

УДК 517.938.5

ФУНКЦИИ ВРАЩЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДОВ КАК ТРАЕКТОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

© 2024 г. Г. В. Белозеров^{1, *}, академик РАН А. Т. Фоменко^{1, 2, **}

Поступило 15.12.2023 г.
После доработки 19.01.2024 г.
Принято к публикации 20.01.2024 г.

Изучаются траекторные инварианты интегрируемых бильярдов на двумерных столах-книжках при постоянных значениях энергии. Эти инварианты вычисляются по функциям вращения, определенным на однопараметрических семействах 2-торов Лиувилля. Для двумерных бильярдных книжек доказан полный аналог теоремы Лиувилля, введены переменные действие-угол, определены функции вращения. Получена общая формула функций вращения таких систем. Для ряда примеров была исследована монотонность этих функций, вычислены реберные траекторные инварианты (векторы вращения). Оказалось, не все бильярды обладают монотонными функциями вращения, как изначально предполагала гипотеза А.Т. Фоменко. Тем не менее для некоторых серий бильярдов эта гипотеза верна.

Ключевые слова: интегрируемая система, интегрируемый бильярд, функции вращения, траекторные инварианты

DOI: 10.31857/S2686954324010018, **EDN:** ZUJDFT

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему (далее ИГС) $v = \text{sgrad } H$ с дополнительным первым интегралом F на симплектическом многообразии M^4 . Эта система задает разбиение многообразия M^4 на связные компоненты поверхностей совместного уровня функций H и F , которое называется *слоением Лиувилля*. В случае, когда изоэнергетическая поверхность $Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}$ является компактной и регулярной, а ограничение F на Q_h^3 является функцией Ботта, слоение Лиувилля этой системы на Q_h^3 однозначно кодируется *инвариантом Фоменко–Цишанга*.

Напомним, что инвариантом Фоменко–Цишанга (или *меченой молекулой*) называется граф Рибо, вершины которого оснащены символами атомов, описывающих слоение Лиувилля в окрестности особого слоя, а ребра — числовыми метками r , ε , n , отвечающими склейке

торов Лиувилля на границах соседних атомов. Этот инвариант классифицирует все ИГС на изоэнергетических поверхностях с точностью до лиувиллевой эквивалентности, т.е. послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля (см. [1]).

Инварианты Фоменко–Цишанга вычислены для многих ИГС физики, механики и геометрии. С их помощью были обнаружены неожиданные связи некоторых динамических систем. Более того, оказалось, что инварианты Фоменко–Цишанга корректно определены не только для гладких систем, но и для систем с отражением, а именно для бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик [2], а также топологических бильярдов [3] и бильярдных книжек [4].

Определение 1. Семейством софокусных квадрик на плоскости называется множество квадрик, заданных уравнением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda),$$

где $a > b > 0$ — фиксированные числа, а $\lambda \in \mathbb{R}$ — вещественный параметр.

Напомним, что *бильярдной книжкой* D называется 2-комплекс, склеенный из плоских софокусных бильярдных столов $D_1, \dots, D_n$

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: gleb051beloz@yandex.ru

**E-mail: atfomenko@mail.ru

(т.е. компактных областей, ограниченных дугами софокусных квадрик, имеющих углы излома на границе, равные $\pi/2$) вдоль некоторых изометричных участков границ. На каждом участке склейки задана перестановка $\sigma \in S(n)$, отвечающая переходу материальной точки с одного листа на другой (более подробно см. в [4]). Ребро книжки, которому отвечает тождественная перестановка, мы будем называть *свободным*.

Классический бильярд (система с отсутствием внешних сил) на бильярдной книжке является интегрируемым. Он обладает двумя функционально независимыми первыми интегралами: полная механическая энергия H и параметр Λ софокусной квадрики, которой одновременно касаются все прямолинейные участки (или их продолжения) траектории частицы.

Бильярдные книжки реализуют слоения Лиувилля многих гладких ИГС. В настоящее время активно изучается гипотеза А.Т. Фоменко о реализации бильярдными книжками слоения Лиувилля произвольной ИГС с двумя степенями свободы.

В настоящей работе мы обратимся к вопросу устройства траекторий бильярдных книжек на регулярных участках слоения Лиувилля.

Напомним, что в гладком случае ответ на этот вопрос давала теорема Лиувилля. Однако бильярд, благодаря наличию отражения, является кусочно-гладкой системой (его фазовое пространство является кусочно-гладким). Тем не менее нам удалось доказать полный аналог классической теоремы Лиувилля для бильярдных книжек.

