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_p^p = at^2 + bt + c,$$

$$\text{где } a = -2|\lambda|^p - 2|1 + \lambda|^p + |1 + 2\lambda|^p,$$

$$b = 2(3k - n)|\lambda|^p + 2k|1 + \lambda|^p + (1 - 2k)|1 + 2\lambda|^p,$$

$$c = 2k(n - 2k)|\lambda|^p + k(k - 1)|1 + 2\lambda|^p.$$

Заметим, что $|1 + \lambda|^p \geq |1 + 2\lambda|^p$, и значит, $a < 0$. Следовательно, как функция действительного аргумента t парабола $at^2 + bt + c$ вогнута и достигает своего максимума в точке $t = t_0 - b / (2a)$. Кроме того, отметим, что $c > 0$. Так как расстояние между $\mathbf{x}^*$ и им самим в силу тривиальных соображений равняется нулю, то один из корней параболы равен $t = k$, в то время как другой ра-

вен $t = c / (ka) < 0$. Как следствие, заключаем, что наше отображение $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$ инъективно на V .

Далее мы отметим, что как функция *целочисленного* аргумента эта парабола достигает максимума к ближайшей к вершине $t = t_0$ целочисленной точке, а именно — в точке $t = \lfloor t_0 + 1 / 2 \rfloor$. Мы утверждаем, что если последняя величина положительна, то мы можем увеличить значение λ , чтобы обеспечить то, что расстояние $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*\|_p$ максимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют ровно t_1 общих единиц. Действительно, увеличив λ вплоть до нуля, мы сдвинем вершину параболы $-b / (2a)$ к $1 / 2 < t_1$, и значит, наше утверждение вытекает из теоремы о промежуточном значении. Наконец, следующий классический результат обеспечивает, что всякое достаточно большое подмножество V содержит пару таких точек.

Теорема 2 ([7]). При всех $n, k, t \in \mathbb{N}$, таких, что $2t < k < n / 2$ и $k - t$ является простым или степенью простого, обозначим за V множество всех $\binom{n}{k}$ точек в $\{0,1\}^n$ с ровно k единичными координатами. Тогда каждое подмножество из более чем $\binom{n}{k-t-1}$ элементов V содержит две точки, имеющие в точности t общих единиц.

Теперь легко заключить что $\{\mathbf{x}^* : \mathbf{x} \in V\} \subset \ell_p^d$ не может быть разбито на менее чем $\binom{n}{k} / \binom{n}{k-t_1-1}$ частей меньшего диаметра по принципу Дирихле, что и завершает доказательство.

Отметим, что это доказательство основано на “ $(0,1)$ -векторах”, которые мы отображаем в вектора с тремя различными значениями координат. Основной результат [15] был получен благодаря замене $(0,1)$ -векторов на $(-1,0,1)$ -вектора. На текущий момент мы не видим технической

возможности отобразить такие вектора в ℓ_p^d , чтобы провести дальнейшее рассуждение по аналогии с вышеприведенным доказательством. Если такая возможность будет найдена, то это приведет и асимптотическому усилению текущих оценок величин $b(\ell_p^d)$ при $p \neq 2$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ДАННЫЕ

Таблица 2. Оптимальные значения вспомогательных параметров и итоговые величины $c(p)$.

p	$-\lambda$	k / n	t_0 / n	$c(p)$
1.00	0.5000	0.5000	0.2500	1.2032
2.00	0.5000	0.5000	0.2500	1.2032
2.25	0.4639	0.4777	0.2287	1.2034
2.30	0.4472	0.4666	0.2189	1.2037
2.35	0.4310	0.4554	0.2095	1.2042
2.40	0.4163	0.4448	0.2012	1.2049
2.45	0.4031	0.4348	0.1938	1.2059
2.50	0.3915	0.4255	0.1874	1.2071
2.75	0.3521	0.3895	0.1665	1.2151
3.00	0.3317	0.3656	0.1562	1.2249
3.25	0.3207	0.3491	0.1510	1.2348
3.50	0.3146	0.3372	0.1483	1.2441
3.75	0.3112	0.3283	0.1468	1.2526
4.00	0.3095	0.3215	0.1460	1.2601
4.25	0.3087	0.3162	0.1456	1.2667
4.50	0.3085	0.3120	0.1455	1.2724
4.75	0.3087	0.3087	0.1455	1.2773
5.00	0.3091	0.3060	0.1455	1.2815
5.25	0.3097	0.3038	0.1456	1.2851
5.50	0.3104	0.3020	0.1457	1.2881
5.75	0.3110	0.3005	0.1458	1.2907
6.00	0.3118	0.2993	0.1459	1.2929
6.25	0.3125	0.2982	0.1459	1.2948
6.50	0.3132	0.2974	0.1460	1.2964
6.75	0.3138	0.2967	0.1461	1.2977
7.00	0.3145	0.2961	0.1462	1.2989
7.50	0.3157	0.2951	0.1462	1.3006
8.00	0.3168	0.2945	0.1463	1.3019
8.50	0.3179	0.2940	0.1463	1.3028
9.00	0.3188	0.2937	0.1464	1.3034
9.50	0.3196	0.2935	0.1464	1.3038
9.99	0.3203	0.2933	0.1464	1.3042

