ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2023, том 513, с. 21–26

МАТЕМАТИКА

УДК 517.955

УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА С ПАРАМЕТРОМ

© 2023 г. Член-корреспондент РАН В. И. Богачев[1,2,3,4,*], С. В. Шапошников[1,2,4]

Поступило 22.06.2023 г.
После доработки 24.08.2023 г.
Принято к публикации 20.09.2023 г.

Доказано существование измеримых по параметру решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова с коэффициентами, измеримо зависящими от данного параметра.

Ключевые слова: уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, измеримость по параметру

DOI: 10.31857/S2686954323700273, **EDN:** ZHHFWI

В работе изучаются уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, коэффициенты которых, а в параболическом случае и начальное условие, измеримо зависят от параметра. В предположении наличия решений доказано существование измеримого по параметру решения. Важная особенность и новизна основного результата состоят в том, что единственным требованием является измеримость коэффициентов и начального условия по параметру. Полученные результаты могут быть полезны в теории управляемых диффузионных процессов (см. [1, 2]) и общей теории диффузионных процессов (см. [3]). Комментарии по истории уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова см. в [4], где есть обширная библиография. Здесь отметим лишь, что математическое исследование таких уравнений было начато Колмогоровым, до этого они использовались в физических работах, в том числе Фоккером и Планком, а в специальном случае оператора Лапласа также Эйнштейном, связавшим их с диффузией.

Пусть U – суслинское пространство (например, полное сепарабельное метрическое пространство). Через $\mathcal{S}_U$ обозначим класс всех суслинских множеств в U (см. [5, гл. 6]), а через $\sigma(\mathcal{S}_U)$ порожденную им σ-алгебру. Для наших целей можно считать U подмножеством отрезка, так как имеется борелевский изоморфизм между U и некоторым суслинским подмножеством [0,1] (см. [5, теорема 6.7.4]). Напомним, что множества из $\sigma(\mathcal{S}_U)$ измеримы относительно всех борелевских мер на U (см. [5, теорема 7.4.1]).

Через $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ обозначим пространство всех борелевских вероятностных мер на $\mathbb{R}^d$ со слабой топологией (см. [5] или [6]), которая метризуема метрикой Канторовича–Рубинштейна, порожденной нормой Канторовича–Рубинштейна

$$\|\sigma\|_{KR} = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\sigma,\ f \in \mathrm{Lip}_1, |f| \le 1\right\},$$

заданной на всем пространстве знакопеременных мер, где Lip_1 – множество 1-липшицевых функций. Метрика Канторовича–Рубинштейна превращает $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ в полное сепарабельное метрическое пространство. Через $\mathcal{B}(X)$ борелевскую σ-алгебру метрического пространства X (в основном $\mathbb{R}^d$), а через $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ будем обозначать борелевскую σ-алгебру пространства мер $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $(x,u) \mapsto A_u(x)$ – борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times U$ в пространство неотрицательно определенных симметричных операторов в $\mathbb{R}^d$, $(x,u) \mapsto b_u(x)$ – борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times U$ в $\mathbb{R}^d$, $A_u = (a_u^{ij})$, $b_u = (b_u^i)$. Положим

$$L_u\varphi(x) = \mathrm{trace}(A_u(x)D^2\varphi(x)) + \langle b_u(x), \nabla\varphi(x)\rangle = \\ = \sum_{i,j} a_u^{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi(x) + \sum_i b_u^i(x)\partial_{x_i}\varphi(x).$$

Лемма 1. *Пусть f – борелевская функция на $\mathbb{R}^d \times U$,*

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия*
[3]*Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия*
[4]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: vibogach@mail.ru*

$$F(\mu,u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,u)\mu(dx)$$

на множестве S *тех пар* (μ,u), *для которых интеграл существует. Тогда это множество борелевское и функция* F *измерима по Борелю на нем.*

Доказательство. Для ограниченной функции f это хорошо известно (см. [6, теорема 5.8.4]), а общий случай из этого сразу вытекает, так как S есть множество пар, для которых имеется конечный предел интегралов от $|f_n(x,u)|$ относительно μ, где $f_n = \max(\min(f,n),-n)$, сама же функция $F(\mu,u)$ на S равна пределу интегралов от $f_n(x,u)$ относительно μ. □

Предположим, что для всякого $u \in U$ непусто множество Π_u решений $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ стационарного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$L_u^*\mu = 0,$$

понимаемого в смысле тождества

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_u\varphi d\mu = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ – множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Теорема 1. *Для каждого* $u \in U$ *есть такое решение* $\mu(u) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ *уравнения* $L_u^*\mu = 0$, *что отображение* $u \mapsto \mu(u)$ *будет измеримо относительно* σ-*алгебр* $\sigma(\mathcal{S}_U)$ *и* $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.