Теорема 1. Пусть T_ξ — связная компонента неособой поверхности уровня пары интегралов (H, Λ) бильярда на книжке D , не содержащей свободные ребра на фокальной прямой. Тогда:

1) поверхность T_ξ гомеоморфна двумерному тору;

2) слоение Лиувилля в малой окрестности U слоя T_ξ тривиально, т.е. гомеоморфно произведению двумерного тора T^2 и диска D^2 ;

3) в окрестности U существуют непрерывные координаты $(s_1, s_2, \varphi_1, \varphi_2)$, такие, что

- s_1, s_2 — координаты на диске D^2 , а φ_1, φ_2 — 2π -периодические координаты на торах Лиувилля;

- s_1, s_2 — непрерывно дифференцируемые функции от H и Λ ;

- интегральные кривые бильярда в этих координатах задаются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = h_i(s_1, s_2) \quad \forall i = 1, 2,$$

где h_i — некоторые непрерывные функции (т.е. интегральные траектории есть не что иное, как прямолинейные обмотки торов Лиувилля).

Замечание 1. Отметим, что первые два пункта этой теоремы доказаны В.В. Ведюшкиной.

Замечание 2. Переменные s_i почти всюду можно определить как интеграл от формы $\alpha = p_1 d\lambda_1 + p_2 d\lambda_2$ (здесь λ_1, λ_2 — эллиптические координаты семейства софокусных квадрик, а p_1, p_2 — сопряженные им импульсы) по некоторым базисным циклам γ_i на торе Лиувилля.

Теорема 1 позволяет ввести функции вращения на ребрах молекулы бильярдной книжки классическим способом.

Выберем на однопараметрическом семействе торов Лиувилля, отвечающем некоторому ребру молекулы, координаты $(\Lambda, \varphi_1, \varphi_2)$, где φ_i — угловые переменные. Согласно теореме 1, в этих координатах интегральные кривые бильярда выпрямляются.

Определение 2. Функцией вращения $\rho(\Lambda)$ на ребре грубой молекулы называется величина, равная тангенсу угла обмотки на торе Лиувилля в координатах (φ_1, φ_2) . Иными словами, $\rho(\Lambda)$ определена системой:

$$\rho(\Lambda) = \begin{cases} \frac{h_2(\Lambda)}{h_1(\Lambda)}, & \text{если } h_1(\Lambda) \neq 0, \\ \infty, & \text{если } h_1(\Lambda) = 0, \end{cases}$$

где h_i — функции из теоремы 1.

Далее для определенности будем считать, что цикл γ_i , участвующий в определении переменной s_i (см. замечание 2), на торе Лиувилля направлен вдоль эллиптической координаты λ_i .

В этом случае удастся найти общую формулу функций вращения бильярдных книжек.

Теорема 2. *Функции вращения ρ билиарда-книжки на ребрах его молекулы вычисляются по формуле*

$$\rho(\Lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{N_1} \int_{a_{1,j}}^{b_{1,j}} \frac{dt}{\sqrt{(\Lambda - t)(a - t)(b - t)}}}{\sum_{j=1}^{N_2} \int_{a_{2,j}}^{b_{2,j}} \frac{dt}{\sqrt{(\Lambda - t)(a - t)(b - t)}}},$$

где a и b — параметры семейства софокусных квадрик, а величины $N_i, a_{i,j}, b_{i,j}$ зависят от комбинационного устройства книжки. При этом числа N_i постоянны на ребрах, а функции $a_{i,j}(\Lambda), b_{i,j}(\Lambda)$ принимают следующие значения:

- числа a и b ;
- параметры квадрик, входящих в состав границ листов книжки;
- параметр каустики, т.е. Λ .

Замечание 3. Аналогичная формула для билиарда внутри эллипса была получена В.В. Козловым и Д.В. Трещёвым в книге [5]. В. Драгович и М. Раднович в работе [6] вычислили функции вращения некоторых билиардов, ограниченных софокусными квадриками. Отметим, что В. Драгович и М. Раднович посвятили ряд работ ([7–10]) изучению периодических траекторий интегрируемых билиардов.

Как и в гладком случае, по функции вращения можно построить вектор, который будет траекторным инвариантом ограничения системы на ребро молекулы (см. [11]). Напомним его определение.

