ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 514, с. 98–106

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

ИНВАРИАНТЫ ОДНОРОДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

© 2023 г. М. В. Шамолин[1,*]

Представлено академиком В.В. Козловым
Поступило 09.10.2023 г.
После доработки 20.10.2023 г.
Принято к публикации 15.11.2023 г.

Получены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система на касательном расслоении к двумерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм.

Ключевые слова: инвариант динамической системы, существенно особые точки инварианта, система с диссипацией, интегрируемость

DOI: 10.31857/S2686954323602257, **EDN:** DDWPZU

1. ВВЕДЕНИЕ

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [1–3], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных (в частности, гамильтоновых) систем этот факт естественен, когда фазовый поток сохраняет объем с постоянной плотностью. Но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, коэффициенты имеющихся инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [4–6]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m-1$ независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в работах автора [5, 7]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых может быть выделена система с двумя степенями свободы на своем четырехмерном многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

2. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Проиллюстрируем предлагаемый в работе подход на примере систем третьего порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы (для простоты, степени 2) по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot v &= a(\alpha)v^2 + b(\alpha)vz + c(\alpha)z^2, \\ \dot z &= d(\alpha)v^2 + e(\alpha)vz + f(\alpha)z^2, \\ v\dot\alpha &= g(\alpha)v^2 + h(\alpha)vz + i(\alpha)z^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда, выбирая новую независимую переменную q ($dq = v dt$, $d/dq = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), а также новую

[1]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru*

фазовую Z, $z = Zv$, систему (1), можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),$$
$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2, \tag{2}$$

$$\alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2,$$
$$Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \tag{3}$$

при этом уравнение (2) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (3) с одной степенью свободы на двумерном фазовом многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$.

Особняком стоит случай некоторой усеченной системы, когда выполнены тождества $d(\alpha) \equiv \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0$. Тогда система (2), (3) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$z = vZ = \text{const}. \tag{4}$$

Для полной интегрируемости усеченной системы (2), (3) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (4). Но мы для простоты ограничимся следующим важным частным случаем системы (2), (3) третьего порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \quad \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha),$$
$$\tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \tag{5}$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \quad Z' = -Z\Psi(\alpha, Z), \tag{6}$$

$b_0 \ge 0$ – параметр, $\delta(\alpha)$ – некоторая гладкая функция, и будем рассматривать систему (5), (6) как систему при отсутствии внешнего поля сил.

Предложение 1. *Система* (5), (6) *имеет два гладких* (*автономных*) *первых интеграла*:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const},$$
$$\Phi_1(v; Z) = vZ = C_1 = \text{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема (6) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный [8] по Z (автономный) первый интеграл вида $\Phi(Z;\alpha) = (1 - 2b_0 Z\delta(\alpha))/Z^2 = C = \text{const}$, который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, подсистема (6) также не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Таким образом, внутреннее гладкое силовое поле (зависящее от параметра $b_0 > 0$) в системе (5), (6) не нарушает консервативности системы.

Зададимся вопросом поиска инвариантных дифференциальных форм (для начала объема) для интегрируемости системы (5), (6). Для поиска функции $\rho(v; \alpha, Z)$, которая определяет искомую инвариантную форму $\rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ$, подсчитаем дивергенцию векторного поля $w(v; \alpha, Z)$ рассматриваемой системы (5), (6) в евклидовых координатах. Тогда составная система уравнений характеристик (для поиска решения линейного уравнения $\operatorname{div}[\rho(v; \alpha, Z)w(v; \alpha, Z)] = 0$ в частных производных) будет состоять из системы (5), (6) и следующего добавочного уравнения: $\rho' = -3b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha)\rho$.