Доказательство. В пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\times U$ рассмотрим множество

$$\Pi = \{(\mu,u) : L_u^*\mu = 0\}.$$

Это множество является борелевским. В самом деле, оно задается как пересечение множеств E_j, состоящих из таких пар (μ,u), что

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_u\varphi_j d\mu = 0,$$

где $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ – такой счетный набор функций, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ найдется последовательность функций в этом наборе, имеющих носители в общем шаре и сходящаяся к φ равномерно вместе с первыми и вторыми производными. При этом каждое множество E_j – борелевское в силу леммы. Борелевское множество Π служит графиком многозначного отображения Ψ из U в множество непустых подмножеств $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. По классической теореме об измеримом выборе (см. [5, теорема 6.9.2]) существует отображение $\psi : U \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ с $\psi(u) \in \Psi(u)$, измеримое относительно $\sigma(\mathcal{S}_U)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.

Функция $V \geq 0$ на $\mathbb{R}^d$ называется компактной, если множества $\{V \leq c\}$ компактны; для непрерывной V это равносильно условию $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$.

Для числа $p \geq 1$ символом $L^{p+}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать множество таких функций на $\mathbb{R}^d$, что для всякого шара B найдется такое $r > p$, что f на B входит в $L^r(B)$. Аналогично вводится $L^{p+}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d\times[0,T])$.

Теорема 2. *Пусть* A_u *и* b_u *либо непрерывны по* x, *либо при каждом* $u \in U$ *на каждом шаре отображения* A_u *и* b_u *ограничены, почти всюду* $\det A_u(x) > 0$ *и* $\det A_u^{-1} \in L^{1+}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Предположим также, что для каждого $u \in U$ существуют такие компактная функция $V_u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ и число $C_u > 0$, что

$$L_uV_u \leq C_u - V_u.$$

Тогда для каждого $u \in U$ можно найти такое решение $\mu(u) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ уравнения $L_u^*\mu = 0$, что отображение $u \mapsto \mu(u)$ будет измеримо по Борелю. При этом во втором случае плотность $\varrho(x,u)$ меры $\mu(u)$ можно выбрать борелевской на $\mathbb{R}^d \times U$.

Доказательство. Заметим, что в обоих указанных случаях при каждом фиксированном $u \in U$ сечение

$$\Pi_u = \{\mu : (\mu,u) \in \Pi\}$$

компактно в слабой топологии. В самом деле, пусть дана последовательность $\{\mu_n\} \subset \Pi_u$. Существование функции V_u влечет оценку (см. [4, § 2.3])

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_u\mu_n \leq C_u,$$

дающую равномерную плотность мер μ_n, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ есть такой компакт K, что $\mu_n(\mathbb{R}^d\backslash K) \leq \varepsilon$ для всех n. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что меры μ_n слабо сходятся к некоторой вероятностной мере μ. В случае непрерывных коэффициентов сразу получаем $L_u^*\mu = 0$. Во втором из двух случаев из формулировки существуют плотности ϱ_n мер μ_n, причем на каждом шаре B_R радиуса R с центром в нуле функции $(\det A_u)^{1/d}\varrho_n$ равномерно ограничены в $L^{d/(d-1)}(B)$. Как отмечено в [4, замечание 1.5.5], это следует из доказательства в [4, теорема 1.5.2], где показано, что найдется постоянная C, зависящая от R и от $\sup_{x\in B_R}|b(x)|$, для которой

$$\int_{B_R} (\det A_u)^{1/d} f\, d\mu \le C\|f\|_{L^d(B_R)}$$

для всякого решения $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ уравнения $L_u^*\mu = 0$ и всех непрерывных функций f с носителем в B_R. Из этой оценки получаем

$$\|(\det A_u)^{1/d} \varrho_n\|_{L^{d'}(B_R)} \le C, \quad d' = \frac{d}{d-1}$$

для всех n. По условию имеется $p = p(B) > 1$, для которого $(\det A_u)^{-1} \in L^p(B_R)$. Поэтому найдется $q \in (1, d')$, для которого $p = qd'd^{-1}(d'-q)^{-1}$, а именно $q = pdd'(d' + pd)^{-1}$. В самом деле, $pdd' > d' + pd$, так как $dd' = d + d'$, а также $q < d'$, так как $pd < d' + pd$. По неравенству Гёльдера со степенями $d'/(d'-q)$ и d'/q имеем

$$\int_{B_R} \varrho_n^q dx = \int_{B_R} (\det A_u)^{-q/d} (\det A_u)^{q/d} \varrho_n^q dx \le$$
$$\le \left(\int_{B_R} (\det A_u)^{-p} dx\right)^{(d'-q)/d'} \left(\int_{B_R} (\det A_u)^{d'/d} \varrho_n^{d'} dx\right)^{q/d'},$$