Пусть функция $\rho(\Lambda)$ определена на интервале $(0,1)$. Построим вектор R , состоящий из вещественных чисел и символов $+\infty, -\infty$. В качестве первого элемента возьмем правый предел функции ρ в нуле. Затем, двигаясь вдоль интервала $(0,1)$, будем последовательно выписывать значения функции ρ в максимумах, минимумах и полюсах. При этом каждый полюс изображается двумя символами $\pm\infty$, знаки которых соответствуют знакам левого и правого пределов в этой точке. В конце напишем левый предел функции ρ в единице. Полученный вектор называется *вектором вращения на ребре молекулы*.

Рассмотрим плоские билиардные столы, симметричные относительно осей координат, и исследуем их функции вращения на монотон-

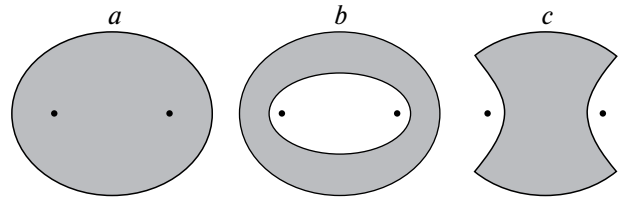


Рис. 1. Плоские билиардные столы, симметричные относительно координатных осей.

ность. Таких билиардных столов ровно три: эллипс, эллиптическое кольцо, бесфокусная область, ограниченная эллипсом и гиперболой (см. рис. 1).

Все эти билиарды при $\Lambda = b$ имеют седловую особенность, поэтому ребра их молекул мы разделим на два класса: *эллиптические* ($\Lambda \in (0, b)$) и *гиперболические* ($\Lambda \in (b, a)$). Через ρ_1 обозначим функцию вращения на эллиптическом ребре, а через ρ_2 на гиперболическом.

Теорема 3. *Функции вращения ρ_1 и ρ_2 билиарда внутри эллипса являются монотонными. Более того, если на ребрах молекулы выбрать направление к седловому атому, то вектор вращения R на эллиптическом ребре равен $(0, +\infty)$, а на гиперболическом $(l(a, b), -\infty)$, где l — константа, зависящая от полуосей эллипса.*

Замечание 4. Полученный результат совпал с ответом В.В. Ведюшкиной (см. [12]), которая вычислила меченую t -молекулу этого билиарда исходя из следующего факта. При стремлении меньшей полуоси трехосного эллипсоида к нулю геодезический поток на нем переходит в плоский билиард. При таком предельном переходе траектории переходят в траектории и сохраняется интегрируемость. Отметим, что меченая t -молекула геодезического потока на эллипсоиде была вычислена А.Т. Фоменко и А.В. Болсиновым (см., например, [11]).

Теперь рассмотрим билиард внутри эллиптического кольца. Будем считать, что 0 и $\lambda_0 (> 0)$ — параметры эллипсов его границы. Следующая теорема описывает поведение функций вращения на эллиптических ребрах этого билиарда.

Теорема 4. *Функция вращения ρ_1 билиарда внутри эллиптического кольца имеет ровно один локальный максимум, который достигается в точке $\Lambda = \lambda_0$. Если на эллиптических ребрах молекулы выбрать направление к седловому атому, то вектор вращения R на них равен $(0, \hat{l}(\lambda_0, a, b), 0)$, где*

$\hat{l}$ — константа, зависящая от полуосей граничных эллипсов.

Замечание 5. Эта теорема показывает, что функции вращения билиардов, вообще говоря, устроены нетривиально, в частности они не всегда являются монотонными. Таким образом, гипотеза А.Т. Фоменко о том, что функции вращения любого билиарда являются монотонными (см. [13]), неверна.

Вопрос о монотонности функций вращения на гиперболических ребрах труден, поэтому мы рассмотрим два предельных случая: λ_0 близко к b и λ_0 близко к нулю. Оказывается, эти два случая хорошо поддаются анализу.

Теорема 5.1. Существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого $\lambda_0 > b - \varepsilon$ функция вращения ρ_2 не является монотонной.

2. Если $a > 2b$, то при малых λ_0 функция ρ_2 не является монотонной.

3. Если $a + \lambda_0 < 2b$, функция ρ_2 монотонна. В частности, если $a < 2b$, то при малых λ_0 функция ρ_2 монотонна.

Осталось разобраться с билиардом внутри стола 1с.

Теорема 6. Функции ρ_1 и ρ_2 билиарда внутри области 1с являются монотонными. Более того, реберный траекторный инвариант этого билиарда совпадает с реберным траекторным инвариантом билиарда внутри эллипса того же параметра.

Замечание 6. Отметим, что билиарды внутри областей 1а и 1с не являются лиувиллево

эквивалентными, тем не менее их грубые молекулы и реберные траекторные инварианты совпадают.