Как отмечалось, система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла. А дополнительный первый интеграл системы уравнений характеристик имеет вид $\rho Z^3 = C_\rho = \text{const}$. Теперь нетрудно убедиться, что следующие функции $\rho_1(Z) = 1/Z^3$, $\rho_2(v) = v^3$ являются примерами функции $\rho(v; \alpha, Z)$, определяющей инвариантную форму $\rho(v; \alpha, Z)dv \wedge d\alpha \wedge dZ$.

Теперь переходим к некоторому усложнению, добавляя следующим образом в систему (5), (6) внешнее гладкое силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \quad Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z). \tag{7}$$

Создается впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность "подтвердилась" бы наличием в системе двух гладких (автономных) первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (5), (7) существует гладкий первый интеграл, структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система (5), (7), вообще говоря, не имеет. Более того, если, в частности, $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств).

Предложение 2. *Если* $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, *то система* (5), (7) *имеет два независимых* (*один*, *вообще говоря, трансцендентный и один гладкий*) *первых интеграла:*

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) =$$
$$= v^2\left(1 - b_0 Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha))\operatorname{arctg}\frac{\delta(\alpha)}{Z}\right) = \tag{8}$$
$$= C_0 = \text{const},$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}.$$

Более того, как видно из (8), притягивающие и отталкивающие предельные множества рассматриваемой системы (5), (7) могут быть найдены из системы недифференциальных равенств $Z = 0$, $\delta(\alpha) = 0$.

Модифицируем далее систему (5), (7) при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geq 0$, введя внешнее гладкое силовое поле. Получим систему

$$v' = v\Psi(\alpha, Z),\ \Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \quad (9)$$

$$\alpha' = -Z + b_0 Z^2\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha),$$
$$Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \quad \overline{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}, \quad (10)$$

$\mu > 0$. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b_0, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Выше мы ввели такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (5), (7), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b_0 = 0$.

Но мы расширим введение силового поля, положив $b_0, b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^* M^1\{Z;\alpha\}$ примет вид (9), (10). Как будет видно далее, только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Теорема 1. *Если выполнено условие* $F(\alpha) = \lambda\delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, *то система* (9), (10) *обладает полным набором — двумя* (*одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным*) *независимыми первыми интегралами. Кроме того, она обладает двумя инвариантными дифференциальными формами, между собой независимыми, но зависимыми с первыми интегралами.*

Действительно, пусть выполнено условие $F(\alpha) = \lambda\delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Используем для подсчета дивергенции векторного поля $w_1(v;\alpha, Z)$ системы (9), (10) с диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную ранее для системы (5), (6) без внешнего поля сил). Тогда составная система уравнений характеристик (уравнения $\operatorname{div}[\rho(v;\alpha,Z)w_1(v;\alpha,Z)] = 0$) будет состоять из системы (9), (10) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1\lambda\mu\tilde{\delta}(\alpha)\rho. \quad (11)$$

Вводя новую однородную переменную u, $Z = u\delta$, системе (9)–(11) уравнений характеристик можно сопоставить два соотношения:

$$\delta\frac{du}{d\delta} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u + u^2}{-u + b_0 u^2\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)},$$
$$\delta\frac{d\rho}{d\delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{-u + b_0 u^2\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}. \quad (12)$$

Первое уравнение из (12) (приводящееся к линейному неоднородному) позволяет выписать первый интеграл, вообще говоря, с существенно особыми точками независимой системы (10). Имеется также гладкий первый интеграл (для простоты, при $b_0 = b_1$) следующего вида:

$$\Theta_0(v;Z;\alpha) = v^2\left(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha) + b_0^2\mu Z^2\right) = C_0 = \text{const}. \quad (13)$$

А второе уравнение из (12), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v;\alpha,Z)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho\cdot\exp\left\{b_1\lambda\mu\int\frac{du}{\lambda - b_1\lambda\mu u + u^2}\right\} = C_\rho = \text{const}.$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$\rho(v;\alpha,Z)dv\wedge d\alpha\wedge dZ = v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du}{\lambda - b_1\lambda\mu u + u^2}\right\}dv\wedge d\alpha\wedge dZ,$$
$$u = \frac{Z}{\delta(\alpha)}.$$

3. СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть v, α, β, z_1, z_2 — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z_1, z_2 с коэффициентами, зависящими от α, β (система, аналогичная (1)). Выбирая новую независимую переменную q ($dq = v dt$, $d/dq = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), а также новые фазовые Z_k, $z_k = Z_k v$, $k = 1, 2$, будем рассматривать систему пятого порядка

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$
$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\delta}(\alpha), \quad \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad (14)$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha),$$
$$Z_2' = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$
$$Z_1' = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (15)$$
$$\beta' = Z_1 f(\alpha),$$

$b \geq 0$, $\delta(\alpha)$, $f(\alpha)$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$, $\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ – некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (14) отделяется, что дает возможность рассматривать уравнения (15) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырехмерном многообразии $N^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha,\beta\}$, см. также [7]). Рассмотрим структуру системы (15). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha, \dot\beta; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha,\beta\}$ (в частности, сферы – с двумя ненулевыми коэффициентами связности):

$$\ddot\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0, \ddot\beta + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0. \quad (16)$$

Действительно, выбрав новые координаты z_1, z_2 в касательном пространстве в виде

$$\dot\alpha = -z_2, \quad \dot\beta_1 = z_1 f(\alpha), \quad (17)$$

мы получаем следующие соотношения (ср. с (15))

$$Z_1' = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] Z_1 Z_2 - \\ - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (18)$$

$$Z_2' = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$

при этом уравнения (16) почти всюду эквивалентны совокупности (17), (18), которая, прежде всего, присутствует в системе (15) (при этом вместо (17) лучше выбрать равенства $\alpha' = -Z_2$, $\beta_1' = Z_1 f(\alpha)$).

Отметим задачи, приводящие к уравнениям (16). Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай – метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства. Такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай – приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (трехмерного) твердого тела (см. также [9–11]).

Далее, в системе (15) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (6), они не нарушают консервативности, поскольку система (14), (15) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении двумерного гладкого многообразия, то разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет $n^2(n+1)/2$ штук при $n = 2$, т.е. 6 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических достаточно сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f(\alpha)$ из (17)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся "лишь" 2 ($n(n-1)$ штуками при $n = 2$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (16). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении – их будет 1 ($n(n-1)/2$ штук при $n = 2$). Таким образом, мы имеем 3 функции, характеризующие исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество накладываемых алгебраических и дифференциальных условий ($B(2)$) на имеющиеся $A(2) = 3$ функции ($A(n) = 3n(n-1)/2$ штук при $n = 2$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. В данной работе будем накладывать $B(2) = 2$ условия на имеющиеся $A(2) = 3$ функции.

Число $B(2)$ складывается из трех слагаемых: $B(2) = B_1(2) + B_2(2) + B_3(2)$. Число $B_1(2)$ равно количеству условий, накладываемых на функцию $f(\alpha)$. При $n = 2$ мы не намерены накладывать явные алгебраические условия на функцию $f(\alpha)$, т.е. $B_1(2) = 0$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(2)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \quad (19)$$

т.е. $B_2(2) = 1$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$). Число $B_3(2)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функцию $f(\alpha)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) =: \Gamma_2(\alpha), \\ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha) \equiv 0, \quad (20)$$

т.е. $B_3(2) = 1$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2$).