т.е. есть ограниченность в $L^q(B_R)$, позволяющая выделять подпоследовательности, слабо сходящиеся в $L^q(B_R)$. Еще раз переходя к подпоследовательности с помощью диагонального метода, можно считать, что ограничения плотностей ϱ_n на каждый шар B_R слабо сходятся в $L^1(B_R)$. Из этого следует, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ интегралы от функций $L_u\varphi\varrho_n$ сходятся к интегралу от функции $L_u\varphi\varrho$, значит, $L_u^*\mu = 0$.

Теорема об измеримом выборе (см. [5, теорема 6.9.7]) в обоих случаях дает решение $\mu(u)$, борелевски зависящее от u. Во втором случае получаем плотности $\varrho(x,u)$, которые обладают тем свойством, что борелевскими по u оказываются интегралы от ограниченных непрерывных функций по мерам μ_u. Из этого следует борелевость по u интегралов функций $\varrho(x,u)$ по шарам. Тогда борелевскую версию самой плотности $\varrho(x,u)$ можно получить как $\lim_{n\to\infty} \mu_u(B_{1/n} + x)/|B_{1/n}|$, где $|B_{1/n}|$ — объем шара $B_{1/n}$, в тех точках x, где предел есть (он есть почти всюду), а в остальных точках версию можно доопределить нулем. Полученная функция является борелевской по совокупности переменных, поскольку таковы функции $(x,u) \mapsto \mu_u(B_{1/n} + x)$, борелевские по u и непрерывные по x. □

Замечание 1. (i) Из доказательства видно, что во втором случае из предыдущей теоремы условие локальной ограниченности коэффициентов A_u и b_u можно ослабить до принадлежности к $L^{dp'}(B)$ на каждом шаре B, где $p = p(B) > 1$ таково, что сужение $(\det A_u)^{-1}$ на B входит в $L^p(B)$. В самом деле, $q = pdd'(d' + pd)^{-1}$ и $q' = dp'$.

(ii) Если во втором случае усилить условие на матрицы A_u, потребовав принадлежность матричных элементов к классу Соболева $W^{p,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ с $p > d$, то вероятностные решения рассматриваемых уравнений будут единственными (см. [4, теорема 4.1.6(iii)]), поэтому заключение теоремы будет состоять в том, что эти единственные решения зависят от параметра u борелевски. Конечно, если просто предположить единственность вероятностного решения при каждом u, то без всяких дополнительных условий оно будет борелевски зависеть от u, причем для этого не нужны теоремы об измеримом выборе, а достаточно сослаться на тот факт, что отображение суслинских пространств с борелевским графиком является борелевским (см. [5, лемма 6.7.1]).

Перейдем к параболическому уравнению. Пусть $(x,t) \mapsto A(x,t) = (a^{ij}(x,t))_{i,j\le d}$ — борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times [0,T]$, где $T > 0$, в пространство неотрицательно определенных симметричных операторов в $\mathbb{R}^d$, $(x,t) \mapsto b(x,t) = (b^i(x,t))_{i\le d}$ — борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ в $\mathbb{R}^d$. Кроме того, пусть задана мера $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Для функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ положим

$$L\varphi(x,t) = \mathrm{trace}(A(x,t)D^2\varphi(x)) + \langle b(x,t), \nabla\varphi(x)\rangle =$$
$$= \sum_{i,j} a^{ij}(x,t)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\varphi(x) + \sum_i b^i(x,t)\partial_{x_i}\varphi(x).$$

Задача Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t\mu_t = L^*\mu, \quad \mu_0 = \nu, \tag{1}$$

имеет вероятностное решение $\mu = (\mu_t)_{t\in[0,T]}$, если отображение $t \mapsto \mu_t$ из $[0,T]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ непрерывно, коэффициенты a^{ij} и b^i интегрируемы относительно меры $\mu = \mu_t(dx)dt$ на компактах в $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_0 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L\varphi d\mu_s ds, \quad \mu_0 = \nu. \tag{2}$$