Свойство симметрии билиардных столов относительно координатных осей упрощает исследование монотонности функций вращений. В случае отсутствия симметрий у области исследование монотонности будет довольно трудной задачей, нерешаемой в общем виде. В связи с этим мы рассмотрим упрощенный вариант билиарда: топологический билиард на замкнутой поверхности, склеенной из круговых дисков и колец. Соответствующие билиардные книжки будем называть *гармошками*.

Оказывается, функции вращения таких билиардов выражаются через элементарные. Тем не менее отметим, что этот класс билиардов является очень важным с точки зрения лиувиллевой эквивалентности систем. Такие топологические билиарды реализуют слоения Лиувилля интегрируемых геодезических потоков на компактных ориентируемых поверхностях с дополнительным первым интегралом, линейным по импульсам.

Билиардные гармошки бывают двух типов: *сферические* (гомеоморфные двумерной сфере) и *торические* (гомеоморфные двумерному тору). Они изображены на рис. 2.

Сферическую гармошку D можно однозначно задать, указав последовательность радиусов склейки ее листов. Эту последовательность можно разбить на две: последовательность максимумов $\{R_i\}_{i=1}^n$ и последовательность минимумов $\{r_j\}_{j=1}^{n-1}$. При этом сама последовательность

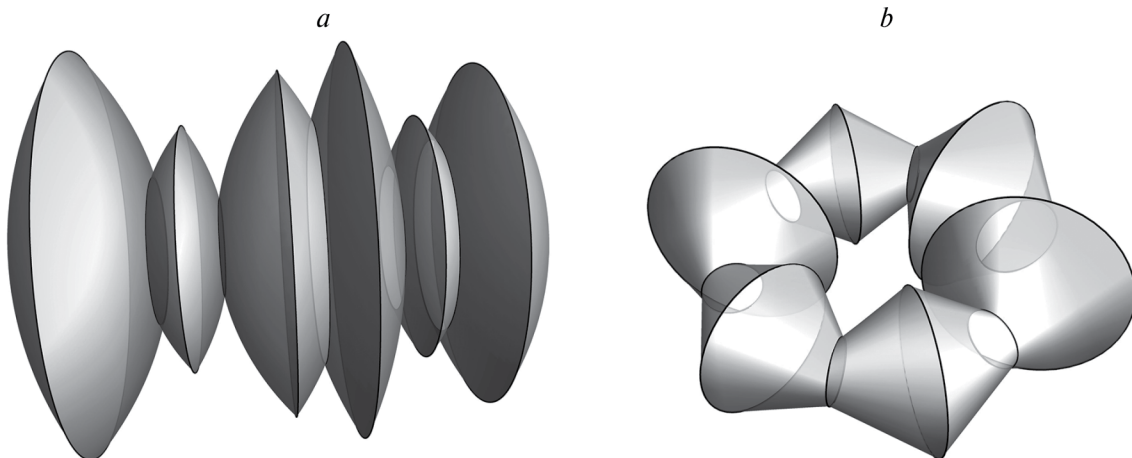


Рис. 2. (а) Сферическая гармошка; (б) Торическая гармошка.

склейки радиусов выглядит следующим образом: $R_1, r_1, R_2, \dots, R_n$.

Первыми интегралами бильярда на сферической гармошке D являются функции H и f , где H — полная механическая энергия, а f — ориентированный радиус каустики (он берется со знаком «+», если траектория закручивается против часовой стрелки, и со знаком «−», если по часовой). На неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 критическими значениями функции f являются $\pm R_i$ и $\pm r_j$, где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n-1$. При этом $\pm r_j$ являются седловыми критическими значениями, а $\pm R_i$ соответствуют локальным минимумам и максимумам. Следовательно, зная взаимное расположение радиусов R_i, r_j , можно однозначно вычислить инвариант Фоменко—Цишанга бильярда на гармошке D (см. [14]). Более того, меченая молекула (и сама система) симметрична относительно уровня $f = 0$ и любое ее ребро при $f \geq 0$ (а также при $f \leq 0$) однозначно кодируется подпоследовательностью нескольких подряд идущих максимальных радиусов $R_i, \dots, R_{i+k}$. На этом ребре функция f изменяется либо на отрезке $\left[-\min_{l=1, \dots, n-1} r_l, \min_{l=1, \dots, n-1} r_l\right]$, если ребро содержит уровень $f = 0$, т.е. кодируется последовательностью $R_1, \dots, R_n$, либо на отрезке $\left[\max\{r_{i-1}, r_{i+k}\}, \min_{l=0, \dots, k-1} r_{i+l}\right]$, если ребро не содержит уровень $f = 0$ и кодируется последовательностью $R_i, \dots, R_{i+k}$. В силу симметрии системы относительно уровня $f = 0$ симметричные ребра кодируются одинаковыми последовательностями, а области определения функций f являются симметричными относительно нуля.