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы благодарим Ольгу Костину за ценные обсуждения. Первый автор поддержан грантом Н.Ш.-775.2022.1.1. Второй автор поддержан ERC Advanced Grant “GeoScape” No. 882971.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baker R.C., Harman G., Pintz J.* The difference between consecutive primes. II // *Proc. Lond. Math. Soc.* (3). 2001. Vol. 83. No. 3. P. 532–562.
2. *Bogolubsky L.I., Raigorodskii A.M.* On bounds in Borsuk’s problem // *Proc. MIPT (Trudy MFTI)*. 2019. Vol. 11. No. 3. P. 20–49.
3. *Boltysanskii V.G., Gohberg I.T.* Results and Problems in Combinatorial Geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985; M.: Nauka, 1965.
4. *Bondarenko A.* On Borsuk’s Conjecture for Two-Distance Sets // *Discrete Comput. Geom.* 2014. Vol. 51. No. 3. P. 509–515.
5. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre // *Fundamenta Math.* 1933. Vol. 20. P. 177–190.
6. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter, *Geometric Aspects of Functional Analysis* (J. Lindenstrauss and V. Milman, eds.) // *Lecture Notes in Math.* 1469. Springer, Berlin, 1991. P. 138–144.
7. *Frankl P., Wilson R.M.* Intersection theorems with geometric consequences // *Combinatorica*. 1981. Vol. 1. No. 4. P. 357–368.
8. *Grünbaum B.* Borsuk’s partition conjecture in Minkowski planes // *Bull. Res. Council Israel Sect. F*. 7F. 1957. P. 25–30.
9. *Jenrich T., Brouwer A.E.* A 64-Dimensional Counterexample to Borsuk’s Conjecture // *Electron. J. Combin.* 2014. Vol. 21. No. 4. P. 4.29.
10. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk’s conjecture // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1993. Vol. 29. No. 1. P. 60–62.
11. *Lassak M.* An estimate concerning Borsuk’s partition problem // *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.* 1982. Vol. 30. P. 449–451.
12. *Raigorodskii A.M.* Semidefinite programming in combinatorial optimization with applications to coding theory and geometry. 2013. Thesis. Available at <https://theses.hal.science/tel-00948055>
13. *Raigorodskii A.M.* Around Borsuk’s conjecture // *J. Math. Sci.* 2008. Vol. 154. No. 4. P. 604–623.
14. *Raigorodskii A.M.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // *Thirty Essays on Geometric Graph Theory* / ed. J. Pach. Springer, 2013. P. 429–460.
15. *Raigorodskii A.M.* On a bound in Borsuk’s problem // *Russian Math. Surveys*, 1999. Vol. 54. No. 2. P. 453–454.
16. *Raigorodskii A.M.* On the dimension in Borsuk’s problem // *Russian Math. Surveys*. 1997. Vol. 52. No. 6. P. 1324–1325.
17. *Rogers C.A., Zong C.* Covering convex bodies by translates of convex bodies // *Mathematika*. 1997. Vol. 44. No. 1. P. 215–218.
18. *Schramm O.* Illuminating sets of constant width // *Mathematika*. 18. Vol. 35. P. 180–189.
19. *Swanepoel K.J.* Combinatorial distance geometry in normed spaces // *New Trends in Intuitive Geometry*. 2018. P. 407–458.
20. *Wang J., Xue F.* Borsuk’s partition problem in four-dimensional ℓ_p space. Preprint arXiv:2206.15277.
21. *Weissbach B.* Sets with large Borsuk number // *Beiträge Alg. Geom.* 2000. Vol. 41. P. 417–423.
22. *Yu L., Zong C.* On the blocking number and the covering number of a convex body // *Adv. Geom.* 2009. Vol. 9. No. 1. P. 13–29.

A NOTE ON BORSUK’S PROBLEM IN MINKOWSKI SPACES

A. M. Raigorodskii^{a,b,c}, A. Sagdeev^{d,a}

^a*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia*

^b*Moscow State University, Moscow, Russia; Caucasus Mathematical Center,*

Adyghe State University, Maykop, Russia

^c*Buryat State University, Ulan-Ude, Russia*

^d*Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary*

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov

In 1993, Kahn and Kalai famously constructed a sequence of finite sets in d -dimensional Euclidean spaces that cannot be partitioned into less than $(1.203\dots + o(1))^{\sqrt{d}}$ parts of smaller diameter. Their method works not only for the Euclidean, but for all ℓ_p -spaces as well. In this short note, we observe that the larger the value of p , the stronger this construction becomes.

Keywords: Borsuk problem, Minkowski space, ℓ_p -norm