Перейдем к задаче с параметром. Пусть $(x,t,u) \mapsto A_u(x,t) = (a_u^{ij}(x,t))_{i,j\le d}$ — борелевское отображение из $\mathbb{R}^d \times [0,T] \times U$ в пространство неотрицательно определенных симметричных операторов в $\mathbb{R}^d$, $(x,t,u) \mapsto b_u(x,t) = (b_u^i(x,t))_{i\le d}$ — борелевское отображение из $\mathbb{R}^d\times[0,T]\times U$ в $\mathbb{R}^d$. Кроме того, пусть задано борелевское отображение $u\mapsto\nu(u)$ из U в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Предположим, что для всякого $u\in U$ непусто множество Π_u вероятностных решений уравнения (1) с $L=L_u$ и $\nu=\nu(u)$.

Через $C_{T,\mathcal{P}}$ обозначим пространство непрерывных отображений $t\mapsto\xi_t$ из $[0,1]$ в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, наделенное метрикой

$$d_{T,\mathcal{P}}(\xi,\eta)=\sup_{t\in[0,T]}\|\xi_t-\eta_t\|_{KR}.$$

Это пространство полно и сепарабельно.

Теорема 3. *Для каждого $u\in U$ найдется такое решение $\mu(u)=(\mu(u)_t)_{t\in[0,T]}$, $\mu(u)_t\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ уравнения* (1), *что отображение $u\mapsto\mu(u)$ измеримо относительно σ-алгебр $\sigma(\mathcal{S}_U)$ и $\mathcal{B}(C_{T,\mathcal{P}})$.*

Доказательство. Введем множество

$$\Pi=\{(\mu,u)\in C_{T,\mathcal{P}}\times U:\partial_t\mu_t=L_u^*\mu_t,\ \mu_0=\nu(u)\}.$$

Как и выше, это множество задается счетным числом равенств

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_j\,d\mu_{t_k}-\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_j\,d\nu(u)=\int_0^{t_k}\int_{\mathbb{R}^d}L_u\varphi_j\,d\mu_s\,ds,$$

где $\{t_k\}=[0,T]\cap\mathbb{Q}$. Задающие эти равенства функции являются борелевскими на $C_{T,\mathcal{P}}\times U$, поэтому множество Π борелевское. Остается применить теорему об измеримом выборе. □

Замечание 2. Даже при отсутствии явного параметра можно считать параметрами коэффициенты уравнения, а в параболическом случае и начальное условие, если множество M рассматриваемых параметров наделено подходящей суслинской топологией, для которой функции $a^{ij}(x,t)$, $b^i(x,t)$ будут борелевскими на $M\times\mathbb{R}^d\times[0,T]$. Доказанные результаты означают возможность выбора решения, измеримо зависящего от коэффициентов (и от начального условия) в предположении существования решений.

Следствие 1. *Предположим, что коэффициенты уравнения* (1) *локально ограничены на компактах в $\mathbb{R}^d\times[0,T]$ и решение $\mu(y)$ существует для каждой начальной меры Дирака δ_y в точке y. Тогда решение существует для всякой начальной меры $\nu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. По доказанной теореме можно выбрать решения $\mu(y)=(\mu(y)_t)_{t\in[0,T]}$ посредством отображения, измеримого относительно $\sigma(\mathcal{S}_{\mathbb{R}^d})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P})$, а потому измеримого относительно меры ν. Положим

$$\mu_t=\int_{\mathbb{R}^d}\mu(y)_t\,\nu(dy),$$

где интеграл понимается в смысле равенства

$$\mu_t(B)=\int_{\mathbb{R}^d}\mu(y)_t(B)\,\nu(dy)$$

на борелевских множествах B. Тогда $\mu_0=\nu$. Для всякой ограниченной непрерывной функции f на $\mathbb{R}^d$ функция

$$t\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mu_t(dx)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\mu(y)_t(dx)\nu(dy)$$

непрерывна в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости и непрерывности отображений $t\mapsto\mu(y)_t$. Следовательно, непрерывно отображение $t\mapsto\mu_t$ со значениями в $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ при всех y выполнено равенство (2) с $\nu(y)=\delta_y$. Интегрируя по мере ν, получаем это равенство для (μ_t).

Как и в эллиптическом случае, приведем достаточное условие существования борелевской выборки.