Отметим, что при увеличении максимальных радиусов склейки топология слоения Лиувилля бильярда не меняется. Гармошки, получающиеся друг из друга таким преобразованием, назовем *структурно эквивалентными*.

Теорема 7. Пусть $\{R_i\}_{i=1}^n, \{r_j\}_{j=1}^{n-1}$ — последовательности максимумов и минимумов сферической гармошки D , тогда функция вращения $\rho(f)$ на ребре грубой молекулы, соответствующем максимальным радиусам $R_i, \dots, R_{i+k}$ имеет следующий вид:

$$\rho(f) = -\frac{2}{\pi} \left(\sum_{j=0}^k \arcsin \frac{f}{R_{i+j}} - \sum_{j=0}^{k-1} \arcsin \frac{f}{r_{i+j}} \right).$$

Более того, найдется гармошка D' , структурно эквивалентная D , все функции вращения на ребрах которой строго монотонны.

Замечание 7. Для торических гармошек утверждение теоремы 7 изменится лишь на двух ребрах, содержащих уровень $f = 0$. На них функция вращения имеет следующий вид:

$$\rho(f) = -\frac{2}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \arcsin \frac{f}{R_j} - \sum_{j=1}^n \arcsin \frac{f}{r_j} \right).$$

Она всегда является монотонной, т.к. представляется в виде суммы n монотонных функций вида $2 / \pi(\arcsin f / R_i - \arcsin f / r_i)$.

Таким образом, гипотеза А.Т. Фоменко в некотором смысле верна для бильярдов на столах-гармошках.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят В.В. Ведюшкину и Е.А. Кудрявцеву за ряд ценных замечаний и внимание к работе.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в МГУ им. М.В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 22-71-00111.

Г.В. Белозеров является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 3. С. 546–575.
2. Фокичева В.В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2014. № 4. С. 18–27.
3. Фокичева В.В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Матем. сб. 2015. Т. 206. № 10. С. 127–176.
4. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем. Матем. сб. 2018. Т. 209. № 12. С. 17–56.

5. Козлов В.В., Трещёв Д.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
6. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010.
7. Dragović V., Radnović M. Minkowski plane, confocal conics, and billiards. *Publications de l’Institut Mathématique*. 2013. 94(108). 17–30, DOI: 10.2298/PIM1308017D.
8. Dragović V., Radnović M. Bicentennial of the Great Poncelet Theorem (1813–2013): Current Advances. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 2012. 51. 3. DOI: 10.1090/S0273-0979-2014-01437-5.
9. Dragović V., Radnović M. Periods of Pseudo-Integrable Billiards. *Arnold Mathematical Journal*. 2015. 1. 1. 69–73. DOI: 10.1007/s40598-014-0004-0.
10. Dragović V., Radnović M. Caustics of Poncelet Polygons and Classical Extremal Polynomials. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2019. 24. 1. 1–35. DOI: 10.1090/S0273-0979-2014-01437-5.
11. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2. Ижевск, Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999. 1: 444 с.; 2: 447 с.
12. Ведюшкина В.В. Траекторные инварианты плоских бильярдov, ограниченных дугами софокусных квадриков и содержащих фокусы. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2021. № 4. С. 48–51.
13. Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* 2019. № 3. С. 15–25.
14. Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды. *Изв. РАН. Сер. матем.* 2019. Т. 83. № 6. С. 63–103.

ROTATION FUNCTIONS OF INTEGRABLE BILLIARDS AS ORBITAL INVARIANTS

G. Belozеров^a, Academician of the RAS A. T. Fomenko^{a,b}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Orbital invariants of integrable billiards on two-dimensional book tables are studied at constant energy values. These invariants are calculated from rotation functions defined on one-parameter families of Liouville 2-tori. For two-dimensional billiard books, a complete analogue of Liouville’s theorem is proved, action-angle variables are introduced, and rotation functions are defined. A general formula for the rotation functions of such systems is obtained. For a number of examples, the monotonicity of these functions was studied, and edge orbital invariants (rotation vectors) were calculated. It turned out that not all billiards have monotonic rotation functions, as was originally assumed by A. Fomenko’s hypothesis. However, for some series of billiards this hypothesis is true.

Keywords: integrable system, integrable billiard, rotation functions, orbital invariants.