Видно, что в общем случае $B(n) = B_1(n) = B_2(n) + B_3(n) = (n-1)^2 + n(n-1)/2$, при этом $A(n) - B(n) = n - 1$, что говорит об увеличении количества "произвольных" функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на $n - 1$ (n – размерность рассматриваемого риманова многообразия). В нашем случае $A(2) - B(2) = 1$.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (14), (15) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. с [5, 7]).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических линий (16), переписанных в виде $\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, i = 1, 2,$ является гладкая функция $\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^{2} g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k$, но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым "выпрямив" квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 2 алгебраических и дифференциальных соотношения (19), (20) на 3 функции: на функцию $f(\alpha)$ и на 2, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (19), (20), *то система (14), (15), рассмотренная на произведении* $\mathbf{R}^1_+\{v\} \times TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$, *обладает полным набором, состоящим из четырех гладких первых интегралов вида*

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const};$$

$$\Phi_1(v; Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1^2 = \text{const}; \tag{21}$$

$$\Phi_2(v; Z_1; \alpha) = v^2 Z_1\delta(\alpha) = C_2 = \text{const},$$

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}, \quad A_1 = \text{const}; \tag{22}$$

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = \beta - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f(b)}{A(b) + bC_1^2\delta^2(b)}db = C_4 = \text{const},$$

$A(\alpha)$ – некоторая гладкая функция.

Более того, после замены фазовых переменных $w_2 = Z_2$, $w_1 = Z_1$, $w_1^* = \ln|w_1|$ фазовый поток системы (14), (15) сохраняет фазовый объем с плотностью $\rho_2(v) = v^3$ на произведении $\mathbf{R}^1_+\{v\} \times TM^2\{w_2, w_1^*; \alpha, \beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма $v^3 dv \wedge dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta$.

Заметим также, что равенство (20) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (21). История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). Ну а поиск первых интегралов опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

4. ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ С ДИССИПАЦИЕЙ ЧЕРЕЗ УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Модифицируем систему (14), (15), при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_2' системы (23), (24) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b, b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $T^*M^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{gathered} v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \\ \alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha), \\ \overline{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)}, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} Z_2' = F(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ Z_1' = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' = Z_1 f(\alpha), \end{gathered} \tag{24}$$

здесь $\mu > 0$ – параметр. При этом коэффициенты консервативной составляющей внутреннего силового поля содержат параметр b, а неконсервативной составляющей внешнего поля – параметр b_1.

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из уравнения на α', а во второй строке – коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geq 0$, $\mu > 0$) будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1 F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \delta(\alpha) & \overline{f}(\alpha) \\ -\tilde{\delta}(\alpha) & \delta(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U – преобразование с определителем, равным μ, и являющееся унимодулярным преобразованием при $\mu = 1$. В частности, если $\mu = 1$, а $\delta(\alpha) = \cos\alpha$ или $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то данное преобразование задает поворот на угол α. Более того, такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [5–7]).

5. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдем теперь к интегрированию системы пятого порядка (23), (24) при выполнении свойств (19), (20), которые обеспечивают отделение независимой подсистемы третьего порядка.

Как будет показано, для полного интегрирования системы (23), (24) достаточно знать четыре независимых тензорных инварианта: или четыре первых интеграла, или четыре независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством четыре. При этом, конечно, инварианты можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 2 алгебраических и дифференциальных соотношения (19), (20) на 3 функции: на функцию $f(\alpha)$ и на 2, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Тогда система (24) распадется следующим образом:

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\overline{f}(\alpha),$$

$$Z_2' = F(\alpha) + \Gamma_2(\alpha) f^2(\alpha) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (25)$$

$$Z_1' = -\Gamma_2(\alpha) f^2(\alpha) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$

$$\beta' = Z_1 f(\alpha). \quad (26)$$

Внесем некоторые ограничения на силовое поле. Пусть для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\delta}(\alpha)}{\delta(\alpha)}, \quad (27)$$

а для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ – равенство

$$F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2} = \lambda \tilde{\delta}(\alpha)\delta(\alpha). \quad (28)$$

Условие (27) назовем “геометрическим”, а условие – “энергетическим”. Условие (27) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_2(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условие (28) названо энергетическим в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к “силовой” функции $\delta^2(\alpha)/2$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\delta(\alpha)$). При этом сама функция $\delta(\alpha)$, в определенном смысле, и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую *(знако)переменную диссипацию* (см. также [12–14]).

Теорема 3. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ *выполняются условия* (27) *и* (28). *Тогда система* (23), (25), (26) *обладает полным набором – четырьмя* (*одним гладким и тремя*, *вообще говоря*, *имеющими существенно особые точки*) *независимыми первыми интегралами. Кроме того*, *она также обладает четырьмя инвариантными дифференциальными формами*, *между собой независимыми*, *но зависимыми с первыми интегралами.*

Действительно, благодаря однородным переменным u_k, $Z_k = u_k\delta(\alpha)$, $k = 1, 2$ из системы (25) можно получить следующие дифференциальные соотношения:

$$\delta\frac{du_2}{d\delta} = \frac{\lambda + \kappa u_1^2 + u_2^2 - b_1\lambda\mu u_2}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)},$$
$$\delta\frac{du_1}{d\delta} = \frac{(1-\kappa)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}, \quad (29)$$

из которых легко следует уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 + \kappa u_1^2}{(1-\kappa)u_1u_2 - b_1\lambda\mu u_1}. \quad (30)$$

Уравнение (30) имеет вид уравнения Абеля [15–17]. В частности, при $\kappa = -1$ оно имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 - b_1\lambda\mu u_2 + \lambda}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (31)$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) =$$
$$= \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_1\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (32)$$

Используем для подсчета дивергенции векторного поля $w_2(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta)$ системы (23), (25), (26) с диссипацией функцию $\rho_2(v) = v^3$ (полученную для системы (14), (15)). Тогда составная система уравнений характеристик для уравнения

$$\text{div}[\rho(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta) w_2(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta)] = 0 \quad (33)$$

будет состоять из системы (23), (25), (26) (правая часть которой умножена на функцию $\rho_2(v) = v^3$) и следующего добавочного уравнения:

$$\rho' = -v^3 b_1\lambda\mu\tilde{\delta}(\alpha)\rho. \quad (34)$$

Системе (23), (25), (26), (34) уравнений характеристик можно сопоставить три соотношения: два из (29) и

$$\delta\frac{d\rho}{d\delta} = \frac{-\rho[b_1\lambda\mu]}{-u_2 + b(u_1^2 + u_2^2)\delta^2 + b_1\lambda(\mu - \delta^2)}. \quad (35)$$

В общем случае искомые первые интегралы выписываются громоздко (в частности, если $\kappa = -1$, то используется равенство (31)). Из него, при участии уравнений (29), (26) получаются два других первых интеграла, имеющие следующие структурные виды:

$$\Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}, \quad (36)$$

$$\Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\delta(\alpha), \beta, \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = = C_3 = \text{const}. \quad (37)$$

При этом (при $\kappa = -1$) первый интеграл (36) найдется из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_2)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_2) + u_2^2) - b_1\lambda\delta^3}{u(u_2) - U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4u(u_2)}\right\},$$

$$u(u_2) = \lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2.$$

Выражение первых интегралов (36), (37) через конечную комбинацию элементарных функций главным образом зависит от явного вида функции $\delta(\alpha)$.

Кроме того, у системы (23), (25), (26) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (13)), который, например, при $b = b_1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha) + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = C_0 = \text{const}. \quad (38)$$

А уравнение (35), в свою очередь, позволяет получить функцию $\rho(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta)$, которая определяет инвариантную дифференциальную форму объема. Действительно, справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp\left\{b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} = C_\rho = \text{const},$$

$$U_2(C_1, u_2) = 2u(u_2) - C_1U(C_1, u_2).$$

Отсюда, в частности, следует, что одним из возможных вариантов инвариантной дифференциальной формы объема является следующая форма:

$$v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\}dv \wedge d\alpha \wedge dZ_2 \wedge dZ_1 \wedge d\beta,$$

$$u_2 = \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения (33) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3],$$

где $\mathcal{F}[\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]$ – произвольная гладкая функция четырех аргументов, при этом Θ_0, $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ – четыре независимых первых интеграла (38), (32), (36), (37) соответственно.

В частности, за четыре функционально независимых решения линейного уравнения (33) в частных производных можно взять следующие функции ($u_k = Z_k/\delta(\alpha)$, $k = 1, 2$):

$$\rho_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = = v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_0(v; Z_2, Z_1; \alpha),$$

$$\rho_1(v; Z_2, Z_1; \alpha) = = v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha),$$

$$\rho_2(v; Z_2, Z_1; \alpha) = = v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha),$$

$$\rho_3(v; Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = = v^3\exp\left\{-b_1\lambda\mu\int\frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta).$$

6. СТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Система (23), (24) является динамической системой с переменной диссипацией [12–14]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консервативную (14), (15). Последняя, в частности, при некоторых естественных условиях обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (21), (22). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (23), (24) при условии (28) обладает первым интегралом вида

$$\Theta|_{B=0}(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const}, \quad (39)$$

где $\Theta(B; v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - B\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + + \lambda\delta^2(\alpha))$ – семейство функций, зависящих от параметра $B \geq 0$.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (39), (22) также является первым интегралом системы (23), (24) при не равенстве функции

$F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Theta|_{B=b_1}(B;v;Z_2,Z_1;\alpha) = \\ = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const} \tag{40}$$

и (22) по отдельности не является первым интегралом системы (23), (24). Однако отношение функций (40), (22) является первым интегралом (32) системы (23), (24) (для простоты, при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [4, 13].

Выделим теперь существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на двумерной сфере, и функции $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \delta(\alpha) = \sin\alpha. \tag{41}$$

Случай (41) формирует класс систем (23), (24) при $\mu = 1$, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твердого тела на нулевом уровне циклического интеграла в неконсервативном поле сил. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (41), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение твердого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [12]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна пространственному (сферическому) маятнику, помещенный в поток набегающей среды, и обладает полным набором первых интегралов с существенно особыми точками, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

В заключение некоторое замечание об интегрируемости. Как известно, понятие интегрируемости достаточно многообразное. В данной же работе предъявлены полные наборы не только первых интегралов, но и инвариантных дифференциальных форм для однородных систем пятого порядка. Эти наборы содержат в себе почти всюду гладкие функции, имеющие существенно особые точки. Показана связь наличия данных инвариантов и набором первых интегралов. Примеры, перечисленные выше из приложений, также являются новыми нетривиальными случаями интегрируемости систем геодезических и систем с диссипацией в явном виде (см. также [18, 19]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. Gauthier–Villars, Paris. 1912. 40 p.
2. *Колмогоров А.Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Доклады АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. *Козлов В.В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 1(445). С. 117–148.
4. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. № 3. С. 209–210.
5. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 479. № 3. С. 270–276.
6. *Шамолин М.В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 542–545.
7. *Шамолин М.В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 501. № 1. С. 89–94.
8. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. М.: URSS, 2017. 52 с.
10. *Вейль Г.* Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
12. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 4. С. 3–229.
13. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // Доклады РАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
14. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
16. *Polyanin A.D., & Zaitsev V.F. (*2017*).* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9781315117638
17. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
18. *Новиков С.П., Тайманов И.А.* Современные геометрические структуры и поля. М.: МЦНМО, 2005.
19. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.

INVARIANTS OF FIVE-ORDER HOMOGENEOUS DYNAMICAL SYSTEMS WITH DISSIPATION

M. V. Shamolin[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

New cases of integrable dynamical systems of the fifth order homogeneous in terms of variables are obtained, in which a system on a tangent bundle to a two-dimensional manifold can be distinguished. In this case, the force field is divided into an internal (conservative) and an external one, which has a dissipation of a different sign. The external field is introduced using some unimodular transformation and generalizes the previously considered fields. Complete sets of both first integrals and invariant differential forms are given.

Keywords: invariant of dynamical system, essentially singular points of invariant, system with dissipation, integrability