Теорема 4. *Пусть A_u и b_u либо непрерывны по (x,t), либо при каждом $u\in U$ отображения A_u и b_u ограничены на компактах в $\mathbb{R}^d\times[0,T]$, $\det A_u>0$ почти всюду и $(\det A_u)^{-1}\in L^{1+}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d\times[0,T])$.*

Предположим также, что для каждого $u\in U$ существуют такие компактная функция $V_u\in C^2(\mathbb{R}^d)\cap\cap L^1(\nu(u))$ и число $C_u>0$, что

$$L_uV_u\le C_u+C_uV_u.$$

Тогда для каждого $u\in U$ можно найти такое вероятностное решение $\mu(u)$ уравнения (1), что отображение $u\mapsto\mu(u)$ будет измеримо по Борелю. При этом во втором случае плотность $\varrho(x,t,u)$ меры $\mu(u)$ можно выбрать борелевской на $\mathbb{R}^d\times[0,T]\times U$.

Доказательство. Опять надо проверить компактность сечений Π_u множества Π из предыдущей теоремы. Неясно, верно ли это для указанной топологии, порожденной нормой, но для применения теоремы об измеримом выборе достаточно установить компактность Π_u в более слабой топологии на Π, для которой Π остается борелевским (тогда Π будет лузинским пространством), см. [5, теорема 6.9.7] или [7, с. 224, 225]). В качестве такой топологии мы возьмем топологию, порожденную счетным набором полуметрик

$$d_j(\xi,\eta)=\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_j\,d(\xi_t-\eta_t)\right|,$$

где $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ – счетное семейство функций из доказательства теоремы 1.

Пусть u фиксировано и дана последовательность решений $\mu_n = (\mu_{n,t})$ уравнения (1) с коэффициентами A_u и b_u и начальным условием $\nu(u)$. Из существования функции V_u с указанными свойствами следует оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} V_u d\mu_{n,t} \le C + C\int_{\mathbb{R}^d} V_u d\nu(u)$$

с некоторым $C > 0$, см. [4, следствие 7.1.2], где оценка гарантируется при почти всех t, но в нашем случае в силу непрерывности $\mu_{n,t}$ по t и непрерывности V_u она верна для всех $t \in [0,T]$. Из этой оценки вытекает, что для каждого t последовательность мер $\mu_{n,t}$ равномерно плотна. В силу ограниченности A_u и b_u на компактах и равенства

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_{n,t_2} - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_{n,t_1} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d} L_u\varphi_j d\mu_{n,t} dt$$

при фиксированном j функции

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_{n,t}$$

равномерно липшицевы. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\{\mu_n\}$ сходится по каждой из полуметрик d_j. Так как при фиксированном t меры $\mu_{n,t}$ равномерно плотны, то в силу выбора набора $\{\varphi_j\}$ имеет место слабая сходимость мер $\mu_{n,t}$ к некоторой мере μ_t. Тогда решения μ_n сходятся по полуметрикам d_j к отображению $t \mapsto \mu_t$. Кроме того, меры $\mu_{n,t}(dx)dt$ слабо сходятся к мере $\mu_t(dx)dt$. Проверим, что полученное отображение входит в Π_u, т.е. непрерывно и удовлетворяет уравнению.

Для проверки непрерывности надо показать непрерывность по t интегралов

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t$$

для каждой ограниченной непрерывной функции φ. Равномерная плотность мер $\mu_{n,t}$ сводит это к случаю функции с компактным носителем. Такие функции равномерно приближаются функциями из $\{\varphi_j\}$ с общим носителем, а для них непрерывность есть ввиду сходимости по полуметрикам d_j.

Остается проверить выполнение уравнения. Ясно, что $\mu_0 = \mu_{n,0} = \nu(u)$. Как и выше, теперь достаточно установить равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j d\nu(u) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} L_u\varphi_j d\mu_s ds$$

для всех j. Это равенство верно для мер μ_n, причем левые части сходятся к левой части нужного равенства. Докажем сходимость правых частей. В случае непрерывных коэффициентов это просто. Рассмотрим второй случай. В этом случае меры μ_n имеют плотности ϱ_n (см. [4, теорема 6.3.1]), причем из доказательства цитированной теоремы следует, что для каждого компакта D в $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ ограничения функций $(\det A_u)^{1/(d+1)}\varrho_n$ на D равномерно ограничены в $L^{(d+1)'}(D)$. Как и выше, с помощью неравенства Гёльдера проверяется, что при некотором $q \in (1,(d+1)')$ сами плотности ϱ_n равномерно ограничены в $L^q(D)$. Опять можно перейти к подпоследовательности и считать, что для всякого шара B_k в $\mathbb{R}^d$ и всякого отрезка $[1/k,T]$ функции ϱ_n сходятся слабо в $L^1(B_k \times [1/k,T])$. Ввиду слабой сходимости мер $\mu_{n,t}(dx)dt$ к мере $\mu_t(dx)dt$ полученный предел $\varrho(x,t)$ есть плотность меры $\mu_t(dx)dt$. Пусть $\varepsilon > 0$. Функция $|L_u\varphi_j|$ ограничена некоторым числом C и обращается в нуль при $|x| \ge R$ для некоторого $R > 0$. Увеличив R, можно считать, что $\mu_t(x : |x| \ge R) \le \varepsilon$ при всех n и $t \in [0,T]$. Пусть $\tau = \varepsilon(C+1)^{-1}$. Тогда интегралы от $|L_u\varphi_j|$ по $\mathbb{R}^d \times [0,\tau]$ по всем мерам $\mu_{n,t}(dx)dt$ и $\mu_t(dx)dt$ не больше ε. Интегралы по $\mathbb{R}^d \times [\tau,T]$ есть интегралы по $B_R \times [\tau,T]$. На этом множестве плотности ϱ_n слабо сходятся в L^1, поэтому есть сходимость и интегралов с ограниченной функцией $L_u\varphi$. Борелевская версия плотности во втором случае строится так же, как для эллиптического уравнения.

Замечание 3. Из доказательства видно, что во втором случае из предыдущей теоремы условие локальной ограниченности коэффициентов A_u и b_u можно ослабить до принадлежности к $L^{(d+1)p'}(K)$ на каждом компакте K в $\mathbb{R}^d \times [0,T]$, где $p = p(K) > 1$ таково, что сужение $(\det A_u)^{-1}$ на K входит в $L^p(K)$.

Селекция решений стохастических уравнений с неединственными решениями изучается в [2, 3, 8]. О дифференцируемости решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова по параметру см. [9–13]. Отдельно будет рассмотрен вопрос о зависящих от параметра представлениях решений в принципе суперпозиции (см. [14]).

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284. С.В. Шапошников является победителем конкурса “Молодая математика России” и благодарит его жюри и спонсоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., Наука, 1977.
2. *Arapostathis A., Borkar V.S., Ghosh M.K.* Ergodic control of diffusion processes. Cambridge, Cambridge University Press, 2012.
3. *Stroock D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. Berlin—New York, Springer-Verlag, 1979.
4. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker—Planck—Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
5. *Bogachev V.I.* Measure theory. V. 1, 2. Berlin, Springer-Verlag, 2007.
6. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., Rhode Island, Providence, 2018.
7. *Dellacherie C.* Un cours sur les ensembles analytiques. In: Analytic sets, New York, Academic Press, 1980. P. 184—316.
8. *Крылов Н.В.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 3. С. 691—708.
9. *Pardoux E., Veretennikov A.Yu.* // Ann. Probab. 2001. V. 29. № 3. P. 1061—1085.
10. *Pardoux E., Veretennikov A.Yu.* // Ann. Probab. 2003. V. 31. № 3. P. 1166—1192.
11. *Pardoux E., Veretennikov A.Yu.* // Ann. Probab. 2005. V. 33. № 3. P. 1111—1133.
12. *Veretennikov A.Yu.* // J. Math. Sci. (New York). 2011. V. 179. № 1. P. 48—79.
13. *Bogachev V.I., Shaposhnikov S.V., Veretennikov A.Yu.* // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2016. V. 36. № 7. P. 3519—3543.
14. *Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В.* // Докл. АН. 2019. Т. 487. № 5. С. 483—486.

FOKKER—PLANCK—KOLMOGOROV EQUATIONS WITH A PARAMETER

Corresponding Member of the RAS V. I. Bogachev[a,b,c,d] and S. V. Shaposhnikov[a,b,d]

[a] *Moscow State Lomonosov University, Moscow, Russia*
[b] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*
[c] *Saint-Tikhon's Orthodox University, Moscow, Russia*
[d] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

For Fokker—Planck—Kolmogorov equations with coefficients depending measurably on a parameter we prove the existence of solutions that are measurable with respect to this parameter.

Keywords: Fokker—Planck—Kolmogorov equation, measurability with respect to a